Liouvilledynamik bei gemischtem Phasenraum

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
vorgelegt am Fachbereich Physik der
Universität – Gesamthochschule – Essen

von

Joachim Weber
aus Essen

Essen, April 2000

Referent: Prof. Dr. rer. nat. Fritz Haake
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. Robert Graham

Disputation: Essen, am 20. Juni 2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Übersicht 5

Kapitel 1. Klassische dynamische Systeme 11
1. Klassische dynamische Systeme 11
2. Verschiedene Typen klassischer Dynamik 11
3. Hamiltonsche Abbildungen mit gemischtem Phasenraum 13

Kapitel 2. Die probabilistische Beschreibung klassischer Systeme 17
1. Die probabilistische Beschreibung von deterministischem Chaos 17
2. Der Frobenius-Perron-Operator 18
3. Der Liouville-Operator 20
4. Spektraltheorie im Hilbertraum 20
5. Resonanzen 22
6. Generalisierte Eigenfunktionen 26

Kapitel 3. Liouvilledynamik auf der Einheitskugel 29
1. Der periodisch gestoßene Kreisel 29
2. Der Frobenius-Perron-Operator auf der Energieschale 31
3. Der Hilbertraum auf der Kugeloberfläche 33
4. Drehungen auf der Kugeloberfläche 34
5. Torsion auf der Kugeloberfläche 35
6. Eine Rekursionsformel für die Torsionsmatrixelemente 35
7. Eine reelle Basis 37
8. Die Frobenius-Perron-Matrix des periodisch gestoßenen Kreisels 37
9. Die Zeitentwicklung einer charakteristischen Phasenraumdichte 38

Kapitel 4. Asymptotik der Liouvilledynamik 41
1. Die Sattelpunktnäherung der Torsionsmatrixelemente 41
2. Die Torsionsmatrix in Van-Vleck-Näherung 48
3. Toeplitzstruktur der Frobenius-Perron-Matrix im integrablen Fall 50
4. Das Spektrum und die Eigenfunktionen der Toeplitzmatrix 54
5. Die uniforme Asymptotik der Torsionsmatrixelemente 56

Kapitel 5. Liouvilledynamik bei endlicher Phasenraumauflösung 59
1. Die Konsequenzen endlicher Phasenraumauflösung 59
2. Die Torsion im Unterraum großer Skalen 61
3. Der Übergang von regulärer zu von Chaos dominierter Dynamik 63
4. Die Stabilisierung der Eigenwerte mit wachsender Auflösung 64

5. Fast unimodulare Eigenwerte und elliptische Inselketten 67
6. Nicht unimodulare Eigenwerte und Chaos-dominierter Phasenraum 74
7. Endliche versus unendliche Phasenraumauflösung 81
8. Der Informationsgehalt des Spektrums von $\mathcal{P}_Q$ 84
9. Die Interpretation nicht unimodularer Eigenwerte als Resonanzen 85
10. Der inverse Propagator 88

Kapitel 6. Resonanzen aus periodischen Bahnen 93
1. Spurformel und Spektraldeterminante 93
2. Die Spektraldeterminante bei gemischtem Phasenraum 95
3. Resonanzen aus periodischen Bahnen 96

Kapitel 7. Resonanzen als Zerfallsraten von Observablen 105
1. Die Relaxation von Observablen 105
2. Resonanzen als Zerfallsraten von Observablen 106

Zusammenfassung und Ausblick 111

Literaturverzeichnis 113

Danksagungen 117

Einleitung und Übersicht

Das Liouvillebild der klassischen Mechanik ist von probabilistischer Natur. Es beschreibt die Zeitentwicklung eines Ensembles von Replika eines klassischen Systems in verschiedenen Anfangszuständen. Dieses Ensemble wird durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte im Phasenraum repräsentiert.

Die probabilistische Beschreibung findet ihre Anwendung bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden [**1**] und inzwischen auch bei chaotischen Systemen mit wenigen Freiheitsgraden. In beiden Fällen ist die Zeitentwicklung einer Phasenraumtrajektorie weniger von Interesse als die Zeitentwicklung einer Schar von Trajektorien, da eine individuelle Trajektorie für das System nicht repräsentativ ist. Bei chaotischen Dynamiken mit wenigen Freiheitsgraden liegt der Grund hierfür in der unendlichen Hierarchie von Strukturen im Phasenraum. Kann ein Systemzustand nur mit endlicher Genauigkeit festgelegt werden, so entspricht ihm in natürlicher Weise ein ganzes Ensemble von Trajektorien, dessen Zeitentwicklung lediglich probabilisitisch Rechnung getragen werden kann.

Sowohl methodisch als auch formal besteht eine enge Verwandschaft zwischen dem Liouvillebild der klassischen Mechanik und dem Schrödingerbild der Quantenmechanik. Dem Hilbertraum der quantenmechanischen Wellenfunktionen entspricht der Hilbertraum der klassischen Phasenraumfunktionen. Die Zeitentwicklung in dem jeweiligen Hilbertraum ist unitär. Im Fall der Liouvilledynamik wird sie durch den Liouville- beziehungsweise Frobenius-Perron-Operator beschrieben.

In einem scheinbaren Widerspruch zur Unitarität der Liouvilledynamik steht die chaotischen Dynamiken eigene Irreversibilität, die einen Zerfall von Korrelationen unter der Zeitentwicklung zur Folge hat. Dieser Zerfall kann nicht anhand von unimodularen Eigenwerten des Zeitentwicklungsoperators beschrieben werden. Die in diesem Zusammenhang auftretenden Zerfallsraten sind, wieder in Analogie zur Quantenmechanik, durch Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators bestimmt.

An sogenannten Axiom-A-Systemen, klassischen chaotischen Dynamiken, deren Phasenraum vollständig hyperbolisch ist, wurden Resonanzen zuerst von Ruelle und Pollicott untersucht. Die Resonanzen werden deshalb auch als Ruelle-Pollicott-Resonanzen bezeichnet [**2, 3, 4, 5, 6**]. Mathematisch gefaßt handelt es sich bei den Resonanzen um Pole der Resolvente des Operators in einem höheren Riemannschen Blatt. Sie geben im Kontrast zu den lediglich über eine kurze Zeitspanne deterministisch verfolgbaren Trajektorien Auskunft über das Langzeitverhalten einer chaotischen Dynamik.

Im Kontext chaotischer Quantendynamiken sind Frobenius-Perron-Resonanzen als die Größen ins Blickfeld gerückt, die systemspezifische Abweichungen vom universellen Verhalten spektraler Fluktuationen erklären sollen [**8, 9, 10, 11, 12**].

Häufig sind die spektralen Fluktuationen einer chaotischen Quantendynamik allein durch deren unitäre und antiunitäre Symmetrien bestimmt. Sie entsprechen den Vorhersagen für Ensembles von Zufallsmatrizen mit den jeweiligen Symmetrieeigenschaften und sind somit universell.

Sind die Spektren darüber hinaus semiklassisch, so lassen sie sich mittels der Gutzwillerschen Spurformel aus periodischen Trajektorien im Phasenraum der entsprechenden klassischen Dynamiken berechnen [**13, 14**]. Die Universalität der spektralen Fluktuationen ist folglich in der Natur der klassischen periodischen Bahnen verankert [**18**].

Die Universalität manifestiert sich in vielfältiger Weise in spektralen Korrelationsfunktionen wie der Abstandsverteilung benachbarter Eigenwerte oder der Zweipunktfunktion. Eine besondere Bedeutung kommt der Fouriertransformierten der Zweipunktfunktion zu, dem sogenannten Formfaktor [**21**].

Der Formfaktor als Funktion der Zeit offenbart den Einfluß, den Trajektorien der entsprechenden Periodenlänge auf die Fluktuationen semiklassischer Spektren nehmen [**22, 23**]. Der Formfaktor eines individuellen Spektrums fluktuiert stark. Jedoch ist der Formfaktor im Pandeyschen Sinne ergodisch. Durch eine lokale Zeitmittelung lassen sich die universellen Fluktuationen des Formfaktors eliminieren, und systemspezifische Eigenschaften können manifest werden [**26**].

Eine für den Formfaktor charakteristische Zeitskala ist die Heisenbergzeit τ_H, die über die Unschärferelation mit dem mittleren Abstand benachbarter Energieniveaus verknüpft ist. Nichtuniverselle spektrale Fluktuationen auf der Skala des mittleren Niveauabstandes manifestieren sich im Formfaktor in der Nähe der Heisenbergzeit. Bedingt durch die Unitarität der Quantendynamik werden darüber hinaus nicht universelle Korrekturen bei kleinen Zeiten $\tau \ll \tau_H$ erwartet.

Ein von der Supersymmetrie kommender Erklärungsversuch der Universalität des Formfaktors und der systemspezifischen Korrekturen zur Universalität drückt die systemspezifischen Korrekturen durch Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators aus[**8, 9, 10, 11**]. Die so vorhergesagten Korrekturen liegen den Erwartungen entsprechend bei kleinen Zeiten und in der Nähe der Heisenbergzeit. Zur Überprüfung dieser Vorhersage ist die Bestimmung der Frobenius-Perron-Resonanzen für das klassische Gegenstück einer chaotischen Quantendynamik von großer Bedeutung.

Existieren im Phasenraum eines dynamischen Systems reguläre und chaotische Dynamik nebeneinander, so wird der Phasenraum auch als gemischter Phasenraum bezeichnet. Der gemischte Phasenraum ist nicht hyperbolisch und daher auch nicht vom Axiom-A-Typ. Ohne diese Einschränkung entspricht der gemischte Phasenraum einer weitaus größeren Klasse von Systemen.

Auch bei Systemen mit gemischtem Phasenraum charakterisieren Resonanzen das Verhalten für lange Zeiten [**30, 31**]. Ihre Bestimmung gestaltet sich jedoch umso schwieriger, je weniger ein System den einfachen Modellcharakter der hyperbolischen Systeme aufweist, für die sich Resonanzen exakt bestimmen lassen [**55, 54**]. Dabei ist anzunehmen, daß sich viele Aspekte von Resonanzen in hyperbolischen Systemen auch bei einem gemischtem Phasenraum wiederfinden.

In dieser Arbeit wird ein Approximationsschema vorgestellt, anhand dessen Frobenius-Perron-Resonanzen bei einem gemischten Phasenraum bestimmt werden können. Als prototypisches System dient eine Drehimpulsdynamik, die auch als periodisch gestoßener Kreisel bekannt ist. Diese Dynamik hat sich bereits in vielerlei Hinsicht als generisch erwiesen [**16, 17, 26, 24**]. Deshalb kann davon ausgegangen werden, daß sich die Resultate dieser Arbeit auch auf andere Dynamiken übertragen lassen.

Über diskrete Zeitschritte wird die Dynamik des Kreisels durch eine Abbildung auf der Einheitskugel repäsentiert, die sich aus Drehungen um verschiedene Achsen und einer nichtlinearen Drehung, einer sogenannten Torsion, zusammensetzt. Die Einheitskugel bildet den kompakten Phasenraum, und die Kugelkoordinaten φ und $\cos\theta$ entsprechen der Ortskoordinate und dem Impuls dieses Hamiltonschen Systems.

Für den periodisch gestoßenen Kreisel wird zunächst die Liouvilledynamik im Hilbertraum der Phasenraumdichten auf der Einheitskugel formuliert. Dieser Hilbertraum wird von den Kugelflächenfunktionen aufgespannt. Die Matrixelemente des Frobenius-Perron-Operators lassen sich exakt berechnen, sind jedoch von komplizierter Form. Zum Verständnis der wesentlichen Eigenschaften der Torsionsmatrix schließt sich an ihre Berechnung eine asymptotische Behandlung an, bei der den Indizes der Matrixelemente die Rolle der großen Parameter zukommt. Über eine Sattelpunktnäherung läßt sich eine einfache asymptotische Form für die meisten Matrixelemente finden. Darüber hinaus werden die Grenzwerte bestimmt, gegen welche die Torsionsmatrixelemente asymptotisch konvergieren und aus denen allein sich das Frobenius-Perron-Spektrum und die Eigenfunktionen der für sich integrablen Torsion ableiten lassen. Die Asymptotik der Drehmatrix ist bereits gut bekannt [**29**], so daß auf sie zurückgegriffen werden kann.

Die zur Bestimmung von Resonanzen verfolgte Strategie besteht darin, den im Hilbertraum der Phasenraumfunktionen unitären Frobenius-Perron-Operator durch einen nicht unitären Operator zu approximieren, der auf großen Phasenraumskalen zum Frobenius-Perron-Operator äquivalent ist, aber die Dynamik auf kleinen Skalen unberücksichtigt läßt. Diese Vorgehensweise ist dadurch gerechtfertigt, daß auch Observablen unter der Dynamik in der Regel nur mit einer endlichen Genauigkeit beobachtet werden können. Variationen einer regulären Phasenraumdichte auf kleinen Phasenraumskalen haben deshalb auf die Observablen keinen Einfluß.

Die Begrenzung der Phasenraumauflösung entspricht einer Projektion der Liouvilledynamik auf einen Unterraum des Hilbertraumes. Die Kugelflächenfunktionen bilden eine Basis dieses Hilbertraumes und sind bereits nach ihrem Auflösungsvermögen angeordnet. Wird der Frobenius-Perron-Operator im Hilbertraum als unendliche Matrix bezüglich dieser Basis dargestellt, so läßt sich die Projektion durch das Abschneiden der Matrix nach endlich vielen Zeilen und Spalten bewerkstelligen.

Die Nichtunitarität der so erhaltenen Dynamik folgt aus der Kopplung zwischen aufgelösten und nichtaufgelösten Phasenraumskalen. Aufgrund dieser Kopplung wird Wahrscheinlichkeit zu nichtaufgelösten Skalen dissipiert, und die Dynamik wird irreversibel. Gerade für eine chaotische Dynamik ist die Kopplung großer Skalen an beliebig kleine Skalen im Phasenraum charakteristisch. Sie ist auch für die scheinbare Irreversibilität der unitären Liouvilledynamik verantwortlich, bei der die Wahrscheinlichkeit zwar erhalten ist, sich jedoch auf unendlich kleinen Phasenraumskalen verliert und nicht in den Ausgangszustand zurückfindet.

Bei endlicher Phasenraumauflösung treten neben unimodularen Eigenwerten des Frobenius-Perron-Operators, die reversiblen Bestandteilen der Dynamik Rechnung tragen, auch nicht unimodulare Eigenwerte auf. Diese entsprechen den irreversiblen Bestandteilen der Dynamik. Einige der nicht unimodularen Eigenwerte erweisen sich als stabil gegenüber einer Vergrößerung der Phasenraumauflösung. Argumente sprechen dafür, daß diese ausgezeichneten Eigenwerte Resonanzen des unitären Frobenius-Perron-Operators reflektieren.

Sowohl für die unimodularen als auch für die auflösungsunabhängigen, nicht unimodularen Eigenwerte wird eine Beziehung zu invarianten Strukturen im Phasenraum hergestellt. Diese Strukturen sind auch im Grenzfall unendlicher Phasenraumauflösung Träger der entsprechenden Eigenfunktionen im Hilbertraum beziehungsweise Resonanzeigenfunktionen außerhalb des Hilbertraumes. In beiden Fällen zeigen die Eigenfunktionen auf diesen Strukturen eine starke Lokalisierung. Während die Eigenfunktionen zu den unimodularen Eigenwerten auf Inselketten in der Umgebung elliptischer periodischer Bahnen liegen, folgen die Resonanzeigenfunktionen instabilen Mannigfaltigkeiten in der Nähe der entsprechenden hyperbolischen periodischen Bahnen und zeichnen Phasenraumgebiete einheitlicher Instabilität aus. Die Instabilität ist umso schwächer, je größer der Betrag der zugehörigen Resonanz ist.

Die Betrachtung der Resonanzeigenfunktionen mit wachsender Phasenraumauflösung macht plausibel, weshalb diese Funktionen im Grenzfall unendlicher Auflösung nicht gegen Eigenfunktionen im Hilbertraum konvergieren. Der Vergleich von Eigenfunktionen der in der Zeit vorwärts laufenden Dynamik mit den entsprechenden Eigenfunktionen der in der Zeit rückwärts laufenden Dynamik bei endlicher Phasenraumauflösung illustriert, daß im Grenzfall unendlicher Auflösung Eigenfunktionen im Hilbertraum der Vorwärts- und Rückwärtszeitentwicklung übereinstimmen, während die in diesem Grenzfall außerhalb des Hilbertraumes liegenden Resonanzeigenzustände disjunkte Träger im Phasenraum besitzen [**6, 62**].

Die hergestellte Korrespondenz von Resonanzen mit hyperbolischen periodischen Bahnen kann nun als Ausgangspunkt für die direkte Ableitung der Resonanzen aus periodischen Bahnen dienen. Eine Entwicklung der Spektraldeterminante des Frobenius-Perron-Operators nach periodischen Bahnen in endlicher Ordnung, die sich für hyperbolische Dynamiken durchführen läßt und aus der die Resonanzen als inverse Nullstellen bestimmt werden können [**83, 86**], versagt im Fall eines gemischten Phasenraumes. Die Entwicklungskoeffizienten der Spektraldeterminante divergieren aufgrund der Beiträge von schwach instabilen periodischen Bahnen, die im gemischten Phasenraum im Zuge von Bifurkationen auftreten. Diese Bahnen sind für die Liouvilledynamik bei endlicher Auflösung jedoch häufig bedeutungslos.

Es gelingt, unter Ausschluß dieser Bahnen und nur mit den wenigen über die Resonanzeigenfunktionen ausgezeichneten Bahnen bis hin zu einer größten Periodenlänge, die entsprechenden Resonanzen mit erstaunlicher Genauigkeit zu reproduzieren. Gleichzeitig werden die Grenzen aufgezeigt, die der gemischte Phasenraum dieser Vorgehensweise setzt.

Abschließend wird der Zerfall einer Dichte-Korrelationsfunktion $\langle\rho(0)\rho(n)\rangle$ untersucht, um auf diese Weise die für den Frobenius-Perron-Operator des periodisch gestoßenen Kreisels bestimmten Resonanzen als Zerfallsraten wiederzufinden. Phasenraumdichten werden hierbei durch charakteristische Funktionen auf einem diskretisierten Phasenraum repräsentiert. Ihre Zeitentwicklung definiert sich über die Zeitentwicklung des zentralen Phasenraumpunktes der jeweiligen Phasenraumzelle. In der Regel kann aus dem Zeitverhalten einer Observablen nur eine Resonanz bestimmt werden, die für den langsamsten Zerfall verantwortlich ist. Aufgrund der starken Lokalisierung der Resonanzeigenfunktionen ist es jedoch naheliegend, die anfänglichen Phasenraumdichten $\rho(0)$ nur in den Phasenraumbereichen von Null verschieden zu wählen, in denen eine Resonanzeigenfunktion lokalisiert ist. Tatsächlich treten auf diese Weise die verschiedenen Resonanzen als Zerfallsraten auf.

Damit besteht eine gute quantitative Übereinstimmung zwischen den Resonanzeigenwerten des Frobenius-Perron-Operators bei endlicher Phasenraumauflösung, den aus der Entwicklung der Spektraldeterminante gewonnenen Werten für die Resonanzen und den Raten, mit denen Korrelationen unter der Dynamik zerfallen.

KAPITEL 1

Klassische dynamische Systeme

1. Klassische dynamische Systeme

Ein klassisches dynamisches System $\{\mathbf{M}^t, \Omega, \mu\}$ ist durch eine einparametrige Gruppe von Abbildungen $\mathbf{M}^t : \Omega \to \Omega$ auf einem Phasenraum Ω gegeben [**34**]. In der Regel hat der Parameter t die Bedeutung einer Zeit. Bei einer kontinuierlichen Dynamik variiert er innerhalb der reellen Zahlen, bei einer diskreten Dynamik innerhalb der ganzen Zahlen. Vervollständigt wird die Definition eines dynamischen Systems durch ein unter der Gruppe $\mathbf{M}^t$ invariantes Maß μ auf Ω. Diese Invarianz verlangt

$$\mu(\mathbf{M}^t(A)) = \mu(A) \quad \text{für alle } A \in \Omega\,. \tag{1}$$

Ist Ω eine Untermenge des $\mathbf{R^n}$, so ist das invariante Maß durch das Phasenraumvolumen, das sogenannte Borel-Maß, gegeben. Dieses invariante Maß resultiert aus der unter der Dynamik erhaltenen Anzahl der Phasenraumtrajektorien.

Handelt es sich bei $\mathbf{M}^t$ mit $t \geq 0$ nicht um eine Gruppe, sondern lediglich um eine Halbgruppe, so wird das System als semidynamisch bezeichnet. In diesem Fall ist $\mathbf{M}^t$ nicht invertierbar. Viele Dynamiken mit chaotischem Verhalten werden durch nicht invertierbare Abbildungen beschrieben und gehören dieser Kategorie an.

2. Verschiedene Typen klassischer Dynamik

Je nach Art der Abbildung $\mathbf{M}$ kann eine Dynamik $\{\mathbf{M}^t, \Omega, \mu\}$ viele verschiedene Charaktere besitzen. Dynamiken, an denen sich klassisches Chaos studieren läßt, sind häufig unter dem Gesichtspunkt der Handhabbarkeit konstruiert und besitzen einen niedrigdimensionalen Phasenraum. Im Idealfall von nur einem Freiheitsgrad bekommt eine Dynamik durch Unstetigkeiten oder durch periodisches Treiben ihren chaotischen Charakter. Für derartige Systeme bietet sich die Beschreibung durch eine zeitdiskrete Abbildung an. Autonome Dynamiken lassen sich mittels eines Poincaréschnittes auf diskrete Dynamiken abbilden. Bei periodisch getriebenen Systemen erfolgt die Diskretisierung durch eine stroboskopische Betrachtungsweise mit dem Zeitabstand einer Periode. In beiden Fällen nimmt der Zeitparameter diskrete Werte an und zählt die Durchstoßpunkte einer Trajektorie auf der Poincaréfläche beziehungsweise die Perioden Δt des Treibens, $n = t/\Delta t$. Alle Ausführungen beziehen sich im folgenden auf solche diskreten Abbildungen.

Bei einem wie in Abschnitt 1 definierten dynamischen System ist das Phasenraumvolumen unter der Abbildung $\mathbf{M}$ erhalten. Läßt sich die Abbildung darüber hinaus aus einer Hamiltonfunktion über die Hamiltonschen Gleichungen ableiten, so wird die Dynamik als Hamiltonsche Dynamik bezeichnet. Bewirkt dagegen eine

Abbildung eine Kontraktion oder eine Expansion des Phasenraumvolumens, so kann sie lediglich zusammen mit einem singulären invarianten Maß als dynamisches System verstanden werden. Ein solches singuläres Maß weist auch Mengen $A \in \Omega$ mit dem Borel-Maß Null ein endliches Gewicht zu.

Viele der häufig untersuchten, volumenerhaltenden Abbildungen besitzen einen zweidimensionalen Phasenraum. Zu diesen Abbildungen gehören die Bäckerabbildung, die Katzenabbildung, der periodisch getriebene Rotator [**34, 36**] und auch der in dieser Arbeit untersuchte periodisch gestoßene Kreisel [**16, 17, 28, 29**] .

Genauer charakterisieren läßt sich eine Dynamik anhand ihrer Trajektorien, insbesondere anhand geschlossener Trajektorien, sogenannter periodischer Bahnen. Im zweidimensionalen Phasenraum gibt es drei Typen von periodischen Bahnen mit verschiedenen Stabilitätseigenschaften. Die Stabilität einer periodischen Bahn $\mathbf{x}(n), n = 1, \ldots, p$ mit der primitiven Periode p läßt sich aus der $p-$fach iterierten, auf den Bahnpunkten linearisierten Abbildung

$$\Xi_{ik}(\mathbf{x}(n)) = \left.\frac{\partial M_i^p(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(n)}, \tag{2}$$

der sogenannten Monodromiematrix, ableiten. Genau wie die Jacobideterminante hat auch die Determinante der Monodromiematrix bei einer volumenerhaltenden Abbildung den Betrag Eins. Daher sind die Eigenwerte ξ_1, ξ_2 dieser $2 \times 2-$Matrix reziprok zueinander, $\xi_1 \xi_2 = 1$. Sind die Eigenwerte reell, so bilden die zugehörigen Eigenvektoren in der Nähe der Bahn eine stabile ($|\xi^{\text{stab}}| < 1$) und eine instabile ($|\xi^{\text{inst}}| > 1$) Mannigfaltigkeit. Trajektorien auf der stabilen Mannigfaltigkeit laufen unter der Abbildung auf die Bahn zu, während sich Trajektorien auf der instabilen Mannigfaltigkeit von der Bahn entfernen. Alle Trajektorien abseits dieser Mannigfaltigkeiten entfernen sich hyperbelartig entlang der instabilen Mannigfaltigkeit von der periodischen Bahn. Die periodische Bahn ist instabil, sie wird als hyperbolisch bezeichnet. Überspringen Punkte auf der stabilen und auf der instabilen Mannigfaltigkeit bei jeder Iteration der Abbildung die Bahn, so heißt die Bahn invers-hyperbolisch.

Sind die Eigenwerte der Monodromiematrix komplex und somit unimodular, so umlaufen Trajektorien in der Nachbarschaft der periodischen Bahn diese auf Ellipsen. Sie bleiben in der Nähe der periodischen Bahn. Elliptische periodische Bahnen sind daher stabil. Das System zeigt in ihrer Nachbarschaft reguläres Verhalten.

Abbildungen, die ausschließlich hyperbolische periodische Bahnen aufweisen, heißen hyperbolisch. Aufgrund des instabilen Charakters dieser Bahnen sind hyperbolische Systeme meist stark chaotisch. Treten dagegen auch elliptische Bahnen auf, so besteht der Phasenraum sowohl aus chaotischen als auch aus regulären Bereichen. Ein solcher Phasenraum heißt gemischt.

Eine Dynamik heißt ergodisch, wenn für jede unter der Abbildung $\mathbf{M}$ invariante Menge $A \in \Omega$ entweder $\mu(A) = 0$ oder $\mu(\Omega \setminus A) = 0$ ist [**37**]. Eine Trajektorie hat also in ergodischen Systemen entweder das Maß Null oder das Maß Eins. Folglich läßt sich Ergodizität auch als Äquivalenz von Phasenraummittel und asymptotischem Zeitmittel für eine integrable Funktion f und fast jeden Anfangspunkt $\mathbf{x}_0$

formulieren,

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mu(\mathbf{x}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\mathbf{M}^n \mathbf{x}_0) \,. \tag{3}$$

Häufig setzt sich ein nichtergodisches System aus ergodischen Untersystemen zusammen.

Eine Dynamik hat mischenden Charakter, wenn die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\mathbf{M}^n(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B) \quad \text{für alle } A, B \in \Omega \tag{4}$$

erfüllt ist. Sie besagt, daß der asymptotische Anteil der Menge A an der Menge B dem Verhältnis von $\mu(A)$ zu $\mu(\Omega) = 1$ entspricht, und zwar für jede beliebige Menge B [**34**]. Eine mischende Dynamik ist zwangsläufig ergodisch. Das folgt unmittelbar aus (4) für eine unter $\mathbf{M}$ invariante Menge A und $B = \Omega \setminus A$. Viele hyperbolische Systeme sind mischend, da aufgrund der Instabilität ihrer Trajektorien eine Schar anfangs eng benachbarter Trajektorien zu asymptotischen Zeiten über den ganzen Phasenraum verstreut ist.

3. Hamiltonsche Abbildungen mit gemischtem Phasenraum

Eine Dynamik mit gemischtem Phasenraum zeichnet sich durch die Koexistenz von regulärem und chaotischem Zeitverhalten aus. Häufig entstehen Hamiltonsche Systeme mit gemischtem Phasenraum, wenn in integrable Systeme Chaos durch eine Störung induziert wird.

Trajektorien integrabler Dynamiken verlaufen im Phasenraum auf Tori, die in Winkel- und Wirkungsvariablen durch einen Satz von Frequenzen festgelegt sind. Mit dem Einsetzen der nichtintegrablen Störung wird, wie von Kolmogorov, Arnold und Moser beschrieben, nur ein Teil dieser Tori zerstört. Die übrigen Tori werden lediglich deformiert. Dem Poincaré-Birkhoff-Theorem zufolge tritt an die Stelle der zerstörten Tori eine alternierende Abfolge von Punkten elliptischer und hyperbolischer periodischer Bahnen. Während die Dynamik nahe hyperbolischer Bahnen instabilen und somit chaotischen Charakter aufweist, nimmt sie in unmittelbarer Nähe elliptischer Bahnen erneut die Form einer integrablen Dynamik unter dem Einfluß einer kleinen Störung an, so daß die elliptischen Bahnen ihrerseits von Tori regulärer Bewegung umgeben sind. Dieses Szenario wiederholt sich auf immer kleineren Skalen im Phasenraum ad infinitum [**39, 36**].

Neben dem Aufbrechen von Tori regulärer Bewegung verursacht eine anwachsende, nichtintegrable Störung Bifurkationen, in denen neue hyperbolische und elliptische periodische Bahnen entstehen [**14**]. Mit anwachsender Störung treten Bifurkationen kaskadenartig auf, da jede in einer Bifurkation entstandene periodische Bahn an weiteren Bifurkationen beteiligt sein kann.

Tori regulärer Bewegung stellen, weil jeder Punkt auf einem Torus unter der Dynamik wieder auf den Torus abgebildet wird, invariante Phasenraumstrukturen und damit für Phasenraumtrajektorien undurchdringbare Barrieren dar. Die invarianten Tori unterteilen den Phasenraum auf die oben geschilderte Weise in voneinander unabhängige Bereiche, die auch als Inseln im Phasenraum bezeichnet werden. Inseln,

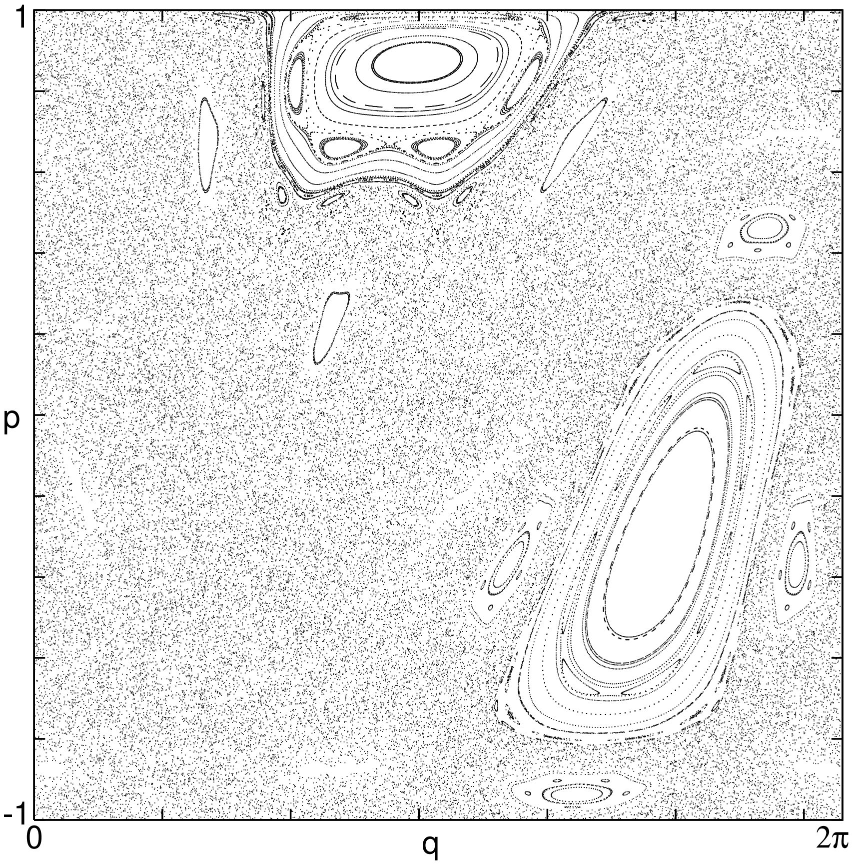


Abbildung 1. Der gemischte Phasenraum eines periodisch gestoßenen Kreisels mit der Torsionskonstanten $\tau = 2.1$ und den Drehwinkeln $\beta_z = \beta_y = 1$. Invariante Tori grenzen Inselketten regulärer Bewegung gegen den chaotischen Phasenraum ab. Große Inseln sind von kleineren Inselketten höherer Periode umgeben.

die unter der Dynamik periodisch aufeinander abgebildet werden, heißen auch Inselketten. Jede Inselkette stellt eine vom restlichen Phasenraum unabhängige Subdynamik dar. Insbesondere ist bei Hamiltonschen Systemen das Phasenraumvolumen einer jeden Inselkette unter der Dynamik invariant.

Es ist klar, daß eine Dynamik mit gemischtem Phasenraum nicht ergodisch und damit auch nicht mischend sein kann. Bezeichnet A das Phasenraumvolumen einer Inselkette, so ist A unter der Dynamik invariant. Für diese Menge A ist sowohl $\mu(A) \neq 0$ als auch $\mu(\Omega \setminus A) \neq 0$, und das Kriterium für Ergodizität ist nicht erfüllt. Jedoch läßt sich der gemischte Phasenraum als aus unendlich vielen unabhängigen, hyperbolischen Subdynamiken zusammengesetzt verstehen. Die den Subdynamiken zugehörigen Phasenraumbereiche sind von endlichem Maß und werden von invarianten Tori gegeneinander abgegrenzt. Invariante Tori dagegen haben im Phasenraum das Maß Null.

Die Koexistenz von Bereichen chaotischer und regulärer Dynamik sowie die hierarchische Anordnung invarianter Tori im gemischten Phasenraum ist in Abbildung 1 am Beispiel eines periodisch gestoßenen Kreisels mit den Parametern $\tau = 2.1, \beta_z = \beta_y = 1$ (vgl. Kapitel 3) illustriert. Hyperbolische periodische Bahnen sind aufgrund ihrer Instabilität im Phasenraumportrait nicht zu erkennen.

KAPITEL 2

Die probabilistische Beschreibung klassischer Systeme

1. Die probabilistische Beschreibung von deterministischem Chaos

Deterministische Systeme werden in der klassischen Physik meist dann probabilistisch beschrieben, wenn sie viele Freiheitsgrade besitzen. In diesem Fall ist die Zeitentwicklung aus einem einzelnen Anfangszustand in Form einer Phasenraumtrajektorie nicht repräsentativ. Systeme mit wenigen Freiheitsgraden werden dagegen üblicherweise anhand ihrer Trajektorien charakterisiert. Für integrable Systeme lassen sich diese in geschlossener Form angeben. Sie verlaufen auf Tori im Phasenraum, die durch die Erhaltungsgrößen der Dynamik festgelegt sind. Stehen die Umlauffrequenzen der Trajektorien auf dem Torus in einem rationalen Verhältnis zueinander, so sind die Trajektorien periodisch. Anderenfalls überdecken sie den Torus ergodisch.

Für chaotische Dynamiken ist die Instabilität ihrer Trajektorien charakteristisch. Zunächst eng benachbarte Trajektorien laufen mit der Zeit exponentiell auseinander. Diese exponentielle Divergenz wird quantitativ durch einen von Null verschiedenen Lyapunovexponenten erfaßt. Entsprechend zerfallen Korrelationen zwischen ursprünglich stark korrelierten Trajektorien in der Regel ebenfalls exponentiell schnell. Auch wenn das System nur wenige Freiheitsgrade besitzt, kommt es zu keinem Wiederaufleben von Korrelationen nach langen Zeiten, da sich Trajektorien nun nicht mehr wie bei integrablen Systemen durch wenige Frequenzen charakterisieren lassen. Vielmehr zeigt jede Trajektorie ein individuelles Langzeitverhalten.

Aufgrund der empfindlichen Abhängigkeit vom Anfangszustand, dem nur mit endlicher Genauigkeit Rechnung getragen werden kann, können chaotische Trajektorien lediglich über einen endlichen Zeitraum approximativ verfolgt werden, und Schlüsse auf ihr asymptotisches Verhalten sind in der Regel nicht möglich. Auf der anderen Seite ist wegen der Komplexität einer chaotischen Dynamik gerade dieses asymptotische Verhalten, insbesondere der asymptotische Zerfall von Korrelationen, von Interesse.

Die Beschreibung chaotischer Dynamiken erfordert daher gegenüber der Beschreibung integrabler Dynamiken neue Konzepte. Soll an der Charakterisierung anhand von Trajektorien festgehalten werden, so sind nun periodische Trajektorien, sogenannte periodische Bahnen, von besonderem Interesse. Sie gestatten in ihrer Nähe eine lokale Approximation der Dynamik durch eine lineare Abbildung, die Monodromiematrix. Da der Phasenraum in der Regel dicht mit periodischen Bahnen ausgefüllt ist, wird eine Dynamik durch sie so gut beschrieben, daß sich aus ihnen sowohl semiklassische Quantenspektren [**14, 15**] als auch klassische Resonanzspektren [**40**] berechnen lassen. Allerdings zeigt auch jede periodische instabile Bahn ein individuelles Verhalten, so daß in der Regel die Gesamtheit aller periodischen Bahnen zur Charakterisierung eines Systems erforderlich ist. Die Zahl der periodischen Bahnen wächst jedoch im allgemeinen exponentiell mit der Periodenlänge, und die Periodenlänge ist nicht beschränkt. Daher ist die Beschreibung mittels periodischer Bahnen meist nur unvollständig und mit großen Mühen verbunden.

Unter diesen Gesichtspunkten findet die probabilistische Beschreibung chaotischer, deterministischer Systeme mit wenigen Freiheitsgraden ihre Berechtigung. Bei der wiederholten Präparation eines Systems mit endlicher Genauigkeit entsteht in natürlicher Weise ein Ensemble, das sich, wenn die Zahl der Replika nur groß genug ist, durch eine glatte Dichtefunktion beschreiben läßt. An die Stelle einer Schar von möglicherweise gar ungenerischen Trajektorien tritt nun die zeitliche Propagation einer Phasenraumdichte. Diese wird durch einen Propagator, den Frobenius-Perron-Operator, vermittelt.

Die Dichtefunktion dient zur Berechnung von Erwartungswerten. Auf diese Weise lassen sich nicht nur über das Kurz-, sondern auch über das Langzeitverhalten der Dynamik Aussagen gewinnen, insbesondere über den Zerfall von Korrelationen und die Relaxation einer Dichte zu einer unter der Zeitentwicklung invarianten Verteilung.

Der Dichteformalismus für klassische Systeme ist eng verwandt mit dem Formalismus der Quantenmechanik. In einem Hilbertraum der Phasenraumfunktionen ist der Frobenius-Perron-Operator unitär. Genau wie ein Quantensystem läßt sich eine klassische Dynamik durch die spektralen Eigenschaften dieses Operators charakterisieren. Des weiteren treten bei chaotischen Dynamiken mit einem kontinuierlichen Spektrum Resonanzen auf, Pole seiner Resolventen in einem höheren Riemannschen Blatt, die den Zerfall von Korrelationen unter der Zeitentwicklung und somit auch das Langzeitverhalten beschreiben.

Aufgrund dieser Aspekte erscheint der Dichteformalismus eher der Natur chaotischer deterministischer Dynamiken zu entsprechen als die Beschreibung durch Trajektorien. Er trägt ihrem probabilistischen Charakter Rechnung, der seinen Ursprung in der Instabilität der Trajektorien im chaotischen Phasenraum hat.

2. Der Frobenius-Perron-Operator

Ein dynamisches System mit f Freiheitsgraden wird in seinem $2f$-dimensionalen Phasenraum durch einen Punkt $\mathbf{x}_0$ repräsentiert. Unter der Zeitentwicklung, beschrieben durch die Abbildung $\mathbf{M}$, entwickelt sich aus dem Anfangszustand eine Trajektorie,

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{M}^n \, \mathbf{x}(0) \,. \tag{5}$$

Ein Ensemble von N Systemen ist in seinem Anfangszustand durch eine Phasenraumdichte gegeben, die sich mit der Diracschen $\delta-$Funktion als

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(0)) \tag{6}$$

schreibt. Ist die Zahl N der Systeme im Ensemble hinreichend groß, so läßt sich $\rho(\mathbf{x}, 0)$ als glatte Funktion auffassen, und nur solche Dichten sollen entsprechend der dargelegten Motivation für eine probabilistische Beschreibung physikalische Relevanz besitzen.

Per definitionem ist eine Dichte positiv, $\rho(\mathbf{x}, n) \geq 0$, L^1-integrabel und normiert. Daher bilden die Dichtefunktionen einen Unterraum im Raum L^1 der Lebesgue-integrablen Funktionen. Die Dichtefunktionen lassen sich als Linearkombinationen der den Raum L^1 aufspannenden Basisfunktionen schreiben.

Die Zeitentwicklung einer Phasenraumdichte ist durch die Zeitentwicklung der Konstituenden des Ensembles gegeben, und so ist der Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P} : L^1 \to L^1$ als der Propagator für Phasenraumdichten definiert [**41**],

$$\rho(\mathbf{x}, 1) = \mathcal{P}\rho(\mathbf{x}, 0) = \int_\Omega \mathrm{d}\mu(\mathbf{y})\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{M}(\mathbf{y}))\rho(\mathbf{y}, 0)\,. \tag{7}$$

Die Beitäge zu $\rho(\mathbf{x}, 1)$ im Integral über den Phasenraum Ω stammen von den Urbildpunkten von $\mathbf{x}$ bezüglich $\mathbf{M}$. Der Frobenius-Perron-Operator ist linear. Er bewahrt die Positivität der Dichtefunktion, mit $\rho(\mathbf{x}, 0) \geq 0$ ist also auch $\mathcal{P}^n\rho(\mathbf{x}, 0) \geq 0$, und nach dem Theorem von Radon-Nikodyn ihre L^1-Integrabilität. Bezüglich der Zeit n bildet $\mathcal{P}^n$ mit $\mathcal{P}^0 = \mathbf{1}$ und $\mathcal{P}^{n_2+n_1} = \mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}^{n_1}$ genau wie die Abbildung $\mathbf{M}$ eine Gruppe beziehungsweise eine Halbgruppe.

Eine explizite Darstellung von $\mathcal{P}^n\rho(\mathbf{x}, 0)$ läßt sich angeben, wenn die Abbildung $\mathbf{M}$ invertierbar und differenzierbar ist. Nach der Transformation $\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{x}'$ ist das Integral (7) über die δ-Funktion ausführbar und es resultiert

$$\mathcal{P}\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}), 0)\ J(\mathbf{x})^{-1} \tag{8}$$

mit der Jacobideterminante der Abbildung $\mathbf{M}$,

$$J = \left|\det \frac{\partial M_i}{\partial x_j}\right|. \tag{9}$$

Im Fall einer volumenerhaltenden Abbildung ist $J = 1$.

Observablen der Dynamik sind Funktionen aus dem zum Raum L^1 der Phasenraumdichten dualen Raum L^∞ der beschränkten Funktionen. Der Erwartungswert $\langle A\rangle$ einer Observablen A unter der Dynamik zur Zeit n ist durch das Skalarprodukt

$$\langle A\rangle_n = \langle A|\mathcal{P}^n\rho_0\rangle \tag{10}$$

gegeben.

Analog zu Schrödingerbild und Heisenbergbild in der Quantenmechanik läßt sich die klassische Dynamik als Zeitentwicklung der Dichtefunktion oder der Observablen formulieren. Während der Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}$ eine Dichtefunktion in der Zeit propagiert, induziert der zu $\mathcal{P}$ adjungierte Operator $\mathcal{K}$, der sogenannte Koopman-Operator, die Zeitabhängigkeit in die Observable,

$$\langle A|\mathcal{P}\rho\rangle = \langle \mathcal{K}A|\rho\rangle\,. \tag{11}$$

Der Koopman-Operator wirkt auf Funktionen aus L^∞ gemäß

$$\mathcal{K}f(\mathbf{x}) = f(M(\mathbf{x}))\,. \tag{12}$$

Wird der Definitionsbereich von $\mathcal{P}$ auf einen Unterraum $L^p, p \geq 2$ des L^1 eingeschränkt, so vergrößert sich in gleichem Maße der Definitionsbereich von $\mathcal{K}$ auf den Raum $L^{p'}$, der durch $1/p + 1/p' = 1$ charakterisiert ist. Insbesondere haben für

$p = 2$ beide Operatoren den selben Definitionsbereich, und falls $\mathcal{P}$ unitär ist, gilt $\mathcal{K} = \mathcal{P}^{+} = \mathcal{P}^{-1}$.

3. Der Liouville-Operator

Bei einer Hamiltonschen Dynamik ist das Phasenraumvolumen erhalten. Daher ist die Zeitentwicklung einer Dichtefunktion wesentlich durch die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit bestimmt. Diese wird durch eine Kontinuitätsgleichung, die Liouville-Gleichung

$$\partial_t \rho(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}\rho(\mathbf{x}, t), \quad \mathcal{L}(\cdot) = \{H, \cdot\} \tag{13}$$

postuliert. In dieser partiellen Differentialgleichung tritt der antihermitesche Liouville-Operator $\mathcal{L}$, der durch die Poissonklammer mit der Hamiltonfunktion H gegeben ist, als Generator der Zeitentwicklung auf.

Ist H nicht explizit zeitabhängig, so läßt sich eine formale Lösung von (13) als

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}\rho(\mathbf{x}, 0) \tag{14}$$

schreiben. Ist die Hamiltonfunktion zeitabhängig, so muß eine Zeitordnung in der Exponentialfunktion eingehalten werden. Eine explizite Lösung $\rho(\mathbf{x}, t)$ der Differentialgleichung (13) läßt sich durch die Lösung ihres charakteristischen Systems finden [**42**].

Der Frobenius-Perron-Operator (7) eines Hamiltonschen Flusses $\mathbf{M}$ ist aufgrund von Gleichung (14) offenbar äquivalent zu dessen Liouville-Operator $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{P}^t = \mathrm{e}^{\mathcal{L}t}\,. \tag{15}$$

4. Spektraltheorie im Hilbertraum

Üblicherweise werden Dichtefunktionen ρ dem Banachraum der L^1-integrablen Funktionen zugerechnet. Wird der Raum, der die Dichtefunktionen enthält, auf den Raum der quadratintegrablen Funktionen L^2 eingeschränkt, so gestattet die Hilbertraumstruktur des L^2 eine spektraltheoretische Analyse der Dynamik.

Die Betrachtung der Liouvilledynamik in L^2 anstelle von L^1 ist nur dann sinnvoll, wenn alle relevanten Dichtefunktionen der Dynamik auch in L^2 enthalten sind. Das ist sichergestellt, wenn der Raum L^2 dicht in L^1 liegt, wie es bei einem kompakten Phasenraum der Fall ist.

Liegt L^2 dicht in L^1, so gibt es zu jeder Funktion $f \in L^1$ eine Funktionenfolge $\{g_n\} \in L^2$, die unter der L^1-Norm die Funktion f approximiert,

$$||f - g_n||_{L^1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{16}$$

In diesem Fall konvergieren die Erwartungswerte einer Observablen $A \in L^\infty$ bezüglich $\{g_n\}$ gegen den Erwartungswert von A bezüglich f,

$$\langle A|g_n\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle A|f\rangle\,, \tag{17}$$

und die beiden Räume L^1 und L^2 sind für die Liouvilledynamik äquivalent.

In einem Hilbertraum ist der durch eine invertierbare Phasenraumabbildung $\mathbf{M}$ induzierte Frobenius-Perron-Operator (7) unitär, $\mathcal{P}^{+}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{P}^{+} = 1$. Das Spektrum von $\mathcal{P}$ liegt auf dem Einheitskreis. Die Charakterisierung des Spektrums erfolgt über die Resolvente [**43**]

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{z - \mathcal{P}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\, \mathcal{P}^n\,, \quad z \in \mathbf{C}\,. \tag{18}$$

Existiert die Resolvente für $z \in \mathbf{C}$ auf dem ganzen Definitionsbereich $D(\mathcal{P})$ von $\mathcal{P}$, so liegt z in der Resolventenmenge von $\mathcal{P}$. Ist dagegen $\mathcal{R}(z)$ nicht auf ganz $D(\mathcal{P})$ existent, so gehört z zum Spektrum σ von $\mathcal{P}$.

Ist der Grund für die Nichtinvertierbarkeit von $(\mathcal{P} - z)$ die Existenz einer oder mehrerer Funktionen $f_z \neq 0$ in $D(\mathcal{P})$, die $(\mathcal{P} - z)f_z = 0$ erfüllen, so ist z ein Eigenwert von $\mathcal{P}$ und f_z eine zugehörige Eigenfunktion. Ist z darüber hinaus ein isolierter Punkt endlicher Multiplizität in σ, so gehört z dem diskreten Spektrum σ_d von $\mathcal{P}$ an.

Das Komplement von σ_d in σ ist das kontinuierliche Spektrum σ_c. Für das kontinuierliche Spektrum σ_c, existiert die Resolvente auf ganz $D(\mathcal{P})$, sie ist jedoch nicht beschränkt. Ist das Spektrum σ_c absolut kontinuierlich bezüglich des Borel-Maßes, so trägt es den Namen Lebesguespektrum.

Die Spektraldarstellung des Frobenius-Perron-Operators schreibt sich

$$\mathcal{P}^n = \sum_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_m n}\, |m\rangle\langle m| + \int_{\sigma_c} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega n}\, |\omega\rangle\langle\omega|\,, \tag{19}$$

worin die unimodularen Eigenwerte durch die reellen Frequenzen ω_m ausgedrückt sind und $|m\rangle\langle m|$ beziehungsweise $|\omega\rangle\langle\omega|$ die selbstadjungierten Projektoren auf die dem Spektrum zugehörigen Eigenräume darstellen [**50**]. Das kontinuierliche Spektrum σ_c ist bei zeitkontinuierlichen Systemen im Intervall $]-\infty, \infty[$ und bei zeitdiskreten Systemen im Intervall $]-\pi, \pi]$ enthalten.

Das Spektrums von $\mathcal{P}$ gestattet Rückschlüsse auf die Natur der zugrundeliegenden Dynamik. Integrable Hamiltonsche Systeme haben, nachdem alle Erhaltungsgrößen der Dynamik festgelegt sind, ein rein diskretes Spektrum $\sigma = \sigma_d$ [**34**]. Beim Übergang von Orts- und Impulsvariablen $(q_k, p_k)_{k=1,\ldots,N}$ zu Winkel- und Wirkungsvariablen $(\varphi_k, J_k)_{k=1,\ldots,N}$,

$$J_k = \oint p_k \mathrm{d}q_k = \text{konst.}\,, \tag{20}$$

$$\omega_k = \frac{\partial H(\{J_k\})}{\partial J_k}\,, \tag{21}$$

$$\varphi_k = \omega_k t + \varphi_k(0) \tag{22}$$

nimmt der dem System zugängliche Phasenraum die Topologie eines $N-$Torus an. Alle neuen Koordinaten φ_k sind nun zyklisch. Daher ist eine Hilbertraumbasis auf dem Torus durch die Fourierbasis

$$f_{\{m_k\}}(\{\varphi_k\}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, m_k \varphi_k}\,, \qquad |m_k| = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

gegeben. Sie ist gleichzeitig die Eigenbasis des Frobenius-Perron-Operators,

$$\mathcal{P}^n f_{\{m_k\}}(\{\varphi_k\}) = \lambda^n_{\{m_k\}}\, f_{\{m_k\}}(\{\varphi_k\}). \tag{24}$$

zu den diskreten Eigenwerten

$$\lambda_{\{m_k\}} = \exp\left(-\mathrm{i}\sum_k m_k\omega_k\right) . \tag{25}$$

Die Phasen $\zeta_{\{m_k\}} = -\sum_k m_k\omega_k$ sind die entsprechenden Eigenwerte des Liouville-Operators.

Eine Dynamik ist genau dann ergodisch, wenn der Eigenwert $\lambda = 1$ von $\mathcal{P}$ in σ_d nicht entartet ist. Auch die übrigen Eigenwerte sind dann nicht entartet und durch Einheitswurzeln gegeben. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind betraglich konstant [**37**]. Der Eigenwert Eins resultiert aus dem unter der Dynamik invarianten Maß μ, das die Eigenwertgleichung erfüllt,

$$\mathcal{P}\mu(A) = \mu(\mathbf{M}^{-1}(A)) = \mu(A) . \tag{26}$$

Ist der Eigenwert Eins nicht entartet, so gibt es kein weiteres invariantes Maß μ', das bei $\mu(A) = 0$ immer auch $\mu'(A) = 0$ erfüllt, also regulär ist.

Integrable Hamiltonsche Dynamiken können erst nach der Festlegung aller Erhaltungsgrößen ergodisch sein. Ergodizität besteht dann, wenn die zu den Winkelvariablen φ_i auftretenden Frequenzen ω_i nicht kommensurabel sind und eine einzige Trajektorie den Phasenraum dicht überdeckt.

Ein gemischter Phasenraum ist nicht ergodisch, weil er eine Vielzahl regulärer invarianter Maße aufweist. Zu jeder Inselkette auf dem Phasenraumbereich Ω_i ist ein solches Maß durch

$$\mu^{\Omega_i}(A) = \begin{cases} \mu(A) & A \in \Omega_i \\ 0 & A \notin \Omega_i \end{cases} \tag{27}$$

gegeben. Weitere invariante Maße lassen sich aus Vereinigungsmengen mehrerer Inselketten Ω_i sowie deren Komplementen in Ω bilden.

Ein System ist genau dann mischend, wenn der nichtentartete Eigenwert $\lambda = 1$ der einzige Eigenwert in σ ist. Demnach ist das Frobenius-Perron-Spektrum eines mischenden Systems rein kontinuierlich, $\sigma_c = \sigma \setminus \{1\}$ [**34**]. Mischende Dynamiken sind also immer ergodisch und nicht integrabel. Sie haben in der Regel einen ausgeprägten chaotischen Charakter.

Offenbar sind für integrable Systeme diskrete Spektren und für chaotische Dynamiken kontinuierliche Spektren charakteristisch. Kontinuierliche Spektren geben jedoch wenig Aufschluß über Phasenraumstrukturen der Dynamik. Der Grund hierfür liegt wiederum in dem instabilen Charakter chaotischer Systeme. Die Zeitentwicklung mit (7) erfolgt punktweise, weshalb invariante Mengen im Phasenraum von komplexer Struktur sind. Die Funktionen, denen sie als Träger dienen, liegen außerhalb des Hilbertraumes. Ein substantieller Teil einer chaotischen Dynamik läßt sich nicht durch Hilbertraumfunktionen beschreiben.

5. Resonanzen

Charakteristisch für chaotische, hyperbolische Systeme ist die Relaxation von Phasenraumdichten unter der Zeitentwicklung zu einer invarianten Verteilung und ein damit verbundener Zerfall von Korrelationen.

Im Hilbertraum wird die Liouvilledynamik durch den unitären Frobenius-Perron-Operator beschrieben. Die Relaxation einer Observablen A, deren Zeitentwicklung mit der Spektraldarstellung von $\mathcal{P}$ (19) durch

$$\langle A|\mathcal{P}^t\rho\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}\,\langle A|n\rangle\langle n|\rho\rangle + \int_{\sigma_c} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{i\omega t}\,\langle A|\omega\rangle\langle\omega|\rho\rangle \tag{28}$$

gegeben ist, findet im Komplement des durch die Eigenfunktionen $|n\rangle$ aufgespannten Unterraumes statt, denn die Unimodularität der Eigenwerte läßt kein Abklingen von Eigenfunktionen oder deren Linearkombinationen unter der Zeitentwicklung zu. Dieses Komplement gehört zum kontinuierlichen Spektrum von $\mathcal{P}$, und gerade ein rein kontinuierliches Spektrum ist charakteristisch für hyperbolische, mischende Systeme.

Folglich treten Resonanzen bei Dynamiken mit kontinuierlichen Frobenius-Perron-Spektren auf. Bei einer Auswertung des Integrals (28) durch Residuen erscheinen sie als die Polstellen des Integranden. Während die Residuen selbst von der Observablen A abhängen, ist die Lage der Pole durch die Dynamik bestimmt und daher dem Frobenius-Perron-Operator immanent (vgl. Kapitel 7, Abschnitt 1) [**62, 55**].

In der Quantenmechanik beschreiben Resonanzen eine Vielzahl von Relaxationsphänomenen [**44, 45, 46, 47**]. Im Zusammenhang mit klassischen, deterministischen Systemen sind sie insbesondere von Ruelle und Pollicott untersucht worden [**2, 3, 4, 5, 6**], weshalb solche Resonanzen auch als Ruelle-Pollicott-Resonanzen bezeichnet werden.

Da sie den Charakter einer Abklingrate besitzen, sind die Resonanzen γ_i von $\mathcal{P}$ komplexe Zahlen innerhalb des Einheitskreises. Sie lassen sich durch komplexe Frequenzen ω_i ausdrücken,

$$\gamma_i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha_i + \mathrm{i}\beta_i)}\,, \tag{29}$$

deren positiver Imaginärteil β_i den Abstand von γ_i zum Einheitskreis und damit die Stärke des Abklingens bestimmt. Der Realteil α_i beschreibt Oszillationen während des Abklingens. Die Frequenzen $-\mathrm{i}\omega_i$ lassen sich Gleichung (15) entsprechend als Resonanzen des Liouville-Operators $\mathcal{L}$ verstehen.

Der mathematischen Definition nach sind Resonanzen Pole der Resolvente (18) in einem höheren Riemannschen Blatt der komplexen Zahlenebene [**52**] . Um aus dem ersten in das nächsthöhere, zweite Riemannschen Blatt zu gelangen, muß die Resolvente über das kontinuierliche Spektrum hinweg analytisch fortgesetzt werden. Auf dem kontinuierlichen Spektrum ist die Resolvente zwar divergent, aber sie exisitiert. Bei chaotischen, mischenden Dynamiken erstreckt sich das kontinuierliche Spektrum des Frobenius-Perron-Operators über den gesamten Einheitskreis. Die analytische Fortsetzung der Resolvente von $\mathcal{P}$ erfolgt also über den Einheitskreis hinweg.

Das erste Riemannsche Blatt ist dadurch ausgezeichnet, daß die Resolvente (18) auf ihm beschränkt ist. Im Fall des Frobenius-Perron-Operators ist das erste Riemannsche Blatt daher die komplexe Zahlenebene außerhalb des Einheitskreises. Das zweite Riemannsche Blatt liegt innerhalb des Einheitskreises, wo die Konvergenz der Reihe (18) nicht garantiert ist.

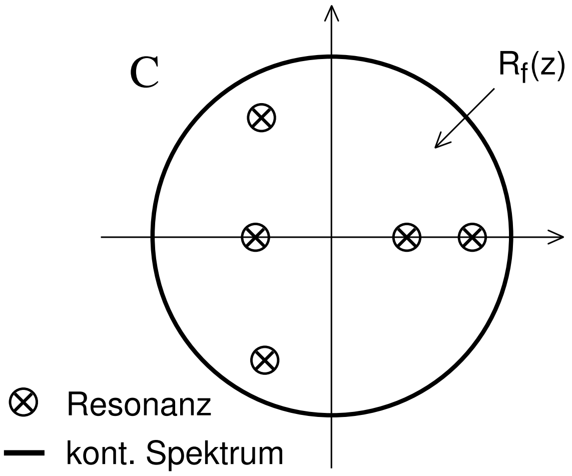


ABBILDUNG 1. Fortsetzung der Resolvente aus dem ersten in das zweite Riemannsche Blatt über das kontinuierliche Spektrum hinweg. Resonanzen sind isolierte Singularitäten der Resolvente innerhalb des Einheitskreises.

Im zweiten Riemannschen Blatt können Pole der analytisch fortgesetzten Resolvente auftreten. Diese Pole stellen die Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators dar. Besondere Relevanz haben die Resonanzen nahe des Einheitskreises, da die betraglich größten Resonanzen die langlebigsten Zerfallsprozesse einer Dynamik beschreiben.

Abbildung 1 illustriert die analytische Fortsetzung der Resolvente von außerhalb in das Innere des Einheitskreises. Innerhalb des Einheitskreises befinden sich isolierte Singularitäten der Resolvente bei den Resonanzen des Operators.

Sollen die Resonanzen eines Operators bestimmt werden, so besteht das wesentliche Problem in der analytischen Fortsetzung der Resolvente [**55**]. Eine mathematisch fundierte, in der Quantenmechanik gebräuchliche Methode zum Auffinden von Resonanzen ist die sogenannte Dilation des Operators [**52, 44, 47, 45, 46**].

Die Dilation ist anwendbar auf hermitesche Operatoren $H = -\Delta + V$ mit dem dilationsanalytischen Potential V [**52**]. Das Spektrum von H liegt auf der reellen Achse und besteht aus Eigenwerten und einem kontinuierlichen Spektrum. In das zweite Riemannsche Blatt führt die Überschreitung des kontinuierlichen Spektrums aus der oberen in die untere komplexe Halbebene (Abbildung 2, links), in der Resonanzen von H nahe der reellen Achse liegen. Die den Resonanzen zugehörigen Streuzustände sind nicht normierbar und liegen daher nicht im Hilbertraum.

Bei der Dilation wird der Operator H mit einem einparametrigen Operator $U(\theta)$ konjugiert, $H \to H(\theta) = U(\theta)HU(\theta)^{-1}$. Folglich kann die Dilation auch als eine Transformation des Hilbertraumes aufgefaßt werden. Wenngleich der Operator $H(\theta)$ nicht hermitesch ist, liegen alle Eigenwerte von H im Spektrum von $H(\theta)$, und die entsprechenden Resolventen R und $R(\theta)$ haben dieselben isolierten Pole.

Das kontinuierliche Spektrum von $H(\theta)$ ist jedoch gegenüber dem kontinuierlichen Spektrum von H um den Winkel 2θ gedreht (Abbildung 2, rechts). Daher ist

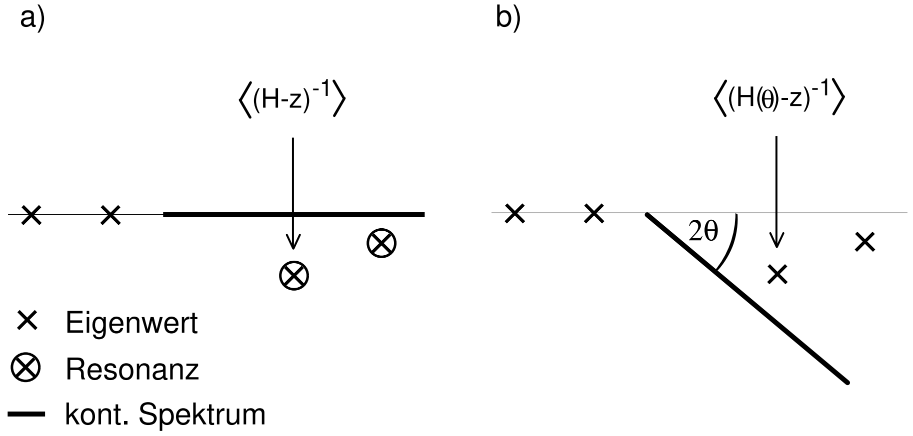


Abbildung 2. Fortsetzung der Resolvente eines hermiteschen Operators in das zweite Riemannsche Blatt durch Dilation des Operators. Indem das kontinuierliche Spektrum durch die Transformation gedreht wird, treten Resonanzen als komplexe Eigenwerte des transformierten Operators in Erscheinung.

$R(\theta)$ auf der reellen Achse in dem Bereich, in dem das kontinuierliche Spektrum von H liegt, nicht singulär und setzt sich unmittelbar in den Sektor fort, der von der reellen Achse und dem gedrehten kontinuierlichen Spektrum begrenzt wird. Dieser Sektor gehört für R bereits zum zweiten Riemannschen Blatt. Während die in diesem Sektor liegenden Pole komplexe Eigenwerte von $H(\theta)$ sind, sind sie Resonanzen von H. Die Resonanzen von H treten als komplexe Eigenwerte des Operators $H(\theta)$ auf. Durch die Dilation werden die den Resonanzen von H zugehörigen Streuzustände asymptotisch regularisiert. Auf diese Weise entstehen Eigenfunktionen von $H(\theta)$ im Hilbertraum.

In der Praxis wird der Operator $H(\theta)$ als endliche Matrix $H(\theta)^N$ in einem $N-$dimensionalen Unterraum des Hilbertraumes diagonalisiert. Aufgrund der endlichen Dimension wird das kontinuierliche Spektrum von $H(\theta)$ nun durch diskrete Eigenwerte repräsentiert, die mit wachsender Dimension immer dichter an der Stelle des kontinuierlichen Spektrums liegen [**46**]. Die übrigen reellen und komplexen Eigenwerte von $H(\theta)^N$ entsprechen Eigenwerten und Resonanzen von H, sobald sie gegenüber einer weiteren Vergrößerung der Basis unempfindlich sind.

Der antihermitesche Liouville-Operator erfüllt nicht die für die Anwendbarkeit der Dilation erforderlichen Vorraussetzungen. Im Gegensatz zum Hamilton-Operator der Quantenmechanik, der ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, handelt es sich beim Liouville-Operator um einen Differentialoperator erster Ordnung. Jedoch wird sich zeigen, daß Resonanzen des Liouville-Operators durch eine in vielerlei Hinsicht der Dilation analogen Vorgehensweise gefunden werden können. Dabei wird der Liouville-Operator durch eine nichthermitesche Matrix endlicher Dimension approximiert. Einige der komplexen Eigenwerte dieser Matrix stellen Resonanzen des Liouville-Operators dar.

6. Generalisierte Eigenfunktionen

In mischenden Systemen ist die konstante Funktion die einzige Eigenfunktion des Frobenius-Perron-Operators im Hilbertraum. Sie repräsentiert das invariante Maß der Dynamik und gibt keinen Aufschluß über Phasenraumstrukturen. Außerhalb des Hilbertraumes existieren dagegen weitere, sogenannte generalisierte Eigenfunktionen $|\gamma_i\rangle$. Sie sind in der Regel durch lineare Funktionale gegeben [**53**].

Die generalisierten Eigenfunktionen erfüllen ebenfalls die Eigenwertgleichung $\mathcal{P}|\gamma_i\rangle = \gamma_i|\gamma_i\rangle$, jedoch sind diese Funktionale nicht auf jeder Funktion des Hilbertraumes definiert. Die Betrachtung generalisierter Eigenfunktionen impliziert, daß sich der Raum der Observablen für diese Eigenfunktionen gegenüber dem Hilbertraum verkleinert.

Generalisierte Eigenfunktionen sind eng mit invarianten Phasenraumstrukturen der Dynamik verknüpft. Invariante Strukturen sind Fixpunkte, periodische Bahnen, irrationale Tori sowie instabile und stabile Mannigfaltigkeiten hyperbolischer periodischer Bahnen.

Eine einfache generalisierte Eigenfunktion von $\mathcal{P}$ mit den unimodularen Eigenwerten $\exp(2\pi \mathrm{i} k/p)$ läßt sich beispielsweise auf einer unter der Abbildung $\mathbf{M}$ periodischen Bahn $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ mit $\mathbf{M}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1}$ und $\mathbf{M}\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_1$ mit Hilfe der Diracschen $\delta-$Funktion konstruieren,

$$f_k(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{p} \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k n/p}\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n)\,. \tag{30}$$

Die Distribution $f_0(\mathbf{x})$ ist ein singuläres invariantes Maß der Dynamik. Abstraktere generalisierte Eigenfunktionen beinhalten Ableitungen von $\delta-$Funktionen und andere Distributionen.

Im Gegensatz zu den generalisierten Eigenfunktionen, deren Träger isolierte periodische Punkte im Phasenraum sind, können Eigenfunktionen auf irrationalen Tori und instabilen Mannigfaltigkeiten glatte Funktionen sein, die nur transversal zur Mannigfaltigkeit singulären, $\delta-$förmigen Charakter besitzen. Das entspricht der Situation bei integrablen Systemen, wo im Hilbertraum auf einer Energieschale glatte Eigenfunktionen $\delta-$förmig in den gesamten Phasenraum eingebettet sind. Auf einer instabilen Mannigfaltigkeit, die bezüglich des gesamten Phasenraumes das Maß Null besitzt, kann die Dynamik mit dem Borel-Maß der entsprechend niedrigeren Dimension beschrieben werden.

Nur die auf den Mannigfaltigkeiten glatten Eigenfunktionen werden als physikalisch relevant erachtet, weil nur solche Funktionen ein physikalisches Ensemble beschreiben [**58, 59, 61**]. Alle anderen generalisierten Eigenzustände stellen lediglich mathematische Konstrukte dar. Die zu den physikalischen Eigenzuständen gehörenden generalisierten Eigenwerte geben die Raten an, mit denen Observablen auf den invarianten Mannigfaltigkeiten zerfallen.

Auf einem irrationalen Torus ist die Dynamik ergodisch. Eigenfunktionen des Frobenius-Perron-Operators in dem auf dem Torus definierten Hilbertraum sind wie der Torus selbst $\delta-$förmig in den Phasenraum eingebettet.

Entlang einer instabilen Mannigfaltigkeit entfernen sich Trajektorien unidirektional von der entsprechenden periodischen Bahn. Deshalb müssen generalisierte Eigenfunktionen des Frobenius-Perron-Operators auf einer instabilen Mannigfaltigkeit abklingenden Charakter haben. Die zugehörigen Eigenwerte sind dann betraglich kleiner als Eins.

Entsprechend der unendlichen Zahl hyperbolischer periodischer Bahnen im Phasenraum kann sich der Träger einer generalisierten Eigenfunktion aus unendlich vielen instabilen Mannigfaltigkeiten zusammensetzten. Weil darüber hinaus jede instabile Mannigfaltigkeit eine komplexe Struktur besitzt, die sich über beliebig kleine Phasenraumskalen erstreckt, ist auch der Träger einer generalisierten Eigenfunktion von unendlicher Komplexität. Daher ist die generalisierte Eigenfunktion nicht Bestandteil des Hilbertraumes und läßt sich auch nicht durch Hilbertraumfunktionen approximieren [**62**].

Stabilen Mannigfaltigkeiten hyperbolischer periodischer Bahnen können keinen glatten Eigenfunktionen als Träger dienen. Unter der Zeitentwicklung laufen alle Trajektorien, die sich auf einer stabilen Mannigfaltigkeit befinden, auf die entsprechende periodische Bahn zu, so daß jede Phasenraumdichte auf der Mannigfaltigkeit im Limes großer Zeiten singulär wird. Eine generalisierte Eigenfunktion auf der Mannigfaltigkeit muß daher ebenfalls singulär sein.

Die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten einer periodischen Bahn wechseln ihre Stabilitätseigenschaften, wenn die Zeitentwicklung rückwärts erfolgt. Demnach befinden sich die generalisierten Eigenfunktionen der Rückwärtszeitentwicklung auf den stabilen Mannigfaltigkeiten der Vorwärtszeitentwicklung. Hier manifestiert sich ein wesentlicher Unterschied zwischen der unitären Dynamik im Hilbertraum und der Dynamik ausserhalb des Hilbertraumes. Während die Eigenfunktionen von Vorwärts- und Rückwärtszeitentwicklung der unitären, reversiblen Dynamik identisch sind, haben die entsprechenden generalisierten Eigenfunktionen verschiedene Träger im Phasenraum. Daher ist die durch die generalisierten Eigenfunktionen formulierte Dynamik nicht reversibel. Vielmehr müssen für die Vorwärts- und die Rückwärtszeitentwicklung zwei verschiedene Frobenius-Perron-Operatoren $\mathcal{P}^{+t}$ und $\mathcal{P}^{-t}$ auf dem größeren Raum der generalisierten Phasenraumfunktionen definiert werden, die lediglich Halbgruppen-Eigenschaften besitzen und, auf Hilbertraumfunktionen angewandt, zum unitären Operator $\mathcal{P}$ äquivalent sind [**62**]. Der Grund für diese Irreversibilität, die konträr zur Unitarität im Hilbertraum ist, liegt in der komplexen Struktur des Phasenraumes chaotischer Systeme und seiner invarianten Mannigfaltigkeiten.

KAPITEL 3

Liouvilledynamik auf der Einheitskugel

1. Der periodisch gestoßene Kreisel

Als prototypisches System zum Studium von Liouvilledynamik im gemischten Phasenraum dient der periodisch gestoßene Kreisel [**16, 17, 28, 29**]. Mit nur einem Freiheitsgrad hat dieses Hamiltonsche System einen zweidimensionalen, kompakten Phasenraum. Auf ihm wird die Hamiltonsche Dynamik bei stroboskopischer Betrachtungsweise durch eine diskrete Abbildung repräsentiert. Anhand eines Parameters kann der Charakter der Dynamik von regulär bis hin zu ausgeprägt chaotisch gewählt werden.

Die Dynamik des Kreisels ist die eines Drehimpulsvektors

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} l \sin\theta \cos\varphi \\ l \sin\theta \sin\varphi \\ l \cos\theta \end{pmatrix} \tag{31}$$

konstanter Länge l, der in regelmäßigen Zeitabständen Stöße erfährt. Den Phasenraum der Dynamik bildet die Einheitskugel $\vec{L}^2/l^2 = 1$ mit dem Winkel φ als Koordinate q und $\cos\theta$ als dem dazu kanonisch konjugierten Impuls p.

Aufgrund von periodischen Treibens kann die Dynamik mit nur einem Freiheitsgrad chaotisches Verhalten zeigen. Für solche Systeme bietet sich die stroboskopische Beschreibung mittels einer diskreten Abbildung im Phasenraum über Zeitabstände einer Periode T an. Die betrachtete Abbildung auf der Einheitskugel $M\,:\;(\varphi, \cos\theta)_n \rightarrow (\varphi, \cos\theta)_{n+1}$ setzt sich aus Drehungen $R_y(\beta_y)$ um die $y-$Achse und $R_z(\beta_z)$ um die $z-$Achse mit den Drehwinkeln β_y, β_z und aus einer nichtlinearen Drehung um die $z-$Achse, einer sogenannten Torsion $T_z(\tau) = R_z(\tau_z \cos\theta)$ mit der Torsionskonstanten τ zusammen,

$$M = T_z(\tau)\; R_z(\beta_z)\; R_y(\beta_y)\,. \tag{32}$$

Die Abbildung M ist bijektiv und erhält das Volumenelement $\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\!\cos\theta$ auf der Kugeloberfläche. Die Jakobideterminante (9) der Abbildung ist daher vom Betrag Eins. In der Interpretation als periodisch gestoßener Kreisel wird die Drehung um die $y-$Achse $R_y(\beta_y)$ als die freie Bewegung und die Bewegung um die $z-$Achse $T_z(\tau)\; R_z(\beta_z)$ als der in periodischen Abständen erfolgende Stoß verstanden. Jede der Komponenten von M stellt für sich allein betrachtet eine autonome, integrable Dynamik dar. Diese Komponenten werden zunächst unabhängig voneinander vorgestellt.

Die Hamiltonfunktion einer Drehung ist im wesentlichen durch die Komponente des Drehimpulsvektors L_i gegeben, welche die jeweilige Drehung generiert. Die mit der Periodendauer T skalierte Hamiltonfunktion der $z-$Drehung und die daraus abgeleiteten Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} H_{R_z}(q,p) &= \frac{1}{T}\,\beta_z p, \\ \dot{q} &= \frac{1}{T}\,\beta_z, \\ \dot{p} &= 0\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Für die diskrete Zeitentwicklung über eine Periode ergibt sich die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + \beta_z, \\ p_{n+1} &= p_n\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Der Impuls p und die Energie H_{R_z} sind Erhaltungsgrößen der Dynamik. Die Energieschalen entsprechen Kreislinien auf der Einheitskugel mit $p = L_z =$ konstant.

Die Hamiltonschen Gleichungen der $z-$Torsion,

$$\begin{aligned} H_{T_z}(q,p) &= \frac{1}{T}\,\frac{\tau_z}{2}p^2, \\ \dot{q} &= \frac{1}{T}\,\tau_z p, \\ \dot{p} &= 0, \end{aligned} \tag{35}$$

führen auf die diskrete Zeitentwicklung

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + \tau p_n, \\ p_{n+1} &= p_n\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Auch bei der Torsion sind Energie und Impuls erhalten. Zwei unabhängige Energieschalen mit $p = \pm\cos\theta$ weisen die gleiche Energie auf. Diese systematische Energieentartung wird aufgehoben, wenn die $z-$Torsion mit einer $z-$Drehung kombiniert wird. Mit der Hamiltonfunktion

$$H_{T_z R_z}(q,p) = H_{T_z} + H_{R_z} = \frac{1}{T}\left(\frac{\tau}{2}p^2 + \beta_z p\right) \tag{37}$$

resultiert die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + \tau p_n + \beta_z, \\ p_{n+1} &= p_n\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Die Energieschalen sind nun gegenüber der reinen Torsion um $\beta_z p/T$ verschoben.

Die Bewegungsgleichungen der $y-$Drehung $R_y(\beta_y)$

$$\begin{aligned} H_{R_y}(q,p) &= \frac{1}{T}\,\beta_y\sqrt{1-p^2}\sin q\,, \\ \dot{q} &= \frac{1}{T}\,\beta_y\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\sin q\,, \\ \dot{p} &= -\frac{1}{T}\,\beta_y\sqrt{1-p^2}\cos q\,, \end{aligned} \tag{39}$$

schließlich führen auf die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \arg\left(\sqrt{1-p_n^2}\,(\cos\beta_y\ \cos q_n + \mathrm{i}\sin q_n) + \sin\beta_y\ p_n\right)\,, && (40)\\ p_{n+1} &= \cos\beta_y\ p_n - \sqrt{1-p_n^2}\,\sin\beta_y\cos q_n\,. && (41)\end{aligned}$$

Nun sind die Energieschalen auf der Kugel konzentrische Kreislinien um die $y-$Achse mit $\sqrt{1-p^2}\sin q = L_y =$ konst.

Die Hamiltonfunktion der kombinierten Dynamik $M = T_z(\tau)\ R_z(\beta_z)\ R_y(\beta_y)$ ist zeitabhängig und durch die unstetige Abfolge der Hamiltonfunktionen (39), (37) gegeben,

$$H(q,p,t) = \begin{cases} \frac{1}{T_1}\beta_y\sqrt{1-p^2}\sin q\,, & 0 \le t < T_1\,,\\ \frac{1}{T_2}(\frac{\tau}{2}p^2 + \beta_z p)\,, & T_1 \le t < T\,.\end{cases} \tag{42}$$

Die Abbildung M über eine Periode $T = 1$ folgt hieraus als

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \cos\beta_y\ p_n - \sqrt{1-p_n^2}\,\sin\beta_y\cos q_n\,, && (43)\\ q_{n+1} &= \arg\left(\sqrt{1-p_n^2}\,(\cos\beta_y\ \cos q_n + \mathrm{i}\sin q_n) + \sin\beta_y\ p_n\right) + \beta_y + \tau p_{n+1}\,.\end{aligned}$$

Die Torsionsstärke τ in (43) bestimmt den Grad der Chaotizität von M. Für $\tau = 0$ beschreibt M eine reine Drehung und besitzt deshalb ausschließlich regulären Charakter. Nimmt τ dagegen von Null verschiedene Werte an, so entsteht eine Dynamik mit gemischtem Phasenraum, der mit anwachsender Torsionsstärke immer stärker von Chaos dominiert wird. In Abbildung 1 illustriert eine Reihe von Phasenraumportraits des Kreisels mit $\beta_y = \beta_z = 1$ und den Werten $\tau_z = 0, 1, 1.5, 2, 3, 4$ des Torsionsparameters das Einsetzen von Chaos mit wachsender Torsionsstärke. Um die Phasenraumportraits zu generieren, wurden Trajektorien $M^n x_0$, $n = 0, 1, \ldots, 100$ mit äquidistant über den Phasenraum verteilten Startpunkten $x_0 = (q_0, p_0)$, über 100 Zeitschritte verfolgt. Während Linien Bereiche regulärer Bewegung im Phasenraum anzeigen, sind homogen mit Punkten ausgefüllte Bereiche instabil und somit von Chaos dominiert.

2. Der Frobenius-Perron-Operator auf der Energieschale

Für die in Abschnitt 1 vorgestellten integrablen Varianten des Kreisels wird die Liouvilledynamik zweckmäßigerweise in einem Hilbertraum auf einer Energieschale, einer Kreislinie auf der Einheitskugel, definiert. Auch die Torsion ist innerhalb einer Energieschale, festgelegt durch $p = p_0 = \cos\theta_0$, lediglich eine $z-$Drehung mit dem Drehwinkel $\tau\cos\theta_0$. Es genügt, repräsentativ für alle Drehungen und die Torsion die Liouvilledynamik der $z-$Drehung zu untersuchen.

Auf einer Energieschale der $z-$Drehung spannt die Orthonormalbasis

$$f_n(q) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,q} \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{44}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}q f_{n_1}(q)^* f_{n_2}(q) = \delta_{n_1}^{n_2}\,, \tag{45}$$

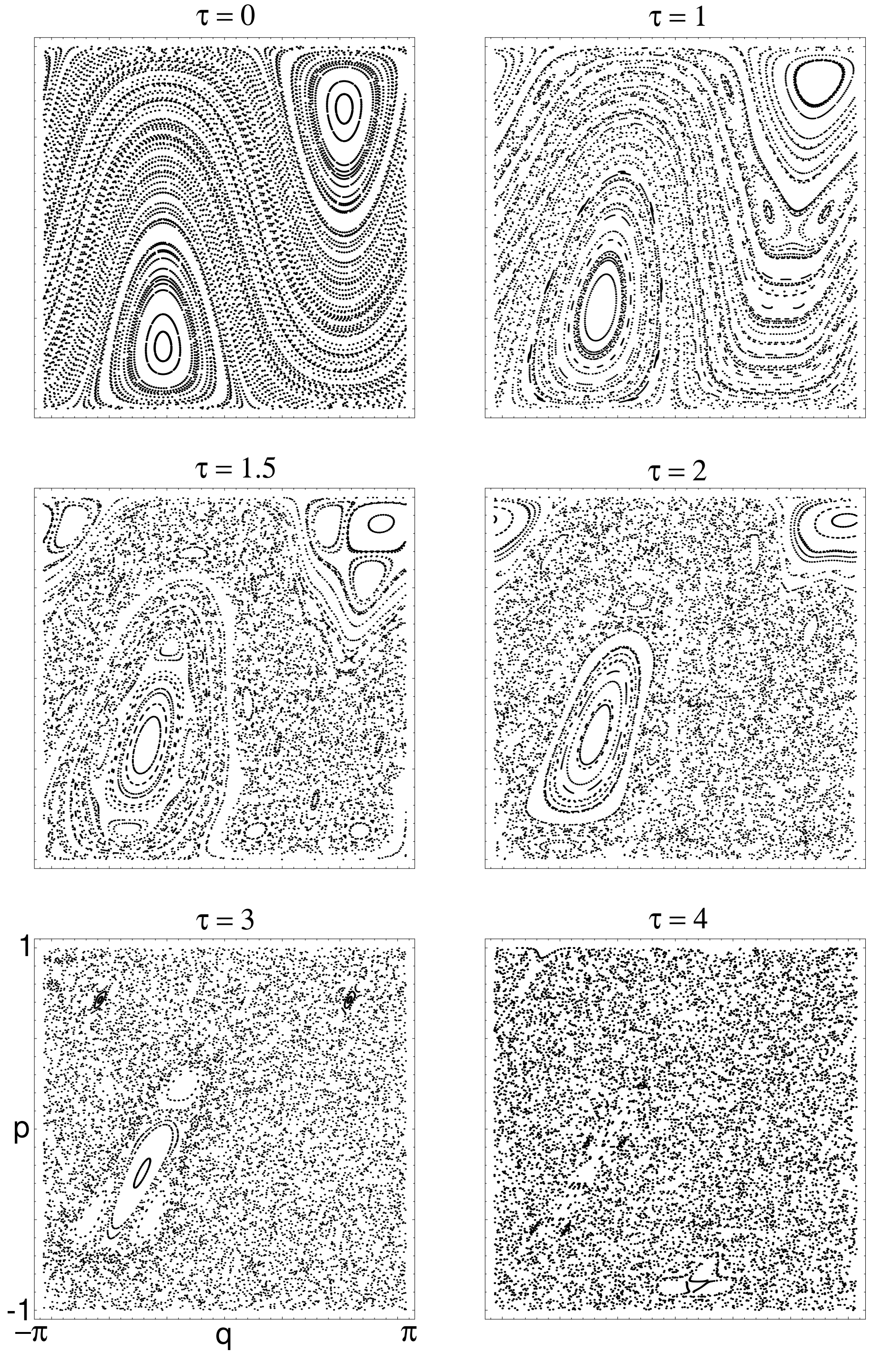


Abbildung 1. Phasenraumportraits des periodisch gestoßenen Kreisels mit $\beta_z = \beta_y = 1$ und Torsionskonstanten $\tau_z = 0, 1, 1.5, 2, 3, 4$ illustrieren das Einsetzen von Chaos mit wachsender Torsionsstärke.

wobei $\delta_{n_1}^{n_2}$ das Kronecker$-\delta$ bezeichnet, einen Hilbertraum auf. Wegen der Kompaktheit der Energieschale liegt dieser Hilbertraum dicht im Raum der L^1-Funktionen auf der Kreislinie, dem natürlichen Definitionsbereich des Frobenius-Perron-Operators.

Der Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{R}_z$ der $z-$Drehung ist in diesem Hilbertraum unitär. Bezüglich der Basis (44) wird er durch eine unendliche, unitäre Matrix repräsentiert, deren Matrixelemente sich mit Gleichung (8) und $J = 1$ als

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{z\, n_1,n_2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, n_1\, q}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n_2\, R_z^{-1}(q)} \\ &= \delta_{n_1}^{n_2}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, n_1\, \beta_z} \end{aligned} \tag{46}$$

schreiben.

Offenbar sind die Funktionen $f_n(q)$ schon die Eigenfunktionen von $\mathcal{R}_z$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, n\, \beta_z}$ die zugehörigen Eigenwerte. Den Erwartungen für eine reguläre Dynamik entsprechend ist das Spektrum von $\mathcal{R}_z$ diskret. Sowie der Drehwinkel β_z kein rationales Vielfaches von 2π ist, hat die Drehung ergodischen Charakter.

3. Der Hilbertraum auf der Kugeloberfläche

Die periodisch getriebene Dynamik $M = T_z(\tau)\; R_z(\beta_z)\; R_y(\beta_y)$ ist nicht auf eine Energieschale im Phasenraum beschränkt. Vielmehr ist der ihr zugängliche Phasenraum die gesamte Oberfläche der Einheitskugel Ω. Als Funktionenraum auf Ω bietet sich der von den Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\varphi, \cos\theta)$ aufgespannte Hilbertraum der L^2-Funktionen auf der Einheitskugel an.

Die Kugelflächenfunktionen schreiben sich mit Hilfe der zugeordneten Legendrepolynome $P_l^m(\cos\theta)$ als [**63, 65, 67**]

$$Y_{lm}(\cos\theta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\,, \tag{47}$$

wobei die Indizes die Werte $l = 0, 1, 2, \ldots$ und $m = 0, \pm 1, \cdots \pm l$ annehmen. Die Kugelflächenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraumes,

$$\int_\Omega \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\cos\theta\; Y_{l'm'}^*(\cos\theta, \varphi)\; Y_{lm}(\cos\theta, \varphi) = \delta_l^{l'}\; \delta_m^{m'}\,. \tag{48}$$

Der von den Kugelflächenfunktionen aufgespannte Hilbertraum liegt dicht im Raum der L^1-Funktionen auf der Kugeloberfläche, so daß sich alle L^1-Funktionen beliebig genau nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lassen.

Die Kugelflächenfunktionen sind insofern als Basis des Hilbertraumes ausgezeichnet, daß sie nach ihrem Auflösungsvermögen von Phasenraumstrukturen geordnet sind. Mit anwachsendem Index $l = 0, 1, 2, \ldots$ können Phasenraumfunktionen mit immer kleineren Strukturen durch Linearkombinationen der Kugelflächenfunktionen dargestellt werden. Das ermöglicht eine systematische, hierarchische Approximation von Phasenraumdichten und deren Zeitentwicklung durch endliche Vektoren und Matrizen, bei der große Strukturen richtig erfaßt und kleine Strukturen vernachlässigt werden.

Charakteristisch für die mit Kugelflächenfunktionen Y_{lm} erreichbare Phasenraumauflösung ist die Zahl der $l-|m|$ Nullstellen von P_l^m und der $|m|$ Nullstellen von $\exp(im\varphi)$. In dem von allen $(l_{max}+1)^2$ Kugelflächenfunktionen mit dem Index $l \leq l_{max}$ aufgespannten Unterraum kann die Auflösung durch das mittlere Phasenraumvolumen pro Basisfunktion als $4\pi/(l_{max}+1)^2$ abgeschätzt werden. Entsprechend ist die kleinste aufgelöste Skala im Phasenraum durch $2/(l_{max}+1)$ in polarer Richtung und $2\pi/(l_{max}+1)$ in azimutaler Richtung gegeben.

Die Matrixelemente der unendlichen, unitären Frobenius-Perron-Matrix bezüglich der Basis der Kugelflächenfunktionen lassen sich nun als

$$\mathcal{P}_{l_1m_1,l_2m_2} = \int_\Omega \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\cos\theta \; Y^*_{l_1m_1}(\varphi,\cos\theta)\; Y_{l_2m_2}(M^{-1}(\varphi,\cos\theta)) \tag{49}$$

berechnen.

4. Drehungen auf der Kugeloberfläche

Die Frobenius-Perron-Matrixelemente der $z-$Drehung haben wegen

$$Y_{lm}(R_z^{-1}(\varphi,\cos\theta)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\beta_z}\; Y_{lm}(\varphi,\cos\theta) \tag{50}$$

die einfache Form

$$\mathcal{R}_{z\; l_1m_1,l_2m_2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m_2\beta_z}\; \delta^{l_2}_{l_1}\; \delta^{m_2}_{m_1} \tag{51}$$

und werden im folgenden kompakter als $\mathcal{R}_{z\; lm} = \mathcal{R}_{z\; lm,lm}$ geschrieben.

Von komplizierterer Natur sind die Matrixelemente der $y-$Drehung. Weil jedoch die Hamiltonfunktion im wesentlichen durch die Drehimpulskomponente L_y gegeben ist, besteht eine formale Identität zwischen der Wirkung des Liouvilleoperators $\mathcal{L} = \{H,\cdot\}$ auf eine Basisfunktion Y_{lm} und der Wirkung des quantenmechanischen Drehimpulsoperators $\hat{L}_y$ auf den Drehimpulseigenzustand $|jm\rangle = Y_{lm}$.

Die aus der Quantenmechanik bekannten Wignerschen $d-$Funktionen [**63, 64, 29**],

$$d^j_{m'm}(\beta_y) = \langle jm'|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_y\hat{J}_y}|jm\rangle \tag{52}$$

stellen deshalb auch die Matrixelemente des Frobenius-Perron-Operators,

$$\mathcal{R}_{y\; l_1m_1,l_2m_2} = d^l_{m_1m_2}(\beta_y)\; \delta^{l_2}_{l_1}\,. \tag{53}$$

Die Frobenius-Perron-Matrix der $y-$Drehung ist folglich blockdiagonal, $\mathcal{R}_{y\; lm_1m_2} = \mathcal{R}_{y\; lm_1,lm_2}$. Die Wignerschen $d-$Funktionen sind reell und besitzen die im folgenden nützlichen Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned} d^j_{m_1m_2}(\beta_y) &= (-1)^{m_1+m_2}\; d^j_{m_2m_1}(\beta_y) = d^j_{-m_1-m_2}(\beta_y) \\ &= (-1)^{m_1+m_2}\; d^j_{m_1m_2}(-\beta_y) = (-1)^{j-m_2} d^j_{-m_1m_2}(\pi-\beta_y)\,. \end{aligned} \tag{54}$$

In der Praxis lassen sich die $d-$Funktionen mittels einer dreistufigen Rekursionsrelation berechnen [**29**].

5. Torsion auf der Kugeloberfläche

Für die Matrixelemente der $z-$Torsion ergibt sich wegen

$$Y_{lm}(T_z^{-1}(\varphi,\cos\theta)) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau m\cos\theta}\, Y_{lm}(\varphi,\cos\theta) \tag{55}$$

das Integral

$$\mathcal{T}_{z\,l_1m_1,l_2m_2} = \int_\Omega \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\cos\theta\; Y^*_{l_1m_1}(\varphi,\cos\theta)\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tau m_2\cos\theta}\; Y_{l_2m_2}(\varphi,\cos\theta)\,. \tag{56}$$

Zur Auswertung des Integrals wird die Identität [**66**]

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\; j_l(k)\; Y_{l0}(\varphi,\cos\theta)\,, \tag{57}$$

in der die sphärischen Besselfunktion $j_l(k)$ auftritt, herangezogen. Unter Berücksichtigung von $Y^*_{l_1m_1} = (-1)^{m_1}Y_{l_1-m_1}$ folgt

$$\mathcal{T}_{z\,l_1m_1,l_2m_2} = (-1)^{m_1}\sum_{l=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^l\sqrt{4\pi(2l+1)}j_l(m_1\tau)\int_\Omega \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\cos\theta\; Y_{l0}\; Y_{l_1-m_1}\; Y_{l_2m_2}\,. \tag{58}$$

Das Integral über das Produkt von drei Kugelflächenfunktionen ist als das Gauntsche Integral bekannt [**70**],

$$\int_\Omega \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\cos\theta\; Y^*_{lm}\; Y_{l_1m_1}\; Y_{l_2m_2} = \left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}\right]^{\frac{1}{2}} C^{l_1l_2l}_{0\,0\,0}\; C^{l_1\,l_2\,l}_{m_1m_2m}\,, \tag{59}$$

welches sich als Produkt von Clebsch-Gordan-Koeffizienten schreiben läßt. Wegen

$$C^{l_1\,l_2\,l}_{m_1m_2m} = 0 \quad \text{falls } l \notin \{(l_1+l_2),(l_1+l_2)-1,\ldots,|l_1-l_2|\}\,, \tag{60}$$
$$C^{l_1\,l_2\,l}_{m_1m_2m} = 0 \quad \text{falls } m_1+m_2 \neq m\,, \tag{61}$$
$$C^{l_1\,l_2\,l}_{0\,0\,0} = 0 \quad \text{falls } l_1+l_2+l \text{ ungerade} \tag{62}$$

hat die Summe (58) nur endlich viele Summanden und verschwindet für $m_1 \neq m_2$.

Das Resultat für das Torsionsmatrixelement lautet

$$\mathcal{T}_{z\,l_1m_1,l_2m_2} = \delta^{m_2}_{m_1}(-1)^{m_1}\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}\sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}(-\mathrm{i})^l\; j_l(m_1\tau_z)\; C^{l_1l_2l}_{0\,0\,0}\; C^{l_1\,l_2\,l}_{-m_1m_2m}\,. \tag{63}$$

Die Torsionsmatrix ist also ebenfalls blockdiagonal, $\mathcal{T}_{z\,l_1l_2m} = \mathcal{T}_{z\,l_1m,l_2m}$. Wegen Gleichung (62) ist $\mathcal{T}_z$ reell, wenn l_1+l_2 gerade ist, und rein imaginär, wenn l_1+l_2 ungerade ist. Die Matrix ist symmetrisch unter Vertauschung von l_1 und l_2.

6. Eine Rekursionsformel für die Torsionsmatrixelemente

So, wie sich die Wignerschen $d-$Matrixelemente in der Praxis aus einer Rekursionsrelation berechnen lassen, können auch die Torsionsmatrixlemente anstatt aus (63), worin die Bestimmung der Clebsch-Gordan-Koeffzienten die wesentliche Schwierigkeit darstellt, aus einer Rekursionsrelation ermittelt werden.

Die Rekursionsrelation wird zweckmäßigerweise für das Integral

$$t_z(l',l,m) = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u\, P^m_{l'}(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau mu}\, P^m_l(u) \tag{64}$$

hergeleitet, worin die zugeordneten Legendrepolynome $P_l^m(u)$ auftreten. Aus $t_z(l'lm)$ ergibt sich $\mathcal{T}_{z\,l'lm}$ als

$$\mathcal{T}_{z\,l'lm} = \frac{1}{2}\left[\frac{(2l'+1)(l'-m)!}{(l'+m)!}\frac{(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} t_z(l',l,m)\,. \tag{65}$$

Die zugeordneten Legendrepolynome erfüllen die Differentialgleichung

$$D\,P_l^m(u) = \left[(1-u^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} - 2u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-u^2}\right] P_l^m(u) = 0\,. \tag{66}$$

Diese Identität in das Integral (64) eingesetzt ergibt

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\, [D\,P_{l'}^m(u)]\; P_l^m(u)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau m u} = 0\,. \tag{67}$$

In dem Fall $m \neq 0$ führen partielle Integrationen, bei denen die Randterme wegen $P_l^m(-1) = P_l^m(1) = 0$ verschwinden, auf

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}u\, P_{l'}^m\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau m u}\Big[(2\mathrm{i}\tau m)\,\Big((1-u^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}P_l^m - u\,P_l^m\Big) + &\\ \Big(l'(l'+1) - l(l+1) - (1-u^2)\,\tau^2 m^2\Big)\,P_l^m\Big] &= 0\,.\end{aligned} \tag{68}$$

Mit Hilfe der Rekursionsrelation

$$(1-u^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}P_l^m = -luP_l^m + (l+m)P_{l-1}^m \tag{69}$$

läßt sich die erste Ableitung des Legendrepolynoms in (68) eliminieren. Es resultiert die fünfstufige Rekursionsrelation für $t_z(l',l,m)$,

$$\begin{aligned} t_z(l',l+2,m) \;=& \\ \frac{1}{\tau^2 m^2}\frac{(2l+1)(2l+3)}{(l-m+1)(l-m+2)}&\left[2\mathrm{i}\tau m\frac{(l+1)(l-m+1)}{2l+1}\,t_z(l',l+1,m) - \right.\\ &\Big(l'(l'+1) - l(l+1) - 2\tau^2 m^2\frac{l(l+1)+m^2-1}{4l(l+1)-3}\Big)\,t_z(l',l,m) - \\ &\left. 2\mathrm{i}\tau m\frac{l(l+m)}{2l+1}\,t_z(l',l-1,m) - \tau^2 m^2\frac{(l+m)(l+m-1)}{(2l+1)(2l-1)}\,t_z(l',l-2,m)\right]. \end{aligned} \tag{70}$$

Die Rekursionsformel (70) verknüpft bei konstanten Indizes l' und $m \neq 0$ fünf Matrixelemente mit aufeinanderfolgenden Indizes l. Weil die Matrixelemente $\mathcal{T}_{z\,l'lm}$ in Abhängigkeit von l alternierend reell und rein imaginär sind, hat auch die Rekursionsrelation diese alternierende Form. Für $m = 0$ ist Rekursionsformel nicht anwendbar, jedoch ist das Integral (64) für $m = 0$ trivial. Die Matrixelemente lauten

$$t_z(l',l,0) = \frac{2}{2l+1}\,\delta_l^{l'}\,. \tag{71}$$

Wenngleich es sich bei (70) um eine fünfstufige Rekursionsrelation handelt, ist für den Beginn der Rekursion die Berechnung von zwei Integralen ausreichend. Für gegebene Indizes m und $l' \geq |m|$ sind diese Integrale die Matrixelemente $t_z(l',|m|,m)$

und $t_z(l', |m|+1, m)$ zu den beiden kleinsten Werten für l, die nicht verschwinden. Die Matrixelemente $t_z(l', |m|-1, m)$ und $t_z(l', |m|-2, m)$ haben wegen $P^m_{|m|-1} = P^m_{|m|-2} = 0$ den Wert Null. Mit diesen vier Startwerten kann die Rekursion begonnen und bis zu beliebig hohen Werten des Index l fortgeführt werden.

7. Eine reelle Basis

Wenngleich der durch die Kugelflächenfunktionen aufgespannte Hilbertraum komplexwertige Funktionen enthält, müssen die als Phasenraumdichten dienenden Funktionen positiv und reell sein. Unter der durch den Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}$ vermittelten Zeitentwicklung bleiben sie positiv und reell. Das impliziert, daß sich $\mathcal{P}$ bezüglich einer reellen Basis als reelle Matrix schreiben läßt.

Eine reelle Basis des Hilbertraumes ist mit $l = 0, 1, 2, \ldots$ und $m = 1, 2, \ldots, l$ durch die Funktionen

$$\begin{aligned} y_{l0} &= Y_{l0} \,, \\ y^+_{lm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Y_{lm} + Y^*_{lm}\right) \,, \\ y^-_{lm} &= \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{i}} \left(Y_{lm} - Y^*_{lm}\right) \end{aligned} \tag{72}$$

gegeben. Diese unitäre Transformation U ist diagonal in l und blockdiagonal in m. Für $m = 0$ ist die Blockmatrix $U^l_0 = 1$ trivial, für $m > 0$ besteht sie bei der Anordnung der Basisfunktionen gemäß $(Y_{l\,m}, Y_{l\,-m})^T$ und $(y^+_{lm}, y^-_{lm})^T$ aus der 2×2–Matrix

$$U^l_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & (-1)^m \\ -\mathrm{i} & (-1)^m \mathrm{i} \end{pmatrix} . \tag{73}$$

Die Konstruktionsweise der reellen Basis entspricht der Vorgehensweise bei zeitumkehrinvarianten Quantensystemen, bei denen der Zeitumkehroperator durch die Komplexkonjugation repräsentiert wird [**16**].

8. Die Frobenius-Perron-Matrix des periodisch gestoßenen Kreisels

Die Matrixelemente des Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P} = \mathcal{T}_z(\tau)\, \mathcal{R}_z(\beta_z)\, \mathcal{R}_y(\beta_y)$ des periodisch getstoßenen Kreisels ergeben sich in der Basis der Kugelflächenfunktionen aus dem Matrizenprodukt

$$\mathcal{P}_{l_1 m_1, l_2 m_2} = \sum_{l', l''=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m''=-l''}^{l''} \mathcal{T}_{z\; l_1 m_1 l' m'}\, \mathcal{R}_{z\; l'm', l''m''}\, \mathcal{R}_{y\; l''m'', l_2 m_2} \,. \tag{74}$$

Aufgrund der Blockdiagonalität der Dreh- und Torsionsmatrizen (51), (53) und (63) ist das Matrixelement jedoch ein einfaches Produkt,

$$\mathcal{P}_{l_1 m_1, l_2 m_2} = \mathcal{T}_z(\tau)_{l_1 l_2 m_1}\, \mathcal{R}_z(\beta_z)_{l_2 m_1}\, \mathcal{R}_y(\beta_y)_{l_2 m_1 m_2} \,. \tag{75}$$

Bezüglich der reellen Basis (72) ist $\mathcal{P}$ eine reelle Matrix. Ihre Matrixelemente schreiben sich mit den Matrixelementen (51), (53) und (63) als

$$\begin{aligned}
\langle y_{l_1 0} \mathcal{P} y_{l_2 0} \rangle &= \delta^{l_2}_{l_1} R_{y\; l_2 0\, 0}\,, \\
\langle y_{l_1 0} \mathcal{P} y^{+}_{l_2 m_2} \rangle &= \sqrt{2} \delta^{l_2}_{l_1} R_{y\; l_2 0\, m_2}\,, \\
\langle y^{+}_{l_1 m_1} \mathcal{P} y_{l_2 0} \rangle &= \sqrt{2}\ \mathrm{Re}\ \mathcal{T}_{z\; l_1 l_2 m_1} \mathcal{R}_{z\; l_2 m_1} \mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 0}\,, \\
\langle y_{l_1 0} \mathcal{P} y^{-}_{l_2 m_2} \rangle &= 0\,, \\
\langle y^{-}_{l_1 m_1} \mathcal{P} y_{l_2 0} \rangle &= -\sqrt{2}\ \mathrm{Im}\ \mathcal{T}_{z\; l_1 l_2 m_1} \mathcal{R}_{z\; l_2 m_1} \mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 0}\,, \\
\langle y^{+}_{l_1 m_1} \mathcal{P} y^{+}_{l_2 m_2} \rangle &= \mathrm{Re}\ \mathcal{T}_{z\; l_1 l_2 m_1} \mathcal{R}_{z\; l_2 m_1} (\mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 m_2} + (-1)^{m_2} \mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 - m_2})\,, \\
\langle y^{-}_{l_1 m_1} \mathcal{P} y^{-}_{l_2 m_2} \rangle &= \mathrm{Re}\ \mathcal{T}_{z\; l_1 l_2 m_1} \mathcal{R}_{z\; l_2 m_1} (\mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 m_2} - (-1)^{m_2} \mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 - m_2})\,, \\
\langle y^{+}_{l_1 m_1} \mathcal{P} y^{-}_{l_2 m_2} \rangle &= \mathrm{Im}\ \mathcal{T}_{z\; l_1 l_2 m_1} \mathcal{R}_{z\; l_2 m_1} (\mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 m_2} - (-1)^{m_2} \mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 - m_2})\,, \\
\langle y^{-}_{l_1 m_1} \mathcal{P} y^{+}_{l_2 m_2} \rangle &= -\mathrm{Im}\ \mathcal{T}_{z\; l_1 l_2 m_1} \mathcal{R}_{z\; l_2 m_1} (\mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 m_2} + (-1)^{m_2} \mathcal{R}_{y\; l_2 m_1 - m_2})\,.
\end{aligned} \tag{76}$$

Es versteht sich, daß die Frobenius-Perron-Matrizen der reinen Drehungen und der Torsion bezüglich der reellen Basis ebenfalls reell sind. Ihre Matrixelemente ergeben sich aus den Matrixelementen (76), indem die übrigen Dreh- beziehungsweise Torsionsparameter zu Null gesetzt werden.

9. Die Zeitentwicklung einer charakteristischen Phasenraumdichte

Das Verhalten einer Dichtefunktion unter Torsion und Drehungen läßt sich gut an charakteristischen Dichtefunktionen konstanter Amplitude illustrieren. Eine solche Dichtefunktion schreibt sich mit Hilfe der charakteristischen Funktion

$$\chi_{\Delta x}(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \Delta x\,, \\ 0\,, & x \notin \Delta x\,, \end{cases} \tag{77}$$

als

$$\rho_0(q,p) = \frac{1}{\Delta q \Delta p} \chi_{\Delta q}(q)\, \chi_{\Delta p}(p)\,. \tag{78}$$

Ein Gefühl für die Zeitentwicklung solcher Phasenraumdichten ist nützlich in Hinblick darauf, daß unter dem Lebesgueintegral jede Dichtefunktion des Hilbertraumes durch Linearkombinationen solcher charakteristischer Dichten approximiert werden kann. Weil das Phasenraumvolumen unter der Dynamik erhalten ist, bleibt die Amplitude der Dichte unter der Dynamik konstant. Lediglich der Träger der Dichte ändert sich.

In Abbildung 2 ist die Zeitentwicklung einer Phasenraumdichte dargestellt, die anfangs im Phasenraumbereich $\Delta q = [-\pi/4, \pi/4]$ und $\Delta p = [-1/4, 1/4]$ liegt. Die erste Zeile zeigt die anfängliche Phasenraumdichte ρ_0 und ihre zeitlichen Nachfolger unter einer $z-$Drehung $\rho_n = \mathcal{R}_z^n(1)\rho_0$ für $n = 1, 2$. In den darauffolgenden Zeilen sind die zeitlichen Nachfolger von ρ_0 unter einer $y-$Drehung $\mathcal{R}_y(1)$, einer Torsion $\mathcal{T}_z(4)$ sowie der periodisch getriebenen Dynamik $\mathcal{T}_z(4)\mathcal{R}_z(1)\mathcal{R}_y(1)$ für $n = 1, 2, 3$ dargestellt.

Der offensichtliche Unterschied zwischen der regulären, integrablen und der chaotischen, periodisch gestoßenen Dynamik besteht darin, daß die Dichte unter der

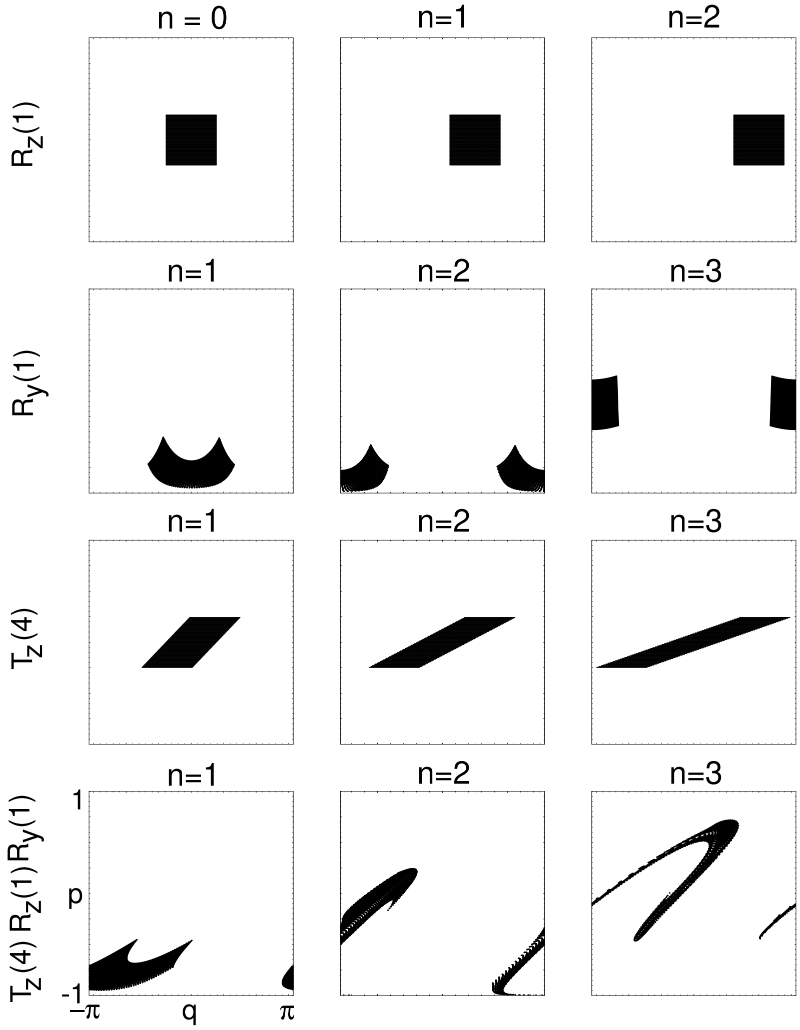


Abbildung 2. Die Zeitentwicklung einer charakteristischen Phasenraumfunktion (links oben, $n = 0$) unter Drehungen und Torsion sowie der periodisch getriebenen Dynamik für die Zeitschritte $n = 1, 2, 3$.

regulären Dynamik lediglich deformiert, unter der periodisch gestoßenen Dynamik dagegen in eine Richtung kontrahiert und in die andere Richtung auseinandergezogen wird. Diese gleichzeitige Kontraktion und Expansion in verschiedene Richtungen ist charakteristisch für volumenerhaltende chaotische Dynamiken.

KAPITEL 4

Asymptotik der Liouvilledynamik

1. Die Sattelpunktnäherung der Torsionsmatrixelemente

Die Frobenius-Perron-Matrixelemente des periodisch gestoßenen Kreisels sind durch komplizierte, wenig handhabbare Ausdrücke gegeben. Deshalb ist eine vereinfachende Näherung wünschenswert, an der sich die wesentlichen Eigenschaften der Matrixelemente ablesen lassen. Weil die Frobenius-Perron-Matrix eine unendliche Matrix ist, liegt eine asymptotische Näherung der Matrixelemente mit hohen Indizes nahe.

Die Matrixelemente von $\mathcal{R}_z$ sind bereits von einfacher Form und unabhängig von den Indizes l_1, l_2. In diesem Fall ist keine asymptotische Vereinfachung möglich. Die asymptotischen Matrixelemente von $\mathcal{R}_y$ sind durch die sogenannte uniforme Approximation der Wignerschen $d-$Funktion gegeben [**71, 29, 72**]. Der große Paramter der asymptotischen Näherung ist $L = (l + 1/2) \gg 1$. Die Näherung ist gültig für fast alle Indexpaare (m_1, m_2). Sie bricht für $(m_1, m_2) \approx (\pm L, \pm L \cos\beta_y)$ und $(m_1, m_2) \approx (\pm L\cos\beta_y, \pm L)$ zusammen, jedoch lassen sich diese Matrixelemente durch eine sogenannte Oszillatornäherung [**29**] bestimmen.

Die uniforme Approximation schreibt sich mit Hilfe der Airy Funktion für $0 < \beta_y < \pi/2$, $m_2 > 0$ und $|m_1| < m_2$ als

$$
\begin{aligned}
d^l_{m_1 m_2}(\beta_y) &= \left[\frac{-4\lambda}{R}\right]^{\frac{1}{4}} \mathrm{Ai}(\lambda)\,, && (79)\\
R &= L^2 \sin^2\beta_y - m_1^2 - m_2^2 + 2 m_1 m_2 \cos\beta_y\,, && (80)\\
\lambda &= -\mathrm{sgn}\big(R\big) \left[\frac{3}{2} L(\pi - S)\right]^{\frac{2}{3}}, && (81)\\
S &= \frac{m_2}{L} \arccos \frac{m_2\cos\beta_y - m_1}{\sin\beta_y\sqrt{L^2 - m_2^2}} - && (82)\\
&\quad \frac{m_1}{L} \arccos \frac{m_2 - m_1\cos\beta_y}{\sin\beta_y\sqrt{L^2 - m_1^2}} + \\
&\quad \arccos \frac{m_1 m_2 - L^2\cos\beta_y}{\sqrt{(L^2 - m_1^2)(L^2 - m_2^2)}}\,.
\end{aligned}
$$

Anhand der Relationen (54) lassen sich hieraus die übrigen Parameterbereiche erschließen.

Die uniforme Näherung der $d-$Funktion ist auch der Ausgangspunkt für die asymptotische Behandlung der $z-$Torsion, denn Kugelflächenfunktionen lassen sich durch Wignersche $d-$Funktionen ausdrücken [**63**],

$$Y_{lm}(\cos\theta,\varphi) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\, d^{l}_{0\,m}(\theta)\,. \tag{83}$$

Zur asymptotischen Auswertung des Torsionsmatrixelementes (56) werden die beiden hierin auftretenden Kugelflächenfunktionen gemäß Gleichung (83) durch die asymptotische Näherung der $d-$Funktion (79) ersetzt. Hierbei wird die Integraldarstellung der Airy Funktion verwendet [**68**],

$$\mathrm{Ai}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\cos\left(\lambda t + \frac{t^3}{3}\right)\,. \tag{84}$$

Es liegt nahe, das resultierende Dreifachintegral durch eine Sattelpunktnäherung asymptotisch auszuwerten. In diesem Fall erweist es sich als die einfachere Variante, die drei Sattelpunktnäherungen sukzessive, also nicht als Integral in einem höherdimensionalen Raum, zu lösen.

Um das Airyintegral (84) in die hierfür geeignete Form zu bringen, wird die Integrationsvariable gemäß $t \to L^{\frac{1}{3}}t'$ transformiert. Wegen $\lambda \sim L^{\frac{2}{3}}$ ist nach dieser Transformation der Vorfaktor in der $d-$Funktion von der Ordnung Eins und das Argument des Integranden in (84) von der Ordnung L.

Die resultierende Sattelpunktgleichung $t = \pm\sqrt{-\lambda}$ hat für $R > 0$ eine positive reelle Lösung. Die Auswertung des Integrals am Sattelpunkt erfolgt nun mit der asymptotischen Näherung

$$\int \mathrm{d}x f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Lg(x)} = \sum_k \left[\frac{2\pi}{L|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|_{x_k}}\right]^{\frac{1}{2}} f(x_k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}Lg(x_k)\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,, \tag{85}$$

worin k die Sattelpunkte indiziert und das Vorzeichen von $\pi/4$ durch das Vorzeichen von $(\partial^2 g(x)/\partial x^2)|_{x_k}$ gegeben ist. Daraus resultiert die sogenannte einfache WKB-Näherung [**71, 29, 72**] der Kugelflächenfunktion,

$$\begin{aligned} Y_{lm} &= (-1)^{l-m}\frac{\sqrt{L}}{\pi}\frac{1}{R^{\frac{1}{4}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\cos\left(LS_{R>0} - \frac{\pi}{4}\right)\,, \qquad (86)\\ S_{R>0} &= \frac{m}{L}\arccos\frac{mz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{L^2-m^2}} - \arccos\frac{Lz}{\sqrt{L^2-m^2}} \end{aligned}$$

mit $z = \cos\theta$, die in dieser Form für $R > 0$ und $0 \leq \theta \leq \pi$ Gültigkeit besitzt.

Ist dagegen der relevante Sattelpunkt für $R < 0$ rein imaginär, so muß das Integral mit der Methode des stärksten Abklingens ausgewertet werden [**69**]. Nun resultiert die für $R < 0$ und $0 \leq \theta \leq \pi$ gültige WKB-Näherung

$$\begin{aligned} Y_{lm} &= (-1)^{l-m}\frac{\sqrt{L}}{2\pi}\frac{1}{|R|^{\frac{1}{4}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}LS_{R<0}-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,, \qquad (87)\\ S_{R<0} &= \frac{\pi}{4L} + \mathrm{i}\left[\frac{m}{L}\mathrm{arccosh}\,\frac{mz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{L^2-m^2}} - \mathrm{arccosh}\,\frac{Lz}{\sqrt{L^2-m^2}}\right]. \end{aligned}$$

Während die Näherung (86), (87) für $R > 0$ oszilliert, fällt sie für $R < 0$ exponentiell ab, da der Exponent in (87) reell und negativ ist. In der Umgebung von $R = 0$ bricht die WKB-Näherung zusammen.

Als Zwischenresultat ist festzuhalten, daß für die Berechnung des Torsionsmatrixelementes mit der Sattelpunktnäherung die Verwendung der uniformen Approximation der Kugelflächenfunktion gegenüber der einfachen WKB-Form keinen Vorteil bringt. Vielmehr ergibt sich die WKB-Form aus der uniformen Approximation durch eben diese Sattelpunktnäherung.

Die verbleibende Integration über z schreibt sich mit (56), (86), (87) als

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{z\,l_1 l_2 m} &= \frac{(-1)^{l_1+l_2}}{2\pi}\sqrt{L_1 L_2}\sum_{\sigma_1,\sigma_2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\sigma_1+\sigma_2)\frac{\pi}{4}} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \frac{1}{|R_1\,R_2|^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S(z)}\,, && (88)\\ S(z) &= \sigma_1 L_1 S_1(z) + \sigma_2 L_2 S_2(z) - \tau m z\,. && (89) \end{aligned}$$

Das Integral ist so zu lesen, daß der Integrationsbereich, bedingt durch die Vorzeichen von R_1 und R_2, in Intervalle unterteilt ist, innerhalb derer die jeweils gültige WKB-Form (86), (87) für die Kugelflächenfunktionen eingesetzt ist. Die Parameter σ_i nehmen für $R_i > 0$ die Werte $\sigma_i = \pm 1$ und für $R_i < 0$ ausschließlich den Wert $\sigma_i = 1$ an.

Die WKB-Näherung der Kugelflächenfunktion divergiert in der Nähe von $R_i = 0$. Das Integral (88) läßt sich nur dann in Sattelpunktnäherung approximieren, wenn die Sattelpunkte ausreichend weit von diesen Divergenzen entfernt liegen. Die Auswertung des Sattelpunktintegrals erfolgt lediglich an reellen Sätteln gemäß (85). Sind Sättel komplex, so sind ihre Beiträge zum Integral exponentiell klein und von der Größenordnung der bei der asymptotischen Näherung der Kugelflächenfunktionen vernachlässigten Korrekturen.

Die Sattelpunktgleichung eines Summanden in (88) lautet

$$\sigma_1 L_1 \frac{\partial S_1}{\partial z} + \sigma_2 L_2 \frac{\partial S_2}{\partial z} - \tau m = 0\,. \tag{90}$$

Sie ist für beide Bereiche der WKB-Näherung identisch, weil die Ableitungen von $S_{R>0}$ und $S_{R<0}$ übereinstimmen,

$$\frac{\partial S_{R>0}}{\partial z} = \frac{\partial S_{R<0}}{\partial z} = \frac{\sqrt{R}}{L(1-z^2)}\,. \tag{91}$$

Im folgenden wird wegen $\mathcal{T}_{z\,l_1 l_2 m} = \mathcal{T}_{z\,l_2 l_1 m}$ immer $l_1 > l_2$ und ohne Einschränkung $\tau m > 0$ angenommen. Die anderen Parameterbereiche von τ und m lassen sich über Symmetrierelationen erschließen. Zur Vereinfachung dienen die Bezeichnungen

$$y = 1 - z^2\,, \quad a_1 = \frac{L_1^2}{m^2}\,, \quad a_2 = \frac{L_2^2}{m^2}\,. \tag{92}$$

Damit schreibt sich die Sattelpunktgleichung

$$\sigma_1\sqrt{a_1 y - 1} + \sigma_2\sqrt{a_2 y - 1} = \tau y\,. \tag{93}$$

Diese läßt sich zu einer quadratischen Gleichung umformen,

$$\tau^4 y^2 - 2\tau^2(a_1 + a_2)y + (a_1 - a_2)^2 + 4\tau^2 = 0\,, \tag{94}$$

unter deren Lösungen

$$y_\eta = \frac{1}{\tau^2}\left(a_1 + a_2 + 2\eta\sqrt{a_1 a_2 - \tau^2}\right) \tag{95}$$

mit $\eta = \pm 1$ sich auch die Lösungen der Sattelpunktgleichung befinden.

Offenbar können reelle Lösungen y_η der Sattelpunktgleichung (93) nur unter den Bedingungen

$$a_i y_\eta - 1 = \frac{R_i}{L_i^2} > 0\,, \quad i = 1, 2 \tag{96}$$

auftreten. Reelle Sattelpunkte liegen also ausschließlich in dem Integrationsbereich $[1/a_2, 1]$, in dem beide Kugelflächenfunktionen oszillieren.

Des weiteren können unter den an die Parameter l_1, l_2, m, τ gestellten Bedingungen reelle Sattelpunkte lediglich für $\sigma_1 = 1$ auftreten. Dazu muß in den Lösungen (95) die Diskriminante $a_1 a_2 - \tau^2 \geq 0$ sein. Ob es in dem Intervall $[1/a_2, 1]$ eine oder zwei Lösungen gibt und ob sie mit $\sigma_2 = -1$ oder $\sigma_2 = 1$ auftreten, hängt folglich bei gegebenen Parametern l_1, l_2, m von der Torsionskonstanten τ ab. Um die Lösungen anhand des Parameters τ zu klassifizieren, werden zunächst vier ausgezeichnete Werte von τ betrachtet.

Befindet sich eine Lösung $y = 1$ am oberen Rand des Integrationsgebietes, so wird die Sattelpunktgleichung zu

$$\sqrt{a_1 - 1} + \sigma_2\sqrt{a_2 - 1} = \tau_{1,\sigma_2}\,, \tag{97}$$

woraus sich zwei kritische Werte, $\tau_{1,\sigma_2=+1}$ und $\tau_{1,\sigma_2=-1}$, ergeben. Aus (95) folgt, daß $y > 1$ für $\tau > \tau_{1,\sigma_2}$ und $y < 1$ für $\tau < \tau_{1,\sigma_2}$ gilt. Offenbar ist $\tau_{1,1} > \tau_{1,-1}$. Durch Einsetzen von $\tau_{1,-1}$ in (95),

$$y_\eta = \frac{a_1 + a_2 + 2\eta\sqrt{(a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1}}{a_1 + a_2 - 2\sqrt{(a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1}}\,, \tag{98}$$

wird ersichtlich, daß es für $\sigma_2 = -1$ nur eine Lösung y_{-1} innerhalb des Intervalls $[1/a_2, 1]$ gibt. Für $\tau_{1,1}$ dagegen folgt

$$y_\eta = \frac{a_1 + a_2 + 2\eta\sqrt{(a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1}}{a_1 + a_2 + 2\sqrt{(a_1 - 1)(a_2 - 1) - 1}}\,. \tag{99}$$

Demnach gibt es eine Lösung y_{-1} für $1/a_1 + 1/a_2 < 1$ und zwei Lösungen $y_{\pm 1}$, falls $1/a_1 + 1/a_2 > 1$ ist.

Erreicht eine Lösung die untere Grenze des Intervalls, $y = 1/a_2$, so folgt aus der Sattelpunktgleichung

$$\tau_{1/a_2} = \sqrt{a_2(a_1 - a_2)}\,. \tag{100}$$

Bei $y = 1/a_2$ handelt es sich um den Lösungszweig y_{-1}. Offenbar ist $\tau_{1,-1} < \tau_{1/a_2}$.

Im Fall $1/a_1 + 1/a_2 < 1$, in dem es bei $\tau_{1,1}$ zwei Lösungen $y_{\pm 1}$ im Intervall $[1/a_2, 1]$ gibt, tritt noch ein weiteres kritisches τ auf,

$$\tau_{\max} = \sqrt{a_1 a_2}\,. \tag{101}$$

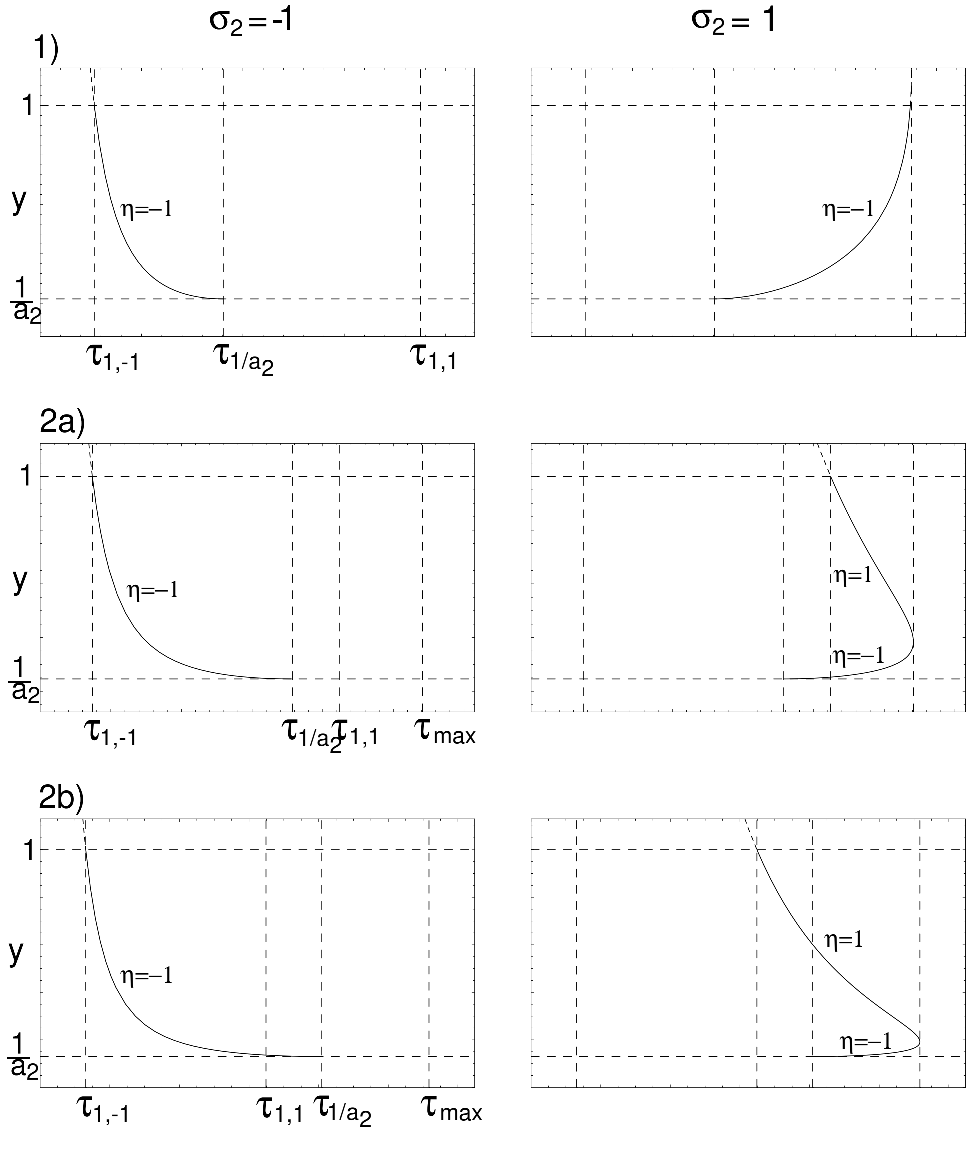


Abbildung 1. Die Lösungen der Sattelpunkgleichung in Abhängigkeit von τ für die verschiedenen Konstellationen der kritischen Werte von τ. Die linke Spalte zeigt mit $\sigma_2 = -1$ auftretende Lösungen, die rechte Spalte die Lösungen mit $\sigma_2 = 1$. Im Fall $\sigma_2 = -1$ handelt es sich immer um die Lösung y_{-1}, im Fall $\sigma_2 = 1$ kann es zusätzlich zu der Lösung y_{-1} die Lösung y_1 geben. Der Verlauf der Lösungen außerhalb des Intervalls $[1/a_2, 1]$ ist gestrichelt angedeutet.

Bei $\tau_{\max}$ sind die Lösungen $y_{\pm 1}$ entartet, da die Diskriminante in (95) verschwindet. Größere Werte für τ führen zwangsläufig auf komplexe Lösungen. Damit ist die Anordnung der kritischen Werte $\tau_{1,-1} < \tau_{1,1}, \tau_{1/a_2} < \tau_{\max}$.

Das Verhalten der Lösungen zwischen den kritischen Werten für τ zeigt Abbildung 1. Im Fall $1/a_1 + 1/a_2 > 1$, dargestellt in Abbildung 1.1, gibt es nur eine reelle

Lösung y_{-1} im Intervall $[1/a_2, 1]$. Bei $\tau < \tau_{1/a_2}$ tritt sie zu $\sigma_2 = -1$ und bei $\tau > \tau_{1/a_2}$ zu $\sigma_2 = 1$ auf.

Ist dagegen $1/a_1 + 1/a_2 < 1$, so gibt es bei $\tau > \tau_{1,1}$ zusätzlich zu y_{-1} eine zweite Lösung y_1 im Intervall $[1/a_2, 1]$. Ist dabei $\tau_{1,1} > \tau_{1/a_2}$, so treten oberhalb von $\tau_{1,1}$ beide Lösungen zu $\sigma_2 = 1$ auf (Abbildung 1.2a). Im anderen Fall gibt es zwischen $\tau_{1,1}$ und τ_{1/a_2} eine Lösung y_{-1} zu $\sigma_2 = -1$ und eine Lösung y_1 zu $\sigma_2 = 1$ (Abbildung 1.2b).

Nun kann das Torsionsmatrixelement durch das Sattelpunktintegral (85) approximiert werden. Zu jeder Lösung y_η gibt es zwei Sattelpunkte

$$z_\eta^\pm = \pm\sqrt{1 - y_\eta}\,. \tag{102}$$

Die für das Sattelpunktintegral benötigte zweite Ableitung des Exponenten (89) im Integranden läßt sich an den Sattelpunkten $z_\eta^\pm$ unter Verwendung der Sattelpunktgleichung als

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\Big|_{z_\eta^\pm} = \eta\sigma_2 \frac{m\tau^3(a_1 a_2 - \tau^2) z_\eta^\pm}{(a_1 + \eta\sqrt{a_1 a_2 - \tau^2})(a_2 + \eta\sqrt{a_1 a_2 - \tau^2})} \tag{103}$$

schreiben. Damit resultiert als Vorfaktor der Sattelpunktnäherung

$$\frac{(-1)^{l_1+l_2}}{2\pi} \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{|R_1\, R_2|^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{2\pi}{\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\big|_{z_\eta^\pm}}} = \frac{(-1)^{l_1+l_2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{L_1 L_2}{\eta\sigma_2 z_\eta^\pm m^3 \tau \sqrt{a_1 a_2 - \tau^2}}}\,. \tag{104}$$

Unter Berücksichtigung von

$$S(-z) = (L_1 - m + \sigma_2(L_2 - m))\pi - S(z) \tag{105}$$

kann der Beitrag $T^\eta_{z\,l_1 l_2 m}$ von z_η^+ und z_η^- zum Matrixelement allein mit dem Sattelpunkt z_η^+ als

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^\eta_{z\,l_1 l_2 m} &= \sqrt{\frac{2L_1 L_2}{\pi z_\eta^+ m^3 \tau \sqrt{a_1 a_2 - \tau^2}}} \times \begin{cases} \cos\Phi\,, & l_1 - l_2 \text{ gerade}\,, \\ -\mathrm{i}\sin\Phi\,, & l_1 - l_2 \text{ ungerade}\,, \end{cases} && (106) \\ \Phi &= S(z_\eta^+) - (1 + \sigma_2 + \sigma_2\eta)\frac{\pi}{4} && (107) \end{aligned}$$

geschrieben werden.

Gibt es nur eine relevante Lösung y_{-1} der Sattelpunktgleichung, so läßt sich das Torsionsmatrixelement $\mathcal{T}_{z\,l_1 l_2 m} = \mathcal{T}^{\eta=-1}_{z\,l_1 l_2 m}$ vereinfachen zu

$$\mathcal{T}_{z\,l_1 l_2 m} = \sqrt{\frac{2L_1 L_2}{\pi z_{-1}^+ m^3 \tau \sqrt{a_1 a_2 - \tau^2}}} \times \begin{cases} \cos(S(z_{-1}^+) - \frac{\pi}{4})\,, & l_1 - l_2 \text{ gerade}\,, \\ -\mathrm{i}\sin(S(z_{-1}^+) - \frac{\pi}{4})\,, & l_1 - l_2 \text{ ungerade} \end{cases} \tag{108}$$

Tritt eine zweite Lösung y_1 zu $\sigma_2 = 1$ auf, so liefert diese den zusätzlichen Beitrag

$$\mathcal{T}^1_{z\,l_1 l_2 m} = \sqrt{\frac{2L_1 L_2}{\pi z_1^+ m^3 \tau \sqrt{a_1 a_2 - \tau^2}}} \times \begin{cases} -\sin(S(z_1^+) - \frac{\pi}{4})\,, & l_1 - l_2 \text{ gerade}\,, \\ -\mathrm{i}\cos(S(z_1^+) - \frac{\pi}{4})\,, & l_1 - l_2 \text{ ungerade} \end{cases} \tag{109}$$

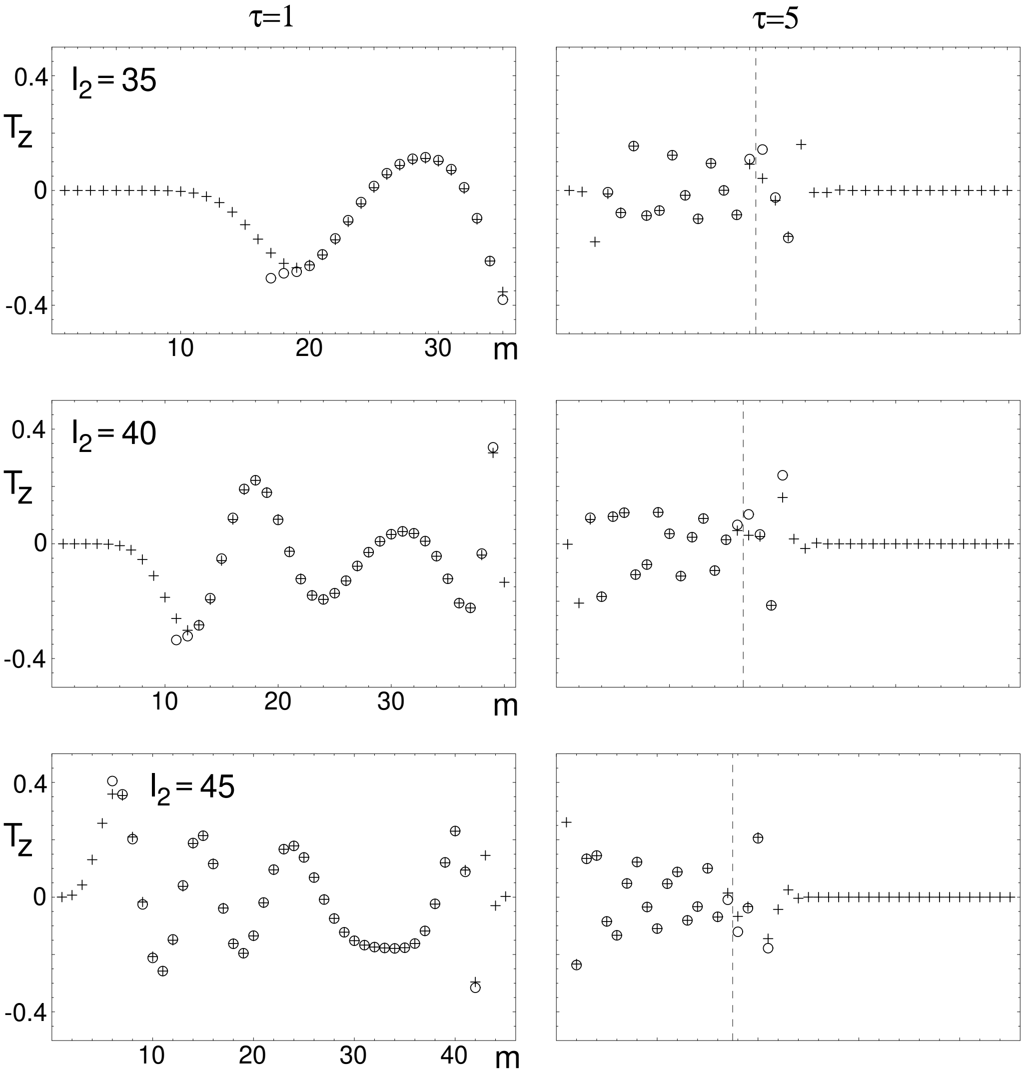


ABBILDUNG 2. Exakte Matrixelemente (+) und ihre Sattelpunktnäherung (○) für $l_1 = 50$ und $l_2 = 35, 40, 45$ mit Torsionskonstanten $\tau = 1$ und $\tau = 5$. Bei $\tau = 1$ gibt es nur eine Lösung y_{-1} der Sattelpunktgleichung, bei $\tau = 5$ treten rechts von der gestrichelten Linie zwei Lösungen $y_{\pm 1}$ auf.

zum Torsionsmatrixelement,

$$\mathcal{T}_{z\,l_1 l_2 m} = \mathcal{T}^{-1}_{z\,l_1 l_2 m} + \mathcal{T}^{1}_{z\,l_1 l_2 m}\,. \tag{110}$$

In Abbildung 2 ist die Sattelpunktnäherung des Torsionsmatrixelementes dem exakten Matrixelement gegenübergestellt. Die Matrixelemente sind für die festen Indizes $l_1 = 50$ und $l_2 = 35, 40, 45$ gegen den Index m aufgetragen. In der linken Spalte beträgt der Torsionsparameter $\tau = 1$, in der rechten $\tau = 5$. Bei $\tau = 1$ gibt es nur eine Lösung y_{-1} der Sattelpunktgleichung, bei $\tau = 5$ treten rechts von der senkrechten gestrichelten Linie zwei Lösungen $y_{\eta=\pm 1}$ auf. Die Sattelpunktnäherung bricht zusammen, sobald sich ein Sattelpunkt dem Rand des Integrationsgebietes nähert.

2. Die Torsionsmatrix in Van-Vleck-Näherung

Über einen alternativen Zugang läßt sich die Sattelpunktnäherung des Torsionsmatrixelementes als die semiklassische Näherung eines quantenmechanischen Propagators gewinnen. Das Integral (56) wird dazu als Matrixelement eines Propagators in Ortsdarstellung interpretiert,

$$U_{l'l} = \langle l' | \mathrm{e}^{-\mathrm{i} m \tau \hat{H}} | l \rangle \,. \tag{111}$$

Die Kugelflächenfunktionen werden als von l abhängige Ortszustände $|l\rangle$ angesehen, der Hamiltonoperator ist durch $\hat{H} = m \cos\theta$ gegeben und der Torsionsparameter τ tritt in der Rolle der Zeit auf.

Die semiklassische Approximation von U, der sogenannte Van-Vleck-Propagator [**73, 74**]

$$U^{sk}_{l'l} = \sum_j \sqrt{\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\partial^2 S_j}{\partial L \partial L'}} \; \mathrm{e}^{\mathrm{i} S_j(L', L, \tau) - \mathrm{i}\frac{\mu_j}{2}\pi} \,, \tag{112}$$

schreibt sich mit $L = l + 1/2$ als Summe über alle klassischen Trajektorien j, die von L nach L' führen und beinhaltet die zugehörige Wirkungsfunktion S_j sowie den Morseindex μ_j.

Der Hamiltonoperator $\hat{H} = m \cos\theta$ wirkt auf einen Ortszustand $|l\rangle$ gemäß

$$\frac{1}{m} \hat{H} \, |l\rangle = \left[\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+3)} \right]^{\frac{1}{2}} |l+1\rangle + \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)} \right]^{\frac{1}{2}} |l-1\rangle \,. \tag{113}$$

Weiter läßt sich zu $\hat{l}$ der kanonisch konjugierte Operator $\hat{p} = -\mathrm{i}\partial/\partial l$ definieren, der eine Translation in l generiert,

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\hat{p}} \, |l\rangle = |l \pm 1\rangle \,. \tag{114}$$

Mit der Bezeichnung

$$f(l) = \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l-1)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{115}$$

schreibt sich nun Gleichung (113) als

$$\frac{1}{m} \hat{H} \, |l\rangle = \frac{1}{2} f(l+1) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{p}} \, |l\rangle + \frac{1}{2} f(l) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{p}} \, |l\rangle \,. \tag{116}$$

Der klassische Limes wird für große Quantenzahlen $L = l + 1/2$ angestrebt. Damit schreibt sich $f(l+1) = f(L+1/2)$ und $f(l) = f(L-1/2)$. Für $L \gg 1$ ist dann $f(L+1/2) \approx f(L-1/2) \approx f(L)$ und

$$f(L) = \sqrt{1 - \frac{m^2}{L^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right) \,. \tag{117}$$

Die quantenmechanischen Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{p}$ gehen im klassischen Limes in die klassischen Observablen H und p über. Aus Gleichung (116) folgt im klassischen Limes die autonome Hamiltonfunktion

$$H = f(L)\, m \cos p = \sqrt{1 - \frac{m^2}{L^2}} m \cos p = E\,. \tag{118}$$

Daraus leiten sich die Hamiltonschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -m\sqrt{1 - \frac{E^2}{m^2} - \frac{m^2}{L^2}}\,, && (119) \\ \dot{p} &= -\frac{(\cos^2 p - (E/m)^2)^{\frac{3}{2}}}{(E/m)\,\cos^2 p} && (120) \end{aligned}$$

ab. Die Integration von Gleichung (119) führt auf

$$L' = \pm\sqrt{L^2 - 2m\tau\sqrt{L^2(1 - \frac{E^2}{m^2}) - m^2} + m^2\tau^2(1 - \frac{E^2}{m^2})}\,. \tag{121}$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß bei zwei oder vier reellen Werten der Energie Trajektorien von L nach L' führen,

$$E = \pm\left[m^2 - \frac{L^2 + L'^2}{\tau^2} \pm \frac{2}{\tau^2}\sqrt{L^2 L'^2 - \tau^2 m^4}\right]^{\frac{1}{2}}\,. \tag{122}$$

Die reellen Energiewerte E/m sind genau die Sattelpunkte $x_\eta^\pm = \pm\sqrt{1 - y_\eta}$ aus Abschnitt 1.

Nun lassen sich mit dem Impuls

$$p(L, E) = \pm \arccos \frac{EL}{m\sqrt{L^2 - m^2}} \tag{123}$$

die energieabhängigen Wirkungsfunktionen der Trajektorien angeben,

$$\begin{aligned} S(L', L, E, \sigma) &= \int_L^{L'} \mathrm{d}L'' p(L'', E) && (124) \\ &= \left[L' \arccos \frac{EL'}{\sqrt{L'^2 - m^2}} - m \arccos \frac{Em}{\sqrt{(1 - E^2)(L'^2 - m^2)}}\right] + \\ &\quad \sigma\left[L \arccos \frac{EL}{\sqrt{L^2 - m^2}} - m \arccos \frac{Em}{\sqrt{(1 - E^2)(L^2 - m^2)}}\right], \end{aligned}$$

aus denen nach einer Legendretransformation die zeitabhängigen Wirkungsfunktionen resultieren,

$$S(L', L, \tau) = S(L', L, E) - E(L', L, \tau)\,\tau\,. \tag{125}$$

Trajektorien können abhängig von ihrer Energie entweder auf direktem Wege oder über einen Wendepunkt von L nach L' laufen. An einem Wendepunkt müssen verschiedene Zweige der Wirkungsfunktion $S(L', L, E)$ aneinandergefügt werden. Daher resultiert in der Wirkung (124) das Vorzeichen $\sigma = -1$ für direkte Trajektorien und $\sigma = 1$ für Trajektorien über einen Wendepunkt. Die hierbei aufgegriffenen

Phasen bestimmen den Morseindex [**71**]. Offenbar hat $S(L', L, t)$ mit dem richtigen Morseindex genau die Form des Exponenten in der Sattelpunknäherung (107).

Der Vorfaktor des semiklassischen Propagators schließlich ist durch

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\left|\frac{\partial^2 S(L', L, \tau)}{\partial L \partial L'}\right|} = \sqrt{\frac{L'L}{2\pi E m^2 \tau \sqrt{a_1 a_2 - \tau^2}}} \tag{126}$$

gegeben und stimmt betraglich ebenfalls mit dem Vorfaktor der Sattelpunktnäherung (106) überein.

Die asymptotische Näherung des Torsionsmatrixelementes mittels des Van-Vleck-Formalismus ist somit identisch mit dem aus der Sattelpunktnäherung stammenden Resultat.

3. Toeplitzstruktur der Frobenius-Perron-Matrix im integrablen Fall

Die Frobenius-Perron-Matrix der $z-$Torsion ist diagonal bezüglich des Index m. Jeder Block zu festem m strebt asymptotisch gegen eine Bandmatrix, deren Matrixelemente entlang einer Diagonalen konstant sind. Eine Matrix mit auf den Diagonalen konstanten Matrixelementen heißt auch Toeplitzmatrix [**20**].

Zu festem Index m ist die Frobenius-Perron-Matrix der $z-$Drehung sogar eine diagonale Toeplitzmatrix, und entsprechend läßt sich die Frobenius-Perron-Matrix der $y-$Drehung durch eine Rotation der Basiszustände auf Toeplitz-Diagonalform bringen.

Wie in Kapitel 3.3 ausgeführt, entspricht der Index l einer Phasenraumskala. Aufgrund der Bandstruktur koppelt die Frobenius-Perron-Matrix jeweils nur wenige, benachbarte Phasenraumskalen aneinander. Im Fall der Drehungen sind verschiedene Phasenraumskalen sogar unabhängig voneinander. Damit trägt die Toeplitz-Bandstruktur dem Charakter einer regulären Dynamik Rechnung.

Darüber hinaus folgt aus der Toeplitzstruktur der Frobenius-Perron-Matrix, daß die Kopplung zwischen benachbarten Phasenraumskalen skalenunabhängig ist. Lediglich auf der globalen Skala treten Abweichungen von der skalenunabhängigen Kopplung auf, die unter anderem durch die Topologie des Phasenraumes bedingt sind.

Zu zeigen bleibt die Toeplitz-Bandstruktur der Torsionsmatrix. Das Torsionsmatrixelement (63) läßt sich unter Verwendung von Symmetrierelationen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten [**63, 64**] zu

$$\mathcal{T}_{z\,l_1 l_2 m} = (-1)^m \sum_{l=\Delta}^{2l_1-\Delta} (-\mathrm{i})^l (2l+1) j_l(m\tau) C^{l_1-\Delta\ l\ l_1}_{0\,0\,0}\ C^{l_1\ l\ l_1-\Delta}_{-m\,0\,m} \tag{127}$$

mit $\Delta = l_1 - l_2 > 0$ umformen. Für $\Delta < m\tau$ lassen sich die Matrixelemente aus der in Abschnitt 1 behandelten Sattelpunktnäherung bestimmen und sind von der Größenordnung Eins. Um für $\Delta > m\tau$ den Betrag von $\mathcal{T}_{z\,l_1 l_2 m}$ nach oben abzuschätzen, wird

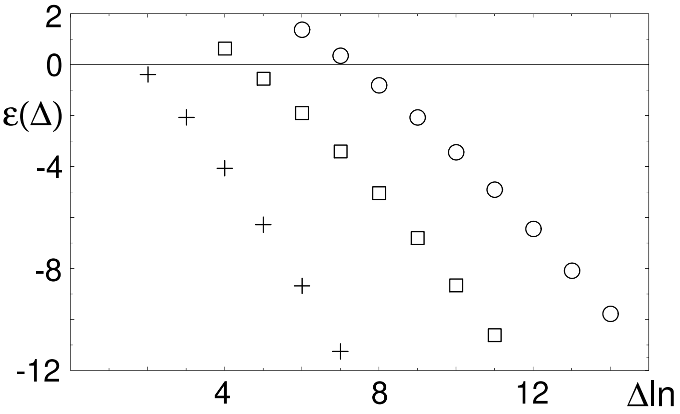


ABBILDUNG 3. Die Abschätzung $\epsilon(m\tau, \Delta)$ für $m\tau = 1$ (+), $m\tau = 3$ (□) und $m\tau = 5$ (∘) fällt exponentiell mit Δ ab.

$|C^{l_1\ l_2\ l_3}_{m_1\,m_2\,m_3}| < 1$ berücksichtigt, und die sphärische Besselfunktion durch ihre asymptotische Näherung ersetzt,

$$j_l(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2k(2l+1)}} \left(\frac{\mathrm{e}k}{2l+1}\right)^{l+\frac{1}{2}} . \tag{128}$$

Eine obere Schranke für das Torsionsmatrixelement ist damit

$$|\mathcal{T}_{z\, l_1 l_2 m}| < \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}} \sum_{l=\Delta}^{2l_1-\Delta} \left(\frac{\mathrm{e}m\tau}{2l}\right)^l . \tag{129}$$

Nach weiteren Abschätzungen resultiert mit der Gammafunktion $\Gamma(n)$ und der unvollständigen Gammafunktion $\Gamma(n, x)$

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}_{z\, l_1 l_2 m}| &< \epsilon(2l_1 - \Delta, \Delta, m\tau) , \qquad (130) \\ \epsilon(2l_1 - \Delta, \Delta, m\tau) &= \sqrt{\frac{\mathrm{e}\pi}{\Delta}} \frac{m\tau}{2} \mathrm{e}^{m\tau/2} \left(\frac{\Gamma(2l_1 - \Delta, m\tau/2)}{\Gamma(2l_1 - \Delta)} - \frac{\Gamma(\Delta - 1, m\tau/2)}{\Gamma(\Delta - 1)}\right) . \end{aligned}$$

Im Limes $l_1 \to \infty$ konvergiert die Abschätzung von unten gegen $\epsilon(\infty, \Delta, m\tau) > \epsilon(2l_1 - \Delta, \Delta, m\tau)$,

$$\epsilon(\infty, \Delta, m\tau) = \sqrt{\frac{\mathrm{e}\pi}{\Delta}} \frac{m\tau}{2} \mathrm{e}^{m\tau/2} \left(1 - \frac{\Gamma(\Delta - 1, m\tau/2)}{\Gamma(\Delta - 1)}\right) . \tag{131}$$

Diese Abschätzung fällt exponentiell mit Δ ab und ist unabhängig von l_1 und l_2. Sie ist gültig, wenn für $\Delta > m\tau$ die asymptotische Näherung (128) der Besselfunktion diese gut beschreibt. Abbildung 3 zeigt in logarithmischer Darstellung den exponentiellen Abfall der Funktion $\epsilon(m\tau, \Delta)$ für $m\tau = 1, 3, 5$. Die Abschätzung ist jeweils erst für $\Delta > m\tau$ dargestellt.

Weil Δ den Abstand eines Matrixelementes von der Hauptdiagonalen angibt, ist das Resultat dieser Abschätzung, daß Matrixelemente mit einem Abstand $\Delta > m\tau$ zur Hauptdiagonalen exponentiell mit Δ abfallen. Daher hat die Matrix Bandstruktur. Die halbe Breite des Bandes beträgt etwa $m\tau$.

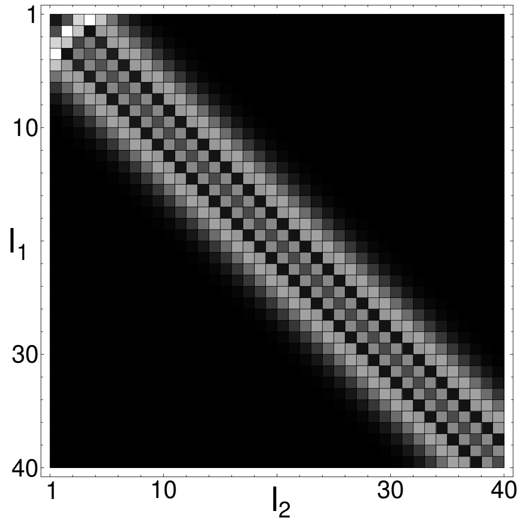


ABBILDUNG 4. Die Toeplitz-Bandstruktur der Torsionsmatrix mit $\tau = 5, m = 1$ und $l_1, l_2 \leq 40$. Schwarze Bereiche kennzeichnen verschwindend kleine und helle Bereiche betraglich große Matrixelemente.

Um zu zeigen, daß die Matrix ein Toeplitzmatrix ist, wird nun Δ festgelegt und $l_1 \gg \Delta$ angenommen, was aufgrund der Bandstruktur legitim ist. Die asymptotische Form von Clebsch-Gordan-Koeffizienten mit zwei großen Indizes $l_1, (l_1 - \Delta)$ und einem kleinen Index, $l \ll l_1, (l_1 - \Delta)$, ist durch die Wignersche $d-$Funktion gegeben [**72**],

$$C^{l_1\, l\, l_1-\Delta}_{-m\, 0\, m} \approx d^l_{0\,-\Delta}(\alpha)\,, \quad \alpha = \arccos\frac{m}{l_1-\Delta}. \tag{132}$$

Wird die asymptotische Form der Clebsch-Gordan-Koeffizienten in (127) eingesetzt und die Summe auf die ersten $N \ll 2l_1 - \Delta$ Summanden beschränkt, so ergibt sich für $l_1 - \Delta \gg m$ die asymptotische Approximation

$$\mathcal{T}^N_{z\, l_1(l_1-\Delta)m} \approx (-1)^m \sum_{l=\Delta}^{N} (-\mathrm{i})^l\, (2l+1)\, j_l(m\tau)\, d^l_{0\,-\Delta}\left(\frac{\pi}{2}\right)\, d^l_{0\,\Delta}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \epsilon(N)\,, \tag{133}$$

wobei der durch das Abschneiden der Summe nach $N - \Delta$ Summanden entstandene Fehler $\epsilon(N)$ wegen

$$\epsilon(N) < \epsilon(2l_1 - \Delta, N, m\tau) < \epsilon(\infty, N, m\tau) \tag{134}$$

exponentiell mit N abfällt. Damit ist die asymptotische Toeplitzstruktur der Matrix gezeigt.

In Abbildung 3 sind die Beträge der Torsionsmatrixelemente mit $l_1, l_2 \leq 40$ und $\tau = 5, m = 1$ in einer Grauskalengrafik dargestellt. Die Grauskala variiert von Schwarz für verschwindende Matrixelemente bis Weiß für das Matrixelement mit maximaler Amplitude. Die Toeplitz-Bandstruktur der Matrix ist offensichtlich. Den

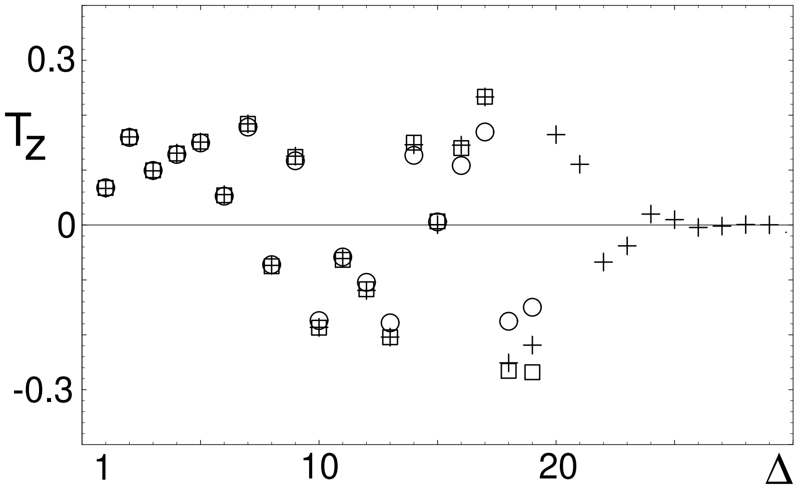


ABBILDUNG 5. Exakte Matrixelemente (+), ihre Sattelpunktnäherung (soweit möglich) (□) und der aus der Sattelpunktnäherung resultierende asymptotische Grenzwert (○) für $l_1 = 150$, $m = 2$ und $\tau = 10$. Für $\Delta < m\tau$ lassen sich die Matrixelemente gut durch den asymptotischen Grenzwert approximieren. Die Sattelpunktnäherung und der asymptotische Grenzwert brechen bei $\Delta \approx m\tau$ zusammen.

Erwartungen entsprechend ist die halbe Breite des Bandes etwa durch $\Delta = m\tau = 5$ gegeben.

Ein einfacher Ausdruck für den Grenzwert von $\mathcal{T}_{z\,l_1(l_1-\Delta)m}$ im Limes $l_1 \to \infty$ läßt sich aus der Sattelpunktnäherung (108) bestimmen. Dazu werden die Indizes

$$L = \frac{L_1 + L_2}{2}\,, \quad \Delta = L_1 - L_2 \tag{135}$$

eingeführt, mit denen sich $L_1 = L + \Delta/2$ und $L_2 = L - \Delta/2$ schreiben. In dem zu betrachtenden Fall $L_1, L_2 \gg m\tau_z$ gibt es nur eine Lösung y_{-1} der Sattelpunktgleichung. In führender Ordnung in L lautet sie

$$y_{-1} = \frac{\Delta^2}{m^2\tau^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right)\,. \tag{136}$$

Offenbar entspricht diese Lösung nur für $\Delta < m\tau$ reellen Sattelpunkten $z^{\pm}_{-1}$. Wie bereits ausgeführt wurde, sind Matrixelemente mit $\Delta > m\tau$ exponentiell klein. Hier ergibt sich erneut die bereits abgeschätzte Bandbreite der Matrix.

Wird die Lösung y_{-1} in die Phase (89) des Sattelpunktintegrals eingesetzt und dieser Ausdruck in führender Ordnung in L entwickelt, so resultiert

$$S(\Delta, m, \tau) = -\Delta \arccos\sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{m^2\tau^2}} - \sqrt{m^2\tau^2 - \Delta^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^2}\right)\,. \tag{137}$$

Nach einer entsprechenden Entwicklung des Vorfaktors vereinfacht sich die Sattelpunktnäherung im Limes $L \to \infty$ zu

$$\mathcal{T}_z(\Delta, m, \tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(m^2\tau^2 - \Delta^2)^{\frac{1}{4}}} \times \begin{cases} \cos(S(\Delta, m, \tau) - \frac{\pi}{4}) \,, & \Delta \text{ gerade} \,, \\ -\mathrm{i} \sin(S(\Delta, m, \tau) - \frac{\pi}{4}) \,, & \Delta \text{ ungerade} \end{cases} \tag{138}$$

In Abbildung (5) sind exakte Matrixelemente, ihre Sattelpunktnäherung (108) und ihr aus der Sattelpunktnäherung abgeleiteter asymptotischer Grenzwert (138) für $l_1 = 150$, $m = 2$ und $\tau = 10$ gegen den Abstand von der Hauptdiagonalen Δ aufgetragen. Innerhalb des Bereiches $\Delta < m\tau$ besteht gute Übereinstimmung zwischen den Näherungen und dem exakten Matrixelement. Bei $\Delta \approx m\tau$ brechen die Näherungen zusammen. Für $\Delta > m\tau$ werden die exakten Matrixelemente exponentiell klein.

4. Das Spektrum und die Eigenfunktionen der Toeplitzmatrix

Bei einer integrablen Dynamik setzt sich der Phasenraum aus Energieschalen zusammen. Sowohl auf einer Energieschale als auch auf dem gesamten Phasenraum läßt sich ein Hilbertraum definieren. Es besteht die Erwartung, daß das Frobenius-Perron-Spektrum einer Energieschale Bestandteil des Frobenius-Perron-Spektrums des gesamten Phasenraumes ist. Letzteres sollte sich als Superposition der Spektren aller Energieschalen ergeben.

Das Frobenius-Perron-Spektrum der $z-$Drehung auf einer durch $p_0 = \cos\theta_0$ festgelegten Energieschale besteht aus den von der Energie unabhängigen Eigenwerten $\exp(-\mathrm{i}m\beta_z)$, mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Die Superposition der Spektren aller Energieschalen führt zu einer unendlichfachen Entartung dieser Eigenwerte.

Die Frobenius-Perron-Matrix der $z-$Drehung auf dem gesamten Phasenraum setzt sich aus anhand von m indizierten, diagonalen Toeplitzmatrizen zusammen. Der einzige Eigenwert $\exp(-\mathrm{i}m\beta_z)$ einer jeden Toeplitzmatrix ist unendlichfach entartet. Da Toeplitzmatrizen mit den Indizes $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ auftreten, ist das Spektrum der Frobenius-Perron-Matrix auf dem gesamten Phasenraum mit dem aus der Gesamtheit der Energieschalen gebildeten Spektrum identisch.

Die zugehörigen Eigenfunktionen auf dem gesamten Phasenraum sind die Kugelflächenfunktionen. Sobald mit $\cos\theta_0$ eine Energieschale festgelegt wird, reduzieren sich die Kugelflächenfunktionen auf die Eigenfunktionen $\exp(\mathrm{i}m\varphi)$ im Hilbertraum auf der Energieschale.

Die Frobenius-Perron-Matrix der $z-$Torsion auf dem gesamten Phasenraum besteht aus anhand von m indizierten, unendlich großen Blöcken, die mit wachsenden Indizes l_1, l_2 zu Toeplitzmatrizen werden. Spektrum und Eigenfunktionen eines solchen Blockes lassen sich aus der Toeplitzform bestimmen.

Dazu wird für die Koeffizienten der Eigenvektoren ein Fourieransatz gemacht [**75**],

$$v_k(n) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn} \,, \quad n = 1, 2, \ldots \,, \tag{139}$$

womit sich die asymptotische Eigenwertgleichung

$$\sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} \mathcal{T}_z(\Delta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(n+\Delta)} = \lambda_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kn} \tag{140}$$

schreibt. Wegen $\mathcal{T}_z(\Delta) = \mathcal{T}_z(-\Delta)$ folgen die Eigenwerte

$$\lambda_k = \mathcal{T}_z(0) + 2 \sum_{\Delta=1}^{\infty} \mathcal{T}_z(\Delta) \cos(k\Delta)\,, \tag{141}$$

wobei der Realteil von λ_k durch die Summanden mit geradem Δ und der Imaginärteil durch die Summanden mit ungeradem Δ geben ist. Wegen der Bandstruktur der Toeplitzmatrix lassen sich die Eigenwerte (141) durch eine der Breite des Bandes entsprechende Anzahl von Summanden approximieren. Alle weiteren Summanden steuern lediglich exponentiell kleine Korrekturen zu den Eigenwerten bei.

Die Lösungen der asymptotischen Eigenwertgleichung zu k und $-k$ sind entartet, jedoch sind aus dem zugehörigen zweidimensionalen Raum der Eigenvektoren nur solche Vektoren zulässig, die die zugehörige Randbedingung erfüllen.

Die Randbedingung besteht in der Forderung, daß bei einer gedachten Fortsetzung der Matrix über den linken oberen Rand hinaus die Koeffizienten der Eigenvektoren, die auf das erste Matrixelement der Fortsetzung treffen, verschwinden,

$$v_k(0) = 0\,. \tag{142}$$

Dort nämlich bricht die Matrix ab, und die benachbarten Matrixelemente entsprechen nicht der asymptotischen Form.

Die Koeffizienten des Eigenvektors zum Eigenwert λ_k ergeben sich als

$$v_k(n) = \sin(kn)\,. \tag{143}$$

Aus den sinusförmigen Koeffizienten der Eigenvektoren resultieren $\delta-$förmige Eigenfunktionen im Phasenraum, welche die beiden zu einer Energie gehörenden Energieschalen auf der Kugeloberfläche festlegen. Um das zu zeigen, genügt es, für die Kugelflächenfunktionen die einfache, für $l \gg |m|$ gültige asymptotische Näherung anzunehmen [**72**],

$$Y_{lm} = f(l,m)(1-\cos^2\theta)^{-\frac{1}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta + m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]. \tag{144}$$

Eine Approximation der Eigenfunktion im Hilbertraum ist dann mit $N \gg |m|$ und der Normierungskonstanten $C(N)$ durch

$$\begin{aligned} v_k^N(\theta,\varphi) \;=\; & \frac{1}{C(N)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \times \\ & \sum_{l=|m|}^{N} f(l,m) \sin\left[k(l-m+1)\right] \cos\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\theta + m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] \end{aligned} \tag{145}$$

gegeben, wobei zu beachten ist, daß der Bereich, in dem die einfache Näherung für Y_{lm} nicht gültig ist, von der Sinusfunktion mit kleinem Argument unterdrückt wird.

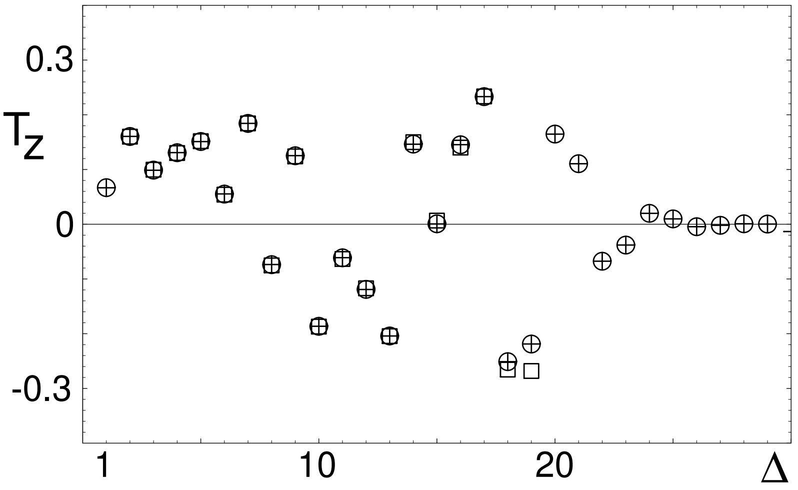


Abbildung 6. Exakte Matrixelemente (+), soweit möglich ihre Sattelpunktnäherung (□) und die uniforme asymptotische Näherung (○) für $l_1 = 150$, $m = 2$ und $\tau = 10$. Während die Sattelpunktnäherung bei $\Delta \approx m\tau$ zusammenbricht, behält die uniforme Approximation auch für $\Delta > m\tau$ ihre Gültigkeit (vgl. auch Abbildung 5).

Im Limes $N \to \infty$ wird dieser Ausdruck exakt. Er läßt sich mit $\Phi_1 = -(m - 1/2)k$ und $\Phi_2 = m\pi/2 - \pi/4$ umformen zu

$$v_k^N(\theta, \varphi) = \frac{1}{2C(N)} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \times \tag{146}$$

$$\sum_{l=m}^{N} \sin\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(k - \theta) + \Phi_1 - \Phi_2\right] + \sin\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)(k + \theta) + \Phi_1 + \Phi_2\right] .$$

Handelt es sich bei den $N - m + 1$ Summanden um oszillierende Terme, so verschwindet die Summe im Limes $N \to \infty$. Lediglich für $\theta = k$ oder $\theta = -k$ oszillieren die Terme nicht, und im Limes $N \to \infty$ resultiert

$$v_k(\theta, \varphi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \, \left(\delta(\theta + k) + \delta(\theta - k)\right) . \tag{147}$$

Folglich legt der Parameter k die Energieschale der Torsion fest.

5. Die uniforme Asymptotik der Torsionsmatrixelemente

Aus den asymptotischen Eigenwerten (141) und Eigenfunktionen (147) der Toeplitzmatrix läßt sich ein alternativer asymptotischer Ausdruck für die Torsionsmatrixelemente herleiten. Der in (141), (147) frei verfügbare Parameter k legt die Energieschale der Torsion fest. Die Eigenfunktionen (147) bilden die Fourierbasis des Hilbertraumes auf dieser Energieschale. Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, sind die Frobenius-Perron-Eigenwerte der Torsion auf dieser Energieschale durch

$$\lambda_k = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\tau \cos k} \tag{148}$$

gegeben. Sie lassen sich als Reihe entwickeln [**67**],

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\tau\cos k} = \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i})^{\Delta} J_{\Delta}(m\tau)\ \cos(\Delta k)\,, \tag{149}$$

in der Besselfunktionen als Koeffizienten auftreten. Ein Vergleich mit dem Ausdruck (141) für die Eigenwerte zeigt nun, daß der asymptotische Grenzwert der Torsionsmatrixelemente durch

$$\mathcal{T}_z(\Delta) = \mathrm{i}^{\Delta}\ J_{\Delta}(m\tau) \tag{150}$$

gegeben ist.

Während die Sattelpunktnäherung und auch der aus ihr abgeleitete asymptotische Grenzwert bei $\Delta \approx m\tau$ zusammenbrechen, behält dieser asymptotische Ausdruck auch für $\Delta > m\tau$ seine Gültigkeit und wird daher als uniformer asymptotischer Grenzwert bezeichnet. Abbildung 6 zeigt für $l_1 = 150$, $m = 2$ und $\tau = 10$ die exakten Matrixelemente, ihre Sattelpunktnäherung und den uniformen asymptotischen Grenzwert aufgetragen gegen Δ.

Sowohl die Sattelpunktnäherung als auch die uniforme Asymptotik haben ihre Berechtigung. Die uniforme Asymptotik ist gültig, sobald bei $l_1 \gg m\tau$ die Toeplitzstruktur der Matrix etabliert ist. Die Sattelpunktnäherung dagegen erlaubt die Berechnung von Matrixelementen mit hohen Indizes, die einerseits noch nicht dem asymptotischen Grenzwert entsprechen und für die andererseits die exakte Formel sehr kompliziert und daher aufwendig auszuwerten ist.

KAPITEL 5

Liouvilledynamik bei endlicher Phasenraumauflösung

1. Die Konsequenzen endlicher Phasenraumauflösung

Das Frobenius-Perron-Spektrum und die Eigenfunktionen der integrablen Liouvilledynamik ließen sich aus der Frobenius-Perron-Matrix und ihren asymptotischen Eigenschaften ableiten. Die Frobenius-Perron-Matrix der periodisch getriebenen Dynamik mit gemischtem Phasenraum koppelt dagegen, wie anhand der Matrixelemente (75) ersichtlich ist, alle Basiszustände in individueller Weise aneinander. Sie ist weder blockdiagonal, noch besitzt sie eine asymptotische Struktur.

Zur Untersuchung der spektralen Eigenschaften der periodisch getriebenen Liouvilledynamik ist eine Approximation der unendlich großen Frobenius-Perron-Matrix durch eine endliche Matrix unumgänglich. Diese endliche Approximation entspricht einer Projektion der Liouvilledynamik auf einen endlichdimensionalen Unterraum des Hilbertraumes. Eine solche Projektion erscheint nur dann sinnvoll, wenn sie frei von Willkür bei der Wahl des Unterraumes ist.

Ein auf natürliche Weise ausgezeichneter Unterraum ist der endlichdimensionale Raum, in dem die Liouvilledynamik auf den größten Phasenraumskalen beschrieben wird. Das unendlichdimensionale Komplement dieses Unterraumes im Hilbertraum beinhaltet die Dynamik auf den sich daran anschließenden Skalen bis hin zu beliebig kleinen Skalen.

Wie in Abschnitt 3.3 ausgeführt ist, handelt es sich bei den Kugelflächenfunktionen Y_{lm} bereits um eine Basis des Hilbertraumes, deren Basisfunktionen nach wachsendem Auflösungsvermögen von Phasenraumstrukturen angeordnet sind. Ist mit l_{max} eine kleinste Phasenraumskala vorgegeben, so spannen die Basisfunktionen Y_{lm} mit $l \leq l_{max}$ und $|m| \leq l$ einen Unterraum der Dimension $(l_{max}+1)^2$ auf, in dem sich die Liouvilledynamik bis hin zu dieser kleinsten Skala beschreiben läßt.

Die Projektion der Liouvilledynamik auf einen Unterraum großer Phasenraumskalen erscheint deshalb plausibel, weil die Zeitentwicklung einer Observablen in der Regel ebenfalls nur bis zu einer kleinsten Skala aufgelöst werden kann. Eine natürliche kleinste Skala im Phasenraum ist letztendlich durch die Planckzelle gegeben. Es kann also in jedem Fall lediglich eine Projektion der Liouvilledynamik auf großen Phasenraumskalen beobachtet werden.

Der Charakter der Liouvilledynamik im Unterraum großer Skalen ist wesentlich durch die Kopplung an den komplementären Unterraum der kleinen, nicht aufgelösten Skalen bestimmt. Wie bereits in Kapitel 4.3 ausgeführt ist, koppeln bei integrablen Dynamiken typischerweise nur benachbarte Längenskalen stark aneinander. Die Kopplung der Liouvilledynamik im Unterraum großer Skalen an die Liouvilledynamik im Unterraum kleiner Skalen ist daher meist schwach und verliert mit zunehmender Auflösung an Bedeutung.

Bei Liouvilledynamiken mit chaotischem Charakter dagegen wird in der Regel Wahrscheinlichkeit zwischen allen Phasenraumskalen ausgetauscht. Aus diesem Grund ist auch die Frobenius-Perron-Matrix des periodisch getriebenen Kreisels eine volle Matrix. Die Kopplung der großen Skalen an beliebig kleine Skalen hat den Abfluß von Wahrscheinlichkeit aus dem Unterraum großer Skalen zur Folge. Aufgrund dieser Dissipation von Wahrscheinlichkeit hin zu kleinen Skalen ist die Liouvilledynamik im Unterraum großer Skalen nicht länger unitär.

Der Projektor $Q = Q^+ = Q^2$ auf den Unterraum großer Phasenraumskalen nimmt bezüglich der Basis der Kugelflächenfunktionen die einfache Form

$$Q_{l_1 m_1 l_2 m_2} = \begin{cases} \delta_{l_1 l_2}\, \delta_{m_1 m_2} & l_1 \leq l_{max}\,, \\ 0 & l_1 > l_{max} \end{cases} \tag{151}$$

an. Der Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}$ wird in diesem Unterraum durch die endlichdimensionale Matrix

$$\mathcal{P}_Q = Q^+ \mathcal{P} Q \tag{152}$$

repräsentiert.

Die Projektion auf den Unterraum zerstört über die Unitarität hinaus auch die Normalität von $\mathcal{P}$. Deshalb sind die Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ nicht länger orthogonal zueinander. Das Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ ist wegen der endlichen Dimension des Unterraumes rein diskret und liegt zum großen Teil innerhalb des Einheitskreises [**76**]. Nur wenn ein Eigenraum von $\mathcal{P}$ unter der Projektion invariant bleibt, liegt der zugehörige Eigenwert weiterhin auf dem Einheitskreis. Da sich genau wie $\mathcal{P}$ auch $\mathcal{P}_Q$ mit Hilfe der Basistransformation (72) als reelle Matrix schreiben läßt, treten die Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ in komplex konjugierten Paaren auf.

Weil $\mathcal{P}$ und Q nicht miteinander kommutieren, sind der Liouville-Operator $\mathcal{L}$ aus Abschnitt 2.3 und der Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}$ im Unterraum großer Skalen nicht länger äquivalent. Nach der Projektion ist der Liouville-Operator $\mathcal{L}_Q = Q^+ \mathcal{L} Q$ auch weiterhin hermitesch. Daher ist der Zeitentwicklungsoperator $\exp(\mathcal{L}_Q)$, der sich aus $\mathcal{L}_Q$ ableitet, im Gegensatz zu $\mathcal{P}_Q$ unitär. Auf der anderen Seite entspricht dem nicht unitären Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}_Q$ im Unterraum großer Phasenraumskalen ein effektiver, nichthermitescher Liouville-Operator,

$$\mathcal{L}' = \ln(\mathcal{P}_Q)\,. \tag{153}$$

Es ist plausibel, daß der Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}_Q$ und nicht der unitäre Operator $\exp(\mathcal{L}_Q)$ die korrekte Beschreibung der Liouvilledynamik im Unterraum großer Phasenraumskalen darstellt. Er berücksichtigt den de facto vorhandenen Wahrscheinlichkeitsfluß von großen zu kleinen Phasenraumskalen. Der Operator $\exp(\mathcal{L}_Q)$ dagegen läßt diesen Austausch von Wahrscheinlichkeit völlig unberücksichtigt. Die Kopplung wird bereits durch die Projektion $\mathcal{L} \to \mathcal{L}_Q$ eliminiert. Daher entspricht der Operator $\exp(\mathcal{L}_Q)$ nicht den physikalischen Gegebenheiten.

2. Die Torsion im Unterraum großer Skalen

Nach den Resultaten von Abschnitt 4.3 ist zu erwarten, daß bei einer integrablen Liouvilledynamik die Projektion auf den Unterraum großer Phasenraumskalen die mit den große Skalen korrespondierenden Eigenwerte und Eigenfunktionen des Frobenius-Perron-Operators nur geringfügig beeinträchtigt. Für den integrablen Kreisel, bestehend aus einer reinen Drehung oder einer Torsion, ist das leicht zu überprüfen, da Spektrum und Eigenfunktionen des entsprechenden Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}$ exakt bekannt sind.

Weil die Frobenius-Perron-Matrix einer beliebigen Drehung diagonal im Index l ist, läßt der Projektor Q die Eigenräume von $\mathcal{P}$ zu $l \leq l_{max}$ invariant. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ sind daher identisch mit den entsprechenden Eigenwerten von $\mathcal{P}$.

Die Frobenius-Perron-Matrix der $z-$Torsion ist diagonal im Index m, und die Blockmatrizen zu festem Index m nehmen mit wachsendem Index $l = |m|$, $|m| + 1$ $, \ldots, \infty$ Toeplitzstruktur an. Die Projektion reduziert eine Blockmatrix auf eine endliche Matrix der Dimension $N = l_{max} - |m| + 1$. Es ist zu erwarten, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen einer solchen $N \times N-$Matrix gegen die Eigenwerte (148) und Eigenfunktionen (147) der unendlichen Matrix streben, sobald mit ausreichend großer Phasenraumauflösung l_{max} die Toeplitzstruktur der Matrix etabliert ist.

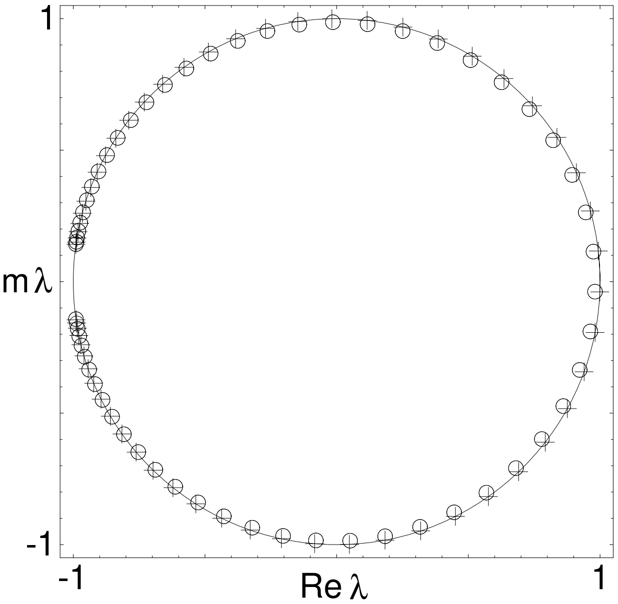


Abbildung 1. Die Eigenwerte ($\circ$) der Torsionsmatrix zu $m = 1$ und $\tau = 3$ im Unterraum großer Skalen ($l_{max} = 120$) sind in guter Übereinstimmung mit den exakten Eigenwerten $\exp(-im\tau \cos k)$ der durch $k = \pi s/(l_{max} - |m| + 2)$ festgelegten Energieschalen (+).

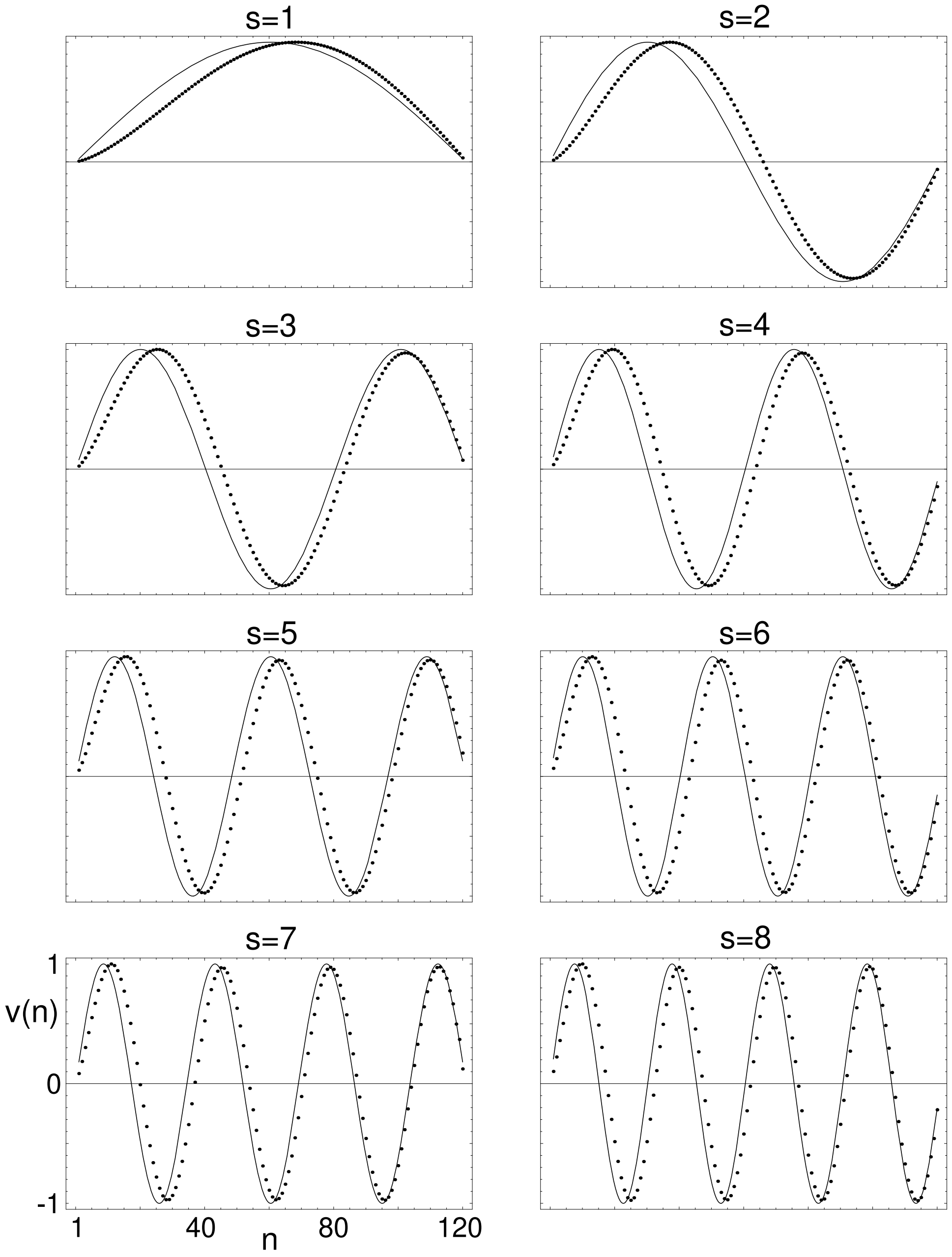


ABBILDUNG 2. Die Eigenvektoren $v_k(n)$ der endlichen Torsionsmatrix $(\cdot)$ für die Parameter $l_{max} = 120$, $m = 1$ und $\tau = 3$ und die Schwingungszahlen $s = 1, \ldots, 8$. Im Limes $l_{max} \to \infty$ hängen die Koeffizienten sinusförmig von n ab. Die entsprechenden Sinusschwingungen sind als durchgezogene Linien dargestellt.

Mit der in Kapitel 4.4 an die Eigenvektoren der Toeplitzmatrix gestellten Randbedingung $v_k(0) = 0$, die sinusförmige Lösungen für die Vektorkoeffizienten $v_k(n)$ verlangte, wurde dem Abbrechen der Toeplitzstruktur am linken oberen Rand der Matrix Rechnung getragen.

Bei der auf den Unterraum großer Skalen projizierten Matrix muß dieselbe Randbedingung für den rechten unteren Rand erfüllt werden,

$$v_k(N+1) = 0\,. \tag{154}$$

Diese Randbedingung legt den Parameter k in Gleichung (143) auf die diskreten Werte

$$k = \frac{\pi s}{N+1}\,, \quad s = 1, 2, \ldots, N \tag{155}$$

fest. Der Dimension der Matrix entsprechend gibt es N verschiedene Eigenwerte und Eigenvektoren. Die Eigenwerte zu $k = s\pi/(N+1)$ und $k = (N+1-s)\pi/(N+1)$ sind komplex konjugiert zueinander. Mit wachsender Dimension N rücken die erlaubten Werte für k immer dichter zusammen, und im Grenzfall unendlicher Auflösung entsteht ein kontinuierliches Spektrum mit der Phase $\varphi \in [-m\tau, m\tau]$. In diesem Grenzfall, in dem die diskreten Eigenwerte verschwinden, werden die Eigenfunktionen singulär und sind nicht mehr Bestandteil des Hilbertraumes.

Abbildung 1 zeigt das Spektrum der Torsionsmatrix für $m = 1$, $\tau = 3$ und $l_{max} = 120$. Die Eigenwerte entsprechen bereits in guter Näherung dem asymptotischen Resultat $\exp(-im\tau \cos k)$. Die Eigenvektoren zu $s = 1, \ldots, 8$ sind in Abbildung 2 dargestellt. Bei kleinen Indizes n sind die Koeffizienten $v(n)$ gegenüber der Sinusform phasenverschoben. Mit wachsender Schwingungszahl entsprechen die Eigenfunktionen der Sinusform jedoch immer besser.

3. Der Übergang von regulärer zu von Chaos dominierter Dynamik

Wie bereits in Kapitel 3.1 erläutert, weist die Dynamik des periodisch gestoßenen Kreisels (43) für von Null verschiedene Werte der Torsionskonstanten τ chaotische Züge auf. Die Chaotizität nimmt dabei mit wachsender Torsionsstärke zu. Die Phasenraumportraits in Abbildung 3.1 illustrieren diesen Übergang vom integrablen zum chaotischen Regime.

Während die Frobenius-Perron-Matrix der bei $\tau = 0$ aus einer reinen Drehung bestehenden, integrablen Dynamik blockdiagonal ist und auch im Unterraum großer Skalen ein unimodulares Spektrum besitzt, besteht bei der Frobenius-Perron-Matrix der periodisch gestoßenen Dynamik mit $\tau \approx 4$ bereits eine wesentliche Kopplung zwischen allen Phasenraumskalen. Aufgrund der hiermit verbundenen Dissipation von Wahrscheinlichkeit aus dem Unterraum großer Phasenraumskalen hin zu kleinen Skalen entfernt sich mit wachsender Torsionsstärke ein zunehmend größerer Teil des Spektrums von $\mathcal{P}_Q$ vom Einheitskreis. Lediglich der ergodische Eigenwert Eins mit der konstanten Eigenfunktion liegt weiterhin exakt auf dem Einheitskreis, da diese Eigenfunktion unter der Projektion invariant ist.

Abbildung 3 zeigt Spektren von $\mathcal{P}_Q$ zu den Drehwinkeln $\beta_z = \beta_y = 1$ und Torsionskonstanten $\tau = 0, 1, 5, 10$. Mit $l_{max} = 60$ beträgt die Dimension des Unterraumes $N = 3721$. Für $\tau = 0$ besteht das Spektrum aus $2l_{max} + 1$ entarteten,

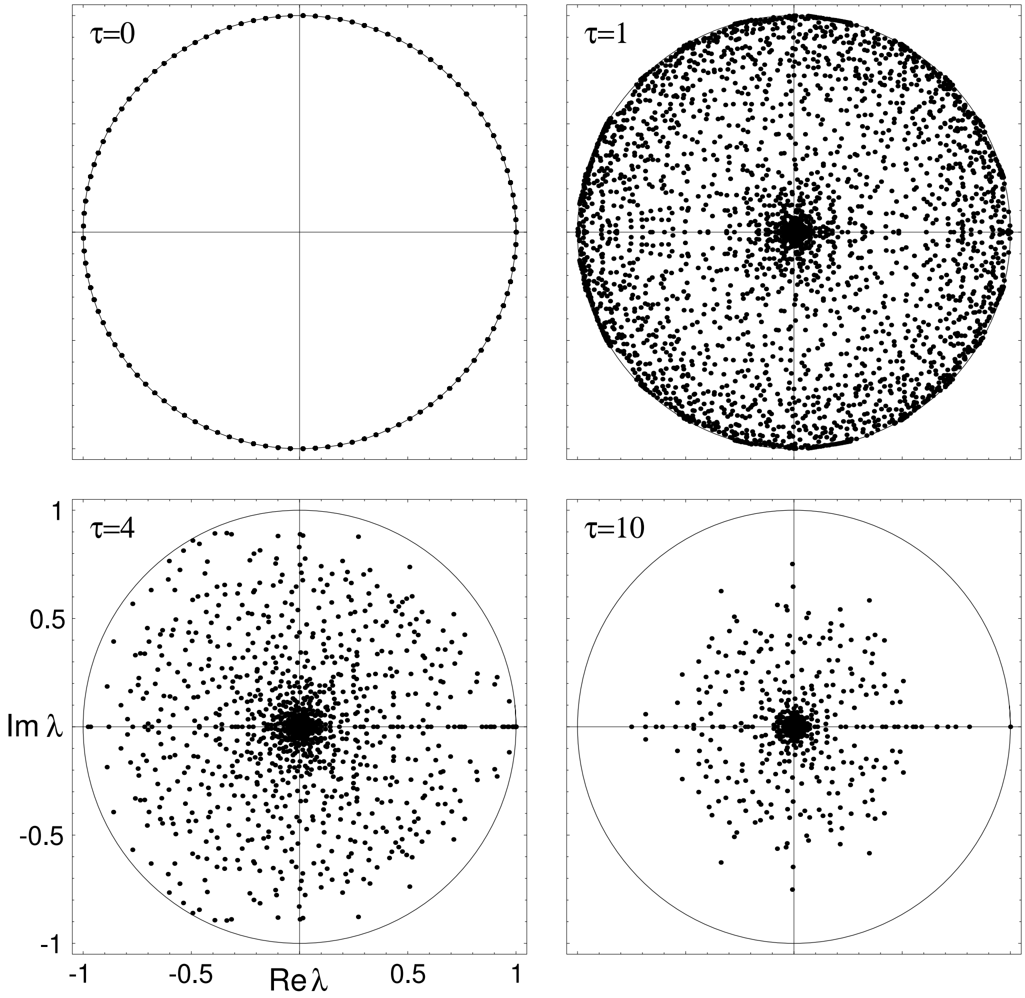


Abbildung 3. Die Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ zu den Drehwinkeln $\beta_z = \beta_y = 1$ und Torsionskonstanten $\tau = 0, 1, 4, 10$. Die Dimension des Unterraumes beträgt $N = 3721$. Mit zunehmender Torsionsstärke entfernt sich das Spektrum immer deutlicher vom Einheitskreis.

unimodularen Eigenwerten. Mit wachsender Torsionsstärke verkleinern sich die Beträge der Eigenwerte derart, daß bereits bei $\tau = 4$ der Großteil der Eigenwerte in der unmittelbaren Nähe des Ursprungs angesiedelt ist.

4. Die Stabilisierung der Eigenwerte mit wachsender Auflösung

Die Frobenius-Perron-Matrix $\mathcal{P}_Q$ repräsentiert den Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}$ auf großen Phasenraumskalen. Eigenwerte von $\mathcal{P}$ müssen sich demzufolge dann durch Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ approximieren lassen, wenn die ihnen zugehörigen Eigenfunktionen bereits in guter Näherung im Unterraum großer Skalen liegen. Sowie sich die Eigenfunktionen mit der Vergrößerung der Auflösung nicht mehr ändern, behalten auch die zugehörigen Eigenwerte ihre Position in der komplexen Ebene bei. Die

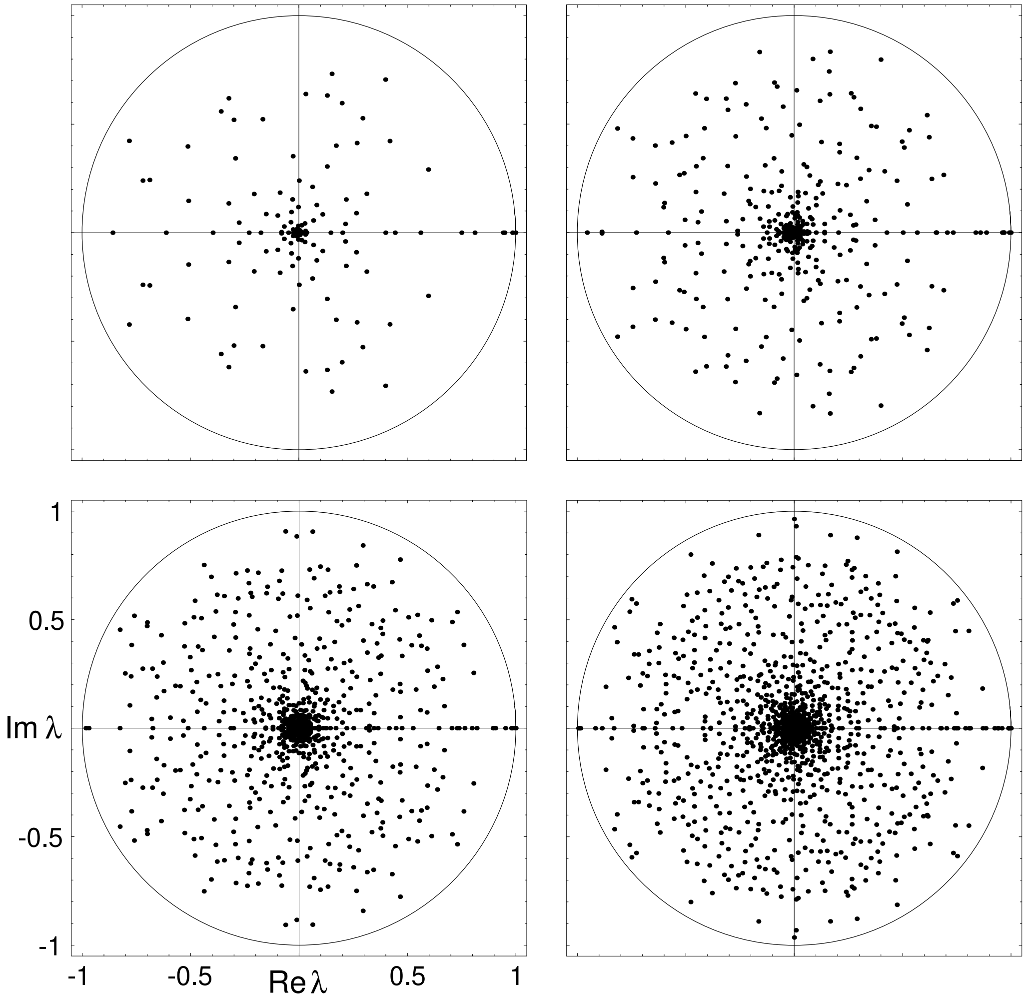


ABBILDUNG 4. Spektren von $\mathcal{P}_Q$ mit $\beta_z = \beta_y = 1$ und $\tau = 4$ zu den Auflösungen $l_{max} = 15, 30, 50, 70$. Mit wachsender Auflösung breiten sich Eigenwerte aus dem Ursprung kommend über die Kreisscheibe aus.

Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ dürfen also dann als Approximationen der Eigenwerte von $\mathcal{P}$ angesehen werden, wenn sie weitgehend unempfindlich gegenüber einer Vergrößerung der Phasenraumauflösung sind.

Mit der Vergrößerung des Unterraumes großer Phasenraumskalen erhöht sich die Dimension der Frobenius-Perron-Matrix $\mathcal{P}_Q$. Die bei dieser Vergrößerung neu hinzukommenden Matrixelemente gehorchen im Fall der periodisch getriebenen Dynamik keiner asymptotischen Gesetzmäßigkeit. Weil in gleichem Maße wie die Matrix auch die Zahl ihrer Eigenwerte wächst, gibt es keine simultane Konvergenz der Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ gegen Eigenwerte von $\mathcal{P}$ wie bei der reinen Drehung oder der Torsion.

Die bei der Vergrößerung der Matrix neu hinzukommenden Eigenwerte liegen nahe am Ursprung der komplexen Zahlenebene. Bereits präsente Eigenwerte gewinnen an Größe und ändern ihre Position in der komplexen Ebene solange, bis schließlich

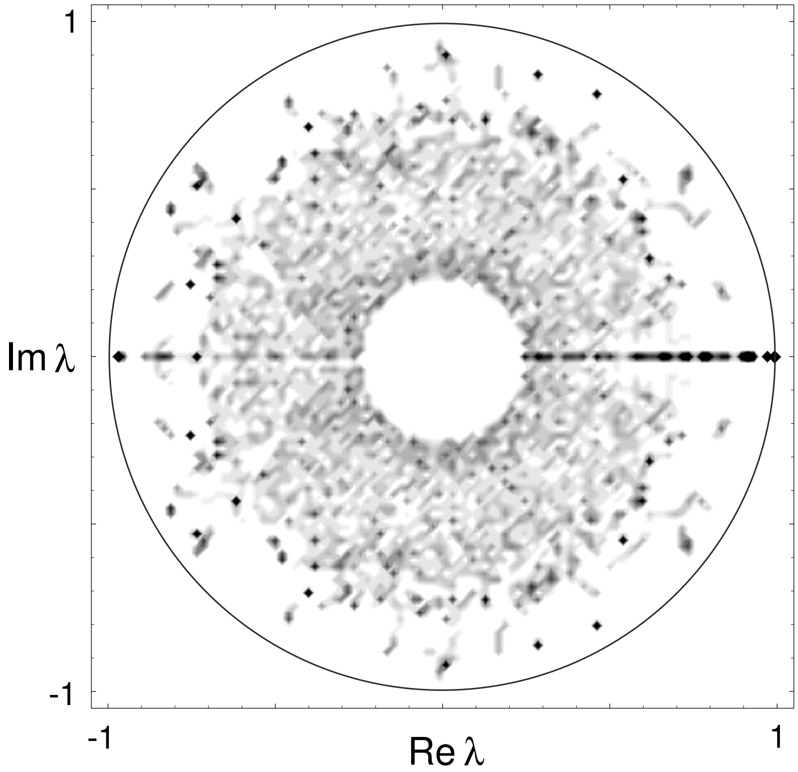


Abbildung 5. Über die Auflösungen $l_{max} = 55, \ldots, 70$ gemittelte Eigenwertdichte von $\mathcal{P}_Q$ mit $\beta_z = \beta_y = 1$ und $\tau = 4$. Schwarze Bereiche kennzeichnen eine große Amplitude. Sowohl in der Nähe als auch deutlich innerhalb des Einheitskreises gibt es Eigenwerte, die ihre Position bei wachsender Auflösung beibehalten.

die zugehörige Eigenfunktion im Unterraum großer Skalen liegt. Aufgrund dieses Mechanismus ist klar, daß immer nur ein Teil der Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ bereits Eigenwerten von $\mathcal{P}$ entspricht. Diese Eigenwerte befinden sich wegen der Unitarität von $\mathcal{P}$ in der Nähe des Einheitskreises.

Abbildung 4 illustriert das Verhalten der Eigenwerte mit wachsender Matrixdimension anhand der Spektren von $\mathcal{P}_Q$ mit $\beta_z = \beta_y = 1$ und $\tau = 4$ zu $l_{max} = 15, 30, 50, 70$, entsprechend den Dimensionen $N = 961, 1681, 2601, 3721$. Mit zunehmender Auflösung erhöht sich die Eigenwertdichte auf der Kreisscheibe. Einige Eigenwerte in der Nähe des Einheitskreises verharren in ihrer Position. Sie sind weitgehend unabhängig von der Dynamik auf kleineren Skalen und approximieren Eigenwerte von $\mathcal{P}$.

Bei einer genaueren Inspizierung der Spektren zu verschiedenen Dimensionen wird augenscheinlich, daß auch deutlich innerhalb des Einheitskreises Eigenwerte bei einer Vergrößerung der Auflösung ihre Position beibehalten. Es ist zu vermuten, daß diese auflösungsunabhängigen, nicht unimodularen Eigenwerte auf spezifische Eigenschaften der Dynamik zurückzuführen sind.

Um zufällige Übereinstimmungen zweifelsfrei auszuschließen, wird eine über viele Auflösungen l_{max} gemittelte Eigenwertdichte berechnet. Die Dichte ist auf mit (r, i) indizierten Zellen der Kantenlänge a in der komplexen Ebene konstant und schreibt sich mit der bereits in Abschnitt 3.9 eingeführten charakteristischen Funktion $\chi_{\Delta z}(z)$ als

$$\rho(r,i) = C^{-1} \sum_{l_{max}} \sum_{n=1}^{(l_{max}+1)^2} \chi_{[ra,(r+1)a]} \left(\mathrm{Re}\lambda_n\right) \chi_{[ia,(i+1)a]} \left(\mathrm{Im}\lambda_n\right) . \tag{156}$$

Die Eigenwertdichte $\rho(r, i)$ besitzt an Stellen, an denen sich auflösungsunabhängige Eigenwerte befinden, eine große Amplitude. Bei Eigenwerten, die ab einer kleinen Auflösung auflösungsunabhängig sind, ist die Amplitude am größten. Ändern Eigenwerte mit wachsender Auflösung ihre Position schwach, so ist die Amplitude kleiner, dafür hinterlassen die Eigenwerte jedoch eine Spur in der gemittelten Dichte, aus der sich die Richtung ihrer Bewegung erkennen läßt.

Für $\mathcal{P}_Q$ mit $\tau = 4$ und $\beta_z = \beta_y = 1$ ist die über $l_{max} = 55, \ldots, 70$ gemittelte Eigenwertdichte mit $a = 1/50$ in Abbildung 5 dargestellt. Weil die mittlere lokale Eigenwertdichte zum Ursprung hin drastisch zunimmt (vgl. Abbildung 4), ist sie nur für die großen Eigenwerte mit Beträgen $|\lambda| \geq 1/4$ aufgetragen. Dunkle Bereiche indizieren eine große und helle Bereiche eine kleine Amplitude. In der Nähe des Einheitskreises liegen Eigenwerte, die ihre Position nur noch sehr schwach ändern und unimodulare Eigenwerte von $\mathcal{P}$ approximieren. Darüber hinaus sind Positionen weit innerhalb des Einheitskreises durch große Amplituden ausgezeichnet.

Weil abseits des Einheitskreises keine Eigenwerte des unitären Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}$ auftreten können, liegt es nahe, diese nicht unimodularen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit Resonanzen von $\mathcal{P}$, also Polen der Resolvente innerhalb des Einheitskreises, zu identifizieren. Zunächst werden jedoch die fast unimodularen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ genauer untersucht.

5. Fast unimodulare Eigenwerte und elliptische Inselketten

Im Abschnitt 5.4 wurde deutlich, daß die Zahl der beinahe auf dem Einheitskreis liegenden Eigenwerte, die sich mit wachsender Auflösung nicht mehr wesentlich ändern, zum einen durch die Torsionsstärke und zum anderen durch die Phasenraumauflösung l_{max} bestimmt ist. Um zu untersuchen, welche Bedeutung unimodulare Eigenwerte bei einer Dynamik mit gemischtem Phasenraum besitzen, ist es zweckmäßig, eine Situation zu wählen, in der bereits eine Reihe von Eigenwerten am Einheitskreis liegt. Dies ist für den periodisch getriebenen Kreisel mit $\tau = 2.1$, $\beta_z = \beta_y = 1$ bei einer Auflösung von $l_{max} = 50$, also der Dimension $N = 2601$, der Fall.

Abbildung 6 links zeigt das Spektrum von $\mathcal{P}_Q$. Schon 73 Eigenwerte sind mit einem Betrag größer als 0.98 fast unimodular, wobei allein 19 Eigenwerte auf der reellen Achse nahe bei Eins liegen.

Das Phasenraumportrait der Dynamik ist bereits in Abbildung 1.1 dargestellt. Wie in Abschnitt 1.3 beschrieben, unterteilen invariante Tori, die elliptische periodische Bahnen umschließen, den Phasenraum in voneinander unabhängige Gebiete.

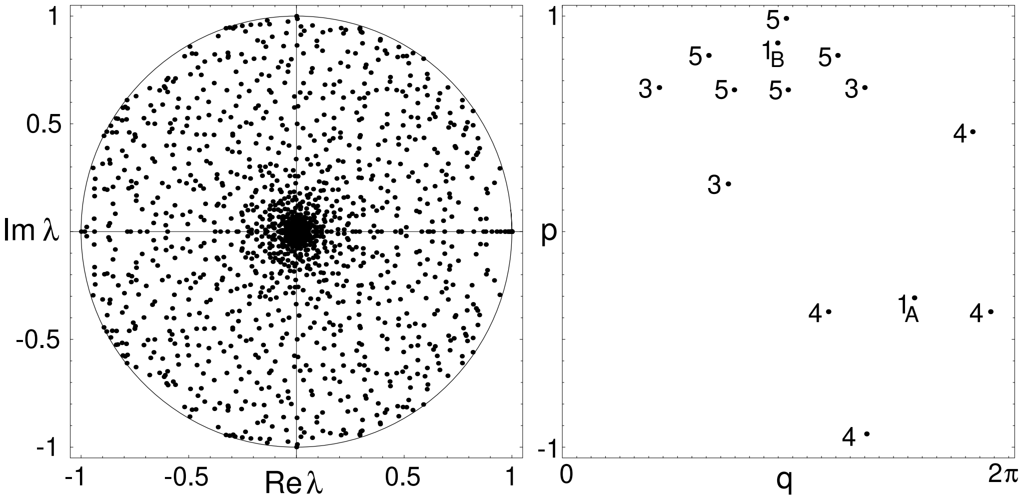


ABBILDUNG 6. Links: Das Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ mit $\tau = 2.1$ und $\beta_z = \beta_y = 1$ bei einer Auflösung von $l_{max} = 50$. Etwa 73 Eigenwerte haben nahe am Einheitskreis ihre endgültige Position fast erreicht. Rechts: Die elliptischen periodischen Bahnen niedrigster Periode. Es handelt sich um zwei Fixpunkte, gekennzeichnet mit 1_A und 1_B, sowie je eine Bahn der Länge $3, 4$ und 5 (vgl. auch Abbildung 1.1).

Solche Gebiete werden als elliptische Inseln bezeichnet. Innerhalb der großen Inseln gibt es weitere, kleinere Inseln zu Bahnen höherer Periode. In Abbildung 6 rechts sind alle elliptischen periodischen Bahnen der Dynamik bis hin zur Periode 5 dargestellt. Es handelt sich dabei um zwei Fixpunkte und um je eine Bahn der Periode $3, 4$ und 5. Elliptische Bahnen der Länge Zwei treten nicht auf. Die in Abbildung 1.1 sichtbaren Tori lassen sich diesen Bahnen eindeutig zuordnen.

Es liegt nun nahe, eine Korrespondenz zwischen Eigenfunktionen und Phasenraumstrukturen herzustellen. In Hinblick darauf werden zunächst die Eigenfunktionen der reellen Eigenwerte nahe bei Eins untersucht. Die 20 größten reellen Eigenwerte nahe bei Eins sind in Tabelle 1 aufgeführt. Der Tabelle ist zu entnehmen, daß die Dichte der Eigenwerte auf der reellen Achse mit zunehmendem Abstand zu Eins geringer wird.

Abbildung 7 zeigt die Eigenfunktionen zu den 16 am dichtesten bei Eins liegenden reellen Eigenwerten. Dargestellt ist der Betrag ihrer Amplitude im Phasenraum. Helle Bereiche weisen eine große und dunkle Bereiche eine kleine Amplitude auf. Es ist offensichtlich, daß die Eigenfunktionen auf elliptischen Inseln lokalisiert sind. Innerhalb von durch irrationale Tori eingeschlossenen Gebieten sind sie nahezu konstant und außerhalb verschwindend klein.

In Gebieten, die unter der Dynamik aufeinander abgebildet und daher auch als Inselkette bezeichnet werden, ist die Amplitude einer Eigenfunktion ebenfalls konstant. Zeigt die Eigenfunktion Lokalisierung auf mehreren Inselketten, so kann die

	λ		λ		λ		λ
1	1.0000000000	6	0.9999973761	11	0.9995236957	16	0.9915191002
2	0.9999999999	7	0.9999918214	12	0.9994445464	17	0.9890404348
3	0.9999999997	8	0.9999891164	13	0.9982800152	18	0.9833097942
4	0.9999999438	9	0.9999661841	14	0.9980306512	19	0.9809465741
5	0.9999998698	10	0.9997830679	15	0.9949158073	20	0.9684171370

TABELLE 1. Die größten fast unimodularen, positiv reellen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit den Parametern $\tau = 10$, $\beta_z = \beta_y = 1$ bei der Auflösung $l_{max} = 50$.

	$\lvert\lambda\rvert$	λ	$\lvert\arg\lambda\rvert$	$\lvert\arg\sqrt[n]{1}^k\rvert$	$\lvert k/n\rvert$
1	0.999503	-0.999503	3.141593	3.141593	1/2
2	0.999501	$0.000005 \pm i0.999501$	1.570802	1.570796	1/4
3	0.998945	$-0.328006 \pm i0.943558$	1.905355	1.884956	3/10
4	0.998810	$-0.894524 \pm i0.444352$	2.680551	2.692779	3/7
5	0.996524	$-0.311255 \pm i0.946669$	1.888452	1.884956	3/10
6	0.996315	$-0.787495 \pm i0.610324$	2.482270	2.513274	2/5
7	0.996210	$-0.881780 \pm i0.463614$	2.657541	2.692794	3/7
8	0.995185	$0.589157 \pm i0.802052$	0.937249	0.897598	1/7
9	0.992793	$-0.285814 \pm i0.950762$	1.862818	1.884956	3/10
10	0.992610	$-0.862683 \pm i0.490972$	2.624187	2.617994	5/12
11	0.991728	$0.818774 \pm i0.559584$	0.599526	0.628319	1/10
12	0.991120	$-0.495483 \pm i0.858379$	2.094306	2.094395	1/3
13	0.990290	$-0.806466 \pm i0.574706$	2.522445	2.513274	2/5
14	0.990205	$-0.945089 \pm i0.295485$	2.838568	2.855993	5/11
15	0.989213	$-0.136620 \pm i0.979734$	1.709349	1.713596	3/11
16	0.989055	$0.293949 \pm i0.944364$	1.269035	1.256637	1/5
17	0.988643	$-0.837656 \pm i0.525117$	2.581636	2.617994	5/12
18	0.988475	$0.539802 \pm i0.828069$	0.993100	1.047198	1/6
19	0.987695	$-0.252581 \pm i0.954853$	1.829397	1.795196	2/7
20	0.987427	$-0.294765 \pm i0.942404$	1.873936	1.884956	3/10
21	0.987201	$0.003093 \pm i0.987196$	1.567664	1.570796	1/4
22	0.984500	$0.292928 \pm i0.939911$	1.268682	1.256637	1/5
23	0.984312	$-0.796092 \pm i0.578885$	2.512872	2.513274	2/5
24	0.983966	-0.983966	3.141593	3.141593	1/2

TABELLE 2. Die größten, fast unimodularen Eigenwerte abseits von Eins zu $\tau = 2.1$, $\beta_z = \beta_y = 1$ und $l_{max} = 50$. Aufgelistet sind neben den Eigenwerten ihre Beträge, ihre Phasen sowie die Phasen der entsprechenden Einheitswurzeln.

Amplitude für jede Inselkette verschieden sein. In der Regel dominiert eine Inselkette eine Eigenfunktion. Die in einer Eigenfunktion sichtbaren Inselketten können sich darüber hinaus in ihren Perioden unterscheiden.

Bei den Eigenfunktionen zum Eigenwert Eins handelt es sich offenbar um die zu verschiedenen ergodischen Phasenraumbereichen gehörenden invarianten, konstanten Maße (27). Mit einer charakteristischen Funktion χ_n, die auf der $n-$ten Insel einer Inselkette den Wert Eins und sonst den Wert Null annimmt, schreibt sich die zu einer $p-$periodischen Inselkette gehörende invariante konstante Funktion f als

$$f = \sum_{n=1}^{p} \chi_n \,. \tag{157}$$

Die Indizierung der Inseln einer Kette erfolgt dabei immer gemäß $\chi_{n+1} = \mathcal{P}\chi_n$ und $\chi_1 = \mathcal{P}\chi_p$.

Weil der Eigenwert Eins entartet ist, handelt es sich bei den meisten der in Abbildung 7 dargestellten Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ um Linearkombinationen von zu verschiedenen Inselketten gehörenden Funktionen f mit reellen Koeffizienten a_i,

$$f = \sum_i a_i \, f_i \,. \tag{158}$$

Entscheidend für das Auftreten dieser Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ ist, daß sich die auf den Inselketten konstanten Funktionen bei der begrenzten Auflösung hinreichend gut approximieren lassen. Wie aus Abbildung 7 ersichtlich ist, werden große Inselketten mit kleiner Periodenlänge am leichtesten aufgelöst. Die ihnen zugehörigen Eigenwerte liegen am nächsten bei Eins. So, wie mit zunehmender Auflösung immer kleinere und komplexere Inselketten aufgelöst werden können, wächst die Zahl der gegen Eins strebenden Eigenwerte. Die unendliche Hierarchie der elliptischen Inselketten im gemischten Phasenraum führt so zu einer unendlichfachen Entartung des Eigenwertes Eins.

Eigenfunktionen zu komplexen, fast unimodularen Eigenwerten von $\mathcal{P}_Q$ haben im Phasenraum eine komplexe Amplitude. Jedoch ist in völliger Analogie zu den beschriebenen reellen Eigenfunktionen der Betrag ihrer Amplitude auf elliptischen Inseln nahezu konstant und außerhalb verschwindend klein. Anders als bei den invarianten Eigenfunktionen zum Eigenwert Eins sind die Perioden p aller in diesen komplexen Eigenfunktionen auftretenden Inselketten durch die Periode $p_0 > 2$ der jeweils kürzesten Inselkette teilbar.

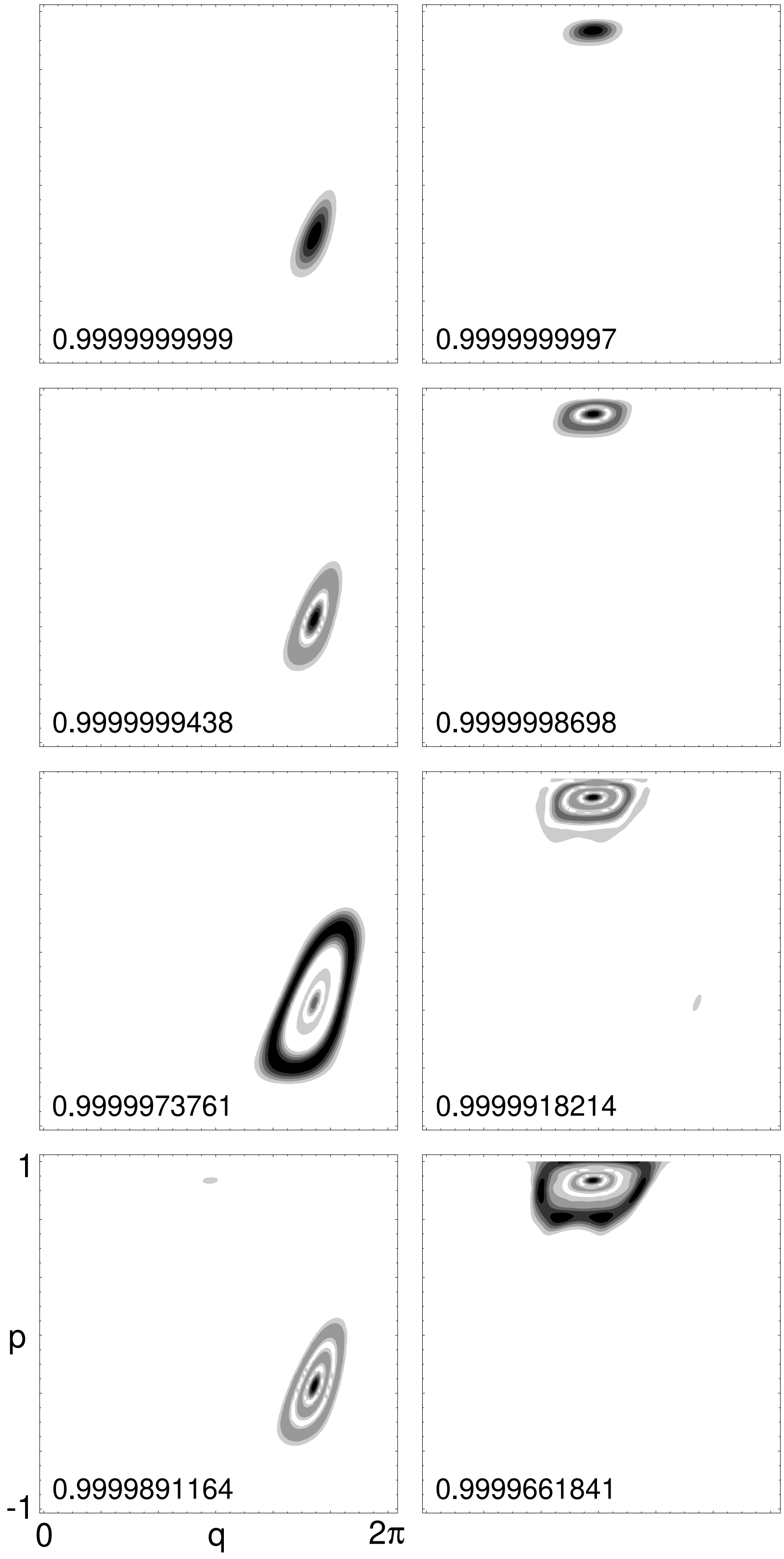
Auf nur dieser kürzesten Inselkette als Träger lassen sich neben der invarianten Funktion (157) mit den p_0-ten Einheitswurzeln als Koeffizienten weitere komplexwertige Eigenfunktionen von $\mathcal{P}$ konstruieren,

$$f_{p_0}^m = \sum_{n=1}^{p_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi mn/p_0} \chi_n \,, \quad m = 1, \ldots, p_0 \,. \tag{159}$$

deren zugehörige Eigenwerte wegen

$$\mathcal{P} f_{p_0}^m = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} m/p_0} f_{p_0}^m \,, \tag{160}$$

die p_0-ten Einheitswurzeln sind.


0.9999999999
0.9999999997
0.9999999438
0.9999998698
0.9999973761
0.9999918214
0.9999891164
0.9999661841
1
p
-1
0
q
2π

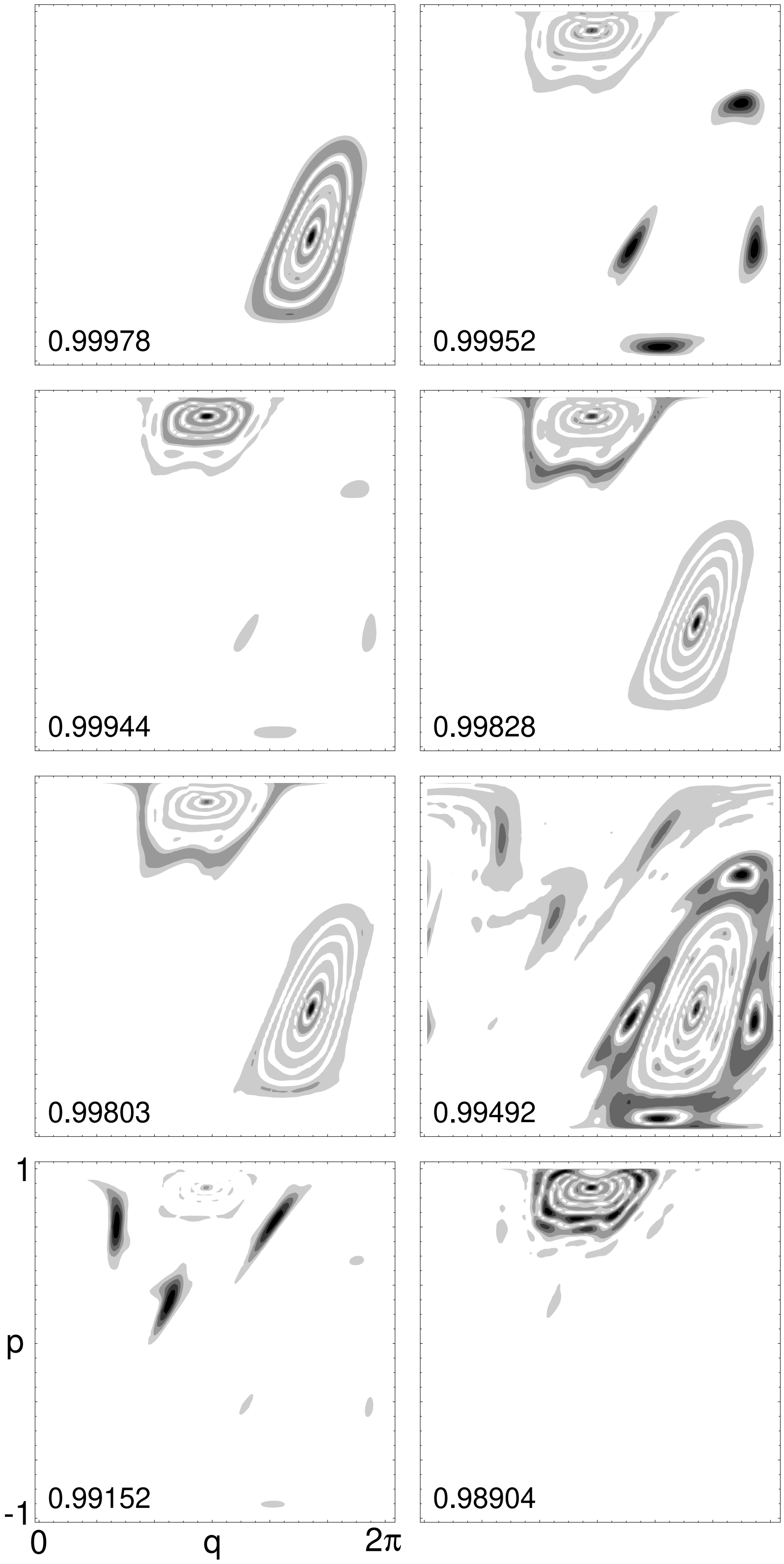


ABBILDUNG 7. Eigenfunktionen im Phasenraum zu den in Abbildung 6 nahe bei Eins liegenden reellen Eigenwerte. Dunkle Bereiche kennzeichnen eine große und helle Bereiche eine kleine Amplitude.

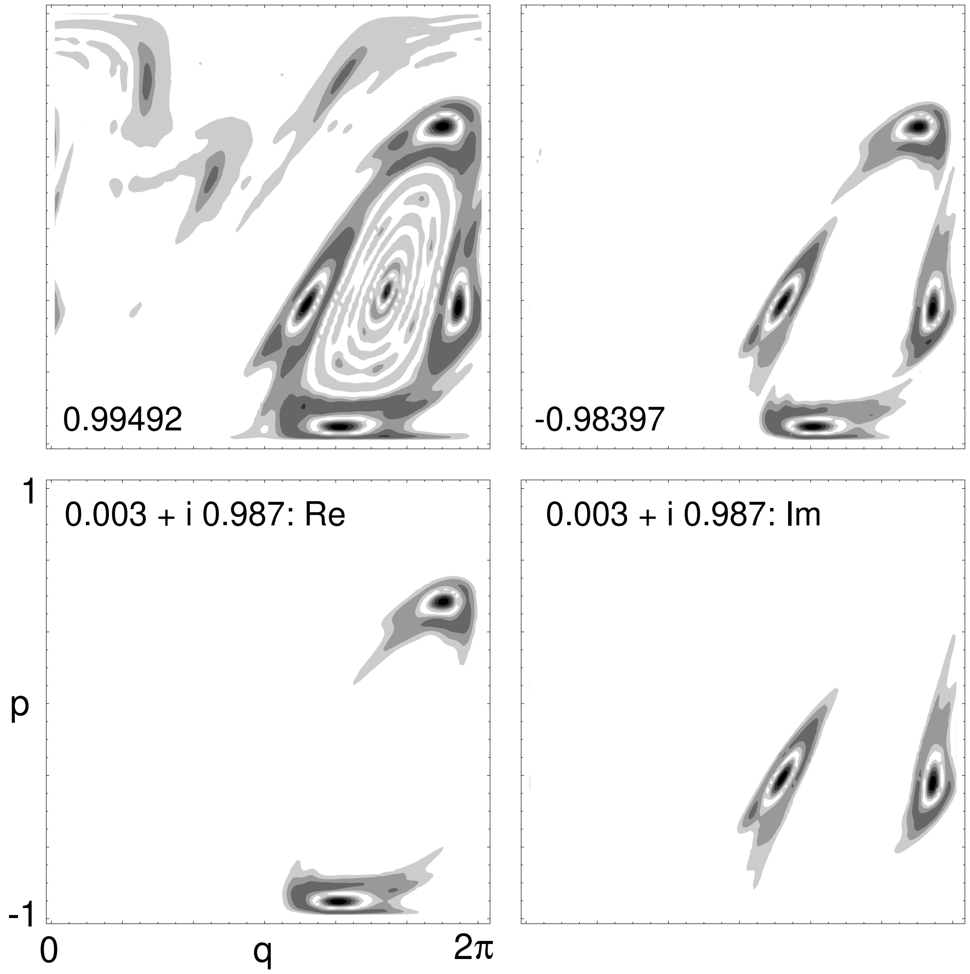


Abbildung 8. Die Eigenfunktionen zu Eigenwerten von $\mathcal{P}_Q$ bei den vierten Einheitswurzeln. Die in der Eigenfunktion zum Eigenwert 0.9954 auftretenden Strukturen mit Periode $1, 3$ sind in den übrigen Eigenfunktionen unterdrückt. In der Eigenfunktion zu -0.98 alternieren die Amplituden. In der komplexen Eigenfunktion sind die Amplituden abwechselnd reell und imaginär.

Tritt eine p_0-te Einheitswurzel als Eigenwert auf, so ist die zugehörige Eigenfunktion eine invariante Funktion unter $\mathcal{P}^{p_0}$,

$$\mathcal{P}^{p_0} f^m_{p_0} = f^m_{p_0}\,. \tag{161}$$

Ist nun eine Eigenfunktion von $\mathcal{P}$ eine Linearkombination von $f^m_{p_0}$ und von Funktionen $f^{m'}_{p'}$, die anderen Inselketten mit höheren Perioden entsprechen, so muß mit $f^m_{p_0}$ die gesamte Eigenfunktion unter $\mathcal{P}^{p_0}$ invariant sein. Daher kommen für die Linearkombination nur solche Funktionen $f^{m'}_{p'}$ in Frage, die invariant unter $\mathcal{P}^{p_0}$ sind. Diese Funktionen $f^{m'}_{p'}$ erfüllen $m'/p' = m/p_0$, und die Perioden p sind zwangsläufig durch p_0 teilbar.

Zu jeder $p-$periodischen Inselkette gibt es also eine invariante Eigenfunktion mit dem Eigenwert Eins sowie $p-1$ Eigenfunktionen mit den übrigen $p-$ten Einheitswurzeln als Eigenwerten. Insbesondere handelt es sich bei den Eigenwerten bei -1 um zweite Einheitswurzeln. Mit dem Eigenwert -1 ist auch die zugehörige Eigenfunktion reell. Während der Eigenwert Eins mit jeder Inselkette auftritt, ist der Eigenwert -1 lediglich bei Inselketten gerader Periode präsent. Entsprechend ergibt sich die Häufigkeit der übrigen $p-$ten Einheitswurzeln unter den Eigenwerten.

Abbildung 8 zeigt die Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ zu einer Inselkette um die in Abbildung 6 rechts dargestellte Periode$-4-$Bahn. Die reelle Eigenfunktion zum Eigenwert 0.993 nahe bei Eins ist zusätzlich zu der Inselkette mit Periode 4 noch auf Inseln um einen Fixpunkt und auf einer Inselkette mit Periode 3 lokalisiert (vgl. Abbildung 7). In den Eigenfunktionen zu den übrigen vierten Einheitswurzeln treten die Strukturen mit Periode Eins und Drei erwartungsgemäß nicht auf. Die Eigenfunktion zu -0.984 ist ebenfalls reell. Hier alternieren die Vorzeichen der großen Amplituden beim Durchlaufen der Inselkette. Die Eigenfunktionen zu $0.003 \pm \mathrm{i}0.987$ nahe bei $\pm\mathrm{i}$ sind komplex konjugiert zueinander. In beiden Eigenfunktionen sind zwei der vier Amplituden (159) reell und zwei Amplituden rein imaginär mit jeweils verschiedenem Vorzeichen.

Weil die $p-$periodische Bahn im Zentrum einer Inselkette von unendlich vielen irrationalen Tori umgeben ist, gibt es mit einer $p-$periodischen Bahn unendlich viele Inselketten der Periode p. Die Einheitswurzeln sind als Eigenwerte von $\mathcal{P}$ unendlichfach entartet.

Es besteht somit ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen elliptischen periodischen Bahnen und dem Spektrum von $\mathcal{P}$. Die Perioden der Bahnen diktieren die Häufigkeit, mit der die entsprechenden Einheitswurzeln als Eigenwerte des Frobenius-Perron-Operators auftreten.

Ein erneuter Blick auf Abbildung 6 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen elliptischen Bahnen und den fast unimodularen Eigenwerten von $\mathcal{P}_Q$. Im links dargestellten Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ können je ein Eigenwert bei den dritten Einheitswurzeln, je zwei Eigenwerte bei den vierten Einheitswurzeln sowie je ein Eigenwert bei den fünften Einheitswurzeln leicht identifiziert werden. Sie sind bedingt durch die rechts dargestellten periodischen Bahnen der Längen $3, 4, 5$. Die Eigenwerte können Tabelle 2 entnommen werden, in der die betraglich größten komplexen Eigenwerte, ihre Phasen sowie die Phasen der entsprechenden Einheitswurzeln aufgeführt sind.

6. Nicht unimodulare Eigenwerte und Chaos-dominierter Phasenraum

Unimodulare Eigenwerte des Frobenius-Perron Operators treten mit elliptischen periodischen Bahnen der Dynamik auf. Elliptische periodische Bahnen sowie die sie umgebenden irrationalen Tori sind Manifestationen regulärer Dynamik mit stabilem Charakter im gemischten Phasenraum. Es liegt nun nahe, die in Abschnitt 4 beschriebenen nicht unimodularen, auflösungsunabhängigen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit den chaotischen, instabilen Strukturen im gemischten Phasenraum in Verbindung zu bringen, insbesondere also mit hyperbolischen periodischen Bahnen.

Weil nur eine begrenzte Phasenraumauflösung zur Verfügung steht, ist es zweckmäßig, einen gemischten Phasenraum zu untersuchen, in dem die chaotischen Strukturen möglichst groß und die elliptischen Inselketten möglichst klein sind. Der Charakter des gemischten Phasenraumes geht dabei keinesfalls verloren. Es bedarf lediglich einer größeren Auflösung, um elliptische Inselketten zu erfassen, die nun auf kleineren Phasenraumskalen präsent sind und in der Regel höhere Perioden aufweisen. Auch dieser von Chaos dominierte Phasenraum besitzt für eine gemischte Dynamik charakteristische beliebig schwach hyperbolische Phasenraumbereiche und entsprechend schwach instabile periodische Bahnen.

Die Chaotizität des Phasenraumes kann bei dem periodisch gestoßenen Kreisel anhand des Torsionsparameters τ kontrolliert werden. In Abbildung 3.1 sind bereits Phasenraumportraits des Kreisels für eine Reihe von Torsionswerten dargestellt. Mit wachsender Torsionsstärke τ nimmt der Phasenraum in zunehmendem Maße chaotische Züge an.

Im Phasenraumportrait zu $\tau = 10$, dargestellt in Abbildung 9 links, sind mit bloßem Auge keine Inselketten mehr erkennbar. Die beiden kürzesten elliptischen periodischen Bahnen haben hier die Länge 6 und sind unmittelbar einander benachbart. Wenngleich in diesem Fall die vollständige Bestimmung aller periodischen Bahnen nur bis zur Länge 7 möglich ist, sind die aufgespürten elliptischen Bahnen mit den nächsthöheren Perioden die Wiederholungen dieser Bahnen von der Länge 12. Abgesehen von diesen Bahnen sind die Umgebungen stabiler Bewegung aller weiteren elliptischen Bahnen also so klein, daß diese Bahnen mit den üblichen numerischen Methoden nicht mehr auffindbar sind.

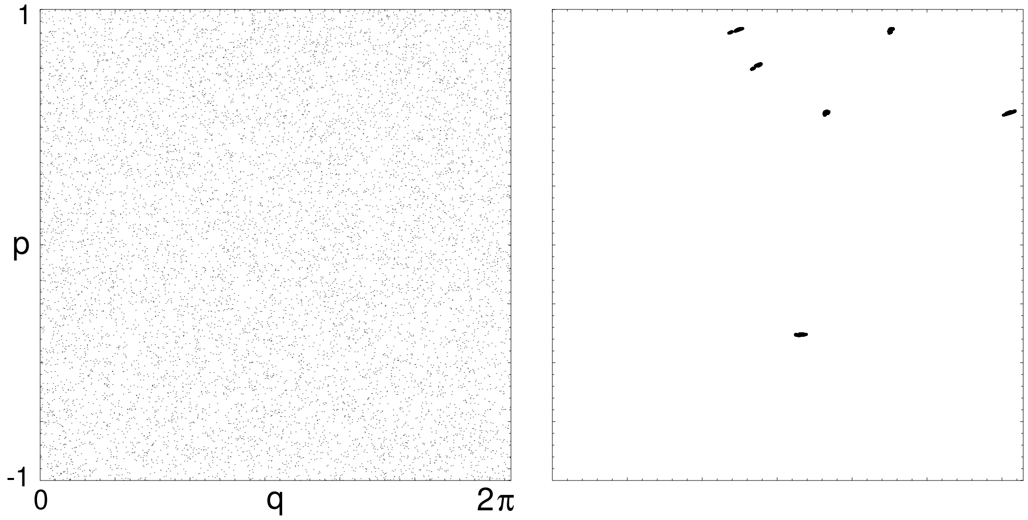


ABBILDUNG 9. Links: Im Phasenraumportrait des periodisch gestoßenen Kreisels mit $\tau = 10$ sind keine elliptischen Strukturen mehr erkennbar. Rechts: Die beiden größten Inselketten liegen bei eng benachbarten elliptischen Bahnen der Länge 6.

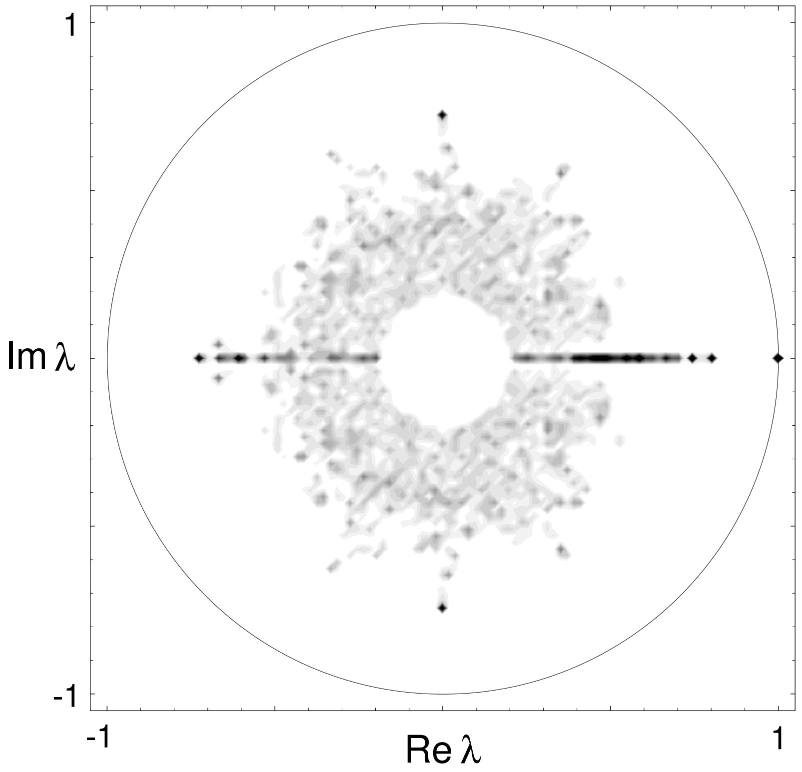


Abbildung 10. Eigenwertdichte von $\mathcal{P}_Q$ mit $\beta_z = \beta_y = 1$ und $\tau = 10$, gemittelt über die Auflösungen $l_{max} = 20, \ldots, 70$. Schwarze Bereiche kennzeichnen eine große Amplitude. Einige Eigenwerte behalten ihre Position innerhalb des Einheitskreises mit wachsender Auflösung bei. Es gibt keine fast unimodularen Eigenwerte.

Die einzigen bei der endlichen Auflösung für die Liouvilledynamik signifikanten Inselketten liegen demnach bei den elliptischen Periode−6−Bahnen. Abbildung 9 rechts zeigt diese Inselketten, die durch je 50 Trajektorien mit Anfangspunkten in unmittelbarer Nähe der periodischen Bahn über 120 Abbildungsschritte hinweg nachgezeichnet sind. Aufgrund ihres geringen Abstandes können sie mit dem Auge nur schwer unterschieden werden.

Sowie die Trajektorien die Inselketten nicht verlassen, kann die Ausdehnung einer Insel durch die Größe des Phasenraumbereiches, innerhalb dessen die Anfangspunkte der Trajektorien gestreut sind, abgeschätzt werden. Für die größere der beiden Inselketten in Abbildung 9 hat dieser Bereich eine lineare Ausdehnung von 1/700 der Phasenraumausdehnung. Wächst die lineare Ausdehnung auf 1/600 der Phasenraumausdehnung, so verlassen Trajektorien die Inselkette.

Zur Auflösung von auf den Inselketten lokalisierten Eigenfunktionen sind nach Abschnitt 3.3 Basisfunktionen mit $l > 600$ erforderlich. Es ist daher zu erwarten, daß bei einer wesentlich kleineren Auflösung von $l_{max} = 60$ keine fast unimodularen Eigenwerte im Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ vorhanden sind. Das Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ mit $\tau = 10$, $\beta_y = \beta_z = 1$ und $l = 60$ ist bereits in Abbildung 3 ($\tau = 10$) dargestellt. Tatsächlich

	$l_{max} = 30$	$l_{max} = 40$	$l_{max} = 50$	$l_{max} = 60$	$l_{max} = 68$
1	0.8018	0.8116	0.8205	0.8103	0.8074
2	0.7513	0.7457	0.7547	0.7470	0.7455
3	−0.0041 ±i 0.7225	−0.0063 ±i 0.7431	−0.0123 ±i 0.7515	−0.0079 ±i 0.7517	−0.0027 ±i 0.7435
4	−0.7391	−0.7432	−0.7475	−0.7510	−0.7427
5	−0.6639	−0.6766	−0.6746	−0.6869	−0.6955
6	0.6470	0.6628	0.6777	0.6597	0.6727
7	−0.6218	−0.6443	−0.6188	−0.6377	−0.6336
8	0.5462	0.5968	0.5847	0.5889	0.5786
9	−0.5141	−0.5406	−0.5363	−0.5481	−0.5448

TABELLE 3. Auflösungunabhängige, nicht unimodulare Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit $\tau = 10$, $\beta_y = \beta_z = 1$ bei den Auflösungen $l_{max} = 30, 40, 50, 60, 68$. Bereits bei $l_{max} = 30$ liegen die Eigenwerte nahe an ihren angestrebten Positionen.

liegen nun alle Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit Ausnahme des nicht entarteten Eigenwertes Eins deutlich innerhalb des Einheitskreises.

Die auflösungsunabhängigen, nicht unimodularen Eigenwerte werden auch hier anhand der über verschiedene Auflösungen l_{max} gemittelten Eigenwertdichte (156) identifiziert. Abbildung 10 zeigt diese aus den Spektren zu den Auflösungen $l_{max} = 20, \ldots, 70$ gemittelte Dichte. Große Amplituden zeichnen eine Reihe von Eigenwerten auf der reellen Achse und nahe der imaginären Achse aus. Die genauen Positionen dieser Eigenwerte bei den Auflösungen $l_{max} = 40, 50, 60$ und 68 können Tabelle 3 entnommen werden.

Es ist bemerkenswert, daß die Eigenwerte bereits bei der verhältnismäßig geringen Auflösung von $l = 30$ nahe an ihrer endgültigen Position liegen. Das läßt darauf schließen, daß sich diese Eigenwerte großen Phasenraumstrukturen zuordnen lassen. Vier Eigenwerte sind betraglich fast gleich groß und haben die Phasen der vierten Einheitswurzeln. Nach den Ausführungen des vorherigen Abschnitts liegt es nahe, daß sie gemeinsamen Ursprungs sind.

Die Eigenfunktionen der nicht unimodularen Eigenwerte unterscheiden sich wesentlich von denen der unimodularen Eigenwerte. Zwar sind auch die Eigenfunktionen der nicht unimodularen Eigenwerte klar erkennbar lokalisiert, jedoch liegen ihre großen Amplituden im chaotischen Phasenraumbereich. So, wie die Eigenfunktionen zu unimodularen Eigenwerten auf elliptischen Inselketten lokalisiert sind und daher eine elliptische Form annehmen, folgen die großen Amplituden der Eigenfunktionen im chaotischen Phasenraum der instabilen Flußrichtung der Dynamik und haben daher hyperbolischen Charakter. Die Abbildungen 11, 12 zeigen die Eigenfunktionen zu den in Tabelle 3 aufgeführten Eigenwerten bei der Auflösung $l_{max} = 60$. Große Amplituden der Eigenfunktionen sind schwarz und kleine Amplituden weiß gekennzeichnet. Bis auf die Eigenfunktionen zu den komplexen Eigenwerten 3) in Tabelle 3 sind die Eigenfunktionen wie die zugehörigen Eigenwerte reell.

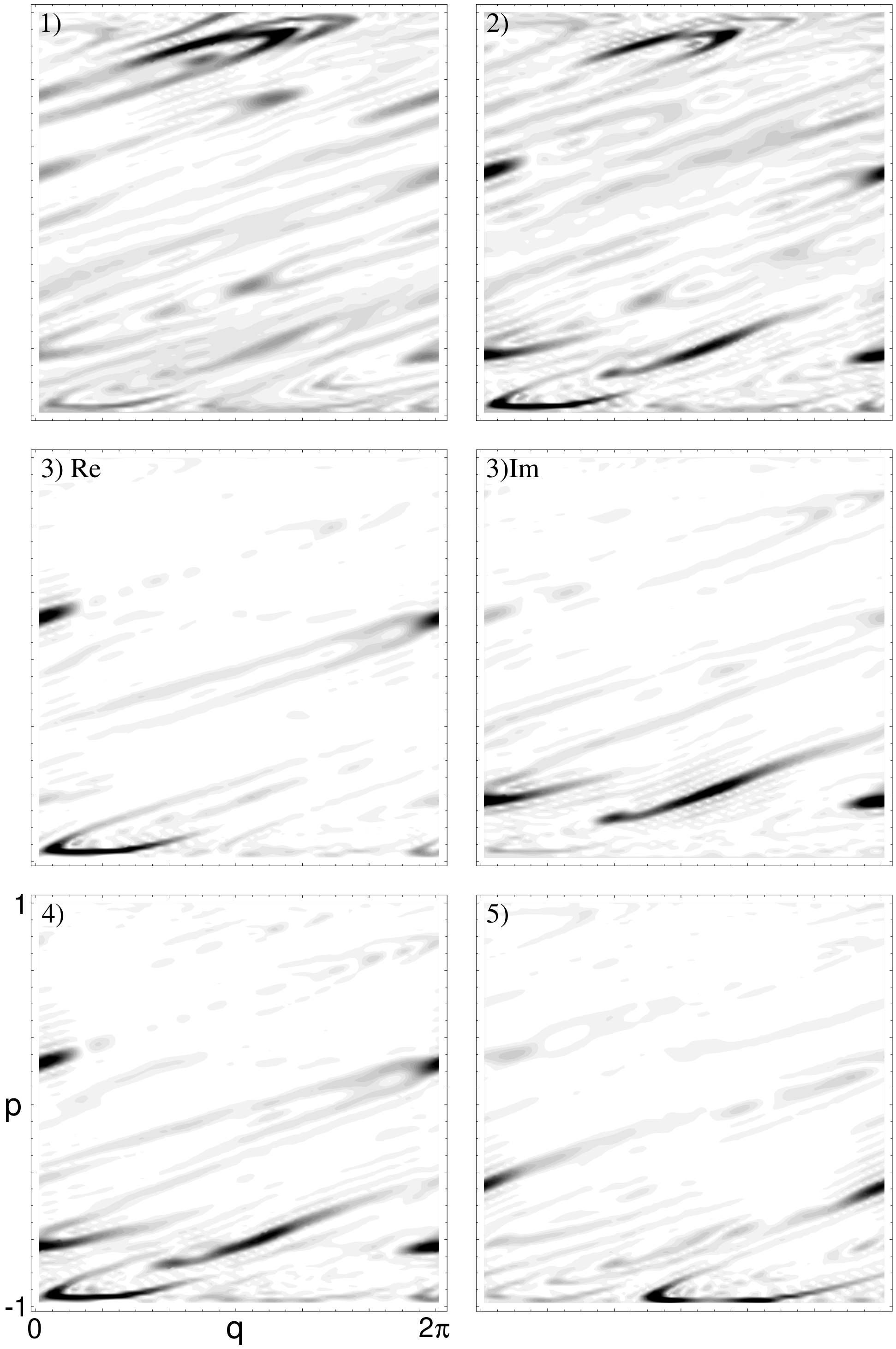


Abbildung 11. Eigenfunktionen zu den nicht unimodularen Eigenwerten 1) – 5) in Tabelle 3 bei der Auflösung $l_{max} = 60$.

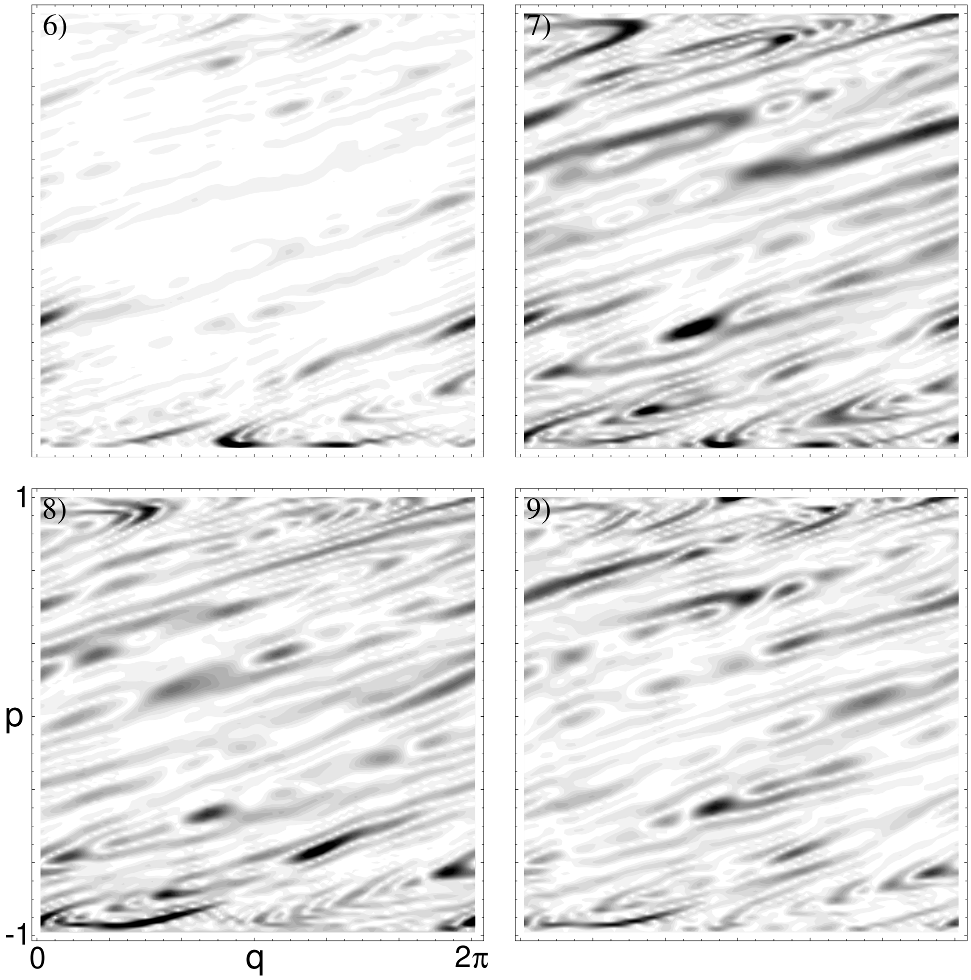


Abbildung 12. Eigenfunktionen zu den nicht unimodularen Eigenwerten 6) − 9) in Tabelle 3 bei der Auflösung $l_{max} = 60$.

Bei den in den Eigenfunktionen durch große Amplituden ausgezeichneten Phasenraumbereichen handelt es sich um Phasenraumbereiche einheitlicher Instabilität. Weil die Eigenfunktionen in den Abbildungen 11, 12 zu betraglich großen Eigenwerten gehören, sind die Bereiche schwach instabil. Solche schwach instabilen Phasenraumbereiche sind charakteristisch für einen gemischten Phasenraum. Sie treten auf beliebig kleinen Phasenraumskalen auf. Unter der begrenzten Phasenraumauflösung können jedoch nur diejenigen von ihnen in Erscheinung treten, die eine entsprechend große Ausdehnung besitzen.

Als Maß für die Instabilität eines Phasenraumbereiches dienen die Monodromieeigenwerte der in dem Bereich angesiedelten hyperbolischen periodischen Bahnen. Je größer der Eigenwert $|\xi^{\mathrm{inst}}| > 1$ der Monodromiematrix (2) auf einer hyperbolischen periodischen Bahn ist, desto schneller entfernen sich benachbarte Trajektorien von der Bahn. Die Instabilitäten von Bahnen mit verschiedenen primitiven Perioden

p lassen sich anhand der $p-$ten Wurzeln der Beträge der Monodromieeigenwerte $\sqrt[p]{|\xi^{\text{inst}}|}$ vergleichen.

Ähnlich wie elliptische Inseln bildet die Dynamik auch die unmittelbaren Umgebungen hyperbolischer Bahnen wieder in die Nähe dieser Bahnen ab. Daher treten auch hyperbolische Phasenraumbereiche einheitlicher Instabilität als Kette mit einer gewissen Periode auf. Allerdings darf hier nicht von einer Inselkette gesprochen werden, da Trajektorien den Phasenraumbereich verlassen, und ein Bereich einheitlicher Instabilität keine scharfe Grenze besitzt. Die Periode einer solchen Kette entspricht in der Regel der Länge der kürzesten für den Bereich charakteristischen hyperbolischen Bahn. Periodische Bahnen, deren Längen ein Vielfaches der Kettenlänge betragen, durchlaufen die Kette mehrfach, bevor sie sich schließen.

Die ausgedehnten Phasenraumbereiche einheitlicher Instabilität, auf denen die Eigenfunktionen $1) - 9)$ Lokalisierung zeigen, lassen sich den schwach instabilen periodischen Bahnen mit den niedrigsten Perioden zuordnen. In Abbildung 13 sind alle schwach hyperbolischen Bahnen der Längen $p = 1, 2, 4$ mit einem Stabilitätskoeffizienten $1 < \sqrt[p]{|\xi^{\text{inst}}|} < 2.2$ dargestellt. Verschiedene Bahnen gleicher Länge sind durch verschiedene Buchstaben indiziert. Die Bahnen liegen in Gruppen beieinander und jede Gruppe deutet auf einen Phasenraumbereich einheitlicher Instabilität hin. Entsprechend den Perioden der beteiligten Bahnen bilden die Bereiche Ketten. Eine Kette der Länge 4 befindet sich bei der Bahn 4_B. Die Umgebung der Bahnen $1, 2_A, 4_A$ wird auf sich selbst abgebildet, da sie durch einen Fixpunkt charakterisiert wird. Weitere schwach instabile periodische Bahnen treten insbesondere mit den Längen 6 und Vielfachen von 6 auf und liegen in der Nähe der in Abbildung 9 dargestellten elliptischen Inselketten. Die Eigenfunktion 1) in Abbildung 11 ist in der Umgebung dieser elliptischen Inselketten schwach lokalisiert.

Nun lassen sich die Phasen der nicht unimodularen Eigenwerte analog zu den Phasen der fast unimodularen Eigenwerte erklären. Bereiche einheitlicher Instabilität, die $p-$periodisch aufeinander abgebildet werden, können solchen Eigenfunktionen als Träger dienen, deren Eigenwerte die $p-$ten Einheitswurzeln als Phasen besitzen. Der größte nicht unimodulare Eigenwert 0.8103 in Tabelle 3 ist also positiv und reell, weil die zugehörige Eigenfunktion 1) in Abbildung 11 in dem durch den Fixpunkt charakterisierten Bereich lokalisiert ist. Die Eigenwerte $2), 3), 4)$ sind von fast gleichem Betrag und haben die Phasen der vierten Einheitswurzeln. Entsprechend sind die Eigenfunktionen $2) - 4)$ in Abbildung 11 bei der Bahn 4_B (Abbildung 13) lokalisiert. Lediglich der Eigenfunktion zum positv reellen Eigenwert 0.7470 dieses Quadrupels von Eigenwerten ist es möglich, zusätzlich im Bereich des Fixpunktes Lokalisierung zu zeigen.

Es liegt nahe, daß die Beträge der nicht unimodularen Eigenwerte durch die Instabilität der Phasenraumbereiche, die als Träger der Eigenfunktionen dienen, bestimmt werden. Die Eigenwerte geben die Raten an, mit denen Trajektorien diese Phasenraumbereiche verlassen. Sie entsprechen in der Hinsicht den Stabilitätskoeffizienten der periodischen Bahnen, charakterisieren jedoch in der Regel ein größeres Phasenraumgebiet als die unmittelbare Umgebung einer einzelnen periodischen Bahn.

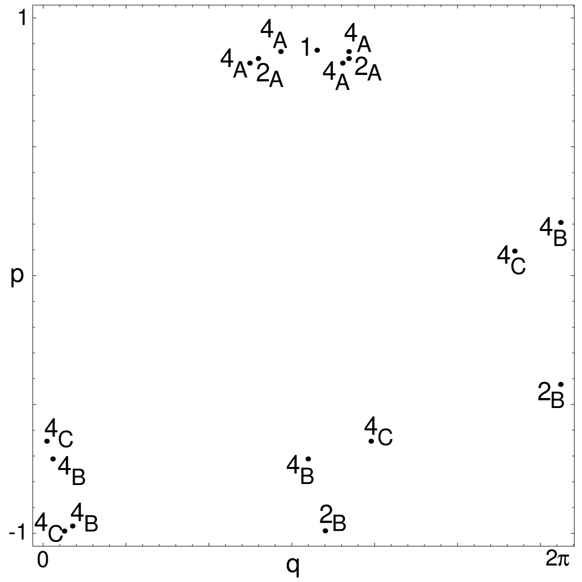


Abbildung 13. Schwach hyperbolische periodische Bahnen der Längen $1, 2$ und 4. Verschiedene Bahnen gleicher Länge sind mit verschiedenen Buchstaben indiziert.

Werden über ein Bündel von Trajektorien, die in einem solchen Phasenraumgebiet starten, Korrelationen berechnet, so darf erwartet werden, daß der entsprechende nicht unimodulare Eigenwert von $\mathcal{P}_Q$ den Zerfall der Korrelationen unter der Zeitentwicklung richtig wiedergibt. In diesem Fall entspricht der nicht unimodulare Eigenwert nach den Ausführungen von Abschnitt 2.5 einer Resonanz im Resonanzspektrum des Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}$. Das legt die Vermutung nahe, daß bei endlicher Auflösung im Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}$ in Gestalt von nicht unimodularen Eigenwerten in Erscheinung treten.

7. Endliche versus unendliche Phasenraumauflösung

Die fast unimodularen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ konvergieren im Grenzfall unendlicher Phasenraumauflösung gegen unimodulare Eigenwerte von $\mathcal{P}$ und die zugehörigen Eigenfunktionen gegen die auf ergodischen Phasenraumbereichen betraglich konstanten Eigenfunktionen von $\mathcal{P}$. Die auflösungsunabhängigen, nicht unimodularen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ sind dagegen im Grenzfall unendlicher Auflösung nicht Bestandteil des Spektrums von $\mathcal{P}$ im Hilbertraum.

Aufschluß über das Schicksal der nicht unimodularen Eigenwerte in diesem Grenzfall gibt das Verhalten der zugehörigen Eigenfunktionen bei wachsender Phasenraumauflösung. In Abbildung 14 ist die Eigenfunktion 2) aus Abbildung 11 zum auflösungsunabhängigen, nicht unimodularen Eigenwert 0.75 bei den Auflösungen $l_{max} = 10, 20, \ldots, 60$ dargestellt.

Mit jeder größeren Auflösung erscheinen die Strukturen der Eigenfunktion differenzierter, und neue Strukturen werden auf den neu erschlossenen Phasenraumskalen sichtbar. Während die Eigenfunktion bei kleiner Auflösung $l_{max} = 10, 20$ in der

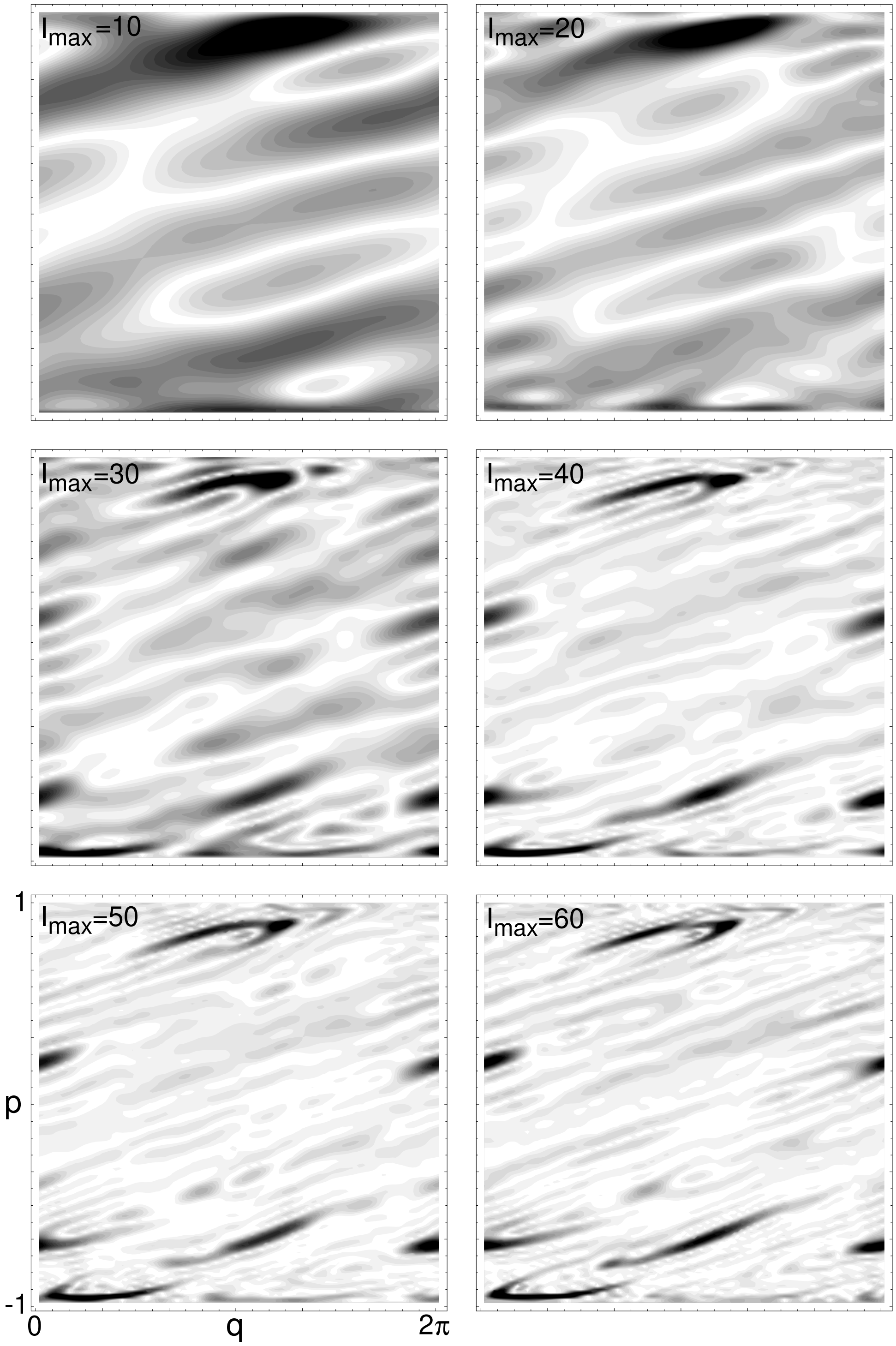


ABBILDUNG 14. Die Eigenfunktion zum auflösungsunabhängigen, nicht unimodularen Eigenwert 0.75 bei den Auflösungen $l_{max} = 10, 20, \ldots, 60$. Mit wachsender Auflösung nimmt die Eigenfunktion Strukturen auf immer kleineren Phasenraumskalen an.

schwach instabilen Umgebung des in Abbildung 13 dargestellten Fixpunktes lokalisiert ist, zeigt sie bei einer größeren Auflösung $l_{max} = 30, 40$ zusätzlich Lokalisierung in der Umgebung der schwach instabilen Bahn 4_B der Länge 4. Bei weiterer Vergrößerung der Auflösung verliert der Fixpunkt in der Eigenfunktion zugunsten der ihm eng benachbarten Bahnen $2_A, 4_A$ immer mehr an Gewicht, und der große Bereich großer Amplitude spaltet sich in zwei kleinere Bereiche. Darüber hinaus schnüren sich die Bereiche großer Amplitude in die stabile Flußrichtung der Dynamik immer stärker zusammen und dehnen sich in die instabile Flußrichtung aus.

Offenbar nimmt die Eigenfunktion von $\mathcal{P}_Q$ mit wachsender Auflösung in der Umgebung von schwach instabilen periodischen Bahnen die Konturen der zugehörigen instabilen Mannigfaltigkeiten an, die, wie in Abschnitt 3.6 ausgeführt, als Träger der generalisierten Eigenfunktionen des Frobenius-Perron-Operators im chaotischen Phasenraum dienen. Entsprechend entwickelt sie mit wachsender Auflösung transversal zur instabilen Mannigfaltigkeit $\delta-$förmigen Charakter. Entlang der Mannigfaltigkeit ist die Eigenfunktion glatt und ihre Amplitude fällt, bedingt durch den unidirektionalen Abfluß von Trajektorien auf der Mannigfaltigkeit, mit wachsender Entfernung von der periodischen Bahn ab.

Bei endlicher Auflösung kann die Eigenfunktion von $\mathcal{P}_Q$ einer instabilen Mannigfaltigkeit, die mit zunehmender Entfernung von der periodischen Bahn Strukturen auf nicht aufgelösten Phasenraumskalen annimmt, nur begrenzt folgen. In unmittelbarer Nähe der entsprechenden periodischen Bahn liegen die Strukturen der Mannigfaltigkeit jedoch auf großen Skalen. Es ist davon auszugehen, daß auch die generalisierte Eigenfunktion von $\mathcal{P}$ auf dieser instabilen Mannigfaltigkeit eine glatte, mit wachsender Entfernung von der Bahn abklingende Funktion ist [**62, 59, 61**]. Die Eigenfunktion von $\mathcal{P}_Q$ approximiert die generalisierte Eigenfunktion also gerade dort, wo deren Amplitude groß ist, und stellt daher unter dem Aspekt der Zeitentwicklung von Erwartungswerten eine sinnvolle Näherung der generalisierten Eigenfunktion dar.

Wie bereits in Abschnitt 2.1 ausgeführt, ist der irreversible Charakter einer chaotischen Hamiltonschen Dynamik durch die komplexe Struktur des Phasenraumes bedingt. Entlang einer instabilen Mannigfaltigkeit fließende Wahrscheinlichkeit verteilt sich über den Phasenraum und kehrt nicht in den Ausgangszustand zurück. Bei endlicher Auflösung entsteht die Irreversibilität der Liouvilledynamik aufgrund von Dissipation. Wahrscheinlichkeit, die entlang einer instabilen Mannigfaltigkeit von großen, aufgelösten zu kleinen, nicht aufgelösten Phasenraumskalen propagiert wird, geht aus dem Unterraum großer Phasenraumskalen verloren. Für die Approximation einer generalisierten Eigenfunktion von $\mathcal{P}$ durch eine Eigenfunktion von $\mathcal{P}_Q$ auf großen Phasenraumskalen ist die Unterscheidung zwischen der scheinbaren Irreversibilität der unitären Liouvilledynamik und der tatsächlicher Irreversibilität bei endlicher Phasenraumauflösung jedoch irrelevant.

Sowie mit wachsender Auflösung immer kleinere hyperbolische Strukturen erschlossen werden, kann die Lokalisierung der Eigenfunktion von $\mathcal{P}_Q$ immer selektiver bei den Mannigfaltigkeiten von periodischen Bahnen gleicher Instabilität erfolgen. Weil dabei der Grad der Instabilität gewahrt bleibt, ändert sich auch der zugehörige

Eigenwert während dieses Prozesses nicht. Eine Eigenfunktion ändert ihre Konturen hierbei häufig nur schwach, wenn Mannigfaltigkeiten ähnlicher Instabilität wie die entsprechenden periodischen Bahnen in unmittelbarer Nachbarschaft zueinander liegen.

Auf diese Weise verliert in Abbildung 14 der Fixpunkt und dessen instabile Mannigfaltigkeit mit zunehmender Phasenraumauflösung in der Eigenfunktion an Gewicht, und die Mannigfaltigkeiten der benachbarten periodischen Bahnen, die neben denen des Fixpunktes verlaufen, treten hervor. Stattdessen erscheint der Fixpunkt in der Eigenfunktion zum Eigenwert 0.81 (Abbildung 11). Offenbar entspricht der Fixpunkt eher den in dieser Eigenfunktion präsenten instabilen Strukturen.

Weil eine unendliche Anzahl von hyperbolischen periodischen Bahnen auf beliebig kleinen Skalen im Phasenraum liegt und darüber hinaus jede instabile Mannigfaltigkeit eine unendlich komplexe Struktur aufweist, besitzt der Träger einer generalisierten Eigenfunktion von $\mathcal{P}$ im Grenzfall unendlicher Auflösung eine unendlich komplexe Struktur. Eine mit wachsender Auflösung entstehende Folge von endlichen Approximationen dieser generalisierten Eigenfunktion in Gestalt von Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ besitzt daher im Limes unendlicher Auflösung keinen wohldefinierten Grenzwert. Hierin besteht der Grund dafür, daß die nicht unimodularen Eigenwerte nicht im Spektrum des Hilbertraumoperators $\mathcal{P}$ enthalten sind. Die generalisierten Eigenfunktionen liegen nicht nur außerhalb des Hilbertraumes, sondern sie können auch nicht durch Folgen von Hilbertraumfunktionen approximiert werden.

Es ist zu erwarten, daß mit zunehmender Auflösung die Zahl der nicht unimodularen, auflösungsunabhängigen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ immer größer wird, und die zugehörigen Eigenfunktionen immer genauer auf Gebieten entsprechender Instabilität lokalisiert sind. Ob die reellen Eigenwerte oder auch Eigenwerte zu einer bestimmten Phase im Grenzfall unendlicher Auflösung ein Kontinuum bilden, und ob es eine Lücke zwischen dem größten Eigenwert und dem Einheitskreis gibt, hängt allein von der Instabilität der beliebig kleinen Phasenraumbereiche, letztendlich also von der Instabilität der in diesen Bereichen liegenden hyperbolischen periodischen Bahnen ab.

Im gemischten Phasenraum gibt es in der Regel beliebig schwach instabile periodische Bahnen hoher Periode in unmittelbarer Nachbarschaft von elliptischen Inseln, die sich beispielsweise in Intermittenzphänomenen bemerkbar machen [**94**]. Deshalb ist im Fall eines gemischten Phasenraumes anzunehmen, daß sich das nicht unimodulare Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ bei gegen unendlich gehender Auflösung unmittelbar an den Einheitskreis anschließt.

8. Der Informationsgehalt des Spektrums von $\mathcal{P}_Q$

Die auflösungsunabhängigen Eigenwerte des bei endlicher Phasenraumauflösung approximierten Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}_Q$ ließen sich elliptischen Inselketten und hyperbolischen Phasenraumbereichen einheitlicher Instabilität zuordnen. Es wurde deutlich, daß in dem Maße, wie kleinere Phasenraumstrukturen aufgelöst werden können, die Zahl der auflösungsunabhängigen Eigenwerte stetig zunimmt.

Daher stellt sich die Frage, welche Information das Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ bei einer vorgegebenen endlichen Auflösung liefert.

Wie in Abschnitt 2.4 dargelegt, sind Phasenraumdichten nur in dem Maße unterscheidbar, wie sie Observablen der Dynamik unterschiedliche Werte zuweisen. Insbesondere sind reguläre Phasenraumdichten äquivalent zueinander, wenn sie lediglich auf einem Träger vom Maß Null differieren.

Die Zeitentwicklung einer physikalischen Observablen auf der anderen Seite kann nur mit endlicher Genauigkeit verfolgt werden. Über diese Genauigkeit hinaus bleiben die Details der Zeitentwicklung unbestimmt. Durch die Genauigkeit, mit der die Observable beobachtet werden kann, ist in der Regel auch eine kleinste Phasenraumskala ausgezeichnet, bis zu der hin sich Variationen einer regulären Phasenraumdichte in der Observablen bemerkbar machen.

Wird die Matrix $\mathcal{P}_Q$ dieser kleinsten Phasenraumskala angepaßt, so beschreiben ihre auflösungsunabhängigen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen die Zeitentwicklung der Observablen unter dieser Auflösung. Sind unter der Auflösung elliptische Inselketten sichtbar, so treten in der Zeitentwicklung der Observablen Rekurrenzen auf. Aufgelöste hyperbolische Phasenraumbereiche einheitlicher Instabilität korrespondieren mit einer entsprechend schnell zerfallenden Komponente der Observablen.

Ist die Dimension der Matrix $\mathcal{P}_Q$ größer als eine vorgegebene Phasenraumauflösung es erfordert, so treten zusätzliche Eigenwerte und Eigenfunktionen zu kleineren Strukturen auf, die nicht beobachtet werden können. Ist die Dimension der Matrix $\mathcal{P}_Q$ dagegen kleiner, so sind nicht alle bei der Auflösung relevanten Eigenwerte und Eigenfunktionen präsent, sondern nur diejenigen, die den größten Phasenraumstrukturen entsprechen.

Die Matrix $\mathcal{P}_Q$ liefert also nicht das gesamte Eigenwert- und Resonanzspektrum von $\mathcal{P}$. Insbesondere sind keine Rückschlüsse auf die größte Resonanz und ihren Abstand zum Einheitskreis möglich. Vielmehr handelt es sich bei den Eigenwerten und Resonanzen von $\mathcal{P}$, die im Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ auftreten, um diejenigen, die bei endlichen Auflösungen tatsächlich relevant sind. Je nach dem Verwendungszweck, zu dem die Eigenwerte und Resonanzen bestimmt werden, kann diese Selektion der relevanten Eigenwerte und Resonanzen einen Vorteil gegenüber dem vollen Resonanzspektrum bedeuten.

9. Die Interpretation nicht unimodularer Eigenwerte als Resonanzen

In den vorherigen Abschnitten wurden nicht unimodulare, auflösungsunabhängige Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ als Resonanzen von $\mathcal{P}$ interpretiert. Argumentiert wurde mit den zugehörigen Eigenfunktionen, die auf invarianten, hyperbolischen Phasenraumgebieten einheitlicher Instabilität lokalisiert sind. Darüber hinaus gibt es weitere Argumente und Analogien, die der Identifizierung der nicht unimodularen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit Resonanzen von $\mathcal{P}$ Substanz verleihen.

In Abschnitt 2.5 wurde die zur Berechnung von Resonanzen in der Quantenmechanik gebräuchliche Methode der Dilation skizziert. Entsprechend dem quantenmechanischen, hermiteschen Hamilton-Operator H läßt sich für die klassische Dynamik die hermitesche Variante $-\mathrm{i}\mathcal{L}$ des Liouville-Operators (13) betrachten, der über die Beziehung (15) äquivalent zum Frobenius-Perron-Operator ist.

Der Liouville-Operator erfüllt nicht die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Dilation. Während H ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, handelt es sich bei $-\mathrm{i}\mathcal{L}$ um einen Differentialoperator erster Ordnung. Darüber hinaus muß der neben dem Differentialoperator zulässige Potentialterm dilationsanalytisch sein [**52**].

Ein weiterer Unterschied zwischen dem quantenmechanischen und dem klassischen Problem besteht darin, daß die zu den Resonanzen von H gehörenden Streuzustände glatte Funktionen sind, die nur deshalb nicht im Hilbertraum der quantenmechanischen Zustände liegen, weil sie nicht normierbar sind, während die generalisierten Eigenfunktionen zu den Resonanzen von $-\mathrm{i}\mathcal{L}$ Funktionen mit einem unendlich komplexen Träger im Phasenraum sind. Im Gegensatz zu den quantenmechanischen Streuzuständen können die klassischen generalisierten Eigenfunktionen nicht durch konvergente Folgen von Hilbertraumfunktionen approximiert werden.

Ein gemeinsamer Aspekt der Dilation und der Approximation des Frobenius-Perron-Operators auf großen Phasenraumskalen besteht darin, daß an die Stelle der hermiteschen Operatoren H beziehungsweise $-\mathrm{i}\mathcal{L}$ nicht hermitesche Operatoren treten, die komplexe Eigenwerte haben können. Während bei der Dilation die Hermitezität des Operators H durch eine Transformation aufgehoben wird, entsteht der effektive nicht hermitesche Liouville-Operator $-\mathrm{i}\mathcal{L}'$ aus Gleichung (153) dadurch, daß mit der Begrenzung der Auflösung die Unitarität des Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}$ zerstört wird.

Bei beiden Methoden treten die Resonanzen als komplexe Eigenwerte in Erscheinung, weil die Resonanzzustände durch die Transformation beziehungsweise die Begrenzung der Auflösung regularisiert werden und somit im jeweiligen Hilbertraum der Zustände liegen. Während jedoch bei den quantenmechanischen Streuzuständen ein asymptotisches, exponentielles Abschneiden ausreichend ist, um sie in Eigenfunktionen im Hilbertraum zu transformieren, müssen bei den generalisierten Eigenfunktionen von $-\mathrm{i}\mathcal{L}$ alle Strukturen unterhalb einer kleinsten Skala im Phasenraum ausgewaschen werden. Schließlich wird bei der praktischen Berechnung der Resonanzen von H der Operator nach der Dilation ebenso wie der Frobenius-Perron-Operator in dieser Arbeit in einem endlichen Unterraum des Hilbertraumes diagonalisiert.

Eine zweite Analogie findet sich in der Störungstheorie für hermitesche Operatoren im Hilbertraum. In der betrachteten Situation weist ein hermitescher Operator H_0 ein rein diskretes Spektrum auf. Durch das Hinzufügen einer anhand des Parameters κ kontrollierten Störung H_1 entsteht ein Operator $H = H_0 + \kappa H_1$, der an Stellen, wo Eigenwerte von H_0 liegen, nun ein kontinuierliches Spektrum besitzt. Hierbei kann es sich beispielsweise um ein Wasserstoffatom handeln, das in ein elektrisches Feld gebracht wird [**52**].

Reminiszent von einem Eigenwert von H_0, der im kontinuierlichen Spektrum von H untergegangen ist, weist H eine komplexe Resonanz auf, deren Realteil gegenüber dem reellen Eigenwert von H_0 verschoben ist und deren Imaginärteil die Zerfallsrate

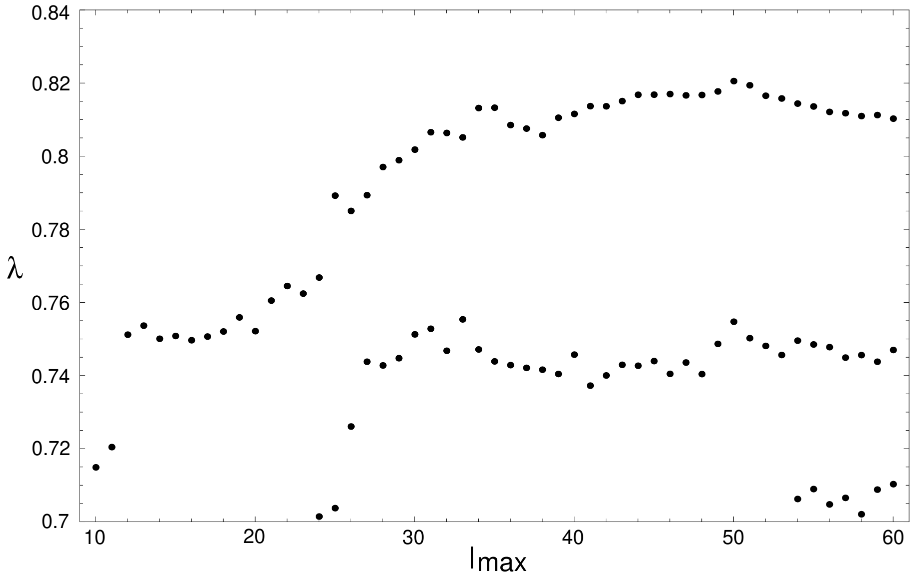


ABBILDUNG 15. Die reellen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit $\tau = 10$ und $\beta_y = \beta_z = 1$ im Intervall $[0.7, 0.84]$, aufgetragen gegen die Auflösung l_{max}. Bei kleinen Auflösungen fluktuiert ein Eigenwert um die Resonanzposition 0.75. Innerhalb weniger Auflösungsschritte nimmt der Eigenwert eine neue Position bei 0.81 ein, und ein zweiter Eigenwert rückt in seine alte Position nach. Anschließend verharren beide Eigenwerte in den jeweiligen Resonanzpositionen.

der Resonanz angibt. Eine von dem Eigenwert von H_0 ausgehende Störungsentwicklung in κ kann nicht konvergent sein, da der entsprechende Eigenwert im Spektrum von H nicht existiert. Sie ist jedoch für jede endliche Ordnung in κ endlich.

Bei der Betrachtung einer Reihe von endlichen Ordnungen dieser Störungsentwicklung häufen sich die Werte im ersten Riemannschen Blatt dort, wo im zweiten Riemannschen Blatt die entsprechende Resonanz von H liegt. Daher wird das geschilderte Phänomen als spektrale Häufung bezeichnet [**77, 78, 52, 79**]. Charakteristisch für die spektrale Häufung ist, daß die Ordnungen einer Störungsentwicklung nicht gegen einen Punkt in der komplexen Ebene konvergieren, sondern in erratischer Weise eine Punktwolke bilden, in deren Schwerpunkt sich die Resonanz im zweiten Riemannschen Blatt befindet. Die Resonanz selbst wird also nicht durch die Störungsreihe approximiert, sondern sie wird lediglich durch die endlichen Ordnungen der Störungsreihe widergespiegelt.

Bei dem Liouville-Operator einer chaotischen Dynamik handelt es sich ebenfalls um einen Operator mit einem kontinuierlichen Spektrum. Der aus der endlichen Frobenius-Perron-Matrix $\mathcal{P}_Q$ resultierende effektive Liouville-Operators $-\mathrm{i}\mathcal{L}'$ hat dagegen ein rein diskretes Spektrum. Ausgehend von diesem Spektrum kann eine Vergrößerung der Auflösung als eine implizite Störungsentwicklung der Eigenwerte interpretiert werden, deren Ordnungen durch die verschiedenen Auflösungen l_{max} gegeben sind. Die von den Eigenwerten von $-\mathrm{i}\mathcal{L}'$ ausgehenden Störungsreihen, die nicht gegen die reelle Achse konvergieren, häufen sich ab einer hinreichenden hohen Ordung an den Stellen in der komplexen Ebene, an denen sich Resonanzen von $-\mathrm{i}\mathcal{L}'$ in einem höheren Riemannschen Blatt befinden. Eigenwerte von $-\mathrm{i}\mathcal{L}'$ auf der reellen Achse entsprechen unimodularen Eigenwerten von $\mathcal{P}_Q$ und Häufungspunkte in der komplexen Ebene nicht unimodularen Eigenwerten von $\mathcal{P}_Q$.

Im Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ manifestiert sich die spektrale Häufung insbesondere auf der reellen Achse, weil Eigenwerte die reelle Achse nur in komplex konjugierten Paaren verlassen können. Während sich mit wachsender Auflösung komplexwertige Eigenwerte gegenseitig nur schwach beeinflussen, kommt es auf der reellen Achse zwangsläufig zu Begegnungen und vorübergehenden Entartungen, sobald ein in Richtung des Einheitskreises strebender Eigenwert auf einen Eigenwert trifft, der eine Resonanz reflektiert. Bei diesen Begegnungen wird deutlich, daß es ausgezeichnete Positionen auf der reellen Achse gibt, die permanent von einem der Eigenwerte besetzt sind. Dabei ist es durchaus möglich, daß ein Eigenwert von einem anderen abgelöst wird.

Dieses Verhalten kann im Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ zu den Parametern $\tau = 10$ und $\beta_y = \beta_z = 1$ an den in Tabelle 3 aufgeführten reellen Resonanzen 0.75 und 0.81 beobachtet werden. In Abbildung 15 sind die reellen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ im Intervall $[0.7, 0.84]$ gegen die Phasenraumauflösung l_{max} aufgetragen. Bei einer kleinen Auflösung $l_{max} \leq 20$ fluktuiert ein Eigenwert um die Resonanzposition 0.75, während sich bei der Resonanzposition 0.81 kein Eigenwert befindet, weil die zugehörigen Phasenraumstrukturen noch nicht erkannt sind. Innerhalb weniger Auflösungsschritte werden die Phasenraumstrukturen der Resonanz 0.81 aufgelöst, und der Eigenwert springt zu der größeren Resonanzposition. Gleichzeitig rückt ein neuer Eigenwert nach und besetzt die Resonanzposition 0.75. In den darauffolgenden Auflösungsschritten verharren beide Eigenwerte in ihren jeweiligen Positionen. Bei $l_{max} = 54$ tritt ein weiterer Eigenwert in Erscheinung, der jedoch stark fluktuiert und dem daher noch keine Bedeutung beigemessen werden kann.

Die wesentlichen Aspekte der Vorgehensweise, Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators in Form von nicht unimodularen Eigenwerten bei endlicher Phasenraumauflösung zu bestimmen, treten also auch in anderen Zusammenhängen bei der Berechnung von Resonanzen auf, insbesondere in Zusammenhang mit der Dilation. Das Verhalten der nicht unimodularen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ mit wachsender Phasenraumauflösung entspricht der aus der Störungstheorie bekannten spektralen Häufung. Wenngleich es sich hier lediglich um Analogien handelt, untermauern diese doch die Annahme, daß es sich bei den nicht unimodularen Eigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ um Resonanzen von $\mathcal{P}$ handelt.

10. Der inverse Propagator

Im Raum der generalisierten Phasenraumdichten muß zwischen dem Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ der Vorwärtszeitentwicklung und dem Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ der Rückwärtszeitentwicklung unterschieden werden, weil die generalisierten Funktionen, auf die sie wirken, und insbesondere ihre generalisierten Eigenfunktionen, auf verschiedenen Trägern im Phasenraum liegen [**62**].

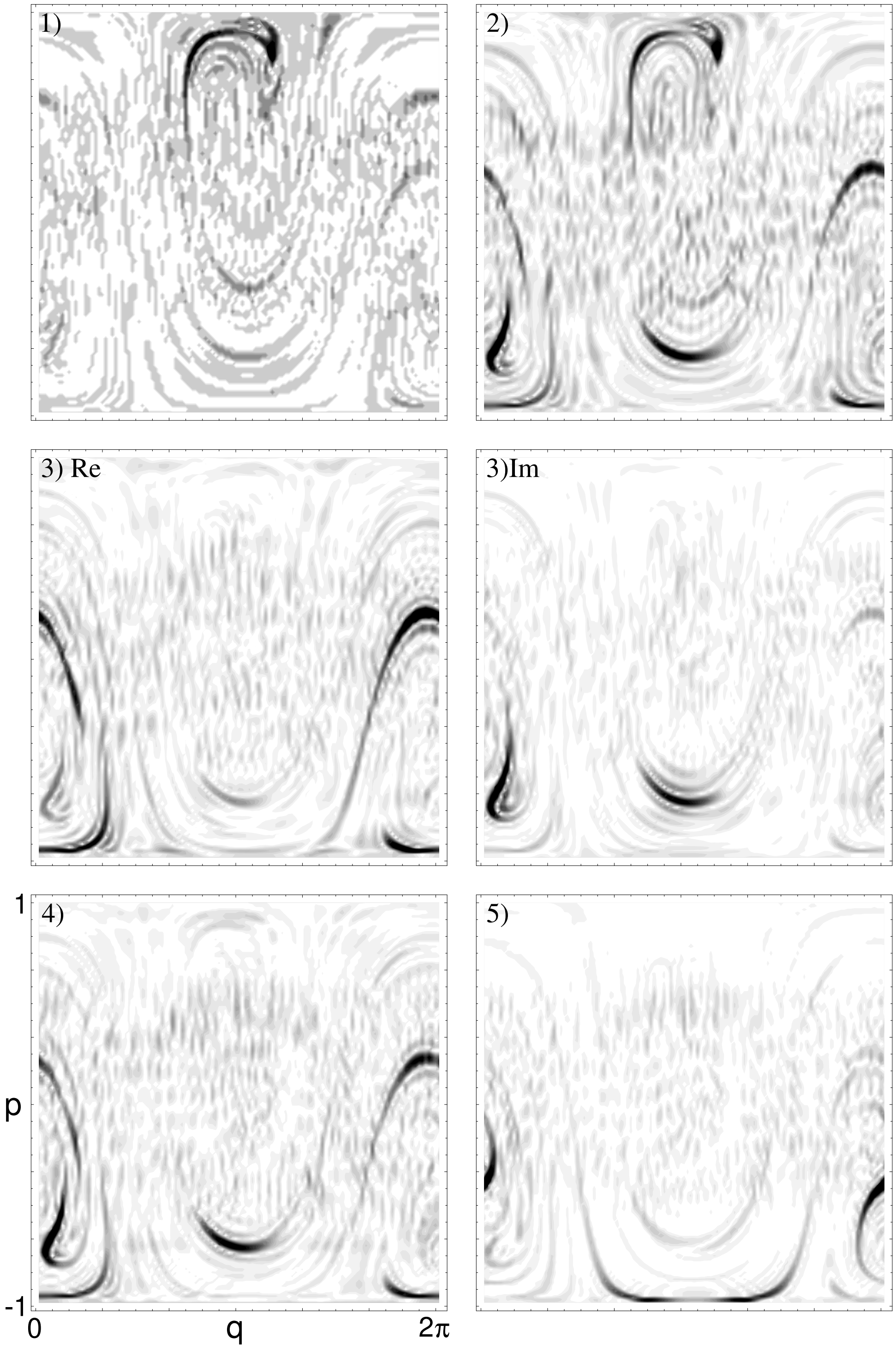


Abbildung 16. Eigenfunktionen des Frobenius-Perron-Operators der inversen Zeitentwicklung $\mathcal{P}_Q^{-1}$ zu den nicht unimodularen Eigenwerten 1) – 5) in Tabelle 3 bei $l_{max} = 60$. Gegenüber den Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ (Abbildung 11) sind stabile und instabile Mannigfaltigkeiten vertauscht.

Angewandt auf Funktionen f des Hilbertraumes sind die Operatoren $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ und $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ zum unitären Frobenius-Perron-Operator $\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$ mit positivem beziehungsweise negativem Zeitparameter n äquivalent,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathrm{V}}^{+n} f &= \mathcal{P}_{\mathrm{H}}^{+n} f \,, \\ \mathcal{P}_{\mathrm{R}}^{-n} f &= \mathcal{P}_{\mathrm{H}}^{-n} f \,. \end{aligned} \tag{162}$$

Daher sind Eigenfunktionen des Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$ im Hilbertraum auch Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ und $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$. Es handelt sich um die invarianten Maße, deren Träger im Phasenraum die elliptischen Inselketten sind. So, wie die invarianten Tori, die diese Inselketten begrenzen, für Vorwärts- und Rückwärtszeitentwicklung übereinstimmen, sind auch die entsprechenden Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ und von $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ identisch.

Anders verhält es sich bei den generalisierten Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ und $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$, die als Träger instabile Mannigfaltigkeiten hyperbolischer periodischer Bahnen besitzen. Die periodischen Bahnen, die bei der Rückwärtszeitentwicklung in umgekehrter Richtung durchlaufen werden, ändern zwar ihre Instabilität nicht, weshalb auch die Resonanzen der Vorwärts- und Rückwärtszeitentwicklung die gleichen sind, jedoch werden stabile Mannigfaltigkeiten unter der Zeitumkehr instabil und instabile Mannigfaltigkeiten stabil.

Die Frobenius-Perron-Matrix bei endlicher Phasenraumauflösung $\mathcal{P}_Q$ entspricht aufgrund ihrer spektralen Eigenschaften eher dem Operator $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ als dem Hilbertraumoperator $\mathcal{P}_{\mathrm{H}}$. Insbesondere sind ihre den Resonanzen entsprechenden Eigenfunktionen auf instabilen Mannigfaltigkeiten lokalisiert. Die Matrix gibt daher keinen Aufschluß über die Rückwärtszeitentwicklung.

Der Frobenius-Perron-Operator der Rückwärtszeitentwicklung wird durch die zu M inverse Phasenraumabbildung induziert,

$$M^{-1} = R_y(-\beta_y)\, R_z(-\beta_z)\, T_z(-\tau)\,. \tag{163}$$

Daraus ergeben sich die Matrixelemente der Frobenius-Perron-Matrix als

$$\mathcal{P}^{-1}_{l_1 m_1, l_2 m_2} = \mathcal{R}_{y\; l_1 m_1 m_2}(-\beta_y)\; \mathcal{R}_{z\; l_1 m_2}(-\beta_z)\; \mathcal{T}_{z\; l_1 l_2 m_2}(-\tau)\,. \tag{164}$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften der Dreh- und Torsionsmatrixelemente ist offenbar

$$\mathcal{P}^{-1}_{l_1 m_1, l_2 m_2} = \mathcal{P}^{*}_{l_2 m_2, l_1 m_1}\,. \tag{165}$$

Diese Beziehung folgt schon allein aus der Unitarität der unendlichdimensionalen Frobenius-Perron-Matrix im Hilbertraum, weil deren Matrixelemente mit den Matrixelementen von $\mathcal{P}_Q$ für $l_1, l_2 \leq l_{max}$ übereinstimmen. Bei endlicher Auflösung ergibt sich die Frobenius-Perron-Matrix der inversen Zeitentwicklung daher als $\mathcal{P}_Q^{-1} = \mathcal{P}_Q^{+}$. Die Matrizen $\mathcal{P}_Q$ und $\mathcal{P}_Q^{-1}$ haben folglich die gleichen Eigenwerte und unterscheiden sich in ihren Eigenfunktionen. Es handelt sich bei der Matrix $\mathcal{P}_Q^{-1}$ nicht um die zu $\mathcal{P}_Q$ inverse Matrix. Diese Beziehung ist erst im unitären Grenzfall unendlicher Auflösung gegeben.

Weil jedoch die beiden Operatoren $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ und $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ dieselben Eigenfunktionen im Hilbertraum besitzen, weisen auch die Matrizen $\mathcal{P}_Q$ und $\mathcal{P}_Q^{-1}$ dieselben Eigenfunktionen zu den fast unimodularen Eigenwerten auf elliptischen Inselketten auf. Hier ist ein Vergleich überflüssig. Abbildung 16 zeigt dagegen die Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q^{-1}$ zu den in Tabelle 3 aufgeführten Resonanzeigenwerten $1)-5)$. Diese unterscheiden sich von den entsprechenden Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$, die in Abbildung 11 dargestellt sind.

Die Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q^{-1}$ zeigen bei denselben periodischen Bahnen Lokalisierung wie die Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$, jedoch folgen sie den stabilen Mannigfaltigkeiten der Vorwärtszeitentwicklung. Daher liegen die Bereiche großer Amplitude transversal zu den entsprechenden Amplituden der Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$. Die Bereiche großer Amplituden kreuzen sich in den Punkten der periodischen Bahnen.

Bei der gemeinsamen Betrachtung der Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ und $\mathcal{P}_Q^{-1}$ lassen sich die periodischen Bahnen, auf deren invarianten Mannigfaltigkeiten die Eigenfunktionen lokalisiert sind, noch eindeutiger identifizieren. Dies ist für die Entwicklung der Spektraldeterminante von $\mathcal{P}_{\mathrm{V}}$ beziehungsweise $\mathcal{P}_{\mathrm{R}}$ nach periodischen Bahnen von Bedeutung. Wie sich im folgenden Kapitel zeigen wird, können Resonanzen über diese Entwicklung auf die verhältnismäßig wenigen, durch die Eigenfunktionen ausgezeichneten periodischen Bahnen zurückgeführt werden.

KAPITEL 6

Resonanzen aus periodischen Bahnen

1. Spurformel und Spektraldeterminante

Anhand von Trajektorien kann detailliert das Kurzzeitverhalten einer chaotischen Dynamik studiert werden. Aufschluß über das Langzeitverhalten von Observablen geben dagegen die Liouvilledynamik und insbesondere die Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators. Trotzdem stehen periodische Bahnen und Resonanzen in einem unmittelbaren Zusammenhang.

Es wurde bereits deutlich, daß die den Resonanzen zugehörigen Eigenzustände, wenngleich sie singulär sind, bei endlicher Phasenraumauflösung aufgrund ihrer starken Lokalisierung durch eine relativ kleine Zahl von hyperbolischen periodischen Bahnen charakterisiert werden.

Hyperbolische periodische Bahnen bilden das Skelett einer chaotischen Hamiltonschen Dynamik, da sie in der Regel mit zunehmender Periode dicht im Phasenraum liegen und die Dynamik sich in ihrer Umgebung durch die Monodromiematrizen der jeweiligen Bahnen und deren Eigenwerte und Eigenvektoren beschreiben läßt.

Bei einer hyperbolischen Abbildung wird der Zusammenhang zwischen periodischen Bahnen und Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators $\mathcal{P}$ über eine sogenannte Spurformel hergestellt [**83, 84, 85**]. Unter der Annahme, daß der Frobenius-Perron-Operator einer Abbildung $\mathbf{M}$ über diskrete Zeitschritte im Hilbertraum ein rein kontinuierliches Spektrum, aber in dem größeren Raum der generalisierten Eigenfunktionen nicht unimodularen Resonanzeigenwerte γ_i besitzt, läßt sich die Spur der $n-$ten Potenz von $\mathcal{P}$ in diesem Raum in üblicher Weise als Summe über die Resonanzeigenwerte schreiben,

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{P}^n = \sum_i \gamma_i^n \,. \tag{166}$$

Auf der anderen Seite kann die Spur des Integralkernoperators $\mathcal{P}$ durch das Gleichsetzen von Bild und Urbild in Gleichung (7) mit $\rho = 1$ definiert werden,

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{P}^n = \int_\Omega \mathrm{d}\mathbf{x}\; \delta(\mathbf{x} - \mathbf{M}^n(\mathbf{x}))\,. \tag{167}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Fixpunkte $\mathbf{x}_i$ von $\mathbf{M}^n$ isoliert und die Eigenwerte der Monodromiematrix $\Xi_n(\mathbf{x}_i)$ der Abbildung $\mathbf{M}^n$ ungleich Eins sind, läßt sich das Integral ausführen,

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{P}^n = \sum_{\{\mathbf{x}=\mathbf{M}^n\mathbf{x}\}} \frac{1}{|\det(\mathbf{1} - \Xi_n(\mathbf{x}))|}\,. \tag{168}$$

Die Fixpunkte von $\mathbf{M}^n$ gehören zu periodischen Bahnen von $\mathbf{M}$ mit den primitiven Längen p, die $r-$fach durchlaufen werden, $n = rp$. Entsprechend läßt sich die Monodromiematrix zu $\mathbf{M}^n$ durch die Monodromiematrix Ξ_p der Abbildung $\mathbf{M}^p$ ausdrücken, $\Xi_n = (\Xi_p)^r$. Weil die Beiträge aller Punkte einer periodischen Bahn zur Spur (168) identisch sind, kann die Spur auch als Summe über alle primitiven periodischen Bahnen k und deren Wiederholungen geschrieben werden,

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{P}^n = \sum_{\{k\}} p_k \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{|\det(\mathbf{1} - \Xi_{p_k}^r)|}\, \delta_{n,p_k r}\,. \tag{169}$$

Die Spurformel fußt nun auf der Äquivalenz der Spuren (166) und (169). Voraussetzung für diese Äquivalenz ist das sogenannte Hyperbolizitätskriterium [**83, 85, 40, 62**]. Demnach dürfen keine periodischen Bahnen auftreten, deren Monodromiematrizen Ξ unimodulare Eigenwerte besitzen, und ihre stabilen und instabilen Eigenwerte $|\xi_i^{\mathrm{stab}}| < 1$ und $|\xi_i^{\mathrm{inst}}| > 1$, $i = 1, \ldots, (\dim \Xi)/2$ müssen einen endlichen Abstand $\delta_{\mathrm{stab}}, \delta_{\mathrm{inst}} > 0$ zu Eins einhalten,

$$\begin{aligned} |\xi_i^{\mathrm{stab}}|^{\frac{1}{n}} &< 1 - \delta_{\mathrm{stab}}\,, \\ |\xi_i^{\mathrm{inst}}|^{\frac{1}{n}} &> 1 + \delta_{\mathrm{inst}}\,. \end{aligned} \tag{170}$$

Ein erster Zugang zu den Resonanzen γ_i über periodische Bahnen ergibt sich nun aus einer Laplacetransformation von (166),

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathrm{tr}\,\mathcal{P}^n = \mathrm{tr}\,\frac{z\mathcal{P}}{1 - z\mathcal{P}} = \sum_i \frac{z\gamma_i}{1 - z\gamma_i}\,. \tag{171}$$

Zusammen mit der Laplacetransformierten von Gleichung (169) resultiert die Spurformel

$$\sum_i \frac{z\gamma_i}{1 - z\gamma_i} = \sum_{\{k\}} p_k \sum_{r=1}^{\infty} \frac{z^{p_k r}}{|\det(\mathbf{1} - \Xi_{p_k}^r)|}\,, \tag{172}$$

aus der sich die Resonanzen γ_i als die Polstellen $z_i = 1/\gamma_i$ der rechten Seite bestimmen lassen.

Bei einer approximativen Berechnung der Resonanzen aus einer endlichen Anzahl von periodischen Bahnen gestaltet sich die Suche nach Polstellen von (172) jedoch als schwierig. Einfacher lassen sich die Resonanzen über die Nullstellen einer Determinante, der sogenannten Spektraldeterminante berechnen,

$$\mathrm{d}(z) = \det(1 - z\mathcal{P}) = \prod_i (1 - z\gamma_i)\,. \tag{173}$$

Die Beziehung zwischen der Spektraldeterminante und der Spur (169) läßt sich über die Identität

$$\ln\det(1 - z\mathcal{P}) = \mathrm{tr}\,\ln(1 - z\mathcal{P}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \mathrm{tr}\,\mathcal{P}^n \tag{174}$$

herstellen. Damit resultiert die Spektraldeterminante als

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(z) &= \exp\left[-\sum_{\{k\}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{z^{p_k r}}{|\det(\mathbf{1}-\Xi_{p_k}^{r})|}\right] \\ &= 1+\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m\,. \end{aligned} \tag{175}$$

Weil in dieser Entwicklung die reellen Koeffizienten c_m exponentiell mit m abfallen [**3**], was bedeutet, daß die nach Größe geordneten Resonanzen γ_i ebenfalls exponentiell mit i kleiner werden, kann die Spektraldeterminante zur Bestimmung der größten Resonanzen durch ein endliches Polynom $G-$ten Grades,

$$\mathrm{d}_G(z) = 1+\sum_{m=1}^{G} c_m z^m\,, \tag{176}$$

approximiert werden. Sobald sich eine Nullstelle von $\mathrm{d}_G(z)$ gegenüber einer Vergrößerung der Ordnung G als unempfindlich erweist, entspricht sie dem Inversen einer Resonanz $1/\gamma_i$.

In einen Koeffizienten c_m der Entwicklung (175) gehen alle periodischen Bahnen bis zur Länge m ein. Beiträge zum Koeffizienten stammen von Bahnen der primitiven Periode m, von Bahnen niedrigerer Periode, deren Wiederholungen die Länge m ergeben, sowie von den Paarungen verschiedener Bahnen, deren Längen in der Summe m betragen und die auch als Pseudobahnen bezeichnet werden.

Die Anzahl der periodischen Bahnen wächst in der Regel exponentiell mit der Periode, jedoch können häufig aus den Bahnen niedrigster Periode ausreichend viele Koeffizienten bestimmt werden, um die größten Resonanzen mit guter Genauigkeit zu bestimmen [**86**].

2. Die Spektraldeterminante bei gemischtem Phasenraum

Sollen Resonanzen einer Dynamik mit gemischtem Phasenraum aus periodischen Bahnen bestimmt werden [**87, 88, 92, 93**], so ist die Entwicklung der Spektraldeterminante nach periodischen Bahnen als endliches Polynom in der beschriebenen Weise nicht durchführbar.

Bereits die unendlich vielen in Verbindung mit elliptischen Inselketten auftretenden unimodularen Eigenwerte führen zur Divergenz der Spuren $\mathrm{tr}\,\mathcal{P}^n$ und damit der Koeffizienten c_m der Spektraldeterminante. Weil von invarianten Tori gegeneinander abgegrenzte Phasenraumbereiche jedoch unabhängig voneinander sind, kann diese Divergenz vermieden werden, indem lediglich eine Subdynamik auf einem solchen hyperbolischen Phasenraumbereich untersucht wird. Die Subdynamik weist neben dem nichtentarteten Eigenwert Eins keine weiteren unimodularen Eigenwerte mehr auf.

Auch für eine Subdynamik steht der Berechnung von Resonanzen als Nullstellen der Spektraldeterminante entgegen, daß das Hyperbolizitätskriterium (170) bei einem gemischten Phasenraum nicht erfüllt ist. Typisch für den gemischten Phasenraum sind, durch Bifuraktionen oder aufbrechende invariante Tori bedingt, schwach instabile periodische Bahnen mit großer Periodenlänge. Weil die Monodromieeigenwerte dieser periodischen Bahnen unmittelbar bei Eins liegen, liefern die Bahnen fast divergente Beiträge zu den Spuren $\mathcal{P}^n$ beziehungsweise zu den Koeffizienten c_m der Spektraldeterminante und dominieren sie. Die Beträge der Koeffizienten c_m fallen nun nicht mehr exponentiell mit m ab, sondern tendieren aufgrund der exponentiellen Proliferation der periodischen Bahnen zu immer größeren Werten. Eine Entwicklung der Spektraldeterminante als endliches Polynom ist nun nicht mehr gerechtfertigt.

Sowie die Koeffizienten c_m nicht exponentiell mit m abfallen, werden auch die Resonanzen γ_i nicht exponentiell mit i kleiner. Das entspricht der Erwartung für einen gemischten Phasenraum, wonach Resonanzen beliebig dicht beieinander und beliebig nahe an Eins liegen. Es ist also im Grenzfall langer Zeiten $n \to \infty$ weder die Konvergenz der Spuren als Summen über die Resonanzen (166), noch die Konvergenz der Spuren als Summen über periodische Bahnen (168) gesichert.

3. Resonanzen aus periodischen Bahnen

In Kapitel 5 wurde dargelegt, daß sich den Resonanzeigenwerten von $\mathcal{P}_Q$ periodische Bahnen zuordnen lassen, auf deren instabilen Mannigfaltigkeiten die zugehörigen Eigenfunktionen lokalisiert sind. Es ist naheliegend, daß die so identifizierten periodischen Bahnen die wesentlichen Beiträge zur Spektraldeterminante liefern, aufgrund derer die Resonanz als inverse Nullstelle der Determinante auftritt.

Periodische Bahnen bilden das Skelett einer hyperbolischen Dynamik, da ihre Instabilität repräsentativ für den umliegenden Phasenraum ist und sie mit wachsender Periode den Phasenraum dicht überdecken. Die Monodromieeigenwerte ξ_i^{inst} stellen ein Maß dafür dar, wie schnell Trajektorien die Nachbarschaft einer periodischen Bahn verlassen. Die Gesamtheit aller periodischen Bahnen der Länge n gibt daher mit wachsendem n eine immer detailliertere Beschreibung des Phasenraumes [**40**].

Abbildung 1 zeigt ein Phasenraumportrait des periodisch gestoßenen Kreisels mit $\tau = 10$ und $\beta_z = \beta_y = 1$, das anhand von 1500 periodischen Bahnen der Länge 12 erstellt ist. Die Grautönung der Bahnpunkte entspricht dem Betrag des instabilen Eigenwertes $|\xi^{\text{inst}}| > 1$ der $2 \times 2-$Monodromiematrix. Sie variiert von Schwarz für fast bei Eins liegende Stabilitätskoeffizienten bis Weiß für Stabilitätskoeffizienten $|\xi^{\text{inst}}| > 2.5$. Die in dem Portrait ausgezeichneten Bereiche schwacher Instabilität sind leicht als die Bereiche wiederzuerkennen, in denen die Eigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$ zu den großen Resonanzeigenwerten lokalisiert sind (vgl. Abbildungen 11, 12, 16).

Es erscheint plausibel, daß für die Bestimmung einer Resonanz eine lokale Beschreibung der Dynamik in den Phasenraumbereichen ausreicht, in denen der entsprechende Zerfall stattfindet. Die Information über diese lokale Dynamik ist in den Monodromiematrizen der dort angesiedelten periodischen Bahnen enthalten. Wenngleich die Entwicklung der Spektraldeterminante nach periodischen Bahnen im gemischten Phasenraum nicht durchführbar ist, können doch einzelne Resonanzen aus einer lokalen Selektion periodischer Bahnen berechnet werden.

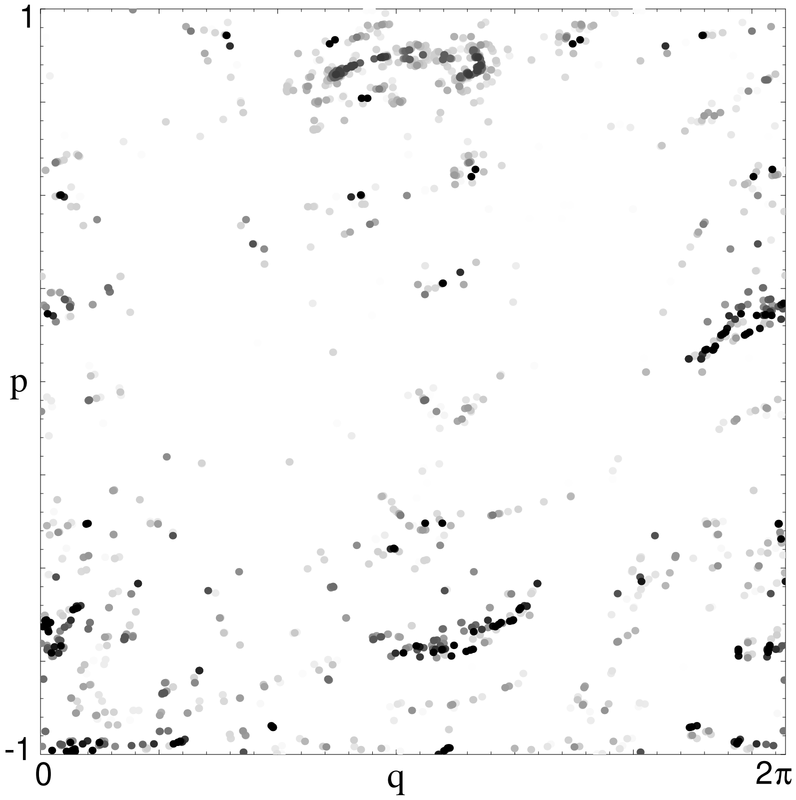


Abbildung 1. Phasenraumportrait des periodisch gestoßenen Kreisels mit $\tau = 10$ und $\beta_z = \beta_y = 1$, erstellt anhand von periodischen Bahnen der Länge 12. Die Grautönung der Bahnpunkte entspricht dem Betrag des instabilen Eigenwertes $|\xi_i^{\mathrm{inst}}|^{1/12} > 1$ der $2 \times 2-$Monodromiematrix. Sie variiert von Schwarz für fast bei Eins liegende Stabilitätskoeffizienten bis Weiß für Stabilitätskoeffizienten $|\xi_i^{\mathrm{inst}}|^{1/12} > 2.5$. Die schwach instabilen Phasenraumbereiche, in denen die Resonanzeigenfunktionen Lokalisierung zeigen, sind auch hier deutlich zu erkennen.

Auf diese Weise gehen sehr schwach instabile Bahnen, die fast divergente Beiträge zur Spektraldeterminante liefern, nicht in die Rechnung ein. Resonanzen, die in Zusammenhang mit diesen Bahnen stehen, können nicht bestimmt werden.

Eine einfache Möglichkeit der Selektion periodischer Bahnen besteht in der Identifizierung über die Resonanzeigenfunktionen von $\mathcal{P}_Q$. Alternativ können über die Monodromieeigenwerte ausgedehnte Bereiche einheitlicher Instabilität gesucht werden, und die Bahnen in jedem dieser nicht notwendigerweise zusammenhängenden Bereiche als Ausganspunkt für die Entwicklung der Spektraldeterminante benutzt werden. Eine solche Auswahl von Bahnen wird im folgenden mit $\{k\}_{\mathrm{A}}$ bezeichnet.

Die Beiträge der Bahnen $\{k\}_\mathrm{A}$ können als Faktoren von der Spektraldeterminante (175) abgespalten werden,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(z) &= \prod_{\{k\}_\mathrm{A}} \exp\left[-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{z^{p_k r}}{|\det(\mathbf{1}-\Xi_{p_k}^r)|}\right] \times \\ & \prod_{\{k\}\setminus\{k\}_\mathrm{A}} \exp\left[-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{z^{p_k r}}{|\det(\mathbf{1}-\Xi_{p_k}^r)|}\right] . \end{aligned} \tag{177}$$

Es wird nun angenommen, daß die diesen Bahnen entsprechenden Resonanzen $\{\gamma_i\}_\mathrm{A}$ auch in dem Faktor

$$\mathrm{d}^\mathrm{A}(z) = \prod_{\{k\}_\mathrm{A}} \exp\left[-\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{z^{p_k r}}{|\det(\mathbf{1}-\Xi_{p_k}^r)|}\right] \tag{178}$$

der Spektraldeterminante als Nullstellen $z_0 = 1/\gamma_i$ auftreten.

Unter einer endlichen Phasenraumauflösung sind periodische Bahnen nur bis zu einer endlichen Länge n_{max} sichtbar. Es ist zu erwarten, daß zur Berechnung von bei dieser Auflösung auftretenden Resonanzen lediglich solche Bahnen herangezogen werden müssen, die nicht länger als n_{max} sind, $p_k r < n_{max}$. Damit rechtfertigt sich die Entwicklung von $\mathrm{d}^\mathrm{A}(z)$ als Polynom bis zur Ordnung n_{max}. Auf der anderen Seite ist eine Entwicklung in höherer Ordnung nur in Verbindung mit einer Vergrößerung der Auflösung möglich, weil in die Entwicklung der Spektraldeterminante immer auch die der Ordnung entsprechenden primitiven Bahnen eingehen müssen.

Die Nullstellen des aus der Entwicklung resultierenden Polynoms

$$\mathrm{d}^\mathrm{A}_{n_{max}}(z) = 1 + \sum_{m=1}^{n_{max}} c_m^\mathrm{A} z^m \tag{179}$$

können als Resonanzen interpretiert werden, sobald sie unempfindlich gegenüber einer Vergrößerung der Ordnung n_{max} sind. In der Regel handelt es sich dabei lediglich um einen Teil der Nullstellen. Insbesondere können die Nullstellen erst dann Resonanzen richtig wiedergeben, wenn die Ordnung n_{max} die Anzahl der mit den Bahnen korrespondierenden Resonanzen übersteigt. Weil nämlich alle diese Resonanzen etwa gleich groß sind, ist keine von ihnen als Nullstelle von $\mathrm{d}^\mathrm{A}_{n_{max}}(z)$ ausgezeichnet, und fehlende Ordnungen des Polynoms wirken sich auf alle Nullstellen in gleichem Maße störend aus.

Die in Tabelle 5.3 aufgeführten Resonanzen des periodisch gestoßenen Kreisels mit $\tau = 10$ und $\beta_z = \beta_y = 1$ lassen sich auf die beschriebene Weise aus verhältnismäßig wenigen periodischen Bahnen reproduzieren. Die periodischen Bahnen des Kreisels können in diesem Fall bis zur Länge 7 sicher bestimmt werden. Mit aufsteigender Periode beträgt die Zahl der primitiven Bahnen $6, 17, 44, 141, 467, 1789, 6507$. Unter diesen befinden sich nur zwei stabile Bahnen der Länge 6.

Zur Berechnung einer Resonanz werden die periodischen Bahnen gesucht, die in den Phasenraumbereichen großer Amplitude der entsprechenden Eigenfunktion liegen. Da es sich bei den betraglich großen Resonanzen um Bereiche schwacher Instabilität handelt, sind auch diese Bahnen schwach instabil. Der Beitrag einer

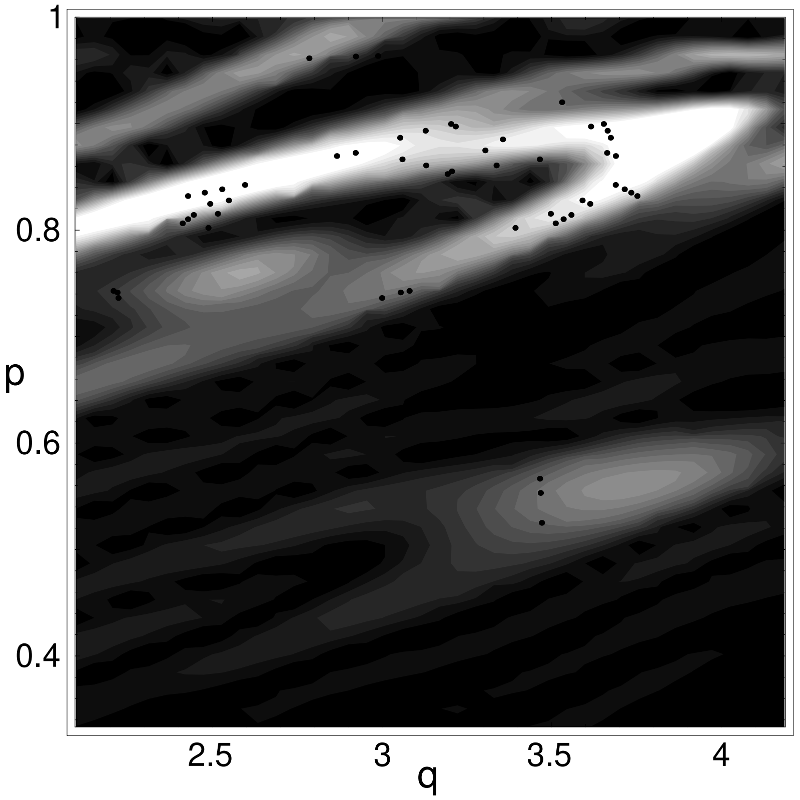


ABBILDUNG 2. Vergrößerte Darstellung des Bereiches großer Amplitude der Resonanzeigenfunktion zu 0.81 bei der Auflösung $l_{max} = 60$, und die in diesem Phasenraumbereich angesiedelten schwach instabilen Bahnen mit Perioden $p \leq 7$.

k	p	ξ^{inst}	$\sqrt[p]{\lvert\xi\rvert}$	k	p	ξ	$\sqrt[p]{\lvert\xi\rvert}$
1	1	−2.10166	2.10166	7	6	−95.0258	2.13619
2	2	−3.24318	1.80088	8	7	172.228	2.08662
3	4	−11.1634	1.82789	9	7	274.676	2.23050
4	5	74.5319	2.36847	10	7	−282.804	2.23981
5	5	−110.185	2.56109	11	7	−282.804	2.23981
6	6	61.7468	1.98809	12	7	−330.307	2.29005

TABELLE 1. Die Stabilitätskoeffizienten ξ^{inst} der periodischen Bahnen k mit den primitiven Perioden p, die im Phasenraumbereich großer Amplitude der Eigenfunktion zum Eigenwert 0.81 liegen (vgl. Abbildung 2). Aus ihren Beiträgen wird $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ bis zur siebten Ordnung entwickelt.

n_{max}	1.Nst.$^{-1}$	2.Nst.$^{-1}$	3.Nst.$^{-1}$	4.Nst.$^{-1}$	5.Nst.$^{-1}$	6.Nst.$^{-1}$	7.Nst.$^{-1}$
1	0.2185						
2	0.7070	−0.4886					
3	0.6379	−0.5588	0.1394				
4	0.7664	−0.6730	0.063 +i0.394	0.063 −i0.394			
5	0.7654	−0.6742	0.059 +i0.393	0.059 −i0.393	0.0096		
6	0.7446	−0.6487	0.047 +i0.465	0.047 −i0.465	0.3240	−0.2948	
7	0.7705	−0.551 +i0.043	−0.551 −i0.043	−0.031 +i0.496	−0.031 −i0.496	0.306 +i0.279	0.306 −i0.279

TABELLE 2. Eine inverse Nullstelle (1.Nst.$^{-1}$) des Polynoms $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$, berechnet aus den in Tabelle 1 aufgeführten periodischen Bahnen in den Ordnungen $n_{max} = 1, \ldots, 7$, entspricht dem Resonanzeigenwert 0.81 von $\mathcal{P}_Q$.

jeden primitiven Bahn k zur Spur $\operatorname{tr}\mathcal{P}^n$ mit $n = p_k r$ läßt sich im Fall einer 2×2−Monodromiematrix vereinfachen zu

$$|\det(\mathbf{1} - \Xi^r_{p_k})|^{-1} = |2 - \operatorname{tr}\Xi^r_{p_k}|^{-1}\,. \tag{180}$$

Weil die Abbildung volumenerhaltend ist, sind ξ^{stab} und ξ^{inst} reziprok zueinander, und der Beitrag einer periodischen Bahn kann allein durch den Stabilitätskoeffizienten ξ^{inst} ausgedrückt werden,

$$\operatorname{tr}\Xi^r_{p_k} = (\xi^{\mathrm{inst}})^r + (1/\xi^{\mathrm{inst}})^r\,. \tag{181}$$

Es ist offensichtlich, daß die Beiträge von stärker hyperbolischen Bahnen zur Spektraldeterminante gegenüber den Beiträgen von schwächer hyperbolischen Bahnen ein geringes Gewicht haben. Insbesondere müssen zur Berechnung einer Resonanz die schwächer instabilen Bahnen gefunden werden.

Die zur Berechnung der Resonanz 0.81 relevanten Bahnen bis zur Länge 7 sind in Abbildung 2 zusammen mit der Eigenfunktion bei $l_{max} = 60$ dargestellt. Gezeigt ist nur der Ausschnitt des Phasenraumes, in dem die Eigenfunktion eine große Amplitude besitzt und in dem entsprechend auch die periodischen Bahnen liegen. Entgegen der bisherigen Konvention sind Bereiche kleiner Amplitude schwarz und Bereiche großer Amplitude weiß gekennzeichnet. Die Eigenfunktion im gesamten Phasenraum zeigt Abbildung 5.11 1).

In Tabelle 1 sind zu den mit k indizierten Bahnen die primitive Periode p_k, der Stabilitätskoeffizient ξ^{inst} sowie zur besseren Vergleichbarkeit der Stabilität die p_k−te Wurzel von $|\xi^{\mathrm{inst}}|$ aufgeführt.

Anhand dieser Bahnen kann das Polynom $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ bis zur Ordnung $n_{max} = 7$ berechnet werden. Weil die eingehenden Bahnen alle in einem großen Bereich einheitlicher Instabilität liegen, kann das Polynom nur eine Resonanz reproduzieren.

k	p	ξ^{inst}	$\sqrt[p]{\lvert\xi^{\text{inst}}\rvert}$	k	p	ξ	$\sqrt[p]{\lvert\xi^{\text{inst}}\rvert}$
1	2	-3.24318	1.80088	5	5	74.5319	2.36847
2	4	-8.56101	1.71053	6	6	61.7468	1.98809
3	4	-11.1634	1.82789	7	6	-95.0258	2.13619
4	4	28.2638	2.30572				

TABELLE 3. Die Stabilitätskoeffizienten ξ^{inst} der Bahnen k, die der Eigenfunktion zum Resonanzeigenwert 0.75 zugeordnet werden können.

Tabelle 2 zeigt die n_{max} inversen Nullstellen von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$. Schon bei $n_{max} = 2$ läßt sich die Resonanz 0.81 aus nur zwei Bahnen mit den Längen 1 und 2 bis auf etwa 14% approximieren. Bei $n_{max} = 3$ kommt keine neue Bahn hinzu, jedoch geht nun die aus den beiden Bahnen gebildete Pseudobahn in das Polynom ein. Das Resultat verschlechtert sich jedoch gegenüber der niedrigeren Ordnung. Bereits bei $n_{max} = 4$ weicht das nun aus drei Bahnen gewonnene Resultat nur noch um 5% von 0.81 ab. Die vergleichsweise große Abweichung bei $n_{max} = 6$ kann darauf zurückgeführt werden, daß zwei relevante Bahnen der Länge 6 nicht berücksichtigt werden können, da sie fast divergente Beiträge zu $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ liefern. Diese Bahnen liegen in unmittelbarer Nachbarschaft der beiden stabilen Periode−6−Bahnen. Ein Vergleich der Eigenfunktion in Abbildung 5.11 1) mit den in Abbildung 5.9 dargestellten stabilen Bahnen offenbart, daß die Eigenfunktion in der Nähe dieser Bahnen ebenfalls schwach lokalisiert ist.

Wenngleich der durch die Vernachlässigung der beiden Periode−6−Bahnen entstandene Fehler in der Ordnung $n_{max} = 7$ relativiert wird, wirkt er sich auch in höheren Ordungen auf die Nullstellen aus, weil nicht nur die Wiederholungen der Bahnen, sondern auch die mit anderen Bahnen gebildeten Pseudobahnen vernachlässigt werden. Hier ist der Grund dafür zu sehen, daß die Abweichung der inversen Nullstelle von 0.81 auch bei $n_{max} = 7$ immer noch 5% beträgt.

In gleicher Weise können nun weitere der in Tabelle 5.3 aufgeführten Resonanzen berechnet werden. Die Eigenfunktion der Resonanz 0.75 (vgl. Abbildung 5.12, 2)) weist eine ähnliche Struktur auf wie die Eigenfunktion der Resonanz 0.81, jedoch ist die Struktur weniger ausgedehnt. Daher müssen einige der in Tabelle 1 aufgelisteten Bahnen bei der Berechnung der Resonanz ausgeschlossen werden. Insbesondere ist hier der Fixpunkt zu nennen, der zwischen den beiden großen Amplituden liegt. Neu hinzu kommen zwei Bahnen der Länge 4, die sich den übrigen Bereichen großer Amplitude zuordnen lassen. Die Stabilitätskoeffizienten der für die Resonanz 0.75 relevanten Bahnen sind in Tabelle 3 aufgeführt. Die aus der Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ nach diesen Bahnen bis zur Ordnung $n_{max} = 7$ resultierenden Resonanzwerte können Tabelle 4 entnommen werden.

Die Eigenfunktionen der Resonanzeigenwerte -0.75 und $-0.01 \pm \mathrm{i}0.75$ (Abbildung 5.11 3) – 5)) zeigen alle Lokalisierung in den gleichen Phasenraumbereichen.

$n_{max} = 1$	$n_{max} = 2$	$n_{max} = 3$	$n_{max} = 4$	$n_{max} = 5$	$n_{max} = 6$	$n_{max} = 7$
–	0.4244	0.4244	0.7727	0.7837	0.7728	0.7693

TABELLE 4. Die dem Resonanzeigenwert 0.75 entsprechende inverse Nullstelle von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ für die Ordnungen $n_{max} = 1, \ldots, 7$.

$n_{max} = 4$		$n_{max} = 8$	
-0.6024	$\pm \mathrm{i}0.6024$	-0.7660	$\pm \mathrm{i}0.7660$

TABELLE 5. Die den Resonanzeigenwerten -0.75 und $-0.01 \pm \mathrm{i}0.75$ entsprechenden inversen Nullstellen von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ für $n_{max} = 4$ und 8.

Bei der Auflösung $l_{max} = 60$ können ihren großen Amplituden die beiden periodischen Bahnen der Länge 4 zugeordnet werden, die bereits in die Berechnung der Resonanz 0.75 eingegangen sind ($k = 2, 4$ in Tabelle 3). Mit nur diesen beiden Bahnen ist $n_{max} = 4$ die niedrigste Ordnung, in der $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ entwickelt werden kann. Allerdings sind die vier resultierenden Resonanzwerte vom Betrag 0.60 und weichen somit deutlich von 0.75 ab. Die in den Phasenraumbereichen großer Amplitude dominante Bahn hat in der Tat die Länge 8 und ist mit dem Stabilitätskoeffizienten $\xi^{\mathrm{inst}} = -11.3832$ beziehungsweise $\sqrt[p]{|\xi^{\mathrm{inst}}|} = 1.3553$ schwächer instabil als die Periode−4−Bahnen. Im allgemeinen liegen die Bahnen der Länge 8 auf zu kleinen Skalen im Phasenraum, als daß ihre Gesamtheit mit Sicherheit bestimmt werden kann. In diesem Fall jedoch genügt diese eine Bahn, um in der Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ in achter Ordnung eine gute Übereinstimmung der entsprechenden inversen Nullstellen mit den Resonanzeigenwerten zu finden. In Tabelle 5 sind die inversen Nullstellen von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ für $n_{max} = 4, 8$ aufgeführt.

Bei einer geringeren Auflösung $l_{max} = 30$ besitzen die Bereiche großer Amplitude der Eigenfunktionen eine größere Ausdehnung. Nun können ihnen zwei weitere Bahnen der Länge 4 zugeordnet werden. Unter Verwendung dieser vier Bahnen ergeben sich bei der Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ bereits in vierter Ordnung Resonanzwerte vom Betrag 0.7483, in guter Übereinstimmung mit den Resonanzeigenwerten [**33**].

Bereits in Kapitel 5 wurden die mit den Resonanzeigenwerten von $\mathcal{P}_Q$ auftretenden komplexen Phasen mit der Periodenlänge eines Bereiches einheitlicher Instabilität erklärt. Die Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ nach periodischen Bahnen reproduziert die Phasen der Resonanzen exakt. Ist nämlich p_{min} die Periodenlänge eines Bereiches einheitlicher Instabilität, so sind die Periodenlängen aller in diesem Bereich liegenden Bahnen gleich oder Vielfache von p_{min}. Wird $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ nach diesen Bahnen entwickelt, so kann das resultierende Polynom $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ auch als Polynom in $z^{p_{min}}$ geschrieben werden. Daher treten betraglich gleiche Nullstellen mit den Phasen der p_{min}−ten Einheitswurzeln auf, wie es auch bei den inversen Nullstellen von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ in Tabelle 5 der Fall ist.

Lediglich die Eigenfunktion zum positiv reellen Resonanzeigenwert 0.75 kann zusätzlich in einem Phasenraumbereich lokalisiert sein, der durch periodische Bahnen der Längen 5 und 6 charakterisiert wird (Tabellen 3, 4). Deshalb weicht dieser Eigenwert betraglich geringfügig von den übrigen drei Resonanzeigenwerten ab.

In die Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ für die verschiedenen Resonanzen 0.81, ± 0.75, $0.01 \pm \mathrm{i}0.75$ sind zum Teil dieselben periodischen Bahnen eingegangen. Es ist daher naheliegend, daß sich diese Resonanzen auch gemeinsam aus einem Polynom bestimmen lassen, das aus allen beteiligten Bahnen resultiert. Tatsächlich entsprechen bei $n_{max} = 6$ die fünf inversen Nullstellen $0.764, 0.553, 0.025 \pm \mathrm{i}0.656, -0.731$ qualitativ den Resonanzen. Erst ab $n_{max} = 8$ darf eine quantitative Übereinstimmung der inversen Nullstellen mit den Resonanzen erwartet werden, da erst dann die relevante Bahn der Länge 8 in der Entwicklung berücksichtigt wird. Jedoch können die übrigen für die Entwicklung in der Ordung $n_{max} = 8$ benötigten Bahnen nicht in ausreichendem Maße bestimmt werden, um ein vernünftiges Resultat zu erzielen.

Die Eigenfunktionen der Resonanzeigenwerte 0.6597 und -0.6377 zeigen ebenfalls übereinstimmende Lokalisierung (Abbildungen 5.11, 5.12). Die Resonanzen sind gemeinsamen Ursprungs und haben als Phasen die zweiten Einheitswurzeln ± 1. Entsprechend kann ihnen als Bahn niedrigster Periode eine Periode$-2-$Bahn zugeordnet werden. Darüber hinaus gibt es unter den Bahnen mit den Längen $p \leq 7$ keine weiteren, die bei den großen Amplituden der Resonanzeigenfunktionen liegt. Die Periode$-2-$Bahn ist mit dem Stabilitätskoeffizienten $\xi^{\mathrm{inst}} = -1.2482$ beziehungsweise $\sqrt{|\xi^{\mathrm{inst}}|} = 1.1172$ sehr schwach instabil. Weil der Beitrag der ersten Wiederholung dieser Bahn zur vierten Ordnung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ fast divergent ist, kann das Polynom nur bis zur zweiten Ordnung entwickelt werden. Entsprechend ungenau sind die resultierenden Resonanzwerte ± 0.4969. Hier stößt die Entwicklung der Spektraldeterminante bei gemischtem Phasenraum auf ihre Grenzen.

Den übrigen im Spektrum von $\mathcal{P}_Q$ identifizierten und in Tabelle 5.3 aufgeführten Resonanzeigenwerten lassen sich keine Bahnen niedriger Periode zuordnen. Zu ihrer Berechnung werden Bahnen höherer Perioden benötigt. Diese können im Fall des periodisch gestoßenen Kreisels aufgrund der endlichen Phasenraumauflösung nicht mehr mit Sicherheit bestimmt werden. Darüber hinaus ist davon auszugehen, daß mit der exponentiellen Proliferation der Bahnen mit wachsender Periode auch die Zahl der für die Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}(z)$ benötigten Bahnen wächst, wodurch die Berechnung der Resonanzen aus periodischen Bahnen zusätzlich erschwert wird.

KAPITEL 7

Resonanzen als Zerfallsraten von Observablen

1. Die Relaxation von Observablen

Im Hilbertraum besitzt der Frobenius-Perron-Operator einer hyperbolischen Dynamik in der Regel neben dem ergodischen Eigenwert 1 ein rein kontinuierliches Spektrum. Anhand der Spektraldarstellung von $\mathcal{P}$ kann die Zeitentwicklung einer Observablen A im Hilbertraum über n diskrete Zeitintervalle gemäß (28) als

$$\begin{aligned} \langle A|\mathcal{P}^n \rho_0\rangle &= \langle A|\rho_0\rangle + \int_{]0,2\pi[} \mathrm{d}\omega\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}\, S(\omega) \qquad (182)\\ S(\omega) &= \langle A|\omega\rangle\langle\omega|\rho_0\rangle \end{aligned}$$

geschrieben werden. Das Integral über die Spektralfunktion $S(\omega)$ läßt sich durch Residuen ausdrücken. Dazu muß $S(\omega)$ für $n > 0$ zu komplexen Frequenzen z mit negativem Imaginärteil fortgesetzt werden. Die Beiträge zum Integral entstehen an den Singularitäten von $S(z)$ innerhalb des Einheitskreises. [**55, 62**].

Bei den Singularitäten handelt es sich um einfache oder multiple isolierte Pole sowie Verzweigungsschnitte. Sind isolierte Pole unabhängig von der Wahl der Observablen A, so können sie als intrinsische Größen der Dynamik und somit als Resonanzen von $\mathcal{P}$ interpretiert werden [**3**]. Mit der Potenzreihenentwicklung der Spektralfunktion um einen Pol z_j der endlichen Multiplizität m_j,

$$S(z) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l^j (z - z_j)^{l-m_j-1}\,, \qquad (183)$$

resultiert das Residuum

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{z_j}\left(e^{-\mathrm{i}nz} S(z)\right) &= \frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m_j-1}}{\mathrm{d}z^{m_j-1}}(z-z_j)^{m_j} e^{-\mathrm{i}nz} S(z)\Big|_{z=z_j} \qquad (184)\\ &= \sum_{l=1}^{m_j} \mathrm{i}^{l-m_j-1}\frac{a_l^j}{(m_j-l)!} n^{m_j-l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nz_j}\,. \qquad (185) \end{aligned}$$

Der Beitrag des Residuums zum Integral klingt mit wachsender Zeit n wie $n^{m_j-l}\exp(-\mathrm{i}nz_j)$ ab. Der Pol z_j entspricht der Resonanz $\gamma_j = \exp(-\mathrm{i}z_j)$ von $\mathcal{P}$.

In der Regel sind die Entwicklungskoeffizienten a_l^j von $S(z)$ bei einer Reihe von Singularitäten z_j von Null verschieden, so daß die Beiträge zum Integral von mehreren Singularitäten stammen. In diesem Fall ist die Abklingrate der Observablen durch die Singularität z_j mit dem kleinsten Imaginärteil bestimmt.

2. Resonanzen als Zerfallsraten von Observablen

Über den Zerfall von Observablen lassen sich die Resonanzen des periodisch gestoßenen Kreisels auf eine unabhängige Weise reproduzieren. Weil nicht nur die betraglich größte Resonanz gesucht wird, muß die herangezogene Observable auch die Bestimmung der schnelleren Zerfallsraten ermöglichen.

Es hat sich gezeigt, daß die den Resonanzen entsprechenden Eigenzustände im Phasenraum stark lokalisiert sind. Eine selektive Berechnung einer Resonanz als Zerfallsrate kann daher über die Dichte-Dichte-Korrelationsfunktion

$$\langle \rho(0) | \rho(n) \rangle = \langle \rho(0) | \mathcal{P}^n \rho(0) \rangle \tag{186}$$

erfolgen, wenn die anfängliche Dichte $\rho(0)$ ausschließlich in den Phasenraumbereichen lokalisiert ist, in denen auch die großen Amplituden der Resonanzeigenfunktionen liegen. Es ist nicht erforderlich, daß die Dichte $\rho(0)$ der Resonanzeigenfunktion genau entspricht, sie darf jedoch nicht zusätzlich in Phasenraumbereichen lokalisiert sein, in denen die Korrelationsfunktion langsamer zerfällt.

Zur Extraktion der Zerfallsrate ist es sinnvoll, die bei einem kompakten Phasenraum vorhandenen Restkorrelationen im Grenzfall $n \to \infty$ abzuziehen und die Korrelationsfunktion zu normieren,

$$C(n) = \frac{\langle \rho(0) | \rho(n) \rangle - \langle \rho(0) | \rho(\infty) \rangle}{\langle \rho(0)^2 \rangle - \langle \rho(0) | \rho(\infty) \rangle} \,. \tag{187}$$

Die Dichtefunktionen $\rho(n)$ können durch Linearkombinationen der charakteristischen Funktionen (77) im Lebesgueschen Sinne approximiert werden. Dazu wird der Phasenraum Ω in eine große Zahl N von Zellen a_i unterteilt. Die Zellen haben die Ausdehnung $\Delta\phi$ und Δz, und sie werden durch den in ihrem Zentrum liegenden Gitterpunkt i repräsentiert. Das Phasenraumvolumen einer Zelle beträgt $v_a = \Delta\phi\Delta z$, die Zahl der Zellen im Phasenraum $N = \Omega/v_a$. Je kleiner v_a gewählt wird, desto genauer ist die Approximation einer Phasenraumfunktion durch charakteristische Funktionen. Über die Phasenraumabbildung M definiert sich die Dynamik auf den Phasenraumzellen,

$$\tilde{M} : a_i \to a_j \ \text{ mit } M(i) \in a_j \,. \tag{188}$$

Mit den reellen Koeffizienten $\alpha_i > 0$ schreibt sich eine Phasenraumdichte

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, \chi_{a_i} \,. \tag{189}$$

Die anfängliche Dichte $\rho(0)$ wird als innerhalb eines Phasenraumbereiches Ω_0 konstante und außerhalb verschwindende Funktion gewählt,

$$\rho(0) = \sum_{a_i \subset \Omega_0} \chi_{a_i} \,. \tag{190}$$

Die Zahl der Zellen im Phasenraumbereich Ω_0 mit dem Phasenraumvolumen V_0 beträgt $N_0 = V_0/v_a$. Bezüglich des Mittelungsintegrals

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \, \cdot \tag{191}$$

sind sowohl die Dichte $\rho(0)$ als auch ihre zeitlichen Nachfolger $\rho(n)$ normiert. Damit ergibt sich der Korrelator

$$\begin{aligned} \langle \rho(0)\rho(n) \rangle &= \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \mathrm{d}\Omega \sum_{a_i \subset \Omega_0} \sum_{a_j \subset \Omega_0} \chi_{a_i} \chi_{\tilde{M}^n(a_j)} && (192) \\ &= \frac{s_n}{N_0}\,, && (193) \end{aligned}$$

wobei s_n die Zahl der nicht verschwindenden Summanden unter dem Integral darstellt.

Solange die Phasenraumzellen a_i deutlich größer als die größten elliptischen Inseln sind, ist die Annahme gerechtfertigt, daß die Dichte $\rho(n)$ im Grenzfall $n \to \infty$ zu einer homogenen Verteilung relaxiert und die Dynamik auf den Phasenraumzellen mischenden Charakter hat. Aus dieser Annahme folgt

$$\langle \rho(0)\rho(\infty) \rangle = \frac{N_0}{N}\,. \tag{194}$$

Wird außerdem $\langle \rho(0)^2 \rangle = 1$ berücksichtigt, so resultiert

$$C(n) = \frac{s_n N - N_0^2}{N_0(N - N_0)} \tag{195}$$

oder, ausgedrückt durch die skalierten Größen $\sigma_n = s_n/N$ und $\nu_0 = N_0/N$,

$$C(n) = \frac{\sigma_n - \nu_0^2}{\nu_0(1 - \nu_0)}\,. \tag{196}$$

Aus dem Zerfall von $C(n)$ kann die Zerfallsrate $\mathrm{Im}\, z_i$ bestimmt werden. Es ist zu erwarten, daß der hieraus resultierende Zerfallskoeffizient $\kappa_i = |\exp(-\mathrm{i} z_i)|$ einer Resonanz γ_i des Frobenius-Perron-Operators entspricht.

Für den periodisch getriebenen Kreisel mit $\tau = 10$ und $\beta_z = \beta_y = 1$ können die drei Resonanzeigenwerte 0.81, −0.75 und 0.66 von $\mathcal{P}_Q$ auf diese Weise verifiziert werden. Die anfänglichen Phasenraumdichten $\rho(0)$ überdecken die Phasenraumbereiche, in denen die entsprechenden Resonanzeigenfunktionen lokalisiert sind. Die Größe der Phasenraumzellen beträgt dabei $\Delta\varphi = 2\pi/1200$ und $\Delta z = 2/1200$. Abbildung 1 zeigt die entsprechenden Korrelationsfunktionen $C(n)$ sowie die im Intervall $3 \le n \le 16$ an $C(n)$ angepaßten Zerfallskurven, aus denen die Zerfallskoeffizienten κ_i bestimmt sind. Zwischen den Resonanzeigenwerten und den Abklingsraten besteht eine gute Übereinstimmung. Sie sind zusammen mit den aus der Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ resultierenden Resonanzwerten in Tabelle 1 aufgeführt. Abbildung 2 zeigt die Dichten $\rho(n)$ für $n = 0, 1, \ldots, 5$ im Fall der Resonanz 0.81. Mit wachsendem Zeitparameter n ist $\rho(n)$ zunehmend delokalisiert und nimmt dabei die Konturen der Resonanzeigenfunktion an.

Resonanzeigenwert	0.8103	-0.7510	0.6597
Zerfallskoeff.	0.8005	-0.7697	0.6783
Spektraldet. (n_{max})	0.7705 (7)	-0.7660 (8)	0.4969 (2)

Tabelle 1. Resonanzeigenwerte von $\mathcal{P}_Q$ bei $l_{max} = 60$, die ihnen entsprechenden Abklingraten von $C(n)$ sowie die aus der Entwicklung von $\mathrm{d}^{\mathrm{A}}_{n_{max}}(z)$ nach periodischen Bahnen bis zur Ordnung n_{max} resultierenden Resonanzwerte.

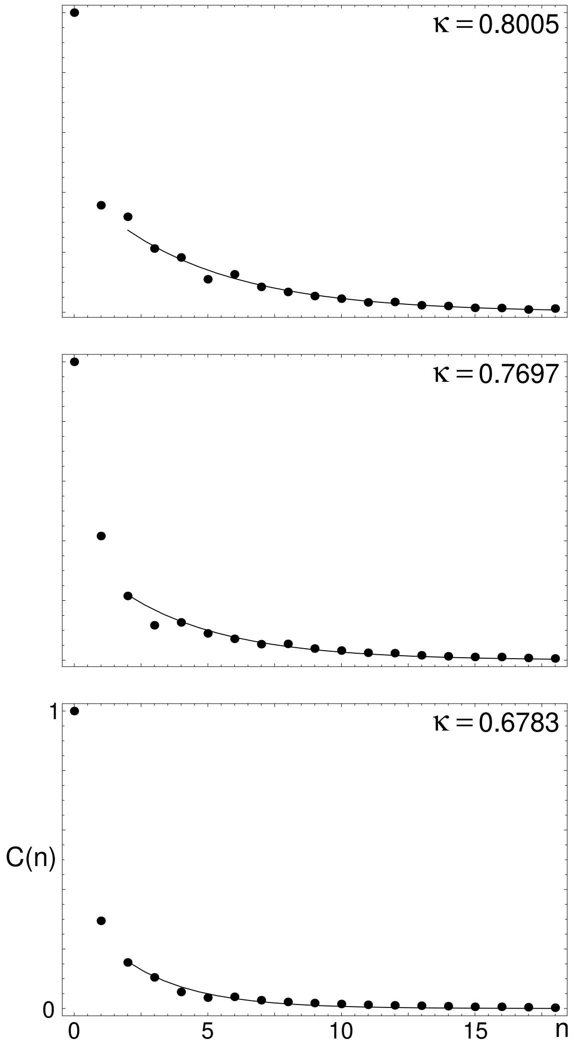


Abbildung 1. Bereits nach zwei Abbildungsschritten klingt die Korrelationsfunktion $C(n)$ mit einer Rate κ ab, die in guter Übereinstimmung mit der entsprechenden Resonanz ist (vgl. Tabelle 1).

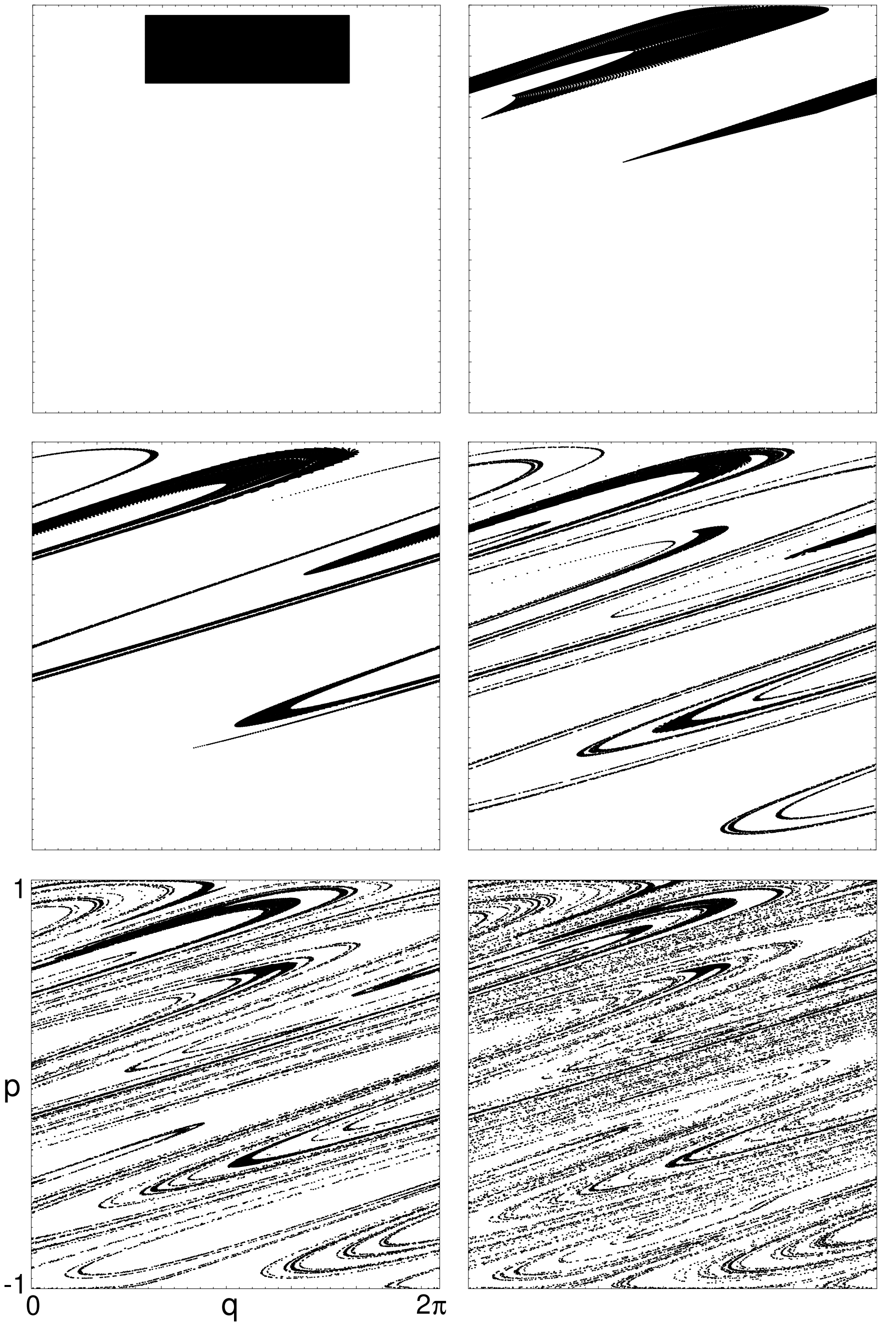


Abbildung 2. Die Phasenraumdichte $\rho(0)$ (oben links) überdeckt den Phasenraumbereich, in dem die Eigenfunktion von $\mathcal{P}_Q$ zum Resonanzeigenwert 0.81 lokalisiert ist. Ihre zeitlichen Nachfolger zu $n = 1, \ldots, 5$ sind in zunehmendem Maße über den Phasenraum ausgedehnt.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Liouvilledynamik des periodisch gestoßenen Kreisels, einer Hamiltonschen Dynamik mit gemischtem Phasenraum, wurde im Hilbertraum der Phasenraumfunktionen auf der Einheitskugel formuliert. Unter dem Schutz endlicher Phasenraumauflösung, die bezüglich der Kugelflächenfunktionsbasis einem Abschneiden der Frobenius-Perron-Matrix gleichkam, konnten nicht nur die spektralen Eigenschaften der unitären Liouvilledynamik im Hilbertraum untersucht, sondern darüber hinaus auch Resonanzen lokalisiert werden.

Eigenfunktionen zu bei endlicher Auflösung fast unimodularen Eigenwerten entsprachen den Eigenfunktionen im Hilbertraum im Grenzfall unendlicher Auflösung, den auf ergodischen Phasenraumbereichen konstanten Funktionen. Eigenfunktionen zu nicht unimodularen, auflösungsunabhängigen Eigenwerten waren in hyperbolischen Phasenraumbereichen einheitlicher Instabilität entlang instabiler Mannigfaltigkeiten lokalisiert. Ihr Verhalten mit wachsender Phasenraumauflösung machte plausibel, weshalb sie im Grenzfall unendlicher Auflösung nicht im Hilbertraum liegen und entsprechend die nicht unimodularen Eigenwerte in diesem Grenzfall nicht zum Spektrum des Frobenius-Perron-Operators gehören.

Es wurde argumentiert, daß die nicht unimodularen, auflösungunabhängigen Eigenwerte Resonanzen in einem höheren Riemannschen Blatt reflektieren, und zwar die Resonanzen, die bei endlicher Auflösung den Zerfall von Observablen beschreiben. Damit war ein Approximationsschema gefunden, nach dem sich Resonanzen einer Dynamik mit einem kompakten Phasenraum lokalisieren lassen.

Über eine modifizierte Entwicklung der Spektraldeterminante des Frobenius-Perron-Operators nach periodischen Bahnen konnten die Resonanzeigenwerte aus nur wenigen Bahnen mit guter Genauigkeit reproduziert werden. Aus dieser Entwicklung wurde erneut der Zusammenhang zwischen Resonanzen und lokalen Stabilitätseigenschaften des Phasenraumes deutlich. Schließlich war es möglich, die Resonanzen auf eine unabhängige Weise als Zerfallsraten einer Korrelationsfunktion zu bestimmen.

Eine sich an diese Resultate anschließende Fragestellung ist, in welcher Weise das Resonanzspektrum und auch das unimodulare Eigenwertspektrum des Frobenius-Perron-Operators über die Phasenraumstrukturen von der kontinuierlichen Änderung eines Kontrollparameters abhängen, anhand dessen ein System vom integrablen zum chaotischen Regime gesteuert wird (vgl. auch Abschnitt 5.3). Im Fall von Integrabilität ist das Frobenius-Perron-Spektrum rein diskret, und es gibt keine Resonanzen. Mit zunehmender Chaotizität des Phasenraumes ziehen sich die elliptischen

Inseln im Phasenraum in der Regel immer weiter zusammen. Es ist zu erwarten, daß die zugehörigen unimodularen Eigenwerte bis zu dem Moment unbeeinflußt von den Veränderungen im Phasenraum sind, bis die elliptischen Inseln nicht mehr aufgelöst werden können oder, im Grenzfall unendlicher Auflösung, in einer Bifurkation verschwinden. Enstehen in Bifurkationen neue elliptische periodische Bahnen, so treten mit ihnen neue unimodulare Eigenwerte auf. Darüber hinaus ist zu erwarten, daß sich Resonanzen ebenfalls kontinuierlich mit dem Kontrollparameter ändern. Mit dem abrupten Auftreten neuer, betraglich großer Resonanzen ist in der Folge von Bifurkationen zu rechnen, da bei einer Bifurkation neu entstehende hyperbolische Bahnen und die sie umgebenden Phasenraumbereiche schwach instabil sind.

Einen wesentlich bedeutsameren Anknüpfpunkt an diese Arbeit stellt der Vergleich der Liouvilledynamik bei endlicher Phasenraumauflösung mit der Quantenmechanik dar, bei der die Auflösbarkeit des Phasenraumes ebenfalls beschränkt ist, in diesem Fall auf die Größe einer Planckzelle. Analog zur Liouvilledynamik läßt sich quantenmechanisch die Dynamik von Quasiwahrscheinlichkeitsdichten im Phasenraum betrachten. Eine geeignete Quasiwahrscheinlichkeit ist die Husimifunktion, das Matrixelement des Dichteoperators mit einem kohärenten Zustand.

Der quantenmechanische Propagator der Husimifunktionen kann in demselben Hilbertraum der Phasenraumfunktionen dargestellt werden wie der Frobenius-Perron-Operator. Aufgrund der quantenmechanischen Unschärfe hat der quantenmechanische Propagator jedoch lediglich im Unterraum der Phasenraumskalen, die größer als die Planckzelle sind, nichtverschwindende Matrixelemente. Im Gegensatz zum Frobenius-Perron-Operator handelt es sich beim Husimipropagator um eine endliche Matrix.

Für den periodisch gestoßenen Kreisel hat sich gezeigt, daß Matrixelemente des Husimipropagators zu Phasenraumskalen, die viel größer als die Planckzelle sind, mit den entsprechenden Matrixelementen des Frobenius-Perron-Operators übereinstimmen. Matrixelemente des Husimipropagators zu den sich an die Planckzelle anschließenden Phasenraumskalen dagegen differieren wesentlich von den entsprechenden Matrixelementen der klassischen Dynamik.

Die Folgerung liegt nahe, daß sich die klassische und die quantenmechanische Dynamik entsprechen, sobald auch die Quantendynamik unter einer kleineren als der durch die Planckzelle vorgegebenen Phasenraumauflösung betrachtet wird. Im Fall des periodisch gestoßenen Kreisels hat sich herausgestellt, daß die resultierenden Eigenwerte und Eigenfunktionen des Husimipropagators mit den klassischen Eigenwerten und Eigenfunktionen des Frobenius-Perron-Operators bei der entsprechenden Phasenraumauflösung übereinstimmen, wenn die Diskrepanz zwischen Auflösung und Planckzelle groß ist. Insbesondere ist es Christopher Manderfeld, der in seiner Doktorarbeit die geschilderte Thematik aufgreift, bereits gelungen, Resonanzen des Frobenius-Perron-Operators aus der Quantendynamik bei begrenzter Phasenraumauflösung zu bestimmen.

Literaturverzeichnis

[1] R. W. Zwanzig in *Lectures in Theoretical Physics* (Boulder) **3**, 106, herausgegeben von W. E. Brittin, B. W. Downs und J. Down (Interscience, New York, 1961)

[2] M. Pollicott, Invent. Math. **81**, 415 (1985)

[3] D. Ruelle, J. Stat. Phys. **44**, 281 (1986)

[4] D. Ruelle, Phys. Rev. Lett. **56**, 405 (1986)

[5] D. Ruelle, J. Diff. Geom. **25**, 99 (1987)

[6] D. Ruelle, J. Diff. Geom. **25**, 117 (1987)

[7] J. P. Eckmann und D. Ruelle, Rev. Mod. Phys. **57**, 617 (1985)

[8] A. V. Andreev und B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **75**, 902 (1995)

[9] O. Agam, B. L. Altshuler und A. V. Andreev, Phys. Rev. Lett. **75**, 4389 (1995)

[10] A. V. Andreev, O. Agam, B. D. Simons und B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **76**, 3947 (1996)

[11] A. V. Andreev, B. D. Simons, O. Agam und B. L. Altshuler, Nuclear Physics B **482**, 536 (1996)

[12] T. Guhr, A. Müller-Groeling und H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998)

[13] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990)

[14] H. Schomerus, Dissertation (Essen, 1997)

[15] H. Schomerus und F. Haake, Phys. Rev. Lett. **79**, 1022 (1997)

[16] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (Springer, Berlin, 1991)

[17] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* , zweite Auflage (Springer, Berlin, 2000)

[18] N. Argaman, F. M. Dittes, E. Doron, J. P. Keating, A. Yu. Kitaev, M. Sieber und U. Smilansky, Phys. Rev. Lett **71**, 4326 (1993)

[19] D. Cohen, H. Primack und U. Smilansky, Ann. Phys **264**, 108 (1998)

[20] M. L. Mehta, *Matrix Theory* (Hindustan Publishing Corporation, Delhi, 1989)

[21] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, New York, 1967)

[22] E. B. Bogomolny und J. P. Keating, Phys. Rev. Lett **77**, 1472 (1996)

[23] S. Fishman und J. P. Keating, J. Phys. A: Math. Gen **31**, L313 (1998)

[24] H.-J. Sommers, F. Haake und J. Weber, J. Phys. A: Math. Gen **31**, 4395 (1998)

[25] A. Pandey, Ann. Phys. **119**, 170 (1979)

[26] F. Haake, H.-J. Sommers und J. Weber, J. Phys. A: Math. Gen **32**, 6903 (1999)

[27] F. Haake, M. Kuś, H.-J. Sommers, H. Schomerus und K. Życzkowski, J. Phys. A: Math. Gen. **29** 3641

[28] F. Haake, M. Kuś und R. Scharf, Z. Phys. B **65**, 381 (1987)

[29] P. A. Braun, P. Gerwinski, F. Haake und H. Schomerus, Z. Phys. B **100**, 115 (1996)

[30] M. Khodas und S. Fishman, Phys. Rev. Lett. **84**, 2837 (2000)

[31] M. Khodas und S. Fishman, chao-dyn/9910040 (1999)

[32] S. Fishman in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, 85, herausgegeben von I. V. Lerner, J. P. Keating und D. E. Khmelnitskii (Kluwer Academic/ Plenum Publishers, New York, 1999)

[33] J. Weber, F. Haake und Petr Šeba, nlin.CD/0001013

[34] V. I. Arnold und A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics* (W.A. Benjamin, Inc., New York, 1968)

[35] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, New York, 1978)
[36] L. E. Reichl, *The Transition to Chaos* (Springer, New York, 1992)
[37] P. R. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory* (Chelsea Publishing Company, New York, 1956)
[38] P. R. Halmos, *Measure Theory* (Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1950)
[39] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993)
[40] P. Cvitanović et al., *Classical and Quantum Chaos: A Cyclist Treatise* (http://www.nbi.dk/ChaosBook/, Nils Bohr Institute, Copenhagen, 1999)
[41] A. Lasota und M. C. Mackey, *Chaos, Fractals, and Noise* (Springer, New York, 1994)
[42] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik* (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1991)
[43] P. D. Hislop und I. M. Sigal, *Introduction to Spectral Theory* (Springer, New York, 1996)
[44] Y. K. Ho, Phys. Rep. **99**, 1 (1983)
[45] A. Buchleitner, B. Grémaud und D. Delande, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **27**, 2663 (1994)
[46] A. Buchleitner, D. Delande und J.-C. Gay, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 505 (1995)
[47] W. P. Reinhardt, Ann. Rev. Phys. Chem. **33**, 223 (1982)
[48] D. Delande, A. Bommier und J. C. Gay, Phys. Rev. Lett **66**, 141 (1991)
[49] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis* (Academic Press, New York, 1972)
[50] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness* (Academic Press, New York, 1975)
[51] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics III: Scattering Theory* (Academic Press, New York, 1979)
[52] M. Reed und B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators* (Academic Press, New York, 1978)
[53] N. Dunford und J. T. Schwartz, *Linear Operators Bd. I-III* (Interscience Publishers, Inc., New York, 1957)
[54] M. Dörfle, J. Stat. Phys. **40**, 93 (1985)
[55] H. H. Hasegawa und W. C. Saphir, Phys. Rev. A **46**, 7401 (1992)
[56] H. H. Hasegawa und W. C. Saphir, Phys. Lett. A **161**, 471 (1992)
[57] H. H. Hasegawa und W. C. Saphir, Phys. Lett. A **161**, 477 (1992)
[58] H. H. Hasegawa und W. C. Saphir, Phys. Lett. A **171**, 317 (1992)
[59] H. H. Hasegawa und D. J. Driebe, Phys. Lett. A **176**, 193 (1993)
[60] H. H. Hasegawa und D. J. Driebe, Phys. Rev. E **50**, 1781 (1994)
[61] J. D. Crawford und J. R. Cary, Physica D **6**, 223 (1983)
[62] P. Gaspard, *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998)
[63] L. C. Biedenharn und J. D. Louck, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications: Angular Momentum in Quantum Physics* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1981)
[64] L. C. Biedenharn und J. D. Louck, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications: The Racah-Wigner Algebra in Quantum Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1981)
[65] A. Messiah, *Quantenmechanik Bd.1,2* (Walter de Gruyter, Berlin 1990)
[66] I. S. Gradshteyn und I. M. Ryzhik, *Table of Series, Integrals, and Products* (Academic Press, San Diego, 1994)
[67] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1972)
[68] J. Spanier und K. B. Oldham, *An Atlas of Functions* (Springer, Berlin, 1987)
[69] E. T. Copson, *Asymptotic Expansions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1965)
[70] J. A. Gaunt, Trans. Roy. Soc. A **228**, 151 (1929)
[71] P. A. Braun, Rev. Mod. Phys. **65**, 115 (1993)
[72] P. Brussard und H. Tolhoek, Physica **23**, 955 (1957)

[73] A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988)
[74] R. G. Littlejohn, J. Stat. Phys. **68**, 7 (1992)
[75] N. W. Ashcroft und N. D. Mermin, *Solid State Physics* (W. B. Saunders Company, 1976)
[76] K. Życzkowski und H. J. Sommers, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 2045 (2000)
[77] E. C. Titchmarsh, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **207**, 321 (1951)
[78] E. C. Titchmarsh, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **210**, 30 (1951)
[79] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators* (Springer, Berlin, 1995)
[80] P. Gaspard, Phys. Rev. E **53**, 4379 (1996)
[81] P. Gaspard, J. Phys. A: Math. Gen **25**, L483 (1992)
[82] P. Gaspard, J. Stat. Phys.**68**, 673 (1992)
[83] P. Cvitanović und B. Eckhardt, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L237 (1991)
[84] P. Cvitanović, Physica D **83**, 109 (1995)
[85] P. Cvitanović in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, 85, herausgegeben von I. V. Lerner, J. P. Keating und D. E. Khmelnitskii (Kluwer Academic/ Plenum Publishers, New York, 1999)
[86] F. Christiansen, G. Paladin und H. H. Rugh, Phys. Rev. Lett. **65**, 2087 (1990)
[87] P. Dahlqvist, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 763 (1994)
[88] P. Dahlqvist, Physica D **83**, 124 (1995)
[89] P. Dahlqvist, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, L351 (1997)
[90] R. Artuso in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi": New Directions in Quantum Chaos*, herausgegeben von G. Casati, I. Guarneri und U. Smilansky (North-Holland)
[91] R. Mainieri, Physica D **83**, 206 (1995)
[92] V. Baladi, J. P. Eckmann und D. Ruelle, Nonlinearity **2**, 119 (1989)
[93] Z. Kaufmann, H. Lustfeld und J. Bene, Phys. Rev. E **53**, 1416 (1996)
[94] P. Grassberger und H. Kantz, Phys Lett A **113**, 167 (1985)
[95] C. P. Dettmann und P. Cvitanović, Phys. Rev. E **56**, 6687 (1997)
[96] C. P. Dettmann und P. Dahlqvist, Phys. Rev. E **57**, 5303 (1998)
[97] C. P. Dettmann, Phys. Rev. E **59**, 5231 (1999)

Danksagungen

Herrn Prof. Dr. Fritz Haake danke ich herzlich für die Anregung, die hilfsbereite Betreuung und die stete Anteilnahme am Fortgang der Arbeit. Ich danke ihm auch dafür, daß er mir viele Möglichkeiten eröffnet hat, die Physik außerhalb der Uni Essen kennenzulernen.

Herrn Prof. Dr. Robert Graham gilt mein Dank für die Übernahme des Mitberichtes. Herrn Prof. Dr. Hans-Friedrich Döbele danke ich dafür, daß er den Prüfungsvorsitz übernommen hat.

Frau Barbara Sacha hat sich jederzeit hilfsbereit um eine Vielzahl organisatorischer Belange gekümmert, wofür ich mich herzlich bei ihr bedanke.

Für fachliche Hilfe danke ich insbesondere Prof. Petr A. Braun.
Ebenso danke ich Prof. Petr Šeba, der für die Arbeit richtungsweisende Anregungen gegeben hat. Außerdem danke ich ihm für die Einladung an das Institut für Nuklearphysik in Res, Tschechische Republik.
Prof. Shmuel Fishman danke ich für fruchtbare Diskussionen und die Einladung an das Technion.

Rüdiger Oberhage gilt mein Dank für die kompetenten Ratschläge zu Fragen der Numerik.

Christopher Manderfeld hat sich mit dem mehrfachen Durchforsten der Arbeit nach Fehlern ein großes Dankeschön verdient.

All meinen Kollegen danke ich für das freundschaftliche Arbeitsklima, viele Diskussionen und Anregungen. Insbesondere seien hier Henning Schomerus, Christopher Manderfeld, Gregor Hackenbroich, Daniel Braun, Martin Fließer, Sven Gnutzmann sowie Maxim Khodas vom Technion genannt.

Mein besonderer Dank gilt meiner Freundin Henrike Rau für ihre unendliche Geduld und meinen Eltern Gudrun und Heiner Weber für all das, was so häufig als selbstverständlich erachtet wird.