Zur Regularitätstheorie elliptischer Systeme und harmonischer Abbildungen

Vom Fachbereich Mathematik der
Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Michael Pingen
aus
Geldern

Referent: Prof. Dr. Ulrich Dierkes
Korreferent: Prof. Dr. Heiko von der Mosel
Tag der mündlichen Prüfung: 02.05.2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Jahre 1982 veröffentlichte Luis Caffarelli die Arbeit „Regularity Theorems for Weak Solutions of Some Nonlinear Systems“ [CA], in der er ein optimales Regularitätsresultat für beschränkte, schwache Lösungen gewisser quasilinearer elliptischer Systeme beweist. Dieses Resultat war zu dieser Zeit bereits aus Arbeiten von Hildebrandt-Widman [HW2] und Wiegner [WI1], [WI2] bekannt, die Beweistechniken von Caffarelli einerseits und Hildebrandt-Widman bzw. Wiegner andererseits sind allerdings fundamental verschieden. In den Arbeiten [HW2], [WI1] und [WI2] werden Green'sche Funktionen und die sogenannte „Lochfüllmethode“ verwendet, Caffarelli benutzt dagegen einen eleganteren, mehr geometrischen Zugang mit Hilfe einer schwachen Harnack-Ungleichung für Superlösungen von linearen Gleichungen und vermeidet dadurch völlig die Benutzung von Green'schen Funktionen.

Ziel dieser Arbeit ist es, die von Caffarelli entwickelte Methode auch auf andere Probleme anzuwenden, die bisher nur mit Green'schen Funktionen gelöst wurden bzw. noch ungelöst waren. So werden in Kapitel 1 zunächst parabolische Systeme der Form

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha \left(A^{\alpha\beta}(z, u, \nabla u) D_\beta u^i \right) = f^i(z, u, \nabla u) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

mit meßbaren, symmetrischen und gleichmäßig elliptischen Koeffizienten $A^{\alpha\beta}$ untersucht. Für Lösungen solcher Systeme, die eine Kleinheitsbedingung erfüllen, gibt es bereits ein optimales Regularitätsresultat von Giaquinta und Struwe [GS]. Mit Hilfe der von Caffarelli entwickelten Methode ist es nun möglich, den Beweis dieses Satzes deutlich zu vereinfachen. Der Beweis verwendet als wichtigstes Hilfsmittel eine schwache Harnack-Ungleichung für Superlösungen parabolischer Gleichungen von Trudinger [TR1] und benötigt keine Green'schen Funktionen.

Kapitel 2 wendet sich der Frage nach Regularitätsaussagen für harmonische Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu. In lokalen Koordinaten wird eine harmonische Abbildung v durch das elliptische System

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} D_\alpha\{\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta} D_\beta v^l\} + \gamma^{\alpha\beta}\Gamma^l_{ik}(v) D_\alpha v^i D_\beta v^k = 0 \qquad (l = 1, \ldots, N)$$

beschrieben, wobei $\gamma^{\alpha\beta}$ die inverse Metrik auf der Startmannigfaltigkeit bezeichne und $\gamma := \det(\gamma_{\alpha\beta})$ sei. Ferner seien Γ^l_{ik} die Christoffelsymbole bzgl. lokaler Koordinaten $(v^1, \ldots, v^N)$ auf der Zielmannigfaltigkeit. Es stellt sich recht schnell heraus, dass dieses System nicht in die Klasse der in [HW2], [WI1], [WI2] bzw. [CA] untersuchten elliptischen Systeme fällt. Setzt man voraus, dass das Bild der harmonischen Abbildung in einem regulären Ball enthalten ist (d.h. der Ball ist disjunkt zum Schnittort seines Zentrums und sein Radius ist kleiner als eine Konstante, die nur von einer oberen Grenze an die Schnittkrümmung des Balles abhängt), so ist es aufgrund der Variationsstruktur des Systems trotzdem möglich Regularitätsresultate und a-priori Abschätzungen im Inneren und am Rand zu beweisen. Diese Resultate wurden bereits von Giaquinta-Hildebrandt [GH] formuliert und unter Verwendung von Green'schen Funktionen und der „Lochfüllmethode“ gezeigt. Hier werden nun die Beweise von Giaquinta-Hildebrandt vereinfacht; neben zweier Abschätzungen der Christoffelsymbole bzw. der Metrik auf der Zielmannigfaltigkeit und einer geometrischen Bemerkung über reguläre Bälle von Jost [JO1] tritt als wichtiges Hilfsmittel erneut eine schwache Harnack-Ungleichung für Superlösungen auf. Dank dieser Harnack-Ungleichung (die auch schon in [GH] an einer Stelle verwendet wurde) und einer Iteration derselben ist es möglich a-priori Abschätzungen für harmonische Abbildungen ohne Green'sche Funktionen zu beweisen. Neben dem Dirichlet-Rand wird auch der halbfreie Rand betrachtet und mit dieser Methode ein Regularitätsresultat für das halbfreie Randwertproblem bewiesen.

Die von Hildebrandt-Widman und Wiegner entwickelte Methode gestattet es aufgrund der Verwendung Green'scher Funktionen nicht, auch singulär elliptische Systeme auf Regularität hin zu untersuchen. In Kapitel 3 und 4 werden schwache Harnack-Ungleichungen für Superlösungen singulär elliptischer Gleichungen hergeleitet; mit Hilfe dieser Harnack-Ungleichungen können dann Regularitätsresultate für schwache Lösungen gewisser singulär elliptischer Systeme bewiesen werden. Der Übersicht halber wird in Kapitel 3 zunächst der Fall behandelt, dass die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ nur von einer singulären Gewichtsfunktion abhängen, d.h. man betrachtet quasilineare elliptische Systeme

$$-D_\alpha \left(A^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u) D_\beta u^i \right) = f^i(x,u,\nabla u) \qquad (i = 1,\ldots,m) \tag{1}$$

mit Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x) := A^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)$, die f.ü. in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die Elliptizitätsbedingung

$$w(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq Cw(x)|\xi|^2 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

erfüllen. Das Gewicht $w(x)$ soll hierbei in der Muckenhouptklasse A_2 liegen, d.h. es gilt

$$\sup_{B_R \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} w(x)\,dx \right) \left(\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} w^{-1}(x)\,dx \right) < \infty$$

oder $w(x)$ soll in einer bestimmten Weise von einer quasikonformen Abbildung abhängen. Für den Fall einer Gleichung mit solchen Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ gibt es ein Regularitätsresultat von Fabes-Kenig-Serapioni [FKS]. Für den Beweis dieses Regularitätssatzes werden in [FKS] geeignete Sobolev- und Poincaré-Ungleichungen gezeigt, die auch hier im Beweis der Harnack-Ungleichung für Superlösungen benötigt werden. Durch Anwendung dieser Ungleichung stellt sich dann heraus, dass schwache Lösungen von Systemen der Form (1) unter der gleichen Kleinheitsbedingung wie im gleichmäßig elliptischen Fall lokal hölderstetig sind und eine a-priori Abschätzung erfüllen. Damit werden einerseits die Resultate von Hildebrandt-Widman, Wiegner und Caffarelli auf den Fall bestimmter singulärer Systeme ausgeweitet und andererseits Ergebnisse von Baldes [BA2] und Baoyao [BAO] verallgemeinert, die eine striktere Kleinheitsbedingung als im gleichmäßig elliptischen Fall fordern und eine kleinere Klasse von Gewichten zulassen. Man erhält z.B., dass für $\tau > -n$ alle beschränkten, schwachen Lösungen des Systems

$$-D_\alpha \left(|x|^\tau D_\alpha u^i \right) = 0 \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

in einem Ball $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ lokal hölderstetig sind. Am Ende dieses Kapitels werden Liouville-Sätze für schwache, ganze Lösungen singulär elliptischer Systeme gezeigt, die Koeffizienten sollen in einem beliebigen Ball um 0 von einer Gewichtsfunktion $w \in A_2$ abhängen und außerhalb dieses Balles gleichmäßig elliptisch sein. Dies erweitert ein Resultat von Hildebrandt-Widman [HW3] für Koeffizienten, die in ganz $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig elliptisch sind.

In Kapitel 4 werden schließlich Regularitätsresultate von Chanillo-Wheeden [CW2] für schwache Lösungen einer singulär elliptischen Gleichung auf den Fall einer schwachen Lösung eines entsprechenden Systems übertragen. Hierbei können die Koeffizienten von zwei verschiedenen singulären Gewichtsfunktionen abhängen, d.h. es soll f.ü. in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gelten

$$w(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq v(x)|\xi|^2 \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

Die Gewichte w und v müssen gewisse Sobolev- und Poincaré-Ungleichungen erfüllen, die im Beweis einer schwachen Harnack-Ungleichung für Superlösungen von Gleichungen mit den Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ benötigt werden. Diese Sobolev- und Poincaré-Ungleichungen sind z.B. erfüllt, falls $w \in A_2$, $z = \frac{v^2}{w}$ ein sog. „doubling weight“ ist, d.h. $z(B_{2R}) \leq Cz(B_R) \, \forall \, R > 0$ mit einer von R unabhänigen Konstanten C, und eine von Chanillo-Wheeden angegebene „balance condition“ erfüllt ist. Mit Hilfe dieser Harnack-Ungleichung ist es dann wie in [CA] und in Kapitel 3 möglich, lokale Hölderstetigkeit und a-priori Abschätzungen schwacher, beschränkter Lösungen von Systemen der Form (1) zu zeigen, wobei die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x) := A^{\alpha\beta}(x, u, \nabla u)$ die Abschätzung (2) erfüllen sollen. Als Beispiel kann man in $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ $w(x) = |x|^\tau (\tau \in (1, 2))$ und $v(x) = |x|$ wählen. Dieses Regularitätsresultat ist das erste dem Autor bekannte Ergebnis dieser Art für schwache Lösungen singulär elliptischer Systeme, die von zwei verschiedenen Gewichten abhängen. Wie in Kapitel 3 wird zum Abschluß auch ein Liouville-Satz für ganze Lösungen des Systems (1) gezeigt, wobei die Koeffizienten in einem Ball $B_R(0)$ die Bedingung (2) erfüllen sollen und außerhalb dieses Balles gleichmäßig elliptisch sein sollen.

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Herrn Dierkes, bei dem ich viele interessante Vorlesungen -angefangen mit Analysis I- hören durfte, für die Betreuung dieser Arbeit und die Unterstützung meiner Forschung. Ferner gilt mein Dank Sven Winklmann, der stets ein offenes Ohr für mich hatte und sich die Mühe gemacht hat Teile der Arbeit Korrektur zu lesen.

Kapitel 1

Regularität parabolischer Systeme

In diesem Kapitel wird bewiesen, dass beschränkte, schwache Lösungen von quasilinearen parabolischen Systemen zweiter Ordnung, die eine Kleinheitsbedingung erfüllen, lokal hölderstetig sind und eine a-priori Abschätzung erfüllen. Dieses Resultat geht auf Giaquinta und Struwe [GS] zurück, hier wird ein neuer Beweis dieses Resultats vorgestellt. Dieser Beweis verwendet die Idee von Caffarelli [CA] für die analoge Aussage bei elliptischen Systemen, seine Methode vermeidet Green'sche Funktionen (mit deren Hilfe Hildebrandt-Widman [HW2] und Wiegner [WI1], [WI2] Regularität elliptischer Systeme sowie Giaquinta und Struwe [ST], [GS] Regularität parabolischer Systeme zeigten) und benötigt nur eine schwache Harnack-Ungleichung für Superlösungen quasilinearer Gleichungen. Zunächst sollen der Begriff der schwachen Lösung und die geforderten Strukturbedingungen an das System präzisiert werden. Dazu sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $Q := \Omega \times (0,T)$, $T > 0$ und $z = (x,t) \in Q$. Betrachte das quasilineare parabolische System

$$Au = \frac{\partial u^i}{\partial t} - D_\alpha \left(A^{\alpha\beta}(z,u,\nabla u) D_\beta u^i \right) = f^i(z,u,\nabla u) \qquad i = 1,\dots,m \qquad (1.1)$$

wobei $\nabla u = (u_{x_1},\dots,u_{x_n})$ der Gradient von u bzgl. der Variablen $x_1,\dots,x_n$ sei. Folgende Strukturbedingungen an die meßbaren und symmetrischen Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(z) := A^{\alpha\beta}(z,u,\nabla u)$, die rechte Seite f und die Lösung u sollen erfüllt sein:

1. $\sup\limits_Q |u| \le M < \infty$

2. $\lambda|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(z)\xi_\alpha\xi_\beta$ für ein $\lambda > 0$, alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $z \in Q$
   $|a^{\alpha\beta}| < \Lambda < \infty$

3. $|f(z,u,p)| \leq aQ(z,p)$
   $u(z) \cdot f(z,u,p) \leq a^* Q(z,p)$
   für fast alle $z \in Q$ und für alle $p \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $a \geq 0$ und $a^* \in \mathbb{R}$, wobei $Q(z,p) := a^{\alpha\beta}(z)p^i_\alpha p^i_\beta$

Bemerkung:

- Die zweite Bedingung aus 3) ist stets erfüllt mit $a^* = aM$, insbesondere gilt also o.E. $a^* \leq aM$.
- In der gesamten Arbeit sind die Bezeichnungen $\sup\limits_\Omega |u|$, $\inf\limits_\Omega |u|$ etc. als essentielles Supremum etc. zu verstehen, d.h. $\sup\limits_\Omega |u| = ess \sup\limits_\Omega |u|$ etc.
- In der gesamten Arbeit wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, d.h. über doppelt auftretende Indizies wird summiert.

$V_2^1(Q,\mathbb{R}^m)$ sei die Vervollständigung von $C^\infty(Q,\mathbb{R}^m)$ unter der Norm

$$|u|_{1,2,Q} = \left(\int\limits_Q |u|^2\, dz + \sum_{i=1}^m \int\limits_Q |\nabla u^i|^2\, dz \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ d.h.}$$

$V_2^1(Q,\mathbb{R}^m) = \{u; u \in L^2(Q), \nabla u \in L^2(Q)\}$.

$H_2^1(Q,\mathbb{R}^m)$ sei die Vervollständigung von $C^\infty(Q,\mathbb{R}^m)$ unter der Norm

$$||u||_{H_2^1(\Omega)} = \left(\int\limits_Q |u|^2\, dz + \sum_{i=1}^m \int\limits_Q \left[(u^i_t)^2 + |\nabla u^i|^2\right] dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Schließlich sei $H^1_{2,0}(Q,\mathbb{R}^m)$ die Vervollständigung von $C_c^\infty(Q,\mathbb{R}^m)$ unter der Norm

$$|u|_{1,2,0,Q} = \left(\sum_{i=1}^m \int\limits_Q \left[(u^i_t)^2 + |\nabla u^i|^2\right] dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eine Abbildung $u \in V_2^1(Q,\mathbb{R}^m)$ heißt schwache Lösung von $Au = f$, falls für alle $\varphi \in H^1_{2,0} \cap L_\infty(Q,\mathbb{R}^m)$ die Identität

$$\int\limits_Q \left[-u^i\varphi^i_t + a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u^i D_\alpha \varphi^i\right] dz = \int\limits_Q f^i(z,u,\nabla u)\varphi^i\, dz \tag{1.2}$$

gilt.

Obwohl i.a. $u \notin H_2^1(Q, \mathbb{R}^m)$ kann man $u\varphi, \varphi \in C_c^\infty(Q)$, als Testfunktion in die schwache Formulierung (1.2) einsetzen. Man sieht dies durch folgendes Approximationsargument (o.E. sei $m = 1$) (vgl. [EV, 5.9.2], [ST, Lemma 1]):

Definiere $\mathbf{u} : (0, T) \to H_2^1(\Omega)$ durch $\mathbf{u}(t)(x) := u(x, t)$ für $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Dann gilt $\int\limits_0^T ||\mathbf{u}||^2_{H_2^1(\Omega)}\, dt = |u|_{1,2,Q} < \infty$, also ist $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_2^1(\Omega))$. Setze $\mathbf{u}$ auf $\mathbb{R}$ durch $\mathbf{u}(t) = 0$ für $t \notin (0, T)$ fort. Nun ist $\mathbf{u}_t \in L^2(0, T; H_2^{-1}(\Omega))$, denn:
Da $H_2^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H_2^{-1}(\Omega)$ ist $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_2^{-1}(\Omega))$.
Bezeichne nun $(\cdot, \cdot)$ das Dualitätsprodukt von $\varphi \in H_2^1(\Omega), \varphi' \in H_2^{-1}(\Omega)$, also $(\varphi', \varphi) = \varphi'(\varphi)$. Für $f, g \in H_2^1(\Omega)$ ergibt sich dann $(f, g) = \int\limits_\Omega f(x)g(x)\, dx$.

Sei nun $\eta \in C_c^\infty(0, T)$ und $\varphi \in H_2^1(\Omega)$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\int\limits_0^T \mathbf{u}(t)\eta'(t)\, dt, \varphi\right) &= \int\limits_0^T (\mathbf{u}(t), \varphi)\, \eta'(t)\, dt \\
&= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u(x, t)\varphi(x)\eta'(t)\, dx\, dt \\
&= \int\limits_Q \left(a^{\alpha\beta} D_\beta u D_\alpha \varphi\eta - f\varphi\eta\right)\, dz \qquad \text{(nach (1.2))} \\
&= \int\limits_0^T (\mathbf{g}, \varphi)\eta(t)\, dt \\
&= \left(\int\limits_0^T \mathbf{g}(t)\eta(t)\, dt, \varphi\right)
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{g} : (0, T) \to H_2^{-1}(\Omega)$ durch $(\mathbf{g}(t), \varphi) := \int\limits_\Omega a^{\alpha\beta} D_\beta u(\cdot, t) D_\alpha \varphi\, dx - \int\limits_\Omega f(\cdot, t)\varphi\, dx$ mit $\varphi \in H_2^1(\Omega)$ definiert ist. Da $\int\limits_0^T ||\mathbf{g}(t)||^2_{H_2^{-1}(\Omega)}\, dt < \infty$ ist $\mathbf{g} \in L^2(0, T; H_2^{-1}(\Omega))$.
Da $\varphi \in H_2^1(\Omega)$ bel., folgt aus obiger Gleichungskette

$$\int\limits_0^T \mathbf{u}(t)\eta'(t)\, dt = \int\limits_0^T \mathbf{g}(t)\eta(t)\, dt \quad \forall \eta \in C_c^\infty(0, T)$$

Somit existiert die schwache Ableitung von $\mathbf{u}$ und ist durch $-\mathbf{g}$ gegeben:

$$\mathbf{u}_t = -\mathbf{g} \in L^2(0, T; H_2^{-1}(\Omega)).$$

Sei $0 < \epsilon << 1$ und setze $u^\epsilon(x, t) := (\mathbf{u}^\epsilon(t))(x)$ mit $\mathbf{u}^\epsilon(t) = \int\limits_\mathbb{R} \mathbf{u}(t - s)\eta^\epsilon(s)\, ds$
$= \int\limits_\mathbb{R} \eta^\epsilon(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)\, d\tau,$

wobei $\eta^\epsilon(s)$ ein üblicher mollifier sei, d.h. $\eta^\epsilon(s) = \epsilon^{-1}\eta\left(\frac{s}{\epsilon}\right)$ mit

$\eta(s) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{s^2-1}\right) & |s| < 1 \\ 0 & |s| \geq 1 \end{cases}$, wobei C so gewählt wird, dass $\int\limits_{\mathbb{R}} \eta^\epsilon(s)\, ds = 1$.

Nach bekannten Eigenschaften von mollifiern ist $\mathbf{u}^\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}, H_2^1(Q)) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}, H_2^{-1}(Q))$, somit kann $u^\epsilon\varphi$ als Testfunktion in (1.2) eingesetzt werden, man erhält:

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} \left[-u\left(u^\epsilon\varphi\right)_t + a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u D_\alpha\left(u^\epsilon\varphi\right) - f\left(u^\epsilon\varphi\right)\right]\, dz = 0$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} \left[-uu^\epsilon\varphi_t - uu_t^\epsilon\varphi + a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u D_\alpha u^\epsilon\varphi + a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u u^\epsilon D_\alpha\varphi - fu^\epsilon\varphi\right]\, dz = 0$$

Für $\epsilon \to 0$ gilt:
$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u D_\alpha u^\epsilon\varphi\, dz \to \int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u D_\alpha u\varphi\, dz\\
&\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u u^\epsilon D_\alpha\varphi\, dz \to \int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u u D_\alpha\varphi\, dz\\
&\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} fu^\epsilon\varphi\, dz \to \int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} fu\varphi\, dz\\
&\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} -uu^\epsilon\varphi_t \to \int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} -|u|^2\varphi_t\, dz.
\end{aligned}$$

Zeige jetzt, dass $-\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} uu_t^\epsilon\varphi\, dz \to \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} |u|^2\varphi_t$, $\epsilon \to 0$:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} uu_t^\epsilon\varphi\, dz = -\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} u^\epsilon u_t^\epsilon\varphi\, dz + \int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} \left(u^\epsilon - u\right)u_t^\epsilon\varphi\, dz$$

Den ersten Term auf der rechten Seite kann man wie folgt umformen:

$$-\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} u^\epsilon u_t^\epsilon\varphi\, dz = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} |u^\epsilon|_t^2\varphi\, dz = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} |u^\epsilon|^2\varphi_t\, dz \to \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} |u|^2\varphi_t\, dz, \epsilon \to 0.$$

Also ist noch zu zeigen, dass der zweite Term auf der rechten Seite gegen 0 konvergiert, es gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} \left(u^\epsilon - u\right)u_t^\epsilon\varphi\, dz \leq \left(\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} |u^\epsilon - u|^2\, dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} |u_t^\epsilon\varphi|^2\, dz\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathbf{u}^\epsilon$ konvergiert für $\epsilon \to 0$ in der L^2-Norm gegen $\mathbf{u}$ (s.[GT, Lemma 7.2]), d.h. $\int\limits_{\mathbb{R}} ||\mathbf{u}^\epsilon - \mathbf{u}||_{L^2(\Omega)}^2\, dt \to 0$ bzw. $\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\Omega} |u^\epsilon - u|^2\, dx\, dt \to 0$. Daher konvergiert die erste Klammer für $\epsilon \to 0$ gegen 0, so dass nur noch die Beschränktheit der zweiten Klammer zu zeigen ist. Schätze dazu für $0 < \epsilon << 1$ wie folgt ab:

$$\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega} |u_t^\epsilon\varphi|^2\, dz \leq \int\limits_{\mathbb{R}} ||\mathbf{u}_t^\epsilon||_{H_2^{-1}(\Omega)}^2 ||\varphi||_{H_2^1(\Omega)}^2\, dt \leq C\int\limits_{\mathbb{R}} ||\mathbf{u}_t^\epsilon||_{H_2^{-1}(\Omega)}^2\, dt$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{|s|\leq 1} \eta(s) ||\mathbf{u}_t(t-\epsilon s)||_{H_2^{-1}(\Omega)} \, ds \right)^2 dt$$

$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{|s|\leq 1} \eta(s) \, ds \right) \left(\int\limits_{|s|\leq 1} \eta(s) ||\mathbf{u}_t(t-\epsilon s)||^2_{H_2^{-1}(\Omega)} \, ds \right) dt$$

$$\leq C \int\limits_{|s|\leq 1} \eta(s) \left(\int\limits_{\mathbb{R}} ||\mathbf{u}_t(t-\epsilon s)||^2_{H_2^{-1}(\Omega)} \, dt \right) ds \leq C ||\mathbf{u}_t||^2_{L^2(0,T;H_2^{-1}(\Omega))} \int\limits_{|s|\leq 1} \eta(s) \, ds$$

$$\leq C ||\mathbf{u}_t||^2_{L^2(0,T;H_2^{-1}(\Omega))}$$

Da $\mathbf{u}_t \in L^2(0,T;H_2^{-1}(\Omega))$ folgt $\int\limits_Q |u_t^\epsilon \varphi|^2 \, dz \leq C$ und somit ist gezeigt, dass $-\int\limits_Q u u_t^\epsilon \varphi \, dz \to \frac{1}{2} \int\limits_Q |u|^2 \varphi_t$. Hieraus ergibt sich dann, dass für $\epsilon \to 0$ der Ausdruck $\int\limits_Q \left[-u \left(u^\epsilon \varphi \right)_t + a^{\alpha\beta}(z) D_\beta u D_\alpha \left(u^\epsilon \varphi \right) - f \left(u^\epsilon \varphi \right) \right] dz$ gegen $\int\limits_Q \left[-\frac{1}{2} |u|^2 \varphi_t + a^{\alpha\beta}(z) D_\beta u D_\alpha (u\varphi) - f(u\varphi) \right] dz$ konvergiert. Also ist $u\varphi$, $\varphi \in C_c^\infty(Q)$, eine zulässige Testfunktion in der schwachen Formulierung und es gilt:

$$\int\limits_Q \left[-\frac{1}{2} |u|^2 \varphi_t + a^{\alpha\beta}(z) D_\beta u D_\alpha (u\varphi) \right] dz = \int\limits_Q f u \varphi \, dz$$

Hölderstetigkeit schwacher Lösungen erhält man unter der Bedingung $a^* + aM < 2$. Dieses Resultat ist optimal, da es bereits bei elliptischen Systemen im Fall $a^* + aM = 2$ Gegenbeispiele zur Hölderstetigkeit gibt, betrachte z.B. $u^i(x) = \frac{x^i}{|x|}, x \in B_1(0), i = 1, \ldots, n$ $(n \geq 3)$. Diese im Nullpunkt unstetige Funktion ist Lösung des Systems $-\Delta u^i = u^i |\nabla u|^2$, s. [HW1,p.68].

Da zu Beginn ein festes Gebiet R_0 (Def. später) betrachtet wird, wird in Lemma 1.1 beschrieben, wie sich die obigen Strukturbedingungen unter Skalierungen verhalten.

Lemma 1.1 *Sei u schwache Lösung eines Systems der Form (1.1) und $v(x,t) := su(cx, c^2t)$ mit $c, s > 0$. Dann ist v eine Lösung desselben Systemtyps* *mit folgenden Strukturbedingungen:*

i) $M(v) = \sup|v| = sM(u) = s\sup|u|$

ii) $\Lambda(v) = \Lambda(u)$ *und* $\lambda(v) = \lambda(u)$

iii) $a(v) = \frac{1}{s}a(u)$

iv) $a^*(v) = a^*(u)$

Beweis: i) klar
ii) Sei $v(x,t) := su(cx, c^2t) \to u(x,t) = \frac{1}{s}v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)$, dann folgt:
$\nabla u(x,t) = \frac{1}{sc}\nabla v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)$. Mit den Substitutionen $y = \frac{x}{c}, z = \frac{t}{c^2}$ erhält man die Koeffizienten $\tilde{A}^{\alpha\beta}$ von v, $\tilde{A}^{\alpha\beta}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z)) = A^{\alpha\beta}(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z))$, damit folgt die Behauptung ii).
iii) Mit $v(x,y) = su(cx, c^2t)$ folgt $\partial_t u(x,t) = \frac{1}{sc^2}\partial_t v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)$.
Setzt man dies und $\nabla u(x,t) = \frac{1}{sc}\nabla v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)$ in die schwache Formulierung ein, so ergibt sich:

$$\int_Q \left[-\frac{1}{s}v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,t) + A^{\alpha\beta}\left(x, t, \frac{1}{s}v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right), \frac{1}{sc}\nabla v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)\right)\frac{1}{sc}D_\alpha v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)D_\beta\varphi(x,t)\right]dx\,dt$$
$$= \int_Q f\left(x, t, \frac{1}{s}v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right), \frac{1}{sc}\nabla v\left(\frac{x}{c}, \frac{t}{c^2}\right)\right)\varphi(x,t)\,dx\,dt$$

Mit $y = \frac{x}{c}$, $z = \frac{t}{c^2}$ erhält man $dy = \frac{1}{c^n}\,dx$, $dz = \frac{1}{c^2}\,dt$, mit $\tilde{\varphi}(y,z) = \varphi(cy, c^2z)$ kommt man zu $D_\beta\tilde{\varphi}(y,z) = cD_\beta\varphi(cy,c^2z)$ sowie $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(y,z) = c^2\frac{\partial}{\partial t}\varphi(cy,c^2z)$. Dies liefert

$$\int_Q \left[-\frac{1}{s}v(y,z)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(y,z)c^{-2} + A^{\alpha\beta}\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)\frac{1}{sc}D_\alpha v(y,z)D_\beta\tilde{\varphi}(y,z)c^{-1}\right]c^{n+2}\,dy\,dz$$
$$= \int_Q f\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)\tilde{\varphi}(y,z)c^{n+2}\,dy\,dz$$
$$\Leftrightarrow \int_Q \left[-v(y,z)\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(y,z) + A^{\alpha\beta}\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)D_\alpha v(y,z)D_\beta\tilde{\varphi}(y,z)\right]dy\,dz$$
$$= \int_Q f\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)sc^2\tilde{\varphi}(y,z)\,dy\,dz$$

Mit $\tilde{A}^{\alpha\beta}$ von v, $\tilde{A}^{\alpha\beta}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z)) = A^{\alpha\beta}\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)$ und der rechten Seite $\tilde{f}$ von v, $\tilde{f}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z)) = f\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)sc^2$ ergibt sich nun:
$|\tilde{f}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z))| = \left|f\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)sc^2\right|$

$\leq aQ\left(cy, c^2z, \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right) sc^2 = aA^{\alpha\beta}\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right) \frac{1}{s^2c^2} D_\alpha v^i(y,z) D_\beta v^i(y,z) sc^2$

$= a\tilde{A}^{\alpha\beta}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z))\frac{1}{s} D_\alpha v^i(y,z) D_\beta v^i(y,z) = \frac{a}{s}\,\tilde{Q}(y,z,\nabla v(y,z))$

Insgesamt also: $|\tilde{f}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z))| \leq \frac{a}{s}\tilde{Q}(y,z,\nabla v(y,z))$,

somit gilt: $a(v) = \frac{1}{s}\,a(u)$

iv) $v(y,z)\cdot\tilde{f}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z)) = su(x,t)\cdot f\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}v(y,z)\right) sc^2$

$\leq a^* s^2c^2 Q\left(cy, c^2z, \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right) \leq a^* s^2c^2 A^{\alpha\beta}\left(cy, c^2z, \frac{1}{s}v(y,z), \frac{1}{sc}\nabla v(y,z)\right)\frac{1}{s^2c^2} D_\alpha v^i(y) D_\beta v^i(y)$

$= a^*\tilde{A}^{\alpha\beta}(y,z,v(y,z),\nabla v(y,z)) D_\alpha v^i(y) D_\beta v^i(y) = a^*\tilde{Q}(y,z,\nabla v(y,z))$,

daher folgt die Behauptung $a^*(v) = a^*(u)$ $\square$

Bemerkung: Insbesondere ändern sich die Strukturbedingungen des Systems nicht unter den Transformationen $x \mapsto cx + x_0$ und $t \mapsto c^2t + t_0$, $c > 0$.

Der Schlüssel zum Beweis der Regularitätsaussage liegt in einer schwachen Harnack-Ungleichung von Trudinger für Superlösungen quasilinearer, parabolischer Gleichungen. Bevor diese Harnack-Ungleichung zitiert wird, werden zunächst einige Bezeichnungen eingeführt.

$B_r(x_0)$ sei der n-dim. euklidische Ball mit Radius r und Mittelpunkt x_0, also $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < r\}$. Nun sei

$R_0 := B_2(0) \times (0,2)$ $\qquad R_k := B_{\frac{1}{2^{2k-1}}}(0) \times \left(\frac{2^{4k}-1}{2^{4k-1}}, 2\right)$

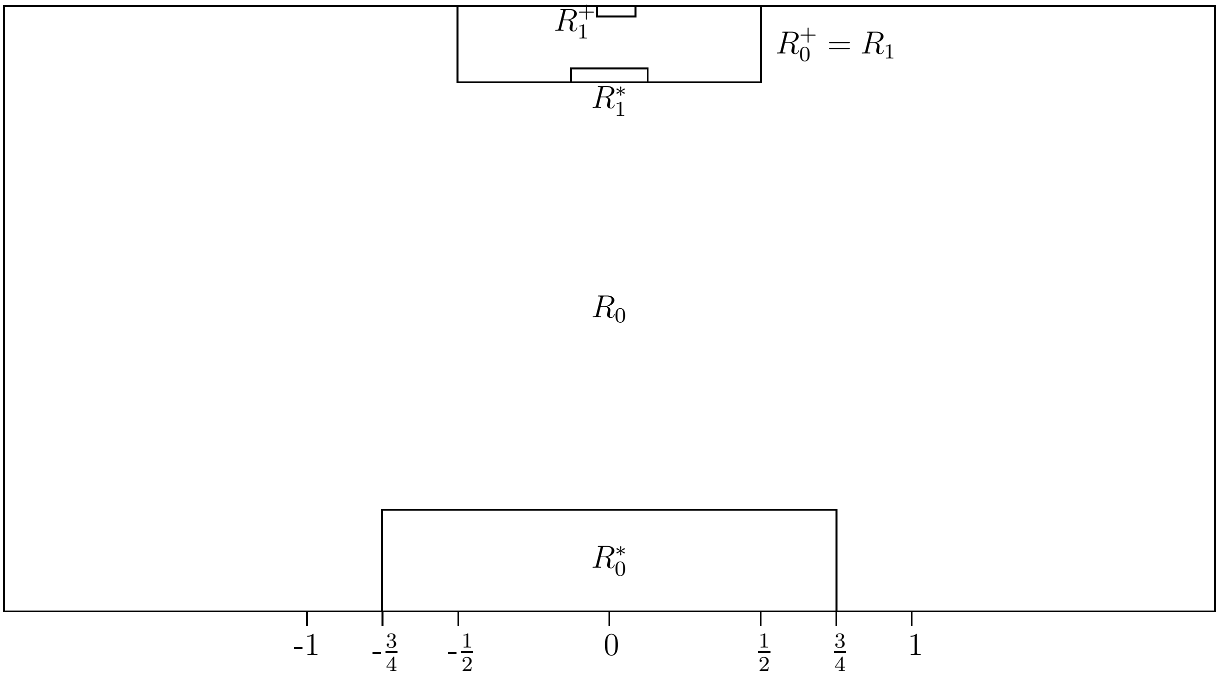
$R_0^+ := B_{\frac{1}{2}}(0) \times \left(\frac{15}{8}, 2\right)$ $\qquad R_k^+ := B_{\frac{1}{2^{2k+1}}}(0) \times \left(\frac{2^{4(k+1)}-1}{2^{4k+3}}, 2\right)$

$R_0^* := B_{\frac{3}{4}}(0) \times \left(0, \frac{1}{3}\right)$ $\qquad R_k^* := B_{\frac{3}{2^{2k+2}}}(0) \times \left(\frac{2^{4k}-1}{2^{4k-1}}, 2 - \frac{5}{3\cdot 2^{4k}}\right)$

Beachte: i) $R_{k+1} = R_k^+$, $k \geq 0$

ii) $\left(2 - \frac{2^{4k}-1}{2^{4k-1}}\right) - \left(2 - \frac{2^{4(k+1)}-1}{2^{4k+3}}\right) = \frac{15}{2^{4k+3}}$, d.h. die Länge der Zeitintervalle von R_{k-1}^+ und R_k^+ unterscheiden sich um $\frac{15}{2^{4k+3}}$.

iii) $2 - \frac{2^{4k}-1}{2^{4k-1}} = \frac{1}{2^{4k-1}}$, die Länge des Zeitintervalls von R_k beträgt also $\frac{1}{2^{4k-1}}$



Es gilt folgende schwache Harnack-Ungleichung (s.[TR1, Theorem 1.2]):

Satz 1.1 *Sei $u(x,t)$ eine beschränkte, schwache nicht-negative Superlösung der Gleichung $u_t - D_\alpha(a^{\alpha\beta}(x,t,u,\nabla u)D_\beta u) = 0$ in R_0, wobei die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ glm. elliptisch seien, d.h. $a^{\alpha\beta}(x,t,u,\nabla u)\xi_\alpha\xi_\beta \geq \lambda|\xi|^2 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $|a^{\alpha\beta}| \leq \Lambda$. Dann gilt:*

$$\fint_{R_0^*} u(x,t)\,dx\,dt \leq C(n,\lambda,\Lambda) \inf_{R_0^+} u(x,t) \tag{1.3}$$

wobei $\displaystyle\fint_{R_0^*} u(x,t)\,dx\,dt = \frac{1}{|R_0^*|}\int_{R_0^*} u(x,t)\,dx\,dt.$

Als Analogon zu Lemma 1 von [CA] erhalten wir

Lemma 1.2 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung des parabolischen Systems (1.1) in R_0, wobei die obigen Strukturbedingungen 1)-3) erfüllt seien und es gelte $a^* + aM = 2l < 2$, wobei $M = \sup_{R_0} |u|$. Dann existiert eine Konstante $\delta = \delta(n,\lambda,\Lambda,a,a^*,M)$, $0 < \delta < 1$, so dass*

$$u\left(R_0^+\right) \subset B_{M(1-\delta)}\left(\delta\overline{u}\left(R_0^*\right)\right) \tag{1.4}$$

wobei $\overline{u}(R_0^*) = \fint_{R_0^*} u(x,t)\, dx\, dt.$

<u>Beweis:</u> Berechne zunächst $A\left(\frac{1}{2}|u|^2\right)$ und beachte, dass $u\varphi$, $\varphi \in H^1_{2,0}(Q)$, eine zulässige Testfunktion ist. In der schwachen Formulierung ergibt sich:

$$\int_Q \left[-\frac{1}{2}|u|^2\varphi_t + a^{\alpha\beta}(z)D_\beta\left(\frac{1}{2}|u|^2\right)D_\alpha\varphi\right] dz$$

$$= \int_Q \left[-\frac{1}{2}|u|^2\varphi_t + a^{\alpha\beta}(z)u^iD_\beta u^iD_\alpha\varphi\right] dz$$

$$= \int_Q \left[-\frac{1}{2}|u|^2\varphi_t + a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u^iD_\alpha(u^i\varphi) - a^{\alpha\beta}(z)D_\beta u^iD_\alpha u^i\varphi\right] dz$$

$$= \int_Q \left[-\frac{1}{2}|u|^2\varphi_t + f^iu^i\varphi + \frac{1}{2}|u|^2\varphi_t\right] dz - \int_Q Q(z,\nabla u(z))\varphi\, dz$$

$$= \int_Q f^iu^i\varphi\, dz - \int_Q Q(z,\nabla u)\varphi\, dz, \quad \text{also: } A\left(\tfrac{1}{2}|u|^2\right) = u\cdot f\, - Q(z,\nabla u)$$

Nun sei $\xi \in \mathbb{R}^m$, $|\xi| \leq \frac{1-l}{a}$, dann folgt aus obiger Rechnung, der Strukturbedingung 3) und der Tatsache $a^* \leq l$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} A\left(\tfrac{1}{2}|u|^2 + \xi\cdot u\right) &= u\cdot f - Q(z,\nabla u) + \xi f \\ &\leq a^*Q(z,\nabla u) - Q(z,\nabla u) + (1-a^*)Q(z,\nabla u) = 0. \text{ Es gilt also} \end{aligned}$$

$$A\left(\frac{1}{2}|u|^2 + \xi\cdot u\right) \leq 0 \tag{1.5}$$

Daher ist die skalare Funktion $h(z) := \frac{1}{2}M^2 + \frac{1-l}{a}M - \frac{1}{2}|u(z)|^2 - \xi\cdot u(z)$ eine nichtnegative Superlösung von A in R_0, da $Ah = A\left(-\frac{1}{2}|u|^2 - \xi\cdot u\right) = -A\left(\frac{1}{2}|u|^2 + \xi\cdot u\right) \geq 0$. Für den Mittelwert von h folgt: $\overline{h} \geq \frac{1-l}{a}M - \xi\cdot\overline{u}$. Mit der parabolischen Harnack-Ungleichung für schwache Superlösungen folgt jetzt:

$$h(z) \geq \inf_{R_0^+} h(z) \geq \delta_1(n,\lambda,\Lambda)\left[\tfrac{1-l}{a}M - \xi\cdot\fint_{R_0^*} u\, dz\right] \qquad \forall z \in R_0^+, \text{ es folgt:}$$

$$h(z) = \frac{1}{2}\left(M^2 - |u(z)|^2\right) + \frac{1-l}{a}M - \xi\cdot u(z) \geq \delta_1\left[\frac{1-l}{a}M - \xi\cdot\overline{u}\left(R_0^*\right)\right] \tag{1.6}$$

Wähle ξ in die Richtung von u, wobei $|\xi| = \frac{1-l}{a}$ gelte, θ sei der Winkel zwischen u und $\fint_{R_0^*} u\, dz$, setze $r := \frac{|u|}{M}$. Mit diesen Bezeichnungen folgt:

$\xi \cdot u = |\xi||u|$ und $\xi \cdot \overline{u}\,(R_0^*) = |\xi||\overline{u}\,(R_0^*)\,|\cos\theta$, somit ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\,(M^2 - |u|^2) + \tfrac{1-l}{a}M - \xi \cdot u \\
&\geq \tfrac{1}{2}(M - |u|)(M + |u|) + \tfrac{1-l}{a}M - |\xi| r M \\
&= \tfrac{1}{2}M(1-r)(M + |u|) + \tfrac{1-l}{a}(1-r)M \qquad \left(|\xi| = \tfrac{1-l}{a}\right) \\
&= M(1-r)\left[\tfrac{1}{2}(M + |u|) + \tfrac{1-l}{a}\right] \\
&\geq \delta_1 \left[\tfrac{1-l}{a}M - \xi \cdot \overline{u}\right] \qquad (\text{nach } (1.6),\ \overline{u} = \overline{u}\,(R_0^*)) \\
&= \delta_1 \left[\tfrac{1-l}{a}M - \tfrac{1-l}{a}|\overline{u}|\cos\theta\right] \\
&= M\delta_1 \tfrac{1-l}{a}\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right), \text{ insgesamt gilt also:}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M(1-r)\left[\tfrac{1}{2}(M + |u|) + \tfrac{1-l}{a}\right] &\geq M\delta_1 \tfrac{1-l}{a}\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \\
\Rightarrow \qquad (1-r)\tfrac{1-l}{a}\left[\tfrac{M+|u|}{2\frac{1-l}{a}} + 1\right] &\geq \delta_1 \tfrac{1-l}{a}\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

Für $z \in R_0^+$ folgt hieraus:

$$
\begin{aligned}
1 - \tfrac{|u(z)|}{M} = 1 - r &\geq \frac{\delta_1}{\frac{M+|u(z)|}{2\frac{1-l}{a}} + 1}\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \geq \frac{\delta_1}{\frac{aM}{1-l} + 1}\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \\
&\geq \delta_2(n, \lambda, \Lambda, a, a^*, M)\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right), \text{ kurz:}
\end{aligned}
$$

$$
1 - r = 1 - \frac{|u(z)|}{M} \geq \delta_2\left(1 - \frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \qquad \forall z \in R_0^+ \tag{1.7}
$$

O.E. sei $\delta_2 < 1$, dann folgt aus (1.7):

$$
\begin{aligned}
&1 - r + r(1-r) \geq r\delta_2\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) + (1-r) \\
\Leftrightarrow\ &1 - r^2 \geq 1 - r(1-\delta_2) - \delta_2 r\tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta \\
&\qquad\quad \geq \delta_2\left(1 - r\tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \qquad (r \leq 1) \\
\Rightarrow\ &\qquad r^2 - \delta_2 r\tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta \leq 1 - \delta_2 \\
\Rightarrow\ &\quad r^2 - \delta_2 r\tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta + \left(\tfrac{1}{2}\delta_2\tfrac{|\overline{u}|}{M}\right)^2 \leq 1 - \delta_2 + \left(\tfrac{1}{2}\delta_2\right)^2
\end{aligned}
$$

Mit $\delta := \frac{\delta_2}{2}$ folgt nun: $\qquad r^2 - 2\delta r\frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta + \left(\delta\frac{|\overline{u}|}{M}\right)^2 \leq (1-\delta)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{M^2}\left(|u(z)-\delta\overline{u}|^2\right) \leq (1-\delta)^2$, also:

$$|u(z)-\delta\overline{u}|^2 \leq M^2(1-\delta)^2 \qquad \forall z \in R_0^+$$

Dies entspricht der Aussage von Lemma 1.2. □

Korollar 1.1 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (1.1) in R_0, wobei die obigen Strukturbedingungen 1)-3) erfüllt seien, ferner gelte $a^* + aM = 2l < 2$. Dann existieren Punkte $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ und Radien M_k, so dass gelten:*

i) $M_k \leq M(1-\delta)^k$

ii) $|\xi_k| \leq \left[1-(1-\delta)^k\right] M$

iii) $|\xi_k| + M_k \leq M$, $|u-\xi_k| \leq M_k$ *f.ü. in* R_k

iv) $u(R_k) \subset B_{M_k}(\xi_k)$,

wobei δ die Konstante aus Lemma 1.2 bezeichnet.

Beweis: i)-iii)): Mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: $k = 0 \to M_0 = M$ und $\xi_0 = 0$.
Induktionsschritt: Für ein $k \geq 0$ seien ξ_k und M_k bereits konstruiert. Dann ist $u^{(k)} := u - \xi_k$ eine schwache Lösung eines Systems vom Typ (1.1) in R_k mit den Eigenschaften: $|f| \leq aQ(z,\nabla u)$ und $u^{(k)} \cdot f = (u-\xi_k)\cdot f \leq (a^* + a|\xi_k|)Q(z,\nabla u)$.
Setze $a_k^* := a^* + a|\xi_k|$
Da nach iii) $|\xi_k| + M_k \leq M$ gilt, folgt:

$$a_k^* + aM_k \leq a^* + a(|\xi_k| + M_k) \leq a^* + aM = 2l < 2$$

Der zweite Teil von iii) liefert: $u^{(k)} \cdot f \leq |u-\xi_k||f| \leq aM_kQ(z,\nabla u)$. Da die Abschätzung $u^{(k)} \cdot f \leq a_k^* Q(z,\nabla u)$ (s.o.) stets mit $a_k^* = aM_k$ erfüllt ist, erhalten wir: $a_k^* \leq aM_k \Rightarrow a_k^* \leq l < 1$. Da nach Induktionsvoraussetzung $|u^{(k)}| \leq M_k$ f.ü. in R_k folgt aus Lemma 1.2 (ersetze u durch $u^{(k)}$, R_0 durch R_k und M durch M_k) die Abschätzung:

$$\left| u^{(k)}(z) - \delta\overline{u^{(k)}}(R_k^*)\right| \leq (1-\delta)M_k \qquad \text{f.f.a.} \;\; z \in R_k^+ = R_{k+1} \tag{1.8}$$

Mit $\xi_{k+1} := \xi_k + \delta \fint_{R_k^*} (u-\xi_k)\,dz = (1-\delta)\xi_k + \delta \fint_{R_k^*} u\,dz$ und $M_{k+1} := \sup_{R_k^+} |u^{(k+1)}|$ kommt man zu

$$\begin{aligned}
M_{k+1} &= \sup_{R_k^+} |u^{(k+1)}| = \sup_{R_k^+} |u - \xi_{k+1}| = \sup_{R_k^+} |u - \delta \fint_{R_k^*} u^{(k)}\, dz - \xi_k| \\
&= \sup_{R_k^+} |u^{(k)} - \delta \fint_{R_k^*} u^{(k)}\, dz| \leq (1-\delta) M_k \qquad\qquad \text{(nach (1.8))} \\
&\leq (1-\delta)^{k+1} M \qquad\qquad \text{(nach i))}
\end{aligned}$$

Also gilt i), aus der Definition von M_k ergibt sich ferner der zweite Teil von iii), denn $|u(z) - \xi_{k+1}| = |u^{(k+1)}| \leq M_{k+1}$ f.ü. in $R_k^+ = R_{k+1}$.

Da $|\fint_{R_k^*} u\, dz| \leq M$ folgt mit ii):

$$\begin{aligned}
|\xi_{k+1}| &\leq (1-\delta)|\xi_k| + \delta M \leq (1-\delta)\left[1 - (1-\delta)^k\right] M + \delta M \\
&= (1-\delta) M + \delta M - (1-\delta)^{k+1} M = \left[1 - (1-\delta)^{k+1}\right] M, \text{ somit gilt ii).}
\end{aligned}$$

Den ersten Teil der Behauptung iii) erhält man mit i) und ii) wie folgt:

$$|\xi_{k+1}| + M_{k+1} \leq \left[1 - (1-\delta)^{k+1}\right] M + (1-\delta)^{k+1} M = M.$$

iv) Da $|u(z) - \xi_k| \leq M_k$ f.f.a. $z \in R_k$, folgt: $u(R_k) \subset B_{M_k}(\xi_k)$. □

Für $(y,s) \in Q$ sei $Z_\epsilon(y,s) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; |x-y| < \epsilon, -\epsilon^2 < t - s < 0\}$ der *parabolische Zylinder* um den Punkt (y,s).
Führe ferner die *parabolische Metrik* $\sigma(z,w) = \sigma((x,t),(y,s)) := |x-y| + |t-s|^{\frac{1}{2}}$ ein. Es ergibt sich folgendes

Lemma 1.3 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (1.1) in R_0, wobei die Strukturbedingungen 1)-3) erfüllt seien, ferner gelte $a^* + aM = 2l < 2$. Dann gilt für $\epsilon \in (0,1]$:*

$$osc_{Z_\epsilon(0,2)} u \leq 8M \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^\alpha \tag{1.9}$$

wobei α durch $4^{-\alpha} = max\left(1-\delta, \frac{1}{2}\right)$ gegeben ist, δ sei die Konstante aus Lemma 1.2.

<u>Beweis:</u> Offensichtlich gilt: $osc_{R_0} u \leq 2M$, aus Korollar 1.1 folgt zudem:

$osc_{R_k} u \leq 2M_k \leq 2M(1-\delta)^k \leq 2M\theta^k$ mit $\theta = 4^{-\alpha} = \max\left(1-\delta, \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \theta^k = \left(\frac{1}{4^k}\right)^\alpha \Rightarrow osc_{R_k} u \leq 2M \left(\frac{1}{4^k}\right)^\alpha \quad \forall k \geq 0$

Seien $(x,t) \in R_0$ und $\epsilon \in (0,1]$ gegeben. Ist $(x,t) \in Z_\epsilon(0,2)$, so gilt $(x,t) \in Z_\epsilon(0,2) \subset R_l$ für ein $l \geq 0$, wobei l gegeben ist durch $\frac{1}{2^{2l+3}} < \epsilon \leq \frac{1}{2^{2l+1}}$.
Durch diese Wahl von l wird sichergestellt, dass $Z_\epsilon(0,2) \subset R_l$ (dies ist klar für $l = 0$ und für $l \geq 1$ gilt: $|x| < \frac{1}{2^{2l-1}} \to x \in B_{\frac{1}{2^{2l-1}}}(0)$ und

$-\frac{1}{2^{4l-1}} \leq -\frac{1}{2^{4l+2}} = -\left(\frac{1}{2^{2l+1}}\right)^2 \leq -\epsilon^2 < t-2 \leq 0 \to t \in \left(\frac{2^{4l}-1}{2^{4l-1}}, 2\right)$), es folgt:

$osc_{Z_\epsilon(0,2)} u \leq osc_{R_l} u \leq 2M \left(\frac{1}{4^l}\right)^\alpha \leq 2M4^{2\alpha}\left(\frac{1}{4^{l+2}}\right)^\alpha \leq 8M\left(\frac{1}{2\cdot 2^{2l+3}}\right)^\alpha \leq 8M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^\alpha$ □

Korollar 1.2 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (1.1) in Q, wobei die obigen Strukturbedingungen 1)-3) sowie die Bedingung $a^* + aM = 2l < 2$ erfüllt seien. Für $(x_0, t_0) \in Q$ sei $Z_\delta(x_0, t_0) \subset Q$, dann gilt für $\delta' \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right]$ und α gegeben durch $4^{-\alpha} = \max\left(1-\delta, \frac{1}{2}\right)$ die Abschätzung*

$$osc_{Z_{\delta'}(x_0,t_0)} u \leq 8M\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^\alpha \tag{1.10}$$

<u>Beweis:</u> O.E. sei $(x_0, t_0) = (0, 2)$, denn Translationen ändern nichts an den Strukturbedingungen. Sei $v(\tilde{x}, \tilde{t}) := u\left(\frac{2x}{\delta}, \frac{2(t-2)}{\delta^2} + 2\right)$ mit $(x, t) \in Z_\delta(0, 2)$, nach Lemma 1.1 unterscheiden sich die Strukturbedingungen von u und v (definiert auf R_0) nicht. Aus Lemma 1.3 folgt $osc_{Z_\epsilon(0,2)} v \leq 8M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^\alpha$ für alle $\epsilon \in (0, 1]$.

Für u ergibt sich damit: $osc_{Z_{\frac{\delta\epsilon}{2}}(0,2)} u \leq 8M\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^\alpha$. Ersetzt man ϵ durch $\frac{2\delta'}{\delta}$, so folgt für $\delta' \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right]$ die gewünschte Abschätzung $osc_{Z_{\delta'}(0,2)} u \leq 8M\left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^\alpha$. □

Aus Korollar 1.2 folgt insbesondere, dass $\lim_{\epsilon\to 0} osc_{Z_\epsilon(x_0,t_0)} u = 0 \quad \forall (x_0, t_0) \in Q$.
Aus dieser Tatsache erhält man die Stetigkeit von u, genauer: Es existiert ein stetiger Repräsentant von u, nämlich $\overline{u}(x) := \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{|Z_\epsilon|} \int_{Z_\epsilon} u(z)\, dz$, $\overline{u}$ stimmt f.ü. mit u überein (s.[EG,p.43]).

Satz 1.2 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (1.1) in Q, wobei die Strukturbedingungen 1)-3) sowie die Bedingung $a^* + aM < 2$ erfüllt seien. Dann ist u hölderstetig in Q' für alle $Q' \subset\subset Q$ und für ein $\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda, a, a^*, M) \in (0, 1)$ gilt:*

$$[u]_{\alpha,\frac{\alpha}{2},Q'} = \sup_{\substack{(x,t),(y,s)\in Q' \\ (x,t)\neq(y,s)}} \frac{|u(x,t) - u(y,s)|}{\sigma((x,t),(y,s))^\alpha} \leq C(n, \lambda, \Lambda, a, a^*, M, Q, Q')$$

<u>Beweis:</u> 1) Sei $Z_{9\epsilon}(x_0, t_0) \subset Q$. Zeige die Behauptung zunächst für $Q' := Z_\epsilon(x_0, t_0)$. Seien $(x, t), (y, s) \in Z_\epsilon(x_0, t_0)$ beliebig, aber fix ($(x, t) \neq (y, s)$). O.E. sei $s \leq t$, definiere $\epsilon_0 := |x - y| + |t - s|^{\frac{1}{2}} = \sigma((x, t), (y, s)) \in (0, 4\epsilon)$.
Nach Voraussetzung ist dann $(y, s) \in Z_{4\epsilon}(x, t) \subset Z_{2(4\epsilon)}(x, t) \subset Z_{9\epsilon}(x_0, t_0) \subset Q$, aus Korollar 1.2 folgt nun:

$|u(x,t)-u(y,s)| \leq osc_{Z_{\epsilon_0}(x,t)} u \leq 8M \left(\frac{\epsilon_0}{8\epsilon}\right)^{\alpha}$

$$\Rightarrow \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{\sigma\left((x,t),(y,s)\right)^{\alpha}} \leq C(n,\lambda,\Lambda,a,a^*,M,\epsilon)$$

2) Zeige die Behauptung nun für ein beliebiges $Q' \subset\subset Q$. Nach Heine-Borel existieren endlich viele Zylinder $(Z_{\epsilon_i}(\alpha_i))_{i=1,...,N}$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}^{n+1}$) mit $Q' \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} Z_{\epsilon_i}(\alpha_i)$ und $Z_{9\epsilon_i}(\alpha_i) \subset Q$ $\forall i = 1,...,N$.

Sei $\epsilon := \min\limits_{i=1,...,N} \epsilon_i$ und seien $(x,t),(y,s) \in Q'$.

<u>1.Fall:</u> $\sigma((x,t),(y,s)) < \frac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \exists\, i \in \{1,...,N\}$, so dass $(x,t),(y,s) \in Z_{\epsilon_i}(\alpha_i)$. Aus 1) folgt dann:

$$\frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{\sigma((x,t),(y,s))^{\alpha}} \leq C$$

<u>2.Fall:</u> $\sigma((x,t),(y,s)) \geq \frac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{\sigma((x,t),(y,s))^{\alpha}} \leq \frac{2M}{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{\alpha}} \leq C$

Somit gilt für alle $Q' \subset\subset Q$:

$$\sup_{\substack{(x,t),(y,s)\in Q' \\ (x,t)\neq(y,s)}} \frac{|u(x,t)-u(y,s)|}{\sigma((x,t),(y,s))^{\alpha}} \leq C(n,\lambda,\Lambda,Q,Q',a,a^*,M)$$

$\square$

Kapitel 2

A-priori Abschätzungen harmonischer Abbildungen

In diesem Kapitel werden a-priori Abschätzungen für harmonische Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten im Inneren, am festem Rand und am halbfreiem Rand mit der von Caffarelli [CA] entwickelten Methode bewiesen. Die a-priori Abschätzung im Inneren stammt von Hildebrandt-Jost-Widman [HJW, Theorem 4] und wurde später nochmals von Giaquinta-Hildebrandt [GH, Theorem 5] bewiesen, in diesem Artikel findet sich auch die entsprechende Abschätzung am Rand [GH, Proposition 7]. Die Hölderstetigkeit am halbfreiem Rand wurde von Baldes [BA1] gezeigt. Die Beweise in den oben zitierten Arbeiten verwenden allesamt Green'sche Funktionen, mit der Caffarelli-Methode ist es nun möglich, diese a-priori Abschätzungen ohne Green'sche Funktionen herzuleiten. Ein wesentlicher Bestandteil der hier vorgestellten Beweise ist eine schwache Harnack-Ungleichung für Superlösungen (die aber ohnehin schon in den Beweisen von Giaquinta und Hildebrandt verwendet wird). Mit Hilfe dieser a-priori Abschätzungen und der a-priori Abschätzungen des Gradienten (die bereits in [GH, Kapitel 7] ohne Green'sche Funktionen bewiesen wurden) sowie Anwendung der Leray-Schauder Theorie kann ein Theorem über die Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für harmonische Abbildungen von $\mathcal{H}$ (kompakte n-dim. Riem. Mannigfaltigkeit) nach $\mathcal{M}$ (N-dim. Riem. Mannigfaltigkeit ohne Rand) gezeigt werden: ($\mathbf{B}_M(Q)$ sei ein regulärer Ball, s. Def 2.2)

Satz 2.1 *$\mathcal{H}$ sei eine kompakte Riem. Mannigfaltigkeit, $\partial\mathcal{H} \neq \emptyset$, $\Theta : \partial\mathcal{H} \to \mathcal{M}$*

sei eine vorgegebene C^1-Abbildung, so dass $\Theta(\partial\mathcal{H}) \subset \boldsymbol{B}_M(Q), Q \in \mathcal{M}$. Dann existiert eine stetige harmonische Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$, so dass gilt: $U|_{\partial\mathcal{H}} = \Theta$ sowie $U(\mathcal{H}) \subset \boldsymbol{B}_M(Q)$.

Dieser Satz wurde erstmals in [HKW] mit direkten Methoden der Variationsrechnung bewiesen, da keine geeigneten a-priori Abschätzungen zur Verfügung standen, um die Leray-Schauder Theorie anzuwenden. Mit den a-priori Abschätzungen aus [GH] war es möglich, obigen Satz auch mittels der Leray-Schauder Theorie zu zeigen. Für den Fall einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ mit nicht-positiver Schnittkrümmung stammt dieses Resultat bereits von Hamilton [HA].

2.1 Einführung in die Theorie harmonischer Abbildungen

$\mathcal{H}$ sei eine kompakte, zusammenhängende n-dim. Riemannsche Mannigfaltigkeit mit regulärem Rand, $\mathcal{M}$ sei eine N-dim. vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit leerem Rand. Die Metrik von $\mathcal{H}$ bzgl. lokaler Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$ sei gegeben durch $(\gamma_{\alpha\beta})$, die Metrik von $\mathcal{M}$ bzgl. lokaler Koordinaten $v = (v^1, \dots, v^N)$ werde mit (g_{ij}) bezeichnet. Die inversen Metriken von $(\gamma_{\alpha\beta})$ bzw. (g_{ij}) seien mit $(\gamma^{\alpha\beta})$ bzw. (g^{ij}) bezeichnet, ferner sei $\gamma := det(\gamma_{\alpha\beta})$. Die Christoffel-Symbole für (g_{ik}) sind durch

$$\Gamma^l_{ik} = g^{lj}\Gamma_{ijk}, \qquad \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{jk,i} - g_{ik,j} + g_{ij,k})$$

gegeben. Sei

$$\mathbf{B}_M(Q) = \{P \in \mathcal{M}; dist_{\mathcal{M}}(P,Q) \leq M\}$$

ein geodätischer Ball in $\mathcal{M}$ mit Radius M und Mittelpunkt Q.

Definition 2.1 *Sei $p \in \mathcal{M}$ und $\gamma : [0,\infty) \to \mathcal{M}$ eine Geodäte in Richtung t mit $\gamma(0) = p$. Diese Geodäte ist entweder beliebig lang Kürzeste oder es gibt einen eindeutig bestimmten Punkt $q(t,p)$ bis zu dem die Geodäte Kürzeste ist, dieser Punkt $q(t,p)$ heißt Schnittortpunkt von p in Richtung t. Der Schnittort C(p) von p ist die Vereinigung der Schnittortpunkte von p entlang aller Geodäten, die in p starten.*

Definition 2.2 *$\boldsymbol{B}_M(Q)$ heißt Regulärer Ball in $\mathcal{M}$, falls*

i) $\sqrt{\kappa}M < \frac{\pi}{2}$

ii) $C(Q) \cap \boldsymbol{B}_M(Q) = \emptyset$

wobei $\kappa = max\{0, \sup\limits_{\boldsymbol{B}_M(Q)} \boldsymbol{K}\}, \omega = min\{0, \inf\limits_{\boldsymbol{B}_M(Q)} \boldsymbol{K}\}$ *eine obere bzw. untere Grenze an die Schnittkrümmung* $\boldsymbol{K}$ *in* $\boldsymbol{B}_M(Q)$ *bezeichnen.*

Beispiele: i) Ist $\mathcal{M}$ einfach zusammenhängend und $\mathbf{K} \leq 0$, so ist jeder Ball in $\mathcal{M}$ regulär, (Theorem von Hadamard, s. [doC,p.149])

ii) $\mathcal{M} = S^N$, $\mathcal{N}$ sei die offene obere Hemisphäre der S^N. Jeder Ball in $\mathcal{N}$ ist ein regulärer Ball.

iii) $\mathcal{M}$ sei eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit, N sei gerade und es gelte $0 < \mathbf{K} \leq \kappa$. Dann ist jeder Ball in $\mathcal{M}$ mit Radius $M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ ein regulärer Ball (s. [GKM, p.227], dort wird gezeigt, dass der Injektivitätsradius von $\mathcal{M} \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ ist, daraus folgt, dass $\mathbf{B}_M(Q) \cap C(Q) = \emptyset$).

iv) $\mathcal{M}$ sei eine kompakte, zusammenhängende, nicht-orientierbare Mannigfaltigkeit, N sei gerade und es gelte $0 < \mathbf{K} \leq \kappa$. Dann ist jeder Ball in $\mathcal{M}$ mit Radius $M < \frac{\pi}{4\sqrt{\kappa}}$ ein regulärer Ball (s. [GKM, p.229/230]).

v) $\mathcal{M}$ sei eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit $0 < \frac{\kappa}{4} < \mathbf{K} \leq \kappa$. Dann ist jeder Ball in $\mathcal{M}$ mit Radius $M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ ein regulärer Ball (s. [GKM, p.254]).

Ist $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ eine C^1-Abbildung, so definiere eine Energiedichte

$$e(v) = \frac{1}{2}\gamma^{\alpha\beta}(x)g_{ik}(v)D_\alpha v^i D_\beta v^k$$

sowie eine Energie

$$E(v) = \int\limits_{\mathcal{H}} e(v)\, d\mathcal{H}$$

wobei $d\mathcal{H} = \sqrt{\gamma}dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Betrachte kritische Punkte des Energiefunktionals, also Punkte v mit

$\frac{d}{d\epsilon}E(v+\epsilon\varphi)|_{\epsilon=0} = 0 \ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathcal{H},\mathcal{M})$. Diese Punkte sind durch die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}D_\alpha\{\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}D_\beta v^l\} + \gamma^{\alpha\beta}\Gamma^l_{ik}(v)D_\alpha v^i D_\beta v^k = 0 \qquad (l = 1,\dots,N) \tag{2.1}$$

charakterisiert. (2.1) stellt ein elliptisches System dar, verwendet man den Laplace-Beltrami-Operator $\Delta_\mathcal{H} = \gamma^{-1/2}D_\alpha\{\sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}D_\beta\}$, so schreibt sich (2.1) als

$$\Delta_\mathcal{H}v^l + \Gamma^l_{ik}(v)\gamma^{\alpha\beta}D_\alpha v^i D_\beta v^k = 0 \qquad (l = 1,\dots,N) \tag{2.2}$$

Ist $v \in C^2$ Lösung dieses Systems, so heißt v bzw. U harmonisch.
Es gebe eine Karte $\chi : \Omega \to B_{4d}$, die eine Teilmenge Ω von $\mathcal{H}$ homöomorph auf $B_{4d} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 4d\}$ abbildet. Die Komponenten $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ der Metrik von $\mathcal{H}$ bzgl. lokaler Koordinaten x seien durch

$$\lambda|\xi|^2 \le \gamma_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \le \mu|\xi|^2 \qquad \forall x \in B_{4d}\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

abschätzbar, wobei $0 < \lambda \le \mu$.
$U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ sei nun eine harmonische Abbildung, die $\Omega \subset \mathcal{H}$ in einen regulären Ball $\mathbf{B}_M(Q) \subset \mathcal{M}$ abbildet, für jede Karte $\psi : \mathbf{B}_M(Q) \to \mathbb{R}^N$ kann man eine lokale Darstellung $v(x) = (v^1(x),\dots,v^N(x))$ von U auf B_{4d} durch $v = \psi\circ U\circ\chi^{-1}$ definieren.
Setze nun $a^{\alpha\beta} := \sqrt{\gamma}\gamma^{\alpha\beta}$, $f^l(v) := a^{\alpha\beta}\Gamma^l_{ik}(v)D_\alpha v^i D_\beta v^k$, mit diesen Bezeichnungen lesen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen (2.1) bzw. (2.2) als

$$-D_\beta\{a^{\alpha\beta}D_\alpha v^l\} = f^l(v) \qquad (l = 1,\dots,N) \tag{2.4}$$

wobei die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ gleichmäßig elliptisch sind:

$$\lambda^*|\xi|^2 \le a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \le \mu^*|\xi|^2 \qquad \forall x \in B_{4d}\ \forall\xi \in \mathbb{R}^n$$

mit $\lambda^* = \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{\mu}$, $\mu^* = \frac{\mu^{\frac{n}{2}}}{\lambda}$.

Ist v eine H^1_2-Funktion, die die Euler-Lagrange-Gleichungen des Energie-Funktionals im schwachen Sinne erfüllt (wobei ein kritischer Punkt in diesem Fall durch $\frac{d}{d\epsilon}E(\exp_v(\epsilon\Phi))|_{\epsilon=0} = 0$ für alle Vektorfelder Φ längs v mit kompaktem Träger gegeben ist, d.h. $\Phi(x) \in T_{v(x)}\mathcal{M}\ \ \forall x \in \mathcal{H}$ und supp $\Phi \subset\subset \mathcal{H}$), d.h. gilt

$$\int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta}D_\alpha v^i D_\beta\varphi^i\,dx = \int\limits_{B_{4d}} f^l(v)\varphi^l\,dx \tag{2.5}$$

für alle $\varphi \in H^1_{2,0} \cap L_\infty(B_{4d}, \mathbb{R}^N)$, so heißt v eine schwache harmonische Abbildung. Die in den nächsten Abschnitten hergeleiteten a-priori Abschätzungen gelten sowohl für harmonische Abbildungen im klassischen Sinne als auch für schwach harmonische Abbildungen.

Beispiele harmonischer Abbildungen:

1) Harmonische Funktionen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

2) Im Fall $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, ist $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ harmonisch, falls in lokalen Koordinaten gilt: $\ddot{v} + v|\dot{v}|^2 = 0$, also sind in diesem Fall die harmonischen Abbildungen genau die Geodäten.

3) Die identische Abbildung $id : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ ist harmonisch.

Für weitere Beispiele harmonischer Abbildungen s. [JO2,p.122-123].

Ein fundamentales Hilfsmittel für den Beweis der a-priori Abschätzungen ist folgendes Lemma von Jost [JO1]:

Lemma 2.1 *Sei $\boldsymbol{B}_M(Q)$ ein regulärer Ball in $\mathcal{M}$. Dann gibt es zu je zwei Punkten aus $\boldsymbol{B}_M(Q)$ genau eine ganz in $\boldsymbol{B}_M(Q)$ verlaufende geodätische Verbindung, die unter allen Verbindungskurven in $\boldsymbol{B}_M(Q)$ die kürzeste ist und außerdem frei von Paaren konjugierter Punkte ist.*

Somit ist die Exponentialabbildung $\exp_Q : \mathbf{B}_M(Q) \to \mathcal{M}$ ein Diffeomorphismus und auf $\mathbf{B}_M(Q)$ können Normalkoordinaten mit einem beliebigen Mittelpunkt $P \in \mathbf{B}_M(Q)$ eingeführt werden. $\psi : \mathbf{B}_M(Q) \to \mathbb{R}^N$ sei eine solche Karte mit Normalkoordinaten $v = (v^1, \ldots, v^N)$, P hat dann die Koordinaten $0 = (0, \ldots, 0)$; hat $P' \in \mathbf{B}_M(Q)$ die Koordinaten v, so gilt:

$$dist_{\mathcal{M}}(P, P') = |v| = \{v^i v^i\}^{1/2} \leq 2M < \tfrac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel sind die von Hildebrandt und Kaul [HK] hergeleiteten Rauch'schen Vergleichssätze, mit denen die Christoffelsymbole $\Gamma^l_{ik} \cdot v^l$ sowie die Metrik g_{ik} durch die Funktionen a_ν und b_ν abgeschätzt werden können. Dabei sind a_ν und b_ν wie folgt definiert:

$$a_\nu(t) = \begin{cases} t\sqrt{\nu}\, \cot\left(t\sqrt{\nu}\right), & \nu > 0, 0 \leq t < \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \\ t\sqrt{-\nu}\, \coth\left(t\sqrt{-\nu}\right), & \nu \leq 0, 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

$$b_\nu(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(t\sqrt{\nu}\right)}{t\sqrt{\nu}}, & \nu > 0, 0 \leq t < \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \\ \frac{\sinh\left(t\sqrt{-\nu}\right)}{t\sqrt{-\nu}}, & \nu \leq 0, 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Wir verwenden die Konventionen $1 = 0 \cdot \cot 0 = 0 \cdot \coth 0 = \frac{\sin 0}{0} = \frac{\sinh 0}{0}$ sowie $0 = 0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty)$.

Lemma 2.2 *Sei $\mathcal{M}$ eine vollständige N-dim. Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\boldsymbol{B}_M(Q)$ ein regulärer Ball in $\mathcal{M}$, $v = (v^1, \ldots, v^N)$ seien Normalkoordinaten in $\boldsymbol{B}_M(Q)$. Dann gelten die Abschätzungen*

$$\{\delta_{ik} - a_\omega(|v|)\, g_{ik}(v)\}\, \xi^i\xi^k \leq \Gamma^l_{ik}(v) v^l \xi^i\xi^k \leq \{\delta_{ik} - a_\kappa(|v|)\, g_{ik}(v)\}\, \xi^i\xi^k \tag{2.6}$$

$$b^2_\kappa(|v|)\, \xi^i\xi^i \leq g_{ik}(v)\xi^i\xi^k \leq b^2_\omega(|v|)\, \xi^i\xi^i \tag{2.7}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$.

<u>Beweis:</u> s. [HK, p.212-214].

Definiere nun folgende Funktionen auf B_{4d}:
$\mathcal{L}(v) = a^{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta v^i, \quad \mathcal{E}(v) = a^{\alpha\beta} g_{ik}(v) D_\alpha v^i D_\beta v^k, \quad \mathcal{P}(v) = \mathcal{L}(v) - v^l f^l(v)$
Aus Abschätzung (2.6) folgt jetzt:

$$\Gamma^l_{ik}(v) v^l \xi^i \xi^k \leq \{\delta_{ik} - a_\kappa(|v|)\, g_{ik}(v)\}\, \xi^i\xi^k$$

$$\Rightarrow \qquad a_\kappa(|v|)\, g_{ik}(v)\xi^i\xi^k \leq \delta_{ik}\xi^i\xi^k - \Gamma^l_{ik}(v) v^l \xi^i\xi^k$$

$$\Rightarrow \quad a_\kappa(|v|)\, a^{\alpha\beta} g_{ik}(v) D_\alpha v^i D_\beta v^k \leq a^{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta v^i - v^l a^{\alpha\beta} \Gamma^l_{ik}(v) D_\alpha v^i D_\beta v^k,$$

es gilt also:

$$a_\kappa(|v|)\, \mathcal{E}(v) \leq \mathcal{P}(v)$$

Analog zeigt man:

$$\mathcal{P}(v) \leq a_\omega(|v|)\, \mathcal{E}(v)$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$a_\kappa(|v|)\, \mathcal{E}(v) \leq \mathcal{P}(v) \leq a_\omega(|v|)\, \mathcal{E}(v) \tag{2.8}$$

Werden Normalkoordinaten auf $\mathbf{B}_M(Q)$ mit Mittelpunkt in Q benutzt, so bezeichne diese Normalkoordinaten mit $u = (u^1, \ldots, u^N)$, für einen bel. Punkt $Q' \in \mathbf{B}_M(Q)$ gilt dann die Abschätzung $dist_{\mathcal{M}}(Q, Q') = |u| \leq M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$.
Da die Funktion a_κ monoton fallend ist, folgt:

$$a_\kappa(|u|) \geq a_\kappa(M) > a_\kappa\left(\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}\right) = 0 \tag{2.9}$$

2.2 Innere Regularität

In diesem Abschnitt werden die inneren a-priori-Abschätzungen für harmonische Abbildungen von Giaquinta-Hildebrandt [GH, Kapitel 3] unter Verwendung der Beweisidee von Caffarelli [CA] zur Regularität elliptischer Systeme gezeigt. Es werden also keine Green'schen Funktionen verwendet, an einigen Stellen werden auch Ideen von Meier [ME] benutzt. Sei jetzt $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ eine harmonische Abbildung, so dass $\Omega \subset \mathcal{H}$ in einen regulären Ball $\mathbf{B}_M(Q) \subset \mathcal{M}$ abgebildet wird. Unter Verwendung der Notationen aus Abschnitt 2.1 wird folgender Satz bewiesen:

Satz 2.2 *Sei $u = u(x)$ die Darstellung einer harmonischen Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ bezüglich Normalkoordinaten mit Mittelpunkt in Q. Dann existiert eine Konstante $C = C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)$ und ein $\alpha = \alpha(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa) > 0$ mit der Eigenschaft, dass für jeden Ball $B_{d'} \subset B_{4d}$ gilt*

$$[u]_{\alpha,\overline{B_{d'}}} = \sup_{\substack{x,y \in \overline{B_{d'}(x_0)} \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq C(4d - d')^{-\alpha}$$

<u>Bemerkungen:</u>

1) Satz 2.2 ist optimal in dem Sinne, dass in der Definition eines regulären Balls die Bedingung $M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ für $n \geq 3$ nicht zu $M \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ abgeschwächt werden kann. In diesem Fall existieren unstetige schwache harmonische Abbildungen $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M} = S^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$, wie ein Beispiel von Hildebrandt-Kaul-Widman [HKW, p.14-15] zeigt.

2) Im Fall $n = 2$ konnte Hélein in [HE] zeigen, dass jede schwache harmonische Abbildung hölderstetig ist.

Zum Beweis der a-priori Abschätzung wird zunächst folgendes Lemma benötigt, welches im euklidischen Fall von Meier [ME, p.5] stammt.

Lemma 2.3 *Sei $v = (v^1, \ldots, v^N)$ die Darstellung einer harmonischen Abbildung in Normalkoordinaten auf dem regulären Ball $\boldsymbol{B}_M(Q)$ mit einem Mittelpunkt $P \in \boldsymbol{B}_M(Q)$, so dass $|v| < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Dann gilt:*

$$-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta |v|^2\right) \leq 0$$

Beweis: Teste die schwache Formulierung $\int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta}(x) D_\alpha v^i D_\beta \phi^i \, dx = \int\limits_{B_{4d}} f^l \phi^l \, dx$ mit $\phi = \eta v$, wobei $\eta \in C_c^\infty(B_{4d}, \mathbb{R}), \eta \geq 0$. Damit ergibt sich:

$$\int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta \eta v^i \, dx + \int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta v^i \eta \, dx = \int\limits_{B_{4d}} f^l v^l \eta \, dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta} D_\alpha v^i D_\beta v^i \eta \, dx - \int\limits_{B_{4d}} f^l v^l \eta \, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta} D_\alpha |v|^2 D_\beta \eta \, dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_{B_{4d}} \mathcal{P}(v) \eta \, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta} D_\alpha |v|^2 D_\beta \eta \, dx$$

Mit (2.8) folgt nun $\int\limits_{B_{4d}} a_\kappa(|v|) \, \mathcal{E}(v) \eta \, dx \leq -\frac{1}{2} \int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta} D_\alpha |v|^2 D_\beta \eta \, dx$

Da $a_\kappa(|v|) \geq 0$ und $\mathcal{E}(v)\eta \geq 0$ erhält man $\int\limits_{B_{4d}} a^{\alpha\beta} D_\alpha |v|^2 D_\beta \eta \, dx \leq 0$, also die Behauptung. □

Die beiden folgenden Resultate aus der Theorie elliptischer Differentialgleichungen sind bei Meier [ME, p.5 bzw. p.42] angegeben.

Lemma 2.4 *Sei $v \in H_2^1 \cap L_\infty(B_R, \mathbb{R})$ eine Lösung von $-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta v\right) \leq 0$ in $B_R \subset \mathbb{R}^n$. Für fast alle $x \in B_R$ und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gelte $\lambda|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq \mu|\xi|^2$ mit $0 < \lambda \leq \mu$. Dann existiert eine Konstante $\delta_0 = \delta_0(n, \lambda, \mu), 0 < \delta_0 < 1$, so dass gilt:*

$$\sup_{B_{\frac{R}{4}}} v \leq (1 - \delta_0) \sup_{B_R} v + \delta_0 \fint_{B_{\frac{R}{4}}} v \, dx \tag{2.10}$$

Beweis: Für die nicht-negative Superlösung $u := \sup\limits_{B_R} v - v$ von $-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u\right) = 0$ in B_R folgt mit der schwachen Harnack-Ungleichung ([GT, Thm. 8.18]):

$$R^{-n} \int\limits_{B_{\frac{R}{4}}} \left(\sup_{B_R} v - v \right) dx \leq C(n, \lambda, \mu) \inf_{B_{\frac{R}{4}}} \left(\sup_{B_R} v - v \right)$$

$$\Rightarrow \quad \omega_n 4^{-n} \sup_{B_R} v - \omega_n 4^{-n} \fint_{B_{\frac{R}{4}}} v \, dx \leq C \left(\sup_{B_R} v - \sup_{B_{\frac{R}{4}}} v \right)$$

Mit $\delta_0 := \frac{\omega_n}{C4^n}$ folgt jetzt die Behauptung. $\square$

Lemma 2.5 *Sei $v \in H_2^1 \cap L_\infty(B_R, \mathbb{R})$ eine Lösung von $-D_\alpha\left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta v\right) \leq 0$ in $B_R \subset \mathbb{R}^n$, $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{10}\right)$. Wie in Lemma 2.4 gelte $\lambda|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq \mu|\xi|^2$. Dann gilt für $s = 4^{-m}$, wobei $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $(1-\delta_0)^m \leq \epsilon^2$ sei (δ_0 die Konstante aus Lemma 2.4), die Abschätzung*

$$\sup_{B_{sR}} v \leq 2\epsilon^2 \sup_{B_R} v + (1-\epsilon^2) \fint_{B_{\overline{R}}} v\,dx \tag{2.11}$$

mit einem $\overline{R} \in \left[sR, \frac{R}{4}\right]$.

<u>Beweis:</u> Sei $m \in \mathbb{N}$. Durch Iteration von (2.10) folgt:

$$\sup_{B_{4^{-m}R}} v \leq (1-\delta_0)^m \sup_{B_R} v + \{1-(1-\delta_0)^m\} \sum_{i=1}^m t_i \fint_{B_{4^{-i}R}} v\,dx$$

wobei $t_i = \{1-(1-\delta_0)^m\}^{-1}\delta_0(1-\delta_0)^{m-i} > 0$, beachte: $\sum_{i=1}^m t_i = 1$.

Sei $\overline{v}_{\overline{R}} := \max_{i=1,\ldots,m} \fint_{B_{4^{-i}R}} v\,dx$ und m die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $(1-\delta_0)^m \leq \epsilon^2$. Setze $s := 4^{-m}$, es folgt:

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{sR}} v &\leq \epsilon^2 \sup_{B_R} v + \{1-(1-\delta_0)^m\}\overline{v}_{\overline{R}} \\
&\leq \epsilon^2 \sup_{B_R} v + \left\{1-(1-\delta_0)\epsilon^2\right\} \overline{v}_{\overline{R}} \\
&\leq \epsilon^2 \sup_{B_R} v + \delta_0\epsilon^2 \sup_{B_R} v + (1-\epsilon^2)\,\overline{v}_{\overline{R}} \\
&\leq 2\epsilon^2 \sup_{B_R} v + (1-\epsilon^2)\,\overline{v}_{\overline{R}}
\end{aligned}$$
$\square$

<u>Bemerkung:</u> Der von Meier angegebene Beweis von Lemma 2.5 ([ME,p.43]) enthält einen Vorzeichenfehler, mit dem von ihm angegebenen L folgt $s \leq \epsilon^L$ und nicht $s \geq \epsilon^L$.

Das folgende Resultat ist im Beweis von [GH, Proposition 1] enthalten.

Lemma 2.6 *Sei u die Darstellung der harmonischen Abbildung U in Normalkoordinaten bzgl. einer Normalkarte $\psi : \boldsymbol{B}_M(Q) \to \mathbb{R}^N$, es gelte: $|u| \leq M$.*

Dann existiert ein $C = C(n, \lambda, \mu, M, \kappa) > 0$, so dass für alle $B_R(x_0) \subset B_{4d}$ mit $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}$ gilt:

$$R^{2-n} \int\limits_{B_R(x_0)} \mathcal{E}(u)\, dx \leq C \left[M^2(4R) - M^2(R)\right] \tag{2.12}$$

wobei $M(R) := \sup\limits_{B_R(x_0)} |u|$.

<u>Beweis:</u> Wähle als Testvektor in der schwachen Formulierung (2.5) die Abbildung $\varphi = \eta u$, $\eta \in H^1_{2,0} \cap L_\infty \left(B_{4R}(x_0), \mathbb{R}\right), \eta \geq 0$, wobei $4R \leq 4d - |x_0|$. Damit folgt:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha |u|^2 D_\beta \eta\, dx + \int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha u^i D_\beta u^i \eta\, dx = \int\limits_{B_{4R}(x_0)} f^l(u) u^l \eta\, dx$$

bzw.

$$2 \int\limits_{B_{4R}(x_0)} \left[a^{\alpha\beta} D_\alpha u^i D_\beta u^i - f^l u^l\right] \eta\, dx = - \int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha |u|^2 D_\beta \eta\, dx$$

Aus den Abschätzungen (2.8) und (2.9) folgt nun

$$2a_\kappa(M) \int\limits_{B_{4R}(x_0)} \mathcal{E}(u)\, \eta\, dx \leq - \int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha |u|^2 D_\beta \eta\, dx \tag{2.13}$$

Mit $M(t) := \sup\limits_{B_t(x_0)} |u|$ $(t \leq 4d - |x_0|)$ und $z := M^2(4R) - |u|^2$ ergibt sich mit (2.13)

$$0 \leq \int\limits_{B_{4R}(x_0)} \mathcal{E}(u)\, \eta\, dx \leq \frac{1}{2a_\kappa(M)} \int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha z D_\beta \eta\, dx \tag{2.14}$$

Somit ist z eine nicht-negative Superlösung von $-D_\beta \left(a^{\alpha\beta} D_\alpha\right) = 0$ in $B_{4R}(x_0)$, die schwache Harnack-Ungleichung [GT, Thm. 8.18] liefert dann die Existenz einer Konstanten $C = C(n, \lambda, \mu, M, \kappa) > 0$ mit der Eigenschaft

$$R^{-n} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} z\, dx \leq C \inf_{B_R(x_0)} z \tag{2.15}$$

Nun sei $w \in H^1_{2,0}(B_{2R}(x_0), \mathbb{R})$ eine Lösung von

$$\int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha \varphi D_\beta w\, dx = R^{-2} \int\limits_{B_{4R}(x_0)} \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in H^1_{2,0} \cap L_\infty(B_{4R}(x_0), \mathbb{R}) \tag{2.16}$$

d.h. w erfüllt $-Lw = \frac{1}{R^2} \geq 0$, aus dem schwachen Minimumprinzip [GT, Thm. 8.1] folgt: $\inf\limits_{B_{4R}(x_0)} w \geq 0$. Da $w \neq 0$ (w löst $-Lw = R^{-2}$) erhält man wiederum aus der schwachen Harnack-Ungleichung die Abschätzung

$$0 < R^{-n} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} w\,dx \leq C \inf_{B_R(x_0)} w$$

Also existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit $0 < C_1 \leq w$ in $B_R(x_0)$, ferner gibt es eine Konstante $C_2 > 0$, so dass in $B_{4R}(x_0)$ gilt: $0 \leq w \leq C_2$ (s. [HW1, Lemma 2.1]). Teste (2.16) mit $\varphi = wz$, dies liefert:

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha z D_\beta w^2\,dx + \int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha w D_\beta w z\,dx = R^{-2} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} zw\,dx$$

Da $w \leq C_2, z \geq 0$ folgt aus der Elliptizität der $a^{\alpha\beta}$, dass der zweite Term auf der linken Seite nicht-negativ ist. Mit Hilfe von (2.15) erhält man jetzt

$$\int\limits_{B_{4R}(x_0)} a^{\alpha\beta} D_\alpha z D_\beta w^2\,dx \leq CR^{-2} \int\limits_{B_{2R}(x_0)} z\,dx \leq CR^{n-2} \inf_{B_R(x_0)} z \tag{2.17}$$

Da $\inf\limits_{B_R(x_0)} z = M^2(4R) - M^2(R)$ und $0 < C_1^2 \leq w^2 (= \eta)$ in $B_R(x_0)$ folgt die Behauptung jetzt mit (2.14). □

Wähle $J \in \mathbb{N}$ so, dass $M(1 + J^{-1}) < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, setze $K := \sqrt{2 + \frac{b_\omega^2(M)}{4}}$ und $\epsilon > 0$ sei gegeben durch $\epsilon := \frac{1}{2KJ}$, $s = 4^{-m}$ sei die zu $\epsilon = \frac{1}{2KJ}$ gehörende Konstante aus Lemma 2.5, damit ergibt sich (s. auch [ME,p.44])

Korollar 2.1 *u sei die Darstellung von U in Normalkoordinaten, es gelte $|u| \leq M$. Dann existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $R_0 = 4^{-i_0} R$ gilt:*

$$\fint\limits_{B_{R_0}} |u - \overline{u}_{R_0}|^2\,dx \leq M^2 \epsilon^4 s^{nJ} \tag{2.18}$$

wobei $\overline{u}_{R_0} = \fint\limits_{B_{R_0}} u\,dx.$

<u>Beweis:</u> Da $0 \leq |u| \leq M$ folgt: $0 < b_\kappa^2(M) \leq b_\kappa^2(|u|) \leq 1$. Daher existiert eine Konstante $C = C(n, \lambda, \mu, M, \kappa) > 0$ mit der Eigenschaft: $C \leq \lambda^* b_\kappa^2(|u|)$. Mit dieser Abschätzung, mit (2.7), der Elliptizitätsbedingung

$\lambda^*|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$ und mit Lemma 2.6 folgt nun:

$$CR^{2-n} \int\limits_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq R^{2-n} \int\limits_{B_R(x_0)} \lambda^* b_\kappa^2\left(|u|\right)|\nabla u|^2\, dx$$

$$\leq R^{2-n} \int\limits_{B_R(x_0)} a^{\alpha\beta} g_{ik}(u) D_\alpha u^i D_\beta u^k\, dx \leq C\left[M^2(4R) - M^2(R)\right], \text{ also:}$$

$$R^{2-n} \int\limits_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq C(n,\lambda,\mu,M,\kappa)\left[M^2(4R) - M^2(R)\right] \tag{2.19}$$

Mit der Poincaré-Ungleichung folgt jetzt weiter: $\displaystyle\fint\limits_{B_R(x_0)}|u-\overline{u}_R|^2\, dx \leq C\left[M^2(4R) - M^2(R)\right]$

bzw. für $R_0 = 4^{-i_0}R$ ($i_0 \in \mathbb{N}$ bel.) ergibt sich:

$$\fint\limits_{B_{R_0}}|u - \overline{u}_{R_0}|^2\, dx \leq C\left[M^2\left(4^{-i_0+1}R\right) - M^2\left(4^{-i_0}R\right)\right]$$

Mit $p := \left[\frac{C}{\epsilon^4 s^{nJ}}\right] + 1$ erhalten wir:

$$M^2 \geq M^2(R) \geq M^2(R) - M^2\left(4^{-p}R\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(M^2\left(4^{-i+1}R\right) - M^2\left(4^{-i}R\right)\right)$$

$$\geq p\left[M^2\left(4^{-i_0+1}R\right) - M^2\left(4^{-i_0}R\right)\right] \qquad \text{für ein } i_0 \in \{1,\ldots,p\}$$

$$\Rightarrow \fint\limits_{B_{R_0}}|u - \overline{u}_{R_0}|^2\, dx \leq CM^2\frac{1}{p} \leq M^2\epsilon^4 s^{nJ} \qquad \square$$

Folgendes Lemma wird im Beweis von Satz 2.2 an mehreren Stellen benötigt werden:

Lemma 2.7 *Seien P_1, P_2 zwei Punkte in $\boldsymbol{B}_M(Q)$ mit den Koordinaten p_1 und p_2. Dann gelten die Abschätzungen*

$$b_k(M)|p_1 - p_2| \leq dist_{\mathcal{M}}(P_1,P_2) \leq b_\omega(M)|p_1 - p_2|$$

Beweis: Betrachte die Verbindungsstrecke

$$C(t) = \exp_Q((1-t)p_1 + tp_2) =: \exp_Q(c(t)) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Dann gilt: $\displaystyle dist_{\mathcal{M}}(P_1,P_2) \leq \int\limits_0^1 \sqrt{g_{ik}(c(t))\dot{c}^i(t)\dot{c}^k(t)}\, dt$

$$\leq \int_0^1 b_\omega(|c(t)|)|\dot{c}(t)|\,dt \qquad \text{(nach (2.7))}$$
$$\leq b_\omega(M)|p_1 - p_2| \qquad (b_w \text{ ist monoton steigend})$$

Sei $C_1(t) = \exp_Q(c_1(t))$ $(0 \leq t \leq 1)$ die ganz in $\mathbf{B}_M(Q)$ verlaufende Geodäte der Länge $dist_{\mathcal{M}}(P_1, P_2)$, welche P_1 und P_2 verbindet (eine solche Geodäte existiert nach Lemma 2.1). Dann ist $c_1(0) = p_1$ und $c_1(1) = p_2$. Um die Abschätzung von $dist_{\mathcal{M}}(P_1, P_2)$ nach unten zu zeigen, geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned} dist_{\mathcal{M}}(P_1, P_2) &= \int_0^1 \sqrt{g_{ik}(c_1(t))\dot{c}_1^i(t)\dot{c}_1^k(t)}\,dt \\ &\geq \int_0^1 b_\kappa(|c_1(t)|)|\dot{c}_1(t)|\,dt \qquad \text{(nach (2.7))} \\ &\geq b_\kappa(M)\left|\int_0^1 \dot{c}_1(t)\,dt\right| \qquad (b_\kappa \text{ ist monoton fallend}) \\ &= b_\kappa(M)|p_1 - p_2| \end{aligned}$$

□

<u>Beweis von Satz 2.2</u>

Für $0 \leq j \leq J$ setze $R_j = s^j R_0, \tau_j = \frac{j}{J}\overline{u}_{R_0}$, $P_j = \exp_Q(\tau_j)$, d.h. P_j ist derjenige Punkt in $\mathbf{B}_M(Q)$, der unter der Exponentialabbildung um Q dem Punkt τ_j entspricht.

$v^{(j)}$ sei die Darstellung von U bzgl. Normalkoordinaten um P_j. Ferner sei $M_0 := M, M_j = \left(\frac{1}{J} + 1 - \frac{j}{J}\right) M$ für $j = 1, \ldots, J \to M_j = \frac{J+1-j}{J} M \leq M$.

Zeige nun mit vollständiger Induktion, dass in B_{R_j} gilt:

$$|v^{(j)}| \leq M_j \tag{2.20}$$

Der Induktionsanfang ist klar ($P_0 = Q$), Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für den Index $j-1$, dann folgt:

$$\begin{aligned} |v^{(j)}| = dist_{\mathcal{M}}(U, P_j) &\leq dist_{\mathcal{M}}(U, P_{j-1}) + dist_{\mathcal{M}}(P_{j-1}, P_j) \\ &= \left|v^{(j-1)}\right| + dist_{\mathcal{M}}(P_{j-1}, P_j) \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $\left|v^{(j-1)}\right| \leq M_{j-1}$ in $B_{R_{j-1}}$.

Da P_j und P_{j-1} (mit Koordinaten τ_j und τ_{j-1}) beide auf der Geodäten liegen, die Q und P_J verbindet, gilt ferner $dist_{\mathcal{M}}(P_{j-1}, P_j) = |\tau_{j-1} - \tau_j| = \frac{1}{J}|\overline{u}_{R_0}|$. Somit folgt also

$$\left|v^{(j)}\right| \leq M_{j-1} + \frac{M}{J} \leq M\left(1 + J^{-1}\right) < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} \qquad \forall j = 0, \ldots, J \quad \text{in } B_{R_{j-1}}$$

Aus Lemma 2.3 folgt nun:

$$-D_\alpha\left(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta\left|v^{(j)}\right|^2\right) \leq 0 \quad \text{in } B_{R_{j-1}}$$

Lemma 2.5 impliziert dann für ein $\overline{R} \in \left[sR_{j-1}, \frac{R_{j-1}}{4}\right]$

$$\sup_{B_{sR_{j-1}}}\left|v^{(j)}\right|^2 \leq 2\epsilon^2 \sup_{B_{R_{j-1}}}\left|v^{(j)}\right|^2 + (1-\epsilon^2)\fint_{B_{\overline{R}}}\left|v^{(j)}\right|^2\, dx$$

Beachte, dass oben gezeigt wurde $\left|v^{(j)}\right| \leq M(1+J^{-1})$ in $B_{R_{j-1}}$, damit gilt:

$$\sup_{B_{sR_{j-1}}}\left|v^{(j)}\right|^2 \leq 2\epsilon^2 M^2(1+J^{-1})^2 + (1-\epsilon^2)\fint_{B_{\overline{R}}}\left|v^{(j)}\right|^2\, dx \tag{2.21}$$

Da $\left|v^{(j)}\right| = dist_{\mathcal{M}}(U, P_j) \leq dist_{\mathcal{M}}(U, P_J) + dist_{\mathcal{M}}(P_J, P_j)$

$$\begin{aligned} &\leq dist_{\mathcal{M}}(U, P_J) + \left(1 - \tfrac{j}{J}\right)|\overline{u}_{R_0}| \\ &\leq b_\omega(M)|u - \overline{u}_{R_0}| + \left(1 - \tfrac{j}{J}\right)M, \end{aligned}$$

im letzten Schritt wurde hier Lemma 2.7 angewendet. Mit der Young'schen Ungleichung folgt hieraus nun

$$\left|v^{(j)}\right|^2 \leq \left(1+\epsilon^{-2}\right) b_\omega^2(M)\left|u - \overline{u}_{R_0}\right|^2 + \left(1+\epsilon^2\right)\left(1 - \frac{j}{J}\right)^2 M^2 \tag{2.22}$$

Nun gilt $s^J R_0 = ss^{J-1}R_0 \leq ss^{j-1}R_0 = sR_{j-1} \leq \overline{R}$, also haben wir die Abschätzung $s^J R_0 \leq \overline{R} \leq R_0$. Damit erhalten wir

$$\fint_{B_{\overline{R}}}\left|u - \overline{u}_{R_0}\right|^2\, dx \leq \frac{1}{\omega_n s^{nJ} R_0^n}\int_{B_{R_0}}\left|u - \overline{u}_{R_0}\right|^2\, dx = s^{-nJ}\fint_{B_{R_0}}\left|u - \overline{u}_{R_0}\right|^2\, dx \tag{2.23}$$

Mit (2.21), (2.22), (2.23) und Korollar 2.1 kann man jetzt wie folgt abschätzen:

$$\sup_{B_{sR_{j-1}}}\left|v^{(j)}\right|^2 \leq 2\epsilon^2\left(1+J^{-1}\right)^2 M^2 + (\epsilon^{-2}-\epsilon^2)b_\omega^2(M)\fint_{B_{\overline{R}}}\left|u - \overline{u}_{R_0}\right|^2\, dx + (1-\epsilon^4)\left(1 - \frac{j}{J}\right)^2 M^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\epsilon^2 \left(1+J^{-1}\right)^2 M^2 + (\epsilon^{-2}-\epsilon^2) b_\omega^2(M) s^{-nJ} \fint_{B_{R_0}} |u-\overline{u}_{R_0}|^2\, dx \\
&\quad + (1-\epsilon^4)\left(1-\frac{j}{J}\right)^2 M^2 \\
&\leq 2\epsilon^2 \left(1+J^{-1}\right)^2 M^2 + (1-\epsilon^4) b_\omega^2(M) M^2 \epsilon^2 + (1-\epsilon^4)\left(1-\frac{j}{J}\right)^2 M^2 \\
&\leq 2\epsilon^2 \left(1+J^{-1}\right)^2 M^2 + b_\omega^2(M) M^2 \epsilon^2 + \left(1-\frac{j}{J}\right)^2 M^2 \\
&\leq M^2 \left[8\epsilon^2 + \epsilon^2 b_\omega^2(M) + \left(1-\frac{j}{J}\right)^2\right] \\
&\leq M^2 \left[\left(2K\epsilon + 1 - \frac{j}{J}\right)^2 - 4K\epsilon\left(1-\frac{j}{J}\right) - 4K^2\epsilon^2 + 8\epsilon^2 + \epsilon^2 b_\omega^2(M)\right] \\
&\leq M^2 \left(2K\epsilon + 1 - \frac{j}{J}\right)^2 \\
&= M_j^2
\end{aligned}
$$

Da $B_{sR_{j-1}} = B_{R_j}$ folgt jetzt die Behauptung $\left|v^{(j)}\right| \leq M_j$ in B_{R_j}, also gilt (2.20).

Nun sei $P = P_J$ der Punkt in $\mathbf{B}_M(Q)$, welcher $\overline{u}_{R_0}$ entspricht.
Setze $j = J \to dist_{\mathcal{M}}(U,P) = |v^{(J)}| \leq \frac{M}{J}$ in $B_{R_J} = B_{s^J 4^{-i_0} R}$, wobei s von λ, μ, n und i_0 von $n, \lambda, \mu, J, M, \omega, \kappa$ abhängen.
Für die Oszillation von u in B_{R_J} folgt mit Lemma 2.7 die Abschätzung

$$osc_{B_{R_J}} u \leq \frac{1}{b_\kappa(M)} osc_{B_{R_J}} U \leq \frac{2}{b_\kappa(M)} \sup_{B_{R_J}} dist_{\mathcal{M}}(U,P) \leq 2\frac{M}{b_\kappa(M) J}$$

Somit ist gezeigt:

$$osc_{B_{R_J}} u \leq \frac{C}{J} \to 0,\ R_J \to 0 \tag{2.24}$$

Aus (2.24) folgt die Existenz einer natürlichen Zahl $i_1 = i_1(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)$, so dass für $\tilde{R} = 4^{-i_1} R$ gilt (es sei $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}$ bel.):

$$osc_{B_{\tilde{R}}} u < \frac{M}{2b_\omega(M)}$$

Sei u' die Darstellung von U bzgl. Normalkoordinaten um $U(\chi^{-1}(x_0))$ und $\omega'(\varrho) := \sup\limits_{B_\varrho(x_0)} |u'|^2$ für $0 < \varrho \leq \tilde{R}$.
Mit Lemma 2.7 kann man in B_ϱ wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
|u'| = dist_{\mathcal{M}}(U, U(\chi^{-1}(x_0))) &\le b_\omega(M)|u - u(x_0)| \\
&\le b_\omega(M) osc_{B_\varrho} u \\
&\le M
\end{aligned}
$$

Aus (2.19) folgt nun mit $R = \frac{\varrho}{4}$:

$$
\varrho^{2-n} \int\limits_{B_{\frac{\varrho}{4}}} |\nabla u'|^2 \, dx \le C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa) \left[\omega'(\varrho) - \omega' \left(\frac{\varrho}{4} \right) \right] \tag{2.25}
$$

Sei nun P der Punkt in $\mathbf{B}_M(Q)$, der unter der Exponentialabbildung um Q dem Punkt $\overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}$ entspricht, v sei die Darstellung von U in Normalkoordinaten bzgl. P. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|v| = dist_{\mathcal{M}}(U, P) &\le b_\omega(M)|u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}| \\
&\le 2b_\omega(M) osc_{B_\varrho} u \\
&\le M < \tfrac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}
\end{aligned}
$$

Aus Lemma 2.3 folgt jetzt

$$
-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta} D_\beta |v|^2 \right) \le 0 \quad \text{in } B_\varrho
$$

Sei $\epsilon > 0$ und $s = 4^{-m}$ die kleinste Zahl mit $(1-\delta_0)^m < \epsilon^2$ (δ_0 sei die Konstante aus Lemma 2.4). Nach Lemma 2.5 gilt dann mit einem $\overline{\varrho} \in \left[s\varrho, \frac{\varrho}{4} \right]$ die Abschätzung

$$
\sup_{B_{s\varrho}} |v|^2 \le 2\epsilon^2 \sup_{B_\varrho} |v|^2 + (1 - \epsilon^2) \fint\limits_{B_{\overline{\varrho}}} |v|^2 \, dx \tag{2.26}
$$

Da $\fint\limits_{B_{\overline{\varrho}}} |u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}|^2 \, dx \le \dfrac{1}{\omega_n s^n \left(\frac{\varrho}{4}\right)^n} \int\limits_{B_{\frac{\varrho}{4}}} |u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}|^2 \, dx \le s^{-n} \fint\limits_{B_{\frac{\varrho}{4}}} |u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}|^2 \, dx$ und

$s^{-n} \fint\limits_{B_{\frac{\varrho}{4}}} |u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}|^2 \, dx \le C(n, \lambda, \mu, M, \kappa, s) \varrho^{2-n} \int\limits_{B_{\frac{\varrho}{4}}} |\nabla u|^2 \, dx$ (Poincaré-Ungleichung)

folgt mit $|v| = dist_{\mathcal{M}}(U, P) \le b_\omega(M)|u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}|$ die Abschätzung

$$
\fint\limits_{B_\varrho} |v|^2 \le C_1 \varrho^{2-n} \int\limits_{B_{\frac{\varrho}{4}}} |\nabla u|^2 \, dx
$$

wobei $C_1 = C_1(n, \lambda, \mu, \omega, \kappa, M, \epsilon)$ (beachte: s hängt von ϵ und δ_0 ab). Zusammen mit (2.26) erhalten wir nun

$$\sup_{B_{s\varrho}} |v|^2 \leq 2\epsilon^2 \sup_{B_\varrho} |v|^2 + C_1 \varrho^{2-n} \int_{B_{\frac{\varrho}{4}}} |\nabla u|^2 \, dx \tag{2.27}$$

Nun gilt die Abschätzung $|\nabla u|^2 \leq \dfrac{\mu b_\omega^2(M)}{\lambda b_\kappa^2(M)} |\nabla u'|^2$, denn:

Da u die Darstellung von U in Normalkoordinaten um Q ist, gilt $|u| \leq M$. Aus (2.7) und der Elliptizität von $\gamma^{\alpha\beta}$ folgt:

$$\frac{1}{\mu} b_\kappa^2(M) |\nabla u|^2 \leq \gamma^{\alpha\beta}(x) g_{ik}(u) D_\alpha v^i D_\beta v^k \leq \frac{1}{\lambda} b_\omega^2(M) |\nabla u|^2$$

Der mittlere Term entspricht dem zweifachen der Energiedichte $e(v)$ (s.S.22). Da die Energiedichte koordinatenfrei eine Bedeutung hat, schreibe $e(U)$ anstatt $e(v)$ (vgl. [GH, p.129]). Es folgt

$$\frac{2\lambda}{b_\omega^2(M)} e(U) \leq |\nabla u|^2 \leq \frac{2\mu}{b_\kappa^2(M)} e(U)$$

Ist nun u' eine weitere Darstellung von U bzgl. Normalkoordinaten mit einem beliebigen Zentrum, es gelte $|u'| \leq M$ (ist für das hier betrachtete u' erfüllt), so folgt die gleiche Abschätzung wie oben mit u' anstelle von u. Also kann man abschätzen:

$$|\nabla u|^2 \leq \frac{2\mu}{b_\kappa^2(M)} e(U) \leq \frac{\mu b_\omega^2(M)}{\lambda b_\kappa^2(M)} |\nabla u'|^2$$

Dies ist die gewünschte Abschätzung.

Somit folgt jetzt aus (2.25), (2.27) und der Tatsache, dass $s \leq \frac{1}{4}$

$$\sup_{B_{s\varrho}} |v|^2 \leq 2\epsilon^2 \sup_{B_\varrho} |v|^2 + C_1 \left[\omega'(\varrho) - \omega'(s\varrho)\right] \tag{2.28}$$

Aus der Dreiecksungleichung und Lemma 2.7 folgen nun die beiden Abschätzungen

1) $|v| \leq b_\omega(M) |u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}| \leq 2 b_\omega(M) \sup\limits_{B_\varrho} |u - u(x_0)| \leq 2 \dfrac{b_\omega(M)}{b_\kappa(M)} \sup\limits_{B_\varrho} |u'|$ in B_ϱ

2) $|u'| \leq b_\omega(M) |u - u(x_0)| \leq 2 b_\omega(M) \sup\limits_{B_{s\varrho}} |u - \overline{u}_{\frac{\varrho}{4}}| \leq 2 \dfrac{b_\omega(M)}{b_\kappa(M)} \sup\limits_{B_{s\varrho}} |v|$ in $B_{s\varrho}$

Mit (2.28) ergibt sich

$$\omega'(s\varrho) \leq C(n, \lambda, \mu, \omega, \kappa, M)\epsilon^2 \omega'(\varrho) + C_1 \left[\omega'(\varrho) - \omega'(s\varrho)\right]$$

Setze $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2C}}$, dann kommt man zu

$$\omega'(s\varrho) \leq \theta\omega'(\varrho) \qquad \text{mit } \theta = \frac{C' + \frac{1}{2}}{C' + 1} < 1$$

Mit einem Standard-Iterationslemma [GT, Lemma 8.23] folgt dann für alle $\varrho \leq \tilde{R}$

$$\omega'(\varrho) \leq C_2^2 \left(\frac{\varrho}{\tilde{R}}\right)^{2C_3} \omega'(\tilde{R})$$

wobei C_2 und C_3 nur von $n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa$ abhängen. Aus dieser Abschätzung folgt unmittelbar $\sqrt{\omega'(\varrho)} \leq C_2 \left(\frac{\varrho}{\tilde{R}}\right)^{C_3} \sqrt{\omega'(\tilde{R})}$. Da $\sqrt{\omega'(\varrho)} \leq osc_{B_\varrho} u \leq 2\sqrt{\omega'(\varrho)}$ kommt man nun für $\varrho \leq \tilde{R}$ zu

$$osc_{B_\varrho} u \leq 2C_2 \left(\frac{\varrho}{\tilde{R}}\right)^{C_3} osc_{B_{\tilde{R}}} u \leq C \left(\frac{\varrho}{4R}\right)^{\alpha} \left(\frac{4R}{\tilde{R}}\right)^{\alpha} \leq C \left(\frac{\varrho}{4R}\right)^{\alpha} \tag{2.29}$$

mit $\alpha = C_3(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)$ und $C = C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)$.

<u>Abschätzung der Hölder-Halbnorm</u>:
Bisher wurde folgendes gezeigt (s. (2.29)): Falls $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}$, so gilt für $0 < \varrho < 4^{-i_1}R$ die Abschätzung

$$osc_{B_\varrho(x_0)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{4R}\right)^{\alpha}$$

Im folgenden wird nun die Abschätzung der Hölderhalbnorm für $\varrho \leq R$ bewiesen.

Seien dazu $x, y \in B_\varrho(x_0), x \neq y$

<u>1.Fall:</u> $\varrho \in \left(0, \frac{\tilde{R}}{4}\right]$ Setze $\varrho' := |x - y| \in (0, 2\varrho)$. Da $B_{\varrho'}(x) \subset B_{2\varrho}(x) \subset B_{4\varrho}(x_0)$ folgt: $|u(x) - u(y)| \leq osc_{B_{\varrho'}(x)} u \leq C \left(\frac{\varrho'}{4R}\right)^{\alpha} \leq C|x - y|^\alpha R^{-\alpha} \leq C|x - y|^\alpha \varrho^{-\alpha}$, da $\varrho \leq R$. Also gilt

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \varrho^{-\alpha} \quad \forall\, x, y \in B_\varrho(x_0)$$

<u>2.Fall:</u> $\varrho \in \left(\frac{\tilde{R}}{4}, R\right]$. Überdecke $\overline{B_\varrho(x_0)}$ mit endlich vielen Bällen $B_{r_i}(\alpha_i)$,

$r_i \leq \frac{\tilde{R}}{4}$ $(i = 1, \dots, L)$, so dass $\overline{B_\varrho(x_0)} \subset \bigcup_{i=1}^{L} B_{r_i}(\alpha_i)$ und $B_{4r_i}(\alpha_i) \subset B_{4d}$, setze $r := \min_{i=1,\dots,N} r_i$. Im Fall $|x-y| < \frac{r}{2}$ folgt wie im 1.Fall, dass

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha R^{-\alpha} \leq C|x-y|^\alpha \varrho^{-\alpha}$$

Im Fall $|x-y| \geq \frac{r}{2}$ folgert man $\sup\limits_{\substack{x,y \in B_\varrho(x_0) \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2M}{\left(\frac{r}{2}\right)^\alpha} \leq Cr^{-\alpha} \leq C\varrho^{-\alpha}$.

Somit gilt für alle Bälle $B_\varrho(x_0) \subset B_R(x_0)$ mit $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}$ die Abschätzung

$$\sup_{\substack{x,y \in B_\varrho(x_0) \\ x \neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C\varrho^{-\alpha}$$

Noch z.z.: $\sup\limits_{\substack{x,y \in \overline{B_{d'}} \\ x \neq y}} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(4d-d')^{-\alpha} \quad \forall\, d' \leq 4d$

Beweis hierzu: (vgl. [GH, p.144]) Sei $d' < 4d$, setze $4R = 4d - d'$, seien $x_1, x_2 \in \overline{B_{d'}}, x_1 \neq x_2$, dann ist $x_0 := \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \subset B_{d'}$ und $B_{4R}(x_0) \subset B_{4d}$.

1.Fall: $|x_1 - x_2| \leq \frac{R}{2}$. Dann gilt $|x_1 - x_0| = |x_2 - x_0| \leq R$ und aus dem oben gezeigtem folgt $|u(x_1) - u(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha (4d)^{-\alpha} \leq C|x_1 - x_2|^\alpha (4R)^{-\alpha}$.

2.Fall: $|x_1 - x_2| > \frac{R}{2} \to 1 \leq 2^\alpha R^{-\alpha}|x_1 - x_2|^\alpha$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |u(x_1) - u(x_2)| &\leq |u(x_1)| + |u(x_2)| \leq 2M \leq 2M 2^\alpha R^{-\alpha} |x_1 - x_2|^\alpha \\ &\leq C(4R)^{-\alpha}|x_1 - x_2|^\alpha \end{aligned}$$

In beiden Fällen folgt: $|u(x_1)-u(x_2)| \leq C|x_1-x_2|^\alpha (4R)^{-\alpha} = C|x_1-x_2|^\alpha (4d-d')^{-\alpha}$.
Somit ist Satz 2.2 vollständig bewiesen. $\square$

2.3 Regularität am festem Rand

Nun werden auch die a-priori Abschätzungen am Rand von Giaquinta-Hildebrandt [GH, Kapitel 4] mit der von Caffarelli entwickelten Methode bewiesen, wie in 2.2 werden auch hier wieder einige Ideen von Meier [ME] benutzt. Um die a-priori Abschätzung am Rand zu formulieren, führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein. $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ sei eine harmonische Abbildung mit der Eigenschaft, dass eine Umgebung Ω eines Randpunktes von $\partial\mathcal{H}$ in einen regulären Ball $\mathbf{B}_M(Q) \subset \mathcal{M}$ abgebildet wird. Es existiere eine Karte $\chi : \overline{\Omega} \to \overline{\Sigma}_{5R}$, so dass $\overline{\Omega}$ homöomorph auf den Abschluß von $\Sigma_{5R} = \{x = (x_n', x_n) \in \mathbb{R}^n; |x_n'| < 5R, 0 < x_n < 5R\}$ abgebildet wird, zusätzlich gelte $\chi\left(\partial\mathcal{H}\cap\overline{\Omega}\right) = \Sigma^0_{5R} = \{x = (x'_n, 0) \in \mathbb{R}^n; |x'_n| \le 5R\}$. Die Metrik $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ von $\mathcal{H}$ sei bzgl. lokaler Koordinaten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gleichmäßig elliptisch. d.h. es existieren λ, μ mit $0 < \lambda \le \mu$, so dass

$$\lambda|\xi|^2 \le \gamma_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \le \mu|\xi|^2 \qquad \text{f.f.a. } x \in \overline{\Sigma}_{5R} \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

$g_{ik}(v)$ sei die Metrik auf $\mathcal{M}$ bzgl. lokaler Koordinaten $(v^1, \ldots, v^N)$.
$\Theta := U|_{\partial\mathcal{H}}$ sei die vorgegebene Randwertabbildung, für $x_0 \in \Sigma^0_R$ bel. sei $P := U\left(\chi^{-1}(x_0)\right) = \Theta\left(\chi^{-1}(x_0)\right)$. Da $U(\Omega) \subset \mathbf{B}_M(Q)$ können nach dem Lemma von Jost (Lemma 2.1) Normalkoordinaten auf $\mathbf{B}_M(Q)$ mit Mittelpunkt in P eingeführt werden, v sei die Darstellung von U in lokalen Koordinaten bzgl. Normalkoordinaten um P.
Um eine a-priori Abschätzung am Rand beweisen zu können, benötigt man zunächst ein Analogon zu Lemma 2.4 am Rand (s.[ME,p.6]).

Lemma 2.8 *Υ sei ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $v \in H^1_2 \cap L_\infty(\Upsilon \cap B_{4R})$ sei eine Lösung von $-D_\alpha\left(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta v\right) \le 0$ in $\Upsilon \cap B_{4R}$, wobei die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x)$ glm. elliptisch mit Elliptizitätskonstanten $0 < \lambda \le \Lambda$ seien. Gilt $|B_R - \Upsilon| \ge \gamma|B_R|$ für ein $\gamma > 0$, so folgt:*

$$\sup_{\Upsilon\cap B_R} v \le (1-\delta_0)\sup_{\Upsilon\cap B_{4R}} v + \delta_0 \sup_{\partial\Upsilon\cap B_{4R}} v \tag{2.30}$$

wobei $\delta_0 = \delta_0(n, \lambda, \Lambda, \gamma) \in (0,1)$.

Beweis: Sei $u \in H^1_2(\Upsilon)$ eine Superlösung von $-D_\alpha(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u) = 0$ in Υ, in $\Upsilon \cap B_{4R}$ sei u nicht-negativ. Mit der schwachen Harnack-Ungleichung am Rand ([GT,Thm. 8.26]) folgt für u die Abschätzung

$$R^{-n}\int\limits_{B_{2R}} |u^-_m|\, dx \le C(n, \lambda, \Lambda) \inf_{B_R} u^-_m \tag{2.31}$$

wobei $m = \inf\limits_{\partial\Upsilon\cap B_{4R}} u$ und $u^-_m(x) = \begin{cases} \inf\{u(x), m\}, & x \in \Upsilon \\ m, & x \notin \Upsilon \end{cases}$

Definiere hier $u := \sup\limits_{\Upsilon\cap B_{4R}} v - v$, u ist damit eine nicht-negative Superlösung von $Lu = 0$ in $\Upsilon \cap B_{4R}$ und es gilt: $m = \sup\limits_{\Upsilon\cap B_{4R}} v - \sup\limits_{\partial\Upsilon\cap B_{4R}} v$. (2.31) liefert dann

$$R^{-n}\int\limits_{B_{2R}-\Upsilon}\left(\sup_{\Upsilon\cap B_{4R}} v - \sup_{\partial\Upsilon\cap B_{4R}} v\right) dx + \underbrace{R^{-n}\int\limits_{B_{2R}\cap\Upsilon} |\inf\{u(x), m\}|\, dx}_{\ge 0} \le C \inf_{B_R} u^-_m$$

$$\Rightarrow \qquad R^{-n}|B_{2R} - \Upsilon| \left(\sup_{\Upsilon \cap B_{4R}} v - \sup_{\partial\Upsilon \cap B_{4R}} v \right) \leq C \inf_{B_R \cap \Upsilon} \{u(x), m\}$$

$$\Rightarrow \qquad R^{-n} \gamma \omega_n R^n \left(\sup_{\Upsilon \cap B_{4R}} v - \sup_{\partial\Upsilon \cap B_{4R}} v \right) \leq C \inf_{B_R \cap \Upsilon} u(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \gamma \omega_n \left(\sup_{\Upsilon \cap B_{4R}} v - \sup_{\partial\Upsilon \cap B_{4R}} v \right) \leq C \left(\sup_{\Upsilon \cap B_{4R}} v - \sup_{\Upsilon \cap B_R} v \right)$$

Mit $\delta_0 := \frac{\gamma \omega_n}{C}$ folgt jetzt die Behauptung. $\square$

Für $x_0 \in \Sigma_R^0$ definiere $\mathcal{S}_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < R, x^n > 0\}$.

Es gilt folgende a-priori Abschätzung

Satz 2.3 *Sei $u(x)$ die Darstellung der harmonischen Abbildung U bzgl. einer Normalkarte mit Mittelpunkt in Q, es gelte $\sigma(R) := osc_{\Sigma_R^0(x_0)} u < \frac{M}{b_\omega(M)}$. Zusätzlich sei die Ungleichung $2M + b_\omega(M)\sigma(R) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ erfüllt. Dann existiert ein Radius $R^* \leq R$, der von $n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa, \sigma(R)$ abhängt, so dass für alle $\varrho \in (0, R^*]$*

$$osc_{\mathcal{S}_\varrho(x_0)} u \leq C \left[\left(\frac{\varrho}{R^*} \right)^{\tilde{\alpha}} osc_{\mathcal{S}_R(x_0)} u + \sigma\left(\sqrt{\varrho R} \right) \right] \tag{2.32}$$

gilt, wobei $C = C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa) > 0$ und $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(n, \lambda, \mu) > 0$.

Ist $\Theta = U|_{\partial\mathcal{H}}$ hölderstetig mit Hölderexponent α_Θ, so ergibt sich die a-priori Abschätzung von Giaquinta-Hildebrandt am Rand [GH, Kapitel 4]:

Satz 2.4 *Sei $u(x)$ die Darstellung der harmonischen Abbildung U bzgl. einer Normalkarte mit Mittelpunkt in Q. Dann existieren positive Konstanten $C = C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa, r, [u]_{\alpha_\Theta, \Sigma_{5R}^0}) > 0$ und $\tau = \tau(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa, \alpha_\Theta) > 0$, so dass für alle $r \leq R$ gilt:*

$$[u]_{\tau, \overline{\Sigma_r}} \leq C$$

<u>Bemerkung:</u> Im Fall $n = 2$ folgt die Stetigkeit von u ohne die Vorausetzung, dass $\mathbf{B}_M(Q)$ ein regulärer Ball ist bereits aus der Stetigkeit der Randwerte, s. Qing [QI].

<u>Beweis von Satz 2.3</u>

Sei $\tau \in \mathbb{R}^N$ mit $|\tau| \leq M$. Für $0 \leq j \leq J$ setze $\tau_j = \frac{j}{J}\tau$, $R_j = 4^{-jm}R$, wobei m eine natürliche Zahl sei, die später noch spezifiziert wird.

Ferner sei $P_j := \exp_Q(\tau_j)$ und $v^{(j)}$ die Darstellung von U bzgl. Normalkoordinaten um P_j.

Weiterhin sei τ so gewählt, dass gilt: $m_\tau(R) := \sup\limits_{\Sigma_R^0} dist_{\mathcal{M}}\,(U, P_J) \le b_\omega(M)\sigma(R)$ (beachte: $m_\tau(R) < M$), setze $m_\varrho = m_\varrho(R)\ \forall \varrho \in \mathbb{R}^N$ und bestimme eine natürliche Zahl $J \ge 2$ mit der Eigenschaft

$$2M + m_\tau + 3MJ^{-1} < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}.$$

Setze $M_0 := M, M_j := J^{-1}M + m_{\tau_j}\ (1 \le j \le J)$.

Per Induktion wird für $0 \le j \le J$ gezeigt:

$$\left|v^{(j)}\right| \le M_j \quad \text{in} \quad \mathcal{S}_j := \mathcal{S}_{R_j}(x_0) \tag{2.33}$$

Für $j = 0$ ist nichts zu zeigen, die Behauptung gelte also für den Index $j-1$ $(1 \le j \le J)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} m_{\tau_{j-1}} = \sup_{\Sigma_R^0} dist_{\mathcal{M}}\,(U, P_{j-1}) &\le \sup_{\Sigma_R^0} dist_{\mathcal{M}}\,(U, P_J) + \sup_{\Sigma_R^0} dist_{\mathcal{M}}\,(P_{j-1}, P_J) \\ &\le m_\tau + \tfrac{J-(j-1)}{J} M \end{aligned}$$

Für $x \in \mathcal{S}_{j-1}$ ergibt sich:
$$\begin{aligned} |v^{(j)}| &= dist_{\mathcal{M}}\,(U(\chi^{-1}(x)), P_j) \\ &\le dist_{\mathcal{M}}\,(U(\chi^{-1}(x)), P_{j-1}) + dist_{\mathcal{M}}(P_j, P_{j-1}) \\ &\le M_{j-1} + MJ^{-1} \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt von der Induktionsvoraussetzung Gebrauch gemacht wurde. In beiden Abschätzungen wurde benutzt, dass P_j und P_{j-1} auf der Geodäten liegen, die Q und P_J verbindet (s. Beweis von Satz 2.2).

Man kann abschätzen:
$$\begin{aligned} & M + |\tau_j| + M_{j-1} + MJ^{-1} \\ &\le M + \tfrac{j}{J}M + 2MJ^{-1} + m_{\tau_{j-1}} \\ &\le M + \tfrac{j}{J}M + 2MJ^{-1} + m_\tau + \left(1 - \tfrac{j-1}{J}\right) M \\ &\le 2M + 3MJ^{-1} + m_\tau \\ &< \tfrac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{(nach Wahl von } J\text{)} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$M + |\tau_j| + M_{j-1} + MJ^{-1} < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

Da $\left|v^{(j)}\right| \le M + |\tau_j|$ und $\left|v^{(j)}\right| \le M_{j-1} + MJ^{-1}$ in $\mathcal{S}_{j-1}$ (s.o.) ergibt sich:

$$\left|v^{(j)}\right| \le \frac{1}{2}\left[M + |\tau_j| + M_{j-1} + MJ^{-1}\right] < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} \qquad \text{in} \quad \mathcal{S}_{j-1}$$

Mit Lemma 2.3 folgt nun, dass $\left|v^{(j)}\right|^2$ eine Sublösung in $\mathcal{S}_{j-1}$ ist.

Mit der Bezeichnung $\Upsilon := \Sigma_{5R}$ kommt man zu $\Upsilon \cap B_{R_j} = \mathcal{S}_j$, $\partial\Upsilon \cap B_{4R_j} = \Sigma^0_{4R_j}$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $(1-\delta_0)^m \leq J^{-2}\dfrac{M^2}{(M+|\tau|)^2}$,

wobei δ_0 die in Lemma 2.8 auftretende Konstante sei. Durch wiederholte Anwendung dieses Lemmas $\left(4R \leftrightarrow 4^{-\nu}R_{j-1}, \nu = m-1,\ldots,0, \gamma = \frac{1}{2}\right)$ gelangt man zu

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathcal{S}_{4^{-m}R_{j-1}}} \left|v^{(j)}\right|^2 &\leq (1-\delta_0) \sup_{\mathcal{S}_{4^{-(m-1)}R_{j-1}}} \left|v^{(j)}\right|^2 + \delta_0 \sup_{\Sigma^0_{4^{-(m-1)}R_{j-1}}} \left|v^{(j)}\right|^2 \\
&\leq (1-\delta_0)\left[(1-\delta_0) \sup_{\mathcal{S}_{4^{-(m-2)}R_{j-1}}} \left|v^{(j)}\right|^2 + \delta_0 \sup_{\Sigma^0_{4^{-(m-2)}R_{j-1}}} \left|v^{(j)}\right|^2\right] \\
&\quad + \delta_0 \sup_{\Sigma^0_{4^{-(m-1)}R_{j-1}}} \left|v^{(j)}\right|^2 \\
&\leq \ldots \leq (1-\delta_0)^m \sup_{\mathcal{S}_{j-1}} \left|v^{(j)}\right|^2 + \sum_{\nu=0}^{m-1} (1-\delta_0)^{m-1-\nu}\delta_0 \sup_{\Sigma^0_{4^{-\nu}R_{j-1}}} \left|v^{(j)}\right|^2 \\
&\leq (1-\delta_0)^m (M+|\tau|)^2 \\
&\quad + [1-(1-\delta_0)^m] \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m-1} [1-(1-\delta_0)^m]^{-1} \delta_0(1-\delta_0)^{m-1-\nu}}_{=1} \sup_{\Sigma^0_{4^{-\nu}R_{j-1}}} dist^2_{\mathcal{M}}(U, P_j) \\
&\leq (1-\delta_0)^m (M+|\tau|)^2 + [1-(1-\delta_0)^m]\, m^2_{\tau_j} \\
&\leq J^{-2}M^2 + m^2_{\tau_j} \qquad \text{(nach Wahl von } m\text{)}
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{S}_{4^{-m}R_{j-1}} = \mathcal{S}_j$ haben wir:

$$\left|v^{(j)}\right| \leq J^{-1}M + m_{\tau_j} = M_j \text{ in } \mathcal{S}_j$$

Somit ist (2.33) bewiesen. Mit $j = J$ kommen wir in $\mathcal{S}_J$ zur Abschätzung

$$|v^{(J)}| = dist_{\mathcal{M}}(U, P_J) \leq J^{-1}M + m_\tau \leq J^{-1}M + M < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$$

Also ist nach Lemma 2.3 $\left|v^{(J)}\right|^2$ eine Sublösung in $\mathcal{S}_J$.

Für $x \in \mathcal{S}_{R_J}$ setze $M_\tau(R_J) := \sup_{\mathcal{S}_{R_J}} dist_{\mathcal{M}}(U(\chi^{-1}(x)), P_J)$, aus Lemma 2.8 folgt für den Fall $0 < 4\varrho \leq R_J$

$$M^2_\tau(\varrho) \leq (1-\delta_0)M^2_\tau(4\varrho) + \delta_0 m^2_\tau(4\varrho)$$

Setze $R^* := R_J$ (R^* hängt dann von $n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa$ und $\sigma(R)$ ab), durch Iteration dieser Ungleichung bzgl. ϱ erhält man mit einem Iterationslemma ([GT, Lemma 8.23])

$$M_\tau^2(4\varrho) \leq K^2 \left(\left(\frac{4\varrho}{R^*} \right)^{2\tilde{\alpha}} M_\tau^2(R^*) + m_\tau^2 \left(2\sqrt{\varrho R^*} \right) \right) \tag{2.34}$$

mit $K = K(n, \lambda, \mu), \tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(n, \lambda, \mu)$. Für $\varrho \in (0, R^*)$ folgt somit:

$$M_\tau^2(\varrho) \leq K^2 \left(\left(\frac{\varrho}{R^*} \right)^{2\tilde{\alpha}} M_\tau^2(R^*) + m_\tau^2 \left(\sqrt{\varrho R^*} \right) \right)$$

Durch Wurzelziehen und Beachtung von $M_\tau(R^*) \leq M_\tau(R)$ gelangt man zu

$$M_\tau(\varrho) \leq K \left(\left(\frac{\varrho}{R^*} \right)^{\tilde{\alpha}} M_\tau(R) + m_\tau \left(\sqrt{\varrho R^*} \right) \right) \qquad \forall\, 0 < \varrho \leq R^* \tag{2.35}$$

Wähle τ so, dass $\tau = u(x_0)$ für ein $x_0 \in \Sigma_\varrho^0$ und eine Folge $x_n \in \mathcal{S}_R$ mit der Eigenschaft $u(x_n) \to u(x_0), n \to \infty$. Dann erfüllt τ die Abschätzungen

i) $M_\tau(R) = \sup\limits_{\mathcal{S}_R} dist_{\mathcal{M}}(U, P_J) \leq b_\omega(M) osc_{\mathcal{S}_R} u$

und ii) $m_\tau(\varrho) = \sup\limits_{\Sigma_R^0} dist_{\mathcal{M}}(U, P_J) \leq b_\omega(M)\sigma(\varrho) \quad \forall \varrho \leq R$

Da $\dfrac{1}{2b_\omega(M)} M_\tau(\varrho) \leq osc_{\mathcal{S}_\varrho} u \leq \dfrac{2}{b_\kappa(M)} M_\tau(\varrho)$ folgt für alle $\varrho \leq R$:

$$osc_{\mathcal{S}_\varrho(x_0)} u \leq C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa) \left[\left(\frac{\varrho}{R^*} \right)^{\tilde{\alpha}} osc_{\mathcal{S}_R(x_0)} u + \sigma \left(\sqrt{\varrho R} \right) \right]$$

Somit ist Satz 2.3 bewiesen. □

Beweis von Satz 2.4

Sei $\Theta = U|_{\partial\mathcal{H}}$ hölderstetig mit Hölderexponent $\alpha_\Theta > 0$, d.h. für die Darstellung von U in Normalkoordinaten gilt auf Σ_{5R}^0: $[u]_{\alpha_\Theta, \Sigma_{5R}^0} \leq C$. Insbesondere gilt dann für $x_0 \in \Sigma_R^0$ und $\varrho \leq R$: $\sigma(\varrho) = osc_{\Sigma_\varrho^0(x_0)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha_\Theta}$. Daher existiert ein Radius $R_1 \leq R$, so dass $\sigma(R_1) = osc_{\Sigma_{R_1}^0(x_0)} u < \dfrac{M}{b_\omega(M)}$.

Wähle nun $y \in \Sigma_R$ bel., aber fix und bestimme $x_0 \in \Sigma_R^0$ so, dass $d := dist\,(y, \Sigma_R^0) = |y - x_0|$ (d.h. x_0 ist die orthogonale Projektion von y auf Σ_R^0). Für $0 < \varrho \leq r \leq \frac{R_1}{2}$ wird die Abschätzung der Oszillation $osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u$ in drei Fälle unterteilt:

1.Fall: $d \geq r$. In diesem Fall liegt $B_\varrho(y)$ ganz im Inneren von Σ_{5R} und es kann die a-priori Abschätzung im Inneren (Satz 2.2) verwendet werden:
$osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u \leq osc_{B_\varrho(y)} u \leq C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\alpha$

2.Fall: $r \geq \varrho \geq d$. Hier wird unter Berücksichtigung der Hölderstetigkeit von u auf Σ^0_{5R} die a-priori Abschätzung am Rand (Satz 2.3) benutzt:

$osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u \leq osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_{2\varrho}(x_0)} u \leq osc_{\mathcal{S}_{2\varrho}(x_0) \cup \Sigma^0_{2\varrho}(x_0)} u$
$\leq C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa) \left[\left(\frac{2\varrho}{2r}\right)^{\tilde{\alpha}} osc_{\mathcal{S}_{2r}} u + \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\alpha\Theta}\right]$
$\leq 2C \max\left\{\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\tilde{\alpha}}, \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\alpha\Theta}\right\} \leq C \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{\upsilon}$ mit $\upsilon := \min\{\tilde{\alpha}, \alpha_\Theta\}$

3.Fall: $r \geq d \geq \varrho$. Mit der a-priori Abschätzung im Inneren kommt man zunächst zu $osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{d}\right)^\alpha osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_d(y)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{d}\right)^\alpha osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_{2d}(x_0)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{d}\right)^\alpha osc_{\mathcal{S}_{2d}(x_0) \cup \Sigma^0_{2d}(x_0)} u$

Mit der Randabschätzung gelangt man schließlich zu
$osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{d}\right)^\alpha \left[\left(\frac{2d}{2r}\right)^{\tilde{\alpha}} osc_{\mathcal{S}_{2r}} u + \left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha\Theta}\right] \leq 2C \left(\frac{\varrho}{d}\right)^\alpha \max\left\{\left(\frac{d}{r}\right)^{\tilde{\alpha}}, \left(\frac{d}{r}\right)^{\alpha\Theta}\right\}$
$\leq C \left(\frac{\varrho}{d}\right)^\alpha \left(\frac{d}{r}\right)^\upsilon \leq C \max\left\{\left(\frac{\varrho}{d}\right)^\alpha \left(\frac{d}{r}\right)^\alpha, \left(\frac{\varrho}{d}\right)^\upsilon \left(\frac{d}{r}\right)^\upsilon\right\} \leq C \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\tau$ mit $\tau \in \{\alpha, \upsilon\}$, wobei $\upsilon := \min\{\tilde{\alpha}, \alpha_\Theta\}$.

Also gilt für alle drei Fälle: $osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\tau$, wobei C von $n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa$ und der Höldernorm von u auf Σ^0_{5R} sowie τ von $n, \lambda, \mu, M, \kappa, \alpha_\Theta$ abhängen.

Abschätzung der Hölder-Halbnorm: Seien $x_1, x_2 \in \overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y), x_1 \neq x_2$
Aus $osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\tau$ $(\varrho \leq r \leq \frac{R_1}{4})$ folgt mit der gleichen Argumentation wie in Abschnitt 2.2

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq osc_{\overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y)} u \leq C \left(\frac{\varrho}{r}\right)^\tau \leq C|x_1 - x_2|^\tau r^{-\tau}$$

Da $r \geq \varrho$ folgt also

$$\sup_{\substack{x_1, x_2 \in \overline{\Sigma_R} \cap B_\varrho(y) \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\tau} \leq C\left(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa, \rho, [u]_{\alpha_\theta, \Sigma^0_{5R}}\right)$$

Überdecke $\overline{\Sigma_R}$ mit endlichen vielen Mengen der Art $\overline{\Sigma_R} \cap B_{\varrho_i}(y_i)$, $\varrho_i \leq \frac{r}{2}$ $(i = 1, \ldots, L)$, so dass $\overline{\Sigma_R} \subset \bigcup_{i=1}^{L} \overline{\Sigma_R} \cap B_{\varrho_i}(y_i)$, setze $\overline{r} := \min_{i=1,\ldots,L} \varrho_i$.
Seien nun $x_1, x_2 \in \overline{\Sigma_R}$ beliebig.
1.Fall: $|x_1 - x_2| < \frac{\overline{r}}{2}$, dann existiert ein $i \in \{1, \ldots, L\}$, so dass $x_1, x_2 \in \overline{\Sigma_R} \cap B_{\varrho_i}(y_i)$.

Die Behauptung folgt dann aus der obigen Abschätzung.
2.Fall: $|x_1 - x_2| \geq \frac{\overline{r}}{2}$, dann folgt

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\tau} \leq \frac{2M}{\left(\frac{\overline{r}}{2}\right)^\tau} \leq C$$

Somit folgt: $\sup\limits_{\substack{x_1,x_2 \in \overline{\Sigma_R} \\ x_1 \neq x_2}} \dfrac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\tau} \leq C\left(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa, R, [u]_{\alpha\theta, \Sigma^0_{5R}}\right)$, d.h.

$$[u]_{\tau,\overline{\Sigma_r}} \leq C\left(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa, r, [u]_{\alpha\theta, \Sigma^0_{5R}}\right) \quad \forall r \leq R$$

2.4 Regularität am halbfreiem Rand

In diesem Abschnitt wird nun die Frage der Regularität einer harmonischen Abbildung am halbfreiem Rand untersucht. Von Baldes [BA1] wurde mit Hilfe von Green'schen Funktionen gezeigt, dass harmonische Abbildungen am halbfreiem Rand hölderstetig sind, hier wird dieses Resultat mit der Caffarelli-Methode bewiesen und zusätzlich werden a-priori Abschätzungen für die Hölder-Halbnorm hergeleitet. $\mathcal{H}$ sei eine kompakte, zusammenhängende, n-dim. Riem. Mannigfaltigkeit der Klasse C^3 mit Innerem Ω und nichtleerem Rand Σ, $\mathcal{M}$ sei eine vollständige Riem. Mannigfaltigkeit der Klasse C^3 ohne Rand und Dimension $N \geq 2$. $U : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ sei eine harmonische Abbildung, $\Sigma_1 \subset \Sigma$ sei offen und das (n-1)-dim. Hausdorff-Maß von $\Sigma_0 := \Sigma - \Sigma_1$ sei ungleich 0. Σ^* sei eine total geodätische Untermannigfaltigkeit der Dimension $m \leq N$ von $\mathcal{M}$, d.h. Geodäten in Σ^* sind auch Geodäten in $\mathcal{M}$. $\Theta \in H^1_2(\Omega, \mathcal{M})$ sei eine vorgegebene Randwertabbildung mit $\Theta(\Sigma_1) \subset \Sigma^*$. U bilde Σ_1 in Σ^* ab, ferner sei $U|_{\Sigma_0} = \Theta|_{\Sigma_0}$, für $Q \in \Sigma^*$ sei $\mathbf{B}_M(Q) \subset \mathcal{M}$ ein regulärer Ball. Nach dem Lemma von Jost (Lemma 2.1) können dann auf $\mathbf{B}_M(Q)$ Normalkoordinaten eingeführt werden, für eine geeignete Normalkarte $\chi^* : \mathbf{B}_M(Q) \to \mathbb{R}^N$ gelte

$$\chi^*(\Sigma^* \cap \mathbf{B}_M(Q)) = \{u = (u^1, \ldots, u^N) \in \mathbb{R}^n; |u| \leq M, u^{m+1} = \ldots = u^N = 0\}$$

P_0 sei ein beliebiger Punkt aus Σ_1, wähle eine Umgebung Ω^* von P_0 mit glattem Rand und eine Karte $\chi : \Omega^* \to B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1, x^n \geq 0\}$, so dass $\chi(P_0) = 0$ sei. Die Metrik $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ von $\mathcal{H}$ sei bzgl. lokaler Koordinaten x glm. elliptisch, d.h.

$\lambda|\xi|^2 \le \gamma_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta \le \mu|\xi|^2$ für fast alle $x \in B^+$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ mit $0 < \lambda \le \mu$, zusätzlich gelte $\gamma_{\alpha n}(x) = \gamma_{n\alpha}(x) = \delta_{n\alpha}$ für fast alle $x \in B^+$ und alle $1 \le \alpha \le n$.

Ziel dieses Abschnittes ist es folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2.5 *Unter den obigen Voraussetzungen sei $u(x)$ die Darstellung der harmonischen Abbildung U bzgl. einer Normalkarte mit Mittelpunkt in $Q \in \Sigma^*$. Dann ist u hölderstetig mit Hölderexponent $\alpha = \alpha(n, \lambda, \mu, M, \kappa)$ und es existiert ein $C = C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)$, so dass für alle $d \in (0,1)$ gilt*

$$[u]_{\alpha, B_d^+} \le C(1-d)^{-\alpha} \tag{2.36}$$

Bemerkung: Die Voraussetzung, dass Σ^* total geodätisch ist, wird benötigt um auf $\Sigma^* \cap \mathbf{B}_M(Q)$ Normalkoordinaten einzuführen und die Rauch'schen Vergleichsätze (Lemma 2.2) anzuwenden.

Beweis des Satzes:

Definiere zunächst eine Fortsetzung der Metrik $\gamma_{\alpha\beta}(x)$ auf ganz $B := B_1(0)$, x_* sei die Spiegelung von x in der letzten Komponente, also $x_* = (x^1, \ldots, x^{n-1}, -x^n)$. Mit

$$\sigma(\alpha, \beta) := \begin{cases} 1, & \alpha \ne n \text{ und } \beta \ne n \\ 1, & \alpha = \beta = n \\ -1, & \text{sonst} \end{cases},$$

definiere nun die Fortsetzung der Metrik

$$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(x) := \begin{cases} \gamma_{\alpha\beta}(x) & x \in B^+ \\ \sigma(\alpha,\beta)\gamma_{\alpha\beta}(x_*) & x \in B^- \end{cases}.$$

wobei $B^- := B - B^+$ sei.

$u : B^+ \to \{u \in \mathbb{R}^n; u^{(m+1)} = \ldots = u^N = 0\}$ sei die lokale Darstellung von U, definiere auch hier eine Fortsetzung auf ganz B vermöge

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x \in B^+ \\ u(x_*) & x \in B^- \end{cases}.$$

Verwende die Notationen $\tilde{a}^{\alpha\beta}(x) = \sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)$, $x \in B$ und $f^l(\tilde{v}(x)) = \sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\Gamma^l_{ik}(\tilde{v})\, D_\alpha \tilde{v}^i(x) D_\beta \tilde{v}^k(x)$, $x \in B$, wobei v die Darstellung von U bzgl. Normalkoordinaten mit einem beliebigen Mittelpunkt in $\mathbf{B}_M(Q)$ und $\tilde{v}$ die entsprechende Fortsetzung von v sei. Als Analogon zu Lemma 2.3 erhalten wir nun

Lemma 2.9 *Seien* $\left(v^1,\ldots,v^N\right)$ *Normalkoordinaten auf dem regulären Ball* $\boldsymbol{B}_M(Q)$ *mit einem Mittelpunkt* $P\in\boldsymbol{B}_M(Q)$, *so dass* $|v|<\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. *Dann gilt*

$$-D_\alpha\left(\tilde{a}^{\alpha\beta}(x)D_\beta|\tilde{v}|^2\right)\leq 0 \;\; in \;\; B \tag{2.37}$$

<u>Beweis:</u> Teste die schwache Formulierung

$$\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\phi^i(x)\,dx=\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\Gamma^l_{ik}\left(\tilde{v}\right)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\tilde{v}^k(x)\phi^l\,dx$$

mit $\phi(x)=\tilde{v}(x)\eta(x)+\tilde{v}(x_*)\eta(x_*)$, $x\in B^+$, $\eta\in C_c^\infty(B)$, es ergibt sich:

$$\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\tilde{v}^i(x)\eta(x)\,dx+\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\left(\tilde{v}^i(x_*)\right)\eta(x_*)\,dx$$
$$+\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\eta(x)\tilde{v}^i(x)\,dx+\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\eta(x_*)\tilde{v}^i(x_*)\,dx$$
$$=\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\Gamma^l_{ik}\left(\tilde{v}\right)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\tilde{v}^k(x)\tilde{v}^l(x)\eta(x)\,dx$$
$$+\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\Gamma^l_{ik}\left(\tilde{v}\right)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\tilde{v}^k(x)\tilde{v}^l(x_*)\eta(x_*)\,dx$$

Beachte: $\int\limits_{B^+}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\,dx=\int\limits_{B^-}\sigma(\alpha,\beta)\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\,dx$, $\int\limits_{B^+}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\,dx=\int\limits_{B^-}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\,dx$,
$\int\limits_{B^+}D_\alpha\left(\tilde{v}^i(x)\right)\,dx=\int\limits_{B^-}-\sigma(n,\alpha)D_\alpha\tilde{v}^i(x)\,dx$, $\int\limits_{B^+}D_\beta\left(\tilde{v}^i(x_*)\right)\,dx=\int\limits_{B^-}-\sigma(n,\beta)D_\beta\tilde{v}^i(x)\,dx$
und $\int\limits_{B^+}D_\beta(\eta(x_*))\,dx=\int\limits_{B^-}-\sigma(n,\beta)D_\beta\eta(x)\,dx$.

Damit ergibt sich nun

$$\int\limits_{B}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\tilde{v}^i(x)\eta(x)\,dx+\int\limits_{B}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\eta(x)\tilde{v}^i(x)\,dx$$
$$=\int\limits_{B}\sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\Gamma^l_{ik}\left(\tilde{v}\right)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\tilde{v}^k(x)\tilde{v}^l(x)\eta(x)\,dx,$$

da $\sigma(\alpha,\beta)\sigma(n,\alpha)\sigma(n,\beta)=1 \;\; \forall\,\alpha,\beta\in\{1,\ldots,n\}$.

Unter Benutzung von $\tilde{a}^{\alpha\beta}(x)$ und $f^l(\tilde{v})$ ergibt sich

$$\int\limits_{B}\tilde{a}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\tilde{v}^i(x)\eta(x)\,dx+\int\limits_{B}\tilde{a}^{\alpha\beta}(x)D_\alpha\tilde{v}^i(x)D_\beta\eta(x)\tilde{v}^i(x)\,dx=\int\limits_{B}f^l(\tilde{v})\tilde{v}^l(x)\eta(x)\,dx$$

Dies entspricht einer Gleichung zu Beginn des Beweises von Lemma 2.3, der Rest des Beweises von Lemma 2.8 verläuft daher wie der Beweis von Lemma 2.3. □

Als nächstes wird die Aussage von Lemma 2.6 an die vorliegende Situation am halbfreiem Rand angepasst.

Lemma 2.10 *Sei u die lokale Darstellung der harmonischen Abbildung U in Normalkoordinaten bzgl. der oben eingeführten Normalkarte $\chi^* : \boldsymbol{B}_M(Q) \to \mathbb{R}^N$ mit Mittelpunkt Q. Dann existiert ein $C = C(n, \lambda, \mu, M, \kappa) > 0$, so dass für alle $B_R(x_0) \subset B$ mit $B_{4R}(x_0) \subset B$ gilt:*

$$R^{2-n} \int\limits_{B_R(x_0)} \mathcal{E}(\tilde{u})\, dx \leq C \left[M^2(4R) - M^2(R)\right] \tag{2.38}$$

wobei $\mathcal{E}$ und $M(R)$ so definiert sind wie in Lemma 2.6.

Beweis: Teste die schwache Formulierung

$$\int\limits_{B^+} \sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x) D_\alpha \tilde{u}^i(x) D_\beta \phi^i(x)\, dx = \int\limits_{B^+} \sqrt{\tilde{\gamma}(x)}\tilde{\gamma}^{\alpha\beta}(x)\Gamma^l_{ik}\left(\tilde{u}\right) D_\alpha \tilde{u}^i(x) D_\beta \tilde{u}^k(x)\phi^l\, dx$$

mit $\phi(x) = \tilde{u}(x)\eta(x) + \tilde{u}(x_*)\eta(x_*)$, $x \in B^+$, $\eta \in C^\infty_c(B)$.
Wie im Beweis zu Lemma 2.8 kommt man zu

$$\int\limits_B \tilde{a}^{\alpha\beta}(x) D_\alpha \tilde{u}^i(x) D_\beta \tilde{u}^i(x)\eta(x)\, dx + \int\limits_B \tilde{a}^{\alpha\beta}(x) D_\alpha \tilde{u}^i(x) D_\beta \eta(x)\tilde{u}^i(x)\, dx = \int\limits_B f^l(\tilde{u})\tilde{u}^l(x)\eta(x)\, dx$$

Hieraus folgt

$$2\int\limits_B \left[\tilde{a}^{\alpha\beta} D_\alpha \tilde{u}^i D_\beta \tilde{u}^i - f^l(\tilde{u})\tilde{u}^l\right]\eta\, dx = -\int\limits_B \tilde{a}^{\alpha\beta} D_\alpha |\tilde{u}|^2 D_\beta \eta\, dx$$

Wähle $\eta \in C^\infty_c(B_{4R}(x_0))$, mit Hilfe von (2.8) und (2.9) kommt man zu

$$2a_\kappa(M) \int\limits_{B_{4R}(x_0)} \mathcal{E}(\tilde{u})\eta\, dx \leq -\int\limits_{B_{4R}(x_0)} \tilde{a}^{\alpha\beta} D_\alpha |\tilde{u}|^2 D_\beta \eta\, dx \tag{2.39}$$

(2.39) entspricht (2.13) im Beweis von Lemma 2.6, von hier an verläuft der Beweis von Lemma 2.10 genau wie der von Lemma 2.6. $\square$

Verfahre nun wie im Beweis der inneren Regularität: Wähle $J \in \mathbb{N}$ so, dass $M(1 + J^{-1}) < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, setze $K := \sqrt{2 + \frac{b^2_\omega(M)}{4}}$ und $\epsilon := \frac{1}{2KJ}$; $s = 4^{-m}$ sie die zu $\epsilon = \frac{1}{2KJ}$ und den oben definierten $\tilde{a}^{\alpha\beta}(x)$ gehörende Konstante aus Lemma 2.5. Es ergibt sich

Korollar 2.2 *Es existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $R_0 = 4^{-i_0}R, R < \frac{1}{4}$ gilt:*

$$\fint\limits_{B_{R_0}} |\tilde{u} - \overline{u}_{R_0}|^2\, dx \leq M^2\epsilon^4 s^{nJ} \tag{2.40}$$

wobei $\overline{u}_{R_0} = \fint\limits_{B_{R_0}} \tilde{u}\, dx$

Beweis: Analog zum Beweis von Korollar 2.1: Aus Lemma 2.10 folgt die Abschätzung

$$R^{2-n} \int\limits_{B_R(x_0)} |\nabla \tilde{u}|^2 \, dx \leq C(n, \lambda, \mu, M, \kappa) \left[M^2(4R) - M^2(R)\right]$$

Mit der Poincaré-Ungleichung erhält man für $R_0 = 4^{-i_0}R, i_0 \in \mathbb{N}$

$$\fint\limits_{B_{R_0}} |\tilde{u} - \overline{u}_{R_0}|^2 \, dx \leq C \left[M^2(4^{-i_0+1}R) - M^2(4^{-i_0}R)\right]$$

Mit $p := \left[\frac{C}{\epsilon^4 s^{nJ}}\right] + 1$ folgt $M^2 \geq p \, [M^2(4^{-i_0+1}R) - M^2(4^{-i_0}R)]$ für ein $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$, es folgt dann die Behauptung $\fint\limits_{B_{R_0}} |\tilde{u} - \overline{u}_{R_0}|^2 \, dx \leq M^2 \epsilon^4 s^{nJ}$ □

Beweis der Stetigkeit von $\tilde{u}$

Setze wieder $R_j = s^j R_0$, $\tau_j = \frac{j}{J} \overline{u}_{R_0}$, $P_j = \exp_Q(\tau_j)$ (für $0 \leq j \leq J$).
$\tilde{u}^{(j)}$ sei die Darstellung von U bzgl. Normalkoordinaten um P_j, definiere ferner $M_0 = M$, $M_j = \left(\frac{1}{J} + 1 - \frac{j}{J}\right) M, 1 \leq j \leq J$. Es gilt $M_j \leq M$, analog zum Beweis von Satz 2.2 zeigt man

$$\left|\tilde{v}^{(j)}\right| \leq M_j \text{ in } B_{R_j} \ \ \forall j \in \{0, \ldots, J\}$$

Mit $j = J$ kommt man zu $|\tilde{v}^J| \leq \frac{M}{J}$ in $B_{R_J} = B_{s^J 4^{-i_0} R}$, wobei s von n, λ, μ und i_0 von $n, \lambda, \mu, M, J, \omega, \kappa$ abhängen. Unter Verwendung von Lemma 2.7 kommt man wie im Fall der inneren Abschätzung zu

$$osc_{B_{R_J}} \tilde{u} \leq \frac{C}{J} \to 0, \quad R_J \to 0 \tag{2.41}$$

Beweis der Hölderstetigkeit von u

Wie im Beweis zu Satz 2.2 kommt man für $\varrho \leq 4^{-i_1}R = \tilde{R}, i_1 \in \mathbb{N}$ geeignet, zur Abschätzung

$$osc_{B_\varrho} \tilde{u} \leq C \left(\frac{\varrho}{4R}\right)^\alpha$$

mit $C = C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)$ und $\alpha = \alpha(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)$.
Da $B_\varrho^+ := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \varrho, x^n \geq 0\} \subset B_\varrho$ und $\tilde{u}$ die Spiegelung von u an der x^n-Achse ist, folgt

$$osc_{B_\varrho^+} u \leq C \left(\frac{\varrho}{4R}\right)^\alpha \tag{2.42}$$

Abschätzung (2.42) gilt für alle Bälle B_ϱ mit der Eigenschaft $B_\varrho \cap B^+ \subset B_R \cap B^+$ und $B_{4R} \cap B^+ \subset B^+$. Fixiere $\varrho \in (0, d)$, seien $x, y \in B_\varrho^+$, $x \neq y$.

1.Fall: $\varrho \in \left(0, \frac{\tilde{R}}{4}\right]$, wie in Abschnitt 2.2 folgt: $|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\alpha \varrho^{-\alpha}$

2.Fall: $\varrho \in \left(\frac{\tilde{R}}{4}, 1\right)$, überdecke $\overline{B_\varrho^+}$ mit endlich vielen Mengen der Art $B_{r_i}(\alpha_i) \cap B^+$, $r_i \leq \frac{\tilde{R}}{4}$ $(i = 1, \ldots, L)$, so dass $\overline{B_\varrho^+} \subset \bigcup_{i=1}^{L} B_{r_i}(\alpha_i) \cap B^+$ und setze $\overline{r} := \min_{i=1,\ldots,L} r_i$.

Gilt $|x-y| < \frac{\overline{r}}{2}$, so existiert ein $i \in \{1, \ldots, L\}$ mit der Eigenschaft, dass $x, y \in B^+ \cap B_{r_i}(\alpha_i)$ und es folgt wie im 1.Fall $\dfrac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C\varrho^{-\alpha}$.

Im Fall $|x - y| \geq \frac{\overline{r}}{2}$ schätzt man wieder wie folgt ab:

$$\frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\alpha} \leq \frac{2M}{\left(\frac{\overline{r}}{2}\right)^\alpha} \leq C\overline{r}^{-\alpha} \leq C\varrho^{-\alpha}$$

Somit gilt für alle $\varrho \in (0, d)$:

$$\sup_{\substack{x,y \in B_\varrho^+ \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)\varrho^{-\alpha}$$

Zeige jetzt analog zum Ende von Abschnitt 2.2 die Gültigkeit von (2.36). Sei $d < 1$, $4R := 1 - d$ und seien $x_1, x_2 \in B_d^+$, $x_1 \neq x_2 \to x_0 := \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \subset B_d^+$ und $B_{4R} \subset B$.

1.Fall: $|x_1 - x_2| \leq \frac{R}{2}$. Dann ist $|x_1 - x_0| = |x_2 - x_0| \leq R$ und es folgt:
$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|(4R)^{-\alpha}.$$

2.Fall: $|x_1 - x_2| > \frac{R}{2} \to 1 \leq 2^\alpha R^{-\alpha}|x_1 - x_2|^\alpha$, es ergibt sich:
$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq 2M \leq 2M2^\alpha R^{-\alpha}|x_1 - x_2|^\alpha \leq C(4R)^{-\alpha}|x_1 - x_2|^\alpha$$

In beiden Fällen folgt also: $\quad [u]_{\alpha, B_d^+} \leq C(n, \lambda, \mu, M, \omega, \kappa)(1-d)^{-\alpha} \quad \forall\, d < 1$ $\square$

2.5 Abschließende Bemerkungen

Die hier verwendete Methode von Caffarelli eignet sich auch um einen einfacheren Beweis eines Liouville-Satzes für harmonische Abbildungen von Hildebrandt-Jost-Widman [HJW, Theorem 1] zu führen, diese Entdeckung geht auf Meier zurück (s.[ME,p.10]). Es gilt nämlich

Satz 2.6 *Sei U eine harmonische Abbildung zwischen einer einfachen Riem. Mannigfaltigkeit $\mathcal{H}$ und einer vollständigen Riem. Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$. Das Bild $U(\mathcal{H})$ sei in einem regulären Ball $\mathbf{B}_M(Q) \subset \mathcal{M}$ enthalten. Dann ist U konstant.*

Hierbei heißt $\mathcal{H}$ *einfache Mannigfaltigkeit*, falls $\mathcal{H}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist, so dass der zugehörige Laplace-Beltrami Operator gleichmäßig elliptisch auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Ebenso konnte Meier mit dieser Methode ein Phragmén-Lindelöf Theorem für harmonische Abbildungen beweisen (s.[ME, p.27]):

Satz 2.7 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, so dass $\limsup_{R\to\infty} \frac{|B_R(0)-\Omega|}{|B_R(0)|} > 0$. $\mathcal{M}$ sei eine N-dim. vollständige Riem. Mannigfaltigkeit ohne Rand, $\boldsymbol{B}_M(Q) \subset \mathcal{M}$ sei ein regulärer Ball. $U : \Omega \to \boldsymbol{B}_M(Q)$ sei eine harmonsiche Abbildung der Klasse $H_2^1(\Omega \cap B_R(0), \boldsymbol{B}_M(Q))$ $\forall R > 0$. U sei entweder stetig auf $\partial\Omega$ oder $\partial\Omega$ sei ein lokaler Lipschitz-Rand. Gilt für ein $P \in \boldsymbol{B}_M(Q)$*

$$\sup_{\partial\Omega} dist_{\mathcal{M}}(U(x), P) \le M_1 \le \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}},$$

so gilt $$\sup_{\Omega} dist_{\mathcal{M}}(U(x), P) \le M_1$$

Alle in diesem Kapitel hergeleiteten Sätze betreffen schwach harmonische Abbildungen, also kritische Punkte der Euler-Lagrange-Gleichungen (2.1) bzw. (2.2). Auch im Fall, dass $u \in H_2^1(\mathcal{H}, \mathcal{M}) := \{u \in H_2^1(\mathcal{H}, \mathbb{R}^N); u(x) \in \mathcal{M} \text{ f.f.a. } x \in \mathcal{H}\}$ ein Minimierer des Energiefunktionals ist (d.h. $E(u) \le E(v)$ für alle $v \in H_2^1(\mathcal{H}, \mathcal{M})$, die die gleichen Randwerte wie u haben) kann man ohne die Annahme, dass $\mathbf{B}_M(Q)$ ein regulärer Ball nicht zeigen, dass u stetig ist. Nach Lin [LI] ist die im Ursprung unstetige Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}, \psi(x) = \frac{x}{|x|}, n \ge 3$, eine energieminimierende harmonische Abbildung. Allerdings gilt folgendes Resultat von Schoen-Uhlenbeck [SU]:

Satz 2.8 *Sei $u \in H_2^1(\mathcal{H}, \mathcal{M})$ eine energieminimierende Abbildung, so dass $u(x) \in K$ f.f.a. x, $K \subset \mathcal{M}$ kompakt. Dann gilt für die Hausdorff-Dimension von $\Im \cap \Omega$ die Abschätzung*

$$dim(\Im \cap \Omega) := \inf\{s \in [0, \infty); H^s(\Im \cap \Omega) = 0\} \le n - 3$$

wobei H^s das s-dim. Hausdorff-Maß bezeichne, Ω das Innere von $\mathcal{H}$ sei und $\Im$ das Komplement der Menge $\Re := \{x \in \mathcal{H}, u \text{ ist stetig in einer Umgenung von } x\}$ sei. Im Fall $n = 3$ ist $\Im$ eine diskrete Menge.

Bemerkung: Insbesondere ist $H^{n-3}(\Im \cap \Omega) \le C < \infty$ und $H^{n-2}(\Im \cap \Omega) = 0$.

Im Fall einer schwach harmonischen Abbildung ist so ein Ergebnis nicht möglich, Rivière [RI] konnte eine überall unstetige harmonische Abbildung vom n-dim. Einheitsball ($n \geq 3$) in die p-dim. Sphäre S^p ($p \geq 2$) konstruieren.

Erweitert man die Klasse der zulässigen Variationen in der Definition der schwach harmonischen Abbildung um innere Varaitionen, so kommt man zum Begriff der stationären harmonischen Abbildung, genauer:

Definition 2.3 *Eine Abbildung $u \in H_2^1(\mathcal{H}, \mathcal{M})$ heißt stationäre harmonische Abbildung, falls u eine schwach harmonische Abbildung ist und für jede glatte Ein-Parameter Familie von Diffeomorphismen Φ_t auf $\mathcal{H}$ mit $\Phi_t|_{\delta\mathcal{H}} = Id|_{\delta\mathcal{H}}$ gilt:*

$$\frac{d}{dt}E(u \circ \Phi_t) = 0$$

Im Gegensatz zu schwach harmonischen Abbildungen gilt im Fall stationärer harmonischer Abbildungen folgendes partielles Regularitätsresultat von Bethuel [BE]:

Satz 2.9 *Sei $u \in H_2^1(\mathcal{H}, \mathcal{M})$ eine stationäre harmonische Abbildung. Dann existiert eine abgeschlossene Teilmenge $\Sigma \subset \mathcal{H}$, so dass*

$$H^{n-2}(\Sigma) = 0 \quad \textit{und} \quad u \in C^\infty(\mathcal{H} - \Sigma, \mathcal{M})$$

gilt.

Kapitel 3

Regularität singulär elliptischer Systeme

Ziel dieses Kapitels ist es, Regularitätsaussagen und einen Liouville-Satz für schwache Lösungen singulär elliptischer Systeme der Form

$$D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)D_\beta u^i\right) = f^i(x,u,\nabla u) \qquad (i = 1,\dots,m)$$

in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$w(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)\xi_\alpha\xi_\beta \leq Cw(x)|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

herzuleiten, wobei $w(x) > 0$ f.f.a. $x \in \Omega$ ein singuläres Gewicht sei, dass bestimmte Eigenschaften erfüllt. Diese Eigenschaften (u.a. die Gültigkeit einer Poincaré- und Sobolev-Ungleichung) sind z.B. erfüllt, falls w in der Muckenhouptklasse A_2 liegt. Daher werden in Abschnitt 3.1 kurz Eigenschaften der Muckenhouptklassen A_p zusammengestellt. Wie im Beweis von Caffarelli für den Fall gleichmäßig elliptischer Systeme wird auch hier eine schwache Harnack-Ungleichung für Superlösungen linearer Gleichungen verwendet. Diese Harnack-Ungleichung wird in Abschnitt 3.2 gezeigt, die Beweisidee entstammt einer Arbeit von Trudinger [TR2]. Eine volle Harnack-Ungleichung für Lösungen wurde bereits in [FKS] unter Verwendung eines verallgemeinerten John-Nirenberg Lemmas gezeigt. Auch bestimmte Gewichte, die von quasikonformen Abbildungen stammen, erfüllen die für die Gültigkeit der schwachen Harnack-Ungleichung notwendigen Eigenschaften; dies ist Gegenstand von Abschnitt 3.3. In Abschnitt 3.4 wird dann unter der

Voraussetzung $a^* + aM < 2$ lokale Hölderstetigkeit von schwachen Lösungen obiger Systeme gezeigt. Dieses Ergebnis verallgemeinert Resultate von Baoyao [BAO, Theorem 3] ($w \in A_2$ beschränkt und $a^* + aM < 1$) sowie von Baldes [BA2]. Zum Beispiel sind in $B_R(0)$ schwache Lösungen von Systemen mit $a^{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta}|x|^\tau$, $\tau \in (-n, \infty)$ und $f \equiv 0$ lokal hölderstetig. Schließlich wird in Abschnitt 3.5 ebenfalls unter der Voraussetzung $a^* + aM < 2$ ein Liouville-Satz für schwache Lösungen in $\mathbb{R}^n$ bewiesen. Um die Eindeutigkeit des schwachen Gradienten in $H_2^1(\mathbb{R}^n, w)$ zu garantieren, müssen außerhalb eines beliebigen Balls $B_L(0)$ die Koeffizienten glm. elliptsich sein, also $w = 1$.

3.1 Die Muckenhouptklassen A_p

In diesem Abschnitt werden die sogenannten Muckenhouptklassen A_p eingeführt, für Gewichte $w \in A_2$ kann man Regularität schwacher Lösungen gewisser quasilinearer elliptischer Systeme zeigen. In diesem Kapitel sei w stets eine nichtnegative lokal-integrable Funktion, d.h. $w \geq 0$, $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 3.1 *Die Funktion w liegt in der Muckenhouptklasse A_p, $1 < p < \infty$, falls*

$$\sup_{B_R \subset \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} w(x)\, dx \right) \left(\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} w(x)^{\frac{-1}{p-1}}\, dx \right)^{p-1} =: C_p < \infty \tag{3.1}$$

Bemerkung: Die Konstante C_p heißt A_p-Konstante von w.

Die Klassen A_p wurden zuerst von Muckenhoupt in Zusammenhang mit Hardy-Funktionen eingeführt, s. [MU1], nun werden ohne Beweis einige Eigenschaften von Funktionen $w \in A_p$ aufgeführt.

Lemma 3.1 *(s. [MU1], p.214) Sei $w \in A_p$, dann existiert ein $r = r(p, C_p) \in (1, p)$, so dass $w \in A_r$, die A_r-Konstante von w hängt nur von p und C_p ab.*

Lemma 3.2 *(s. [CF], p.246) Sei $w \in A_p$, dann existiert ein $\delta = \delta(p, C_p) > 0$*

und ein $C = C(p, C_p) > 0$, so dass die umgekehrte Hölder-Ungleichung

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} (w(x))^{1+\delta}\, dx \right)^{\frac{1}{1+\delta}} \leq C \left(\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} w(x)\, dx \right)$$

gilt.

Definition 3.2 *(s. [MU2, p.101]) $w \in A_\infty$, falls $w \geq 0$ und für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle meßbaren Mengen $E \subset B_R$ mit $|E| < \delta |B_R|$ gilt: $\dfrac{w(E)}{w(B_R)} \leq \epsilon$, wobei $w(E) = \int\limits_E w(x)\, dx$.*

Mit zwei Ergebnissen von Muckenhoupt [MU2, p.104] und Coifman-Fefferman [CF, p.244] folgt:

Lemma 3.3 *$w \in A_p$ für ein $p > 1$ genau dann, wenn $w \in A_\infty$, d.h. $A_\infty = \bigcup\limits_{p>1} A_p$.*

Lemma 3.4 *(s. [MW, p.223]) Sei $w \in A_\infty$, dann existieren positive Konstanten c_1 und c_2, so dass für $c > 0$ gilt:*

$$c_1 \leq \frac{\int\limits_{B_{cR}} w\, dx}{\int\limits_{B_R} w\, dx} \leq c_2 \tag{3.2}$$

Insbesondere gilt die doubling property: $w(B_{2R}) \leq K w(B_R)$ mit $K > 0$.

Die folgenden beiden Ungleichungen wurden von Fabes-Kenig-Serapioni [FKS, Thm. 1.2 & Thm. 1.5] bewiesen und verallgemeineren die Sobolev- und Poincaréungleichungen auf den Fall von Gewichtsfunktionen $w \in A_p$.

Lemma 3.5 *Sei $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Dann existieren Konstanten $C > 0, \delta > 0$, die nur von n und p abhängen, so dass für alle Bälle $B_R \subset \Omega$, für alle $1 \leq k \leq \frac{n}{n-1} + \delta$ und alle $u \in C_c^\infty(B_R)$ gilt:*

$$\left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |u|^{kp} w\, dx \right)^{\frac{1}{kp}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\nabla u|^p w\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

Lemma 3.6 *Sei $w \in A_p$, $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann existieren Konstanten $C > 0, \delta > 0$, die nur von n und p abhängen, so dass für $B_R \subset \Omega$, $u \in C^1(\overline{B_R})$ und für $k \in [1, \frac{n}{n-1} + \delta]$ gilt:*

$$\left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \left| u(x) - \frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} u(x) w \, dx \right|^{kp} w \, dx \right)^{\frac{1}{kp}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\nabla u|^p w \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.4}$$

3.2 Eine Harnack-Ungleichung für singuläre Koeffizienten

In diesem Abschnitt wird nun eine Harnack-Ungleichung für nicht-negative Superlösungen von singulär elliptischen Gleichungen bewiesen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, in Ω werden Gleichungen der Form

$$Lu = D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u \right) = 0 \tag{3.5}$$

betrachtet. Die symmetrischen Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x)$ sollen die Elliptizitätsbedingung

$$w(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq cw(x)|\xi|^2 \tag{3.6}$$

mit $w(x) \in A_2$ und $c \geq 1$ erfüllen. Es werden Lösungen von (3.5) in gewichteten Sobolev-Räumen betrachtet, diese Räume sind wie folgt definiert (s.[FKS, p.91]):

Definition 3.3 *i) $H_2^1(\Omega, w)$ sei der Abschluß von $C^\infty(\overline{\Omega})$ unter der Norm $\int\limits_\Omega |u(x)|^2 w \, dx + \int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2 w \, dx$.*
ii) $H_{2,0}^1(\Omega, w)$ sei der Abschluß von $C_c^\infty(\Omega)$ unter der Norm $\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2 w \, dx$.

Das folgende Lemma zeigt, dass der Gradient einer Funktion $u \in H_2^1(\Omega, w)$ mit $w \in A_2$ eindeutig bestimmt ist (s. [FKS, p.90]).

Lemma 3.7 *Sei $w \in A_2$ und $\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int\limits_\Omega |\varphi_k|^2 w \, dx \to 0, k \to \infty$ und $\int\limits_\Omega |\nabla\varphi_k - v|^2 w \, dx \to 0, k \to \infty$. Dann ist $v \equiv 0$.*

Beweis: Aus der Definition der Muckenhouptklasse A_2 folgt, dass $w, \frac{1}{w} \in L^1(\Omega)$,

nun gilt: $$\int\limits_\Omega |\varphi_k|\,dx \le \left(\int\limits_\Omega |\varphi_k|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{w}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, k \to \infty$$

und $$\int\limits_\Omega |\nabla\varphi_k - v|\,dx \le \left(\int\limits_\Omega |\varphi_k - v|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \frac{1}{w}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, k \to \infty$$

Also $(\varphi_k, \nabla\varphi_k) \to (0, v)$ in der $H_1^1(\Omega)$-Norm, noch z.z.: $v \equiv 0$, sei dazu $\phi \in C_c^1(\Omega)$, für $j = 1, \ldots, n$ ergibt sich dann mit der Wälzformel:

$$\left|\int\limits_\Omega v_j \phi\,dx\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\phi\,dx\right| = \left|\lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega \varphi_k \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\,dx\right| \le C \lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega |\varphi_k|\,dx = 0$$

Also ist $v_j \equiv 0\ \forall j = 1, \ldots, n$ und somit $v \equiv 0$. $\square$

Daher kann man für $u \in H_2^1(\Omega, w)$ einen schwachen Gradienten ∇u definieren: Ist $\varphi_k \in C^\infty, \varphi_k \to u$ in $L^2(\Omega, w)$ und $\nabla\varphi_k \to v$ in $L^2(\Omega, w)$, so setze $\nabla u = v$.

Bemerkung: Fabes-Kenig-Serapioni [FKS,p.91/92] konnten ein Gewicht w ($w \notin A_\infty$) und eine Folge von Funktionen $f_n(x)$ konstruieren, so dass $f_n(x) \to 0$ in $L^2((0,1), w)$, aber $f_n'(x) \to 1$ in $L^2((0,1), w)$.

Die Aussagen von Lemma 3.5 und Lemma 3.6 gelten für $w \in A_2$ auch für $u \in H_{2,0}^1(B_R, w)$ (Lemma 3.5) bzw. $u \in H_2^1(B_R, w)$ (Lemma 3.6).
Zum Beweis des ersten Falls sei $u \in H_{2,0}^1(B_R, w)$ bel., bestimme eine Folge $\phi_n \in C_c^\infty(B_R)$, so dass $\phi_n \to u$ in der $H_{2,0}^1(B_R, w)$-Norm. Setze $\varphi = \phi_n - \phi_m$, Anwendung von Lemma 3.5 ergibt, dass ϕ_n eine Cauchy-Folge in $L_{2k}(B_R, w)$ ist, d.h. $\phi_n \to u$ in L_{2k}. Die linke Seite von (3.3) konvergiert dann gegen $\left(\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R} |u|^{2k} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}$,

die rechte Seite konvergiert gegen CR $\left(\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R} |\nabla u|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$; somit gilt Lemma 3.5 auch für $H_{2,0}^1(B_R, w)$-Funktionen.
Im zweiten Fall sei $u \in H_2^1(B_R, w)$ bel. und wähle eine Folge $u_n \in C^\infty(B_R)$, so dass $u_n \to u$ in der H_2^1-Norm. Wende nun (3.4) auf $u_n - u_m$ an, es folgt:

$$\left(\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}\left|u_n-\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}u_nw\,dx-u_m+\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}u_mw\,dx\right|^{2k}w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}$$
$$\leq CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}|\nabla u_n-\nabla u_m|^2w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,\ n,m\to\infty.$$

Also ist $u_n-\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}u_nw\,dx$ eine Cauchy-Folge in $L_{2k}(\Omega,w)$ und es gilt dann $u_n-\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}u_nw\,dx\to u-\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}uw\,dx$ in $L_{2k}(\Omega,w)$.

Analog zum 1.Fall folgt nun, dass (3.4) auch für $H_2^1(B_R,w)$-Funktionen gilt.

Lemma 3.8 zeigt, dass die Verkettung einer $H_2^1(\Omega,w)$-Funktion mit einer stückweise glatten Funktion wieder in $H_2^1(\Omega,w)$ ist, ferner gilt die Kettenregel.

Lemma 3.8 *Sei f stückweise glatt (d.h. f sei stetig und habe stückweise stetige Ableitungen) mit $f'\in L_\infty(\mathbb{R})$. Ist $u\in H_2^1(\Omega,w)$, so ist $f\circ u\in H_2^1(\Omega,w)$. In den Punkten, in denen f' existiert, gilt $D(f\circ u)=f'(u)Du$, in den anderen Punkten gilt $D(f\circ u)=0$.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum Beweis der Lemmata 7.5, 7.6 und 7.8 in [GT]. □

Eine Funktion $u\in H_2^1(\Omega,w)$ heißt schwache Lösung von (3.5) in Ω, falls für alle $\varphi\in H_{2,0}^1(\Omega,w)$ gilt:

$$\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x)D_\beta uD_\alpha\varphi\,dx=0$$

$u\in H_2^1(\Omega,w)$ heißt schwache Sublösung von (3.5) in Ω, falls für alle $\varphi\in H_{2,0}^1(\Omega,w)$, $\varphi\geq 0$ gilt:

$$\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x)D_\beta uD_\alpha\varphi\,dx\leq 0 \tag{3.7}$$

$u\in H_2^1(\Omega,w)$ heißt schwache Superlösung, falls $-u$ schwache Sublösung ist.

In [FKS] wurde gezeigt, dass schwache Lösungen von (3.5) lokal hölderstetig sind, hier wird nun eine schwache Harnack-Ungleichung für Superlösungen hergeleitet, deren Beweis auf Ideen von Trudinger [TR2] beruht und kein verallgemeinertes John-Nirenberg-Lemma wie im Beweis der vollen Harnack-Ungleichung von

[FKS] verwendet. Diese Harnack-Ungleichung wird später benutzt, um Regularität schwacher Lösungen gewisser singulär elliptischer Systeme zu zeigen. Es gilt folgender

Satz 3.1 *Sei u eine schwache, nicht-negative Superlösung von (3.5) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $B_R \subset \Omega$ und für alle $0 < \alpha < \beta < 1$, $0 < \gamma < k$ die Abschätzung*

$$\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} |u|^\gamma w \, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq C(n, \alpha, \beta, \gamma) \inf_{B_{\alpha R}} u \tag{3.8}$$

wobei $k > 1$ die Konstante aus den Sobolev- und Poincaré-Ungleichungen (Lemmata 3.5 und 3.6) bezeichnet.

Bemerkung: Da Satz 3.1 auch für gleichmäßig elliptische Koeffizienten gilt, stellt dieser Satz eine Verallgemeinerung von [GT, Thm. 8.18] mit $k(R) = 0$ dar.

Der Beweis dieses Satzes wird in drei Lemmata unterteilt, die in den Beweisen auftretende Konstante C ist eine generische Konstante und hängt nur von den in der jeweiligen Behauptung angegebenen Größen ab.

Lemma 3.9 *Sei u eine schwache Sublösung von (3.5). Dann gilt für $B_R \subset \Omega$ die Abschätzung*

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leq C(n, \alpha, \beta, C_2) \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} |u^+|^2 w \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

wobei $\alpha < \beta < 1$, C_2 die A_2-Konstante von w und $u^+ = \sup(u, 0)$ sei.

Beweis: Für $\delta \geq 1$ und $0 < N < \infty$ definiere F durch

$$F(u) = F_\delta^N(u) = \begin{cases} (u^+)^\delta, & u \leq N \\ \delta N^{\delta - 1} u - (\delta - 1) N^\delta & u > N \end{cases}$$

Teste die schwache Formulierung $\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u D_\alpha \varphi \, dx \leq 0$ mit $\varphi(x) = \eta^2(x) F(u)$, $\eta \geq 0, \eta \in C_c^1(B_R)$ (φ ist nach Lemma 3.8 eine zulässige Testfunktion), es ergibt sich dann:

$$\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u \left[2\eta(x) D_\alpha \eta F(u) + \eta^2(x) F'(u) D_\alpha u \right] \, dx \leq 0$$

Mit den Strukturbedingungen (3.6) folgt

$$\int_\Omega \eta^2 F'(u)|\nabla u|^2 w\,dx \le C\int_\Omega \eta|\eta_x|F|\nabla u|w\,dx \tag{3.10}$$

Eine kurze Rechnung zeigt die Gültigkeit der Ungleichung $F(u) \le u^+F'(u)$. Mit der Hölderungleichung folgt nun

$$\int_\Omega \eta^2 F'|\nabla u|^2 w\,dx \le C\left(\int_\Omega \eta^2|\nabla u|^2 F' w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega \eta_x^2 (u^+)^2 F' w\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$ also gilt:

$$\int_\Omega \eta^2 F'|\nabla u|^2 w\,dx \le C\int_\Omega \eta_x^2\left(u^+\right)^2 F' w\,dx \tag{3.11}$$

Setze $G(u) := \int\limits_0^u |F'(t)|^{\frac{1}{2}}\,dt = \begin{cases} \sqrt{\delta}\frac{2}{\delta+1}|u^+|^{\frac{\delta+1}{2}}, & u \le N \\ \sqrt{\delta}N^{\frac{\delta-1}{2}}|u|, & u > N \end{cases}$. Aus (3.11) folgt dann:

$$\int_\Omega \eta^2|\nabla G|^2 w\,dx \le C\int_\Omega \eta_x^2\left(u^+G'\right)^2 w\,dx \tag{3.12}$$

Durch Anwendung der Sobolev-Ungleichung (Lemma 3.5) erhält man

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} |\eta G|^{2k} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} &\le CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} |\nabla(\eta G)|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{Young}{\le} CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} \left(\eta^2|\nabla G|^2 + \eta_x^2 G^2\right) w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(3.12)}{\le} CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} \eta_x^2\left[\left(u^+G'\right)^2 + G^2\right] w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Da $G \le u^+G'$ gilt insgesamt also

$$\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} |\eta G|^{2k} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \le CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} \eta_x^2\left(u^+G'\right)^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.13}$$

Setze $q := \frac{\delta+1}{2} > 1$ und ziehe die q-te Wurzel aus (3.13):

$$\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} |\eta G|^{2k} w\,dx\right)^{\frac{1}{2kq}} \le (CR)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{w(B_R)}\int_{B_R} \eta_x^2\left(u^+G'\right)^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2q}}$$

Wähle ρ und σ so, dass $\alpha \leq \rho < \sigma \leq \beta$ und η so, dass $\operatorname{supp} \eta \subset B_{\sigma R}$, $\eta \equiv 1$ in $B_{\rho R}$, $|\eta_x| \leq \frac{2}{(\sigma-\rho)R}$. Für $N = \infty$ erhält man mit der Definition von $F(u)$
$G(u) = \int\limits_0^u |F'(t)|^{\frac{1}{2}}\, dt = \int\limits_0^u |\delta(t^+)^{\delta-1}|^{\frac{1}{2}}\, dt = \sqrt{\delta} \int\limits_0^u (t^+)^{\frac{\delta-1}{2}}\, dt = \frac{\sqrt{\delta}}{q}(u^+)^q$.
Mit Hilfe der „doubling property“ (Lemma 3.4) und $w(B_{\beta R}) \leq w(B_R)$ kommt man zu

$$\left(\frac{1}{w(B_{\rho R})} \int\limits_{B_{\rho R}} |\eta G|^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2kq}} \leq (CR)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\sigma R}} \left(\eta_x u^+ G'\right)^2 w\, dx \right)^{\frac{1}{2q}}$$

Aus $G(u) = \frac{\sqrt{\delta}}{q}\,(u^+)^q$ und den Bedingungen an η folgt weiter

$$\left(\frac{1}{w(B_{\rho R})} \int\limits_{B_{\rho R}} \left(u^+\right)^{2kq} w\, dx \right)^{\frac{1}{2kq}} \leq \left(\frac{Cq}{\sigma - \rho} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\sigma R}} \left(u^+\right)^{2q} w\, dx \right)^{\frac{1}{2q}} \tag{3.14}$$

Nun wird Abschätzung (3.14) iteriert. Setze dazu $q_0 = 1, q_i = kq_{i-1}$
$= k^i \to \infty, i \to \infty$, da $k > 1$. Sei ferner $\rho_i = \alpha + (\beta - \alpha)^{1+i}$, $\sigma_i = \rho_{i-1}$, dann ist $\rho_0 = \beta, \sigma_\infty = \alpha$, beachte $\rho_i - \rho_{i+1} = (\beta - \alpha)^{1+i}\,(1 - (\beta - \alpha))$. Es folgt:

$$\lim_{i\to\infty} \left(\frac{1}{w(B_{\rho R})} \int\limits_{B_{\rho R}} \left(u^+\right)^{2kq_i} w\, dx \right)^{\frac{1}{2kq_i}} = \sup_{B_{\alpha R}} u^+.$$ Mit (3.14) erhält man nun

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leq \sup_{B_{\alpha R}} u^+ \leq \prod_{l=0}^{\infty} \left(\frac{Cq_l}{\rho_l - \rho_{l+1}} \right)^{\frac{1}{q_l}} \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} \left(u^+\right)^2 w\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.15}$$

Schätze nun das Produkt in (3.15) ab:
$\prod_{l=0}^{\infty} \left(\frac{Cq_l}{(\beta-\alpha)^{1+l}(1-(\beta-\alpha))} \right)^{\frac{1}{q_l}} = \exp\left(\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q_l} \log\left(\frac{Cq_l}{(\beta-\alpha)^{1+l}(1-(\beta-\alpha))} \right) \right) \right)$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe und deren Ableitung kommt man zu

i) $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{q_l} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k^l} = \frac{1}{1-\frac{1}{k}} < \infty \quad (k > 1)$

ii) $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{\log q_l}{q_l} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{\log k^l}{k^l} = \log k \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{l}{k^l} = \log k \left[\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \right] = \frac{k \log k}{(k-1)^2} < \infty$

iii) $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{q_l} < \infty \quad$ (nach i) und ii))

Insgesamt ergibt sich also

$$\exp\left(\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q_l}\log\left(\frac{Cq_l}{(\beta-\alpha)^{1+l}(1-(\beta-\alpha))}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\log C + \frac{k\log k}{(k-1)^2} - \frac{\log(1-(\beta-\alpha))}{1-\frac{1}{k}} - C\log(\beta-\alpha)\right) \leq C(n,\alpha,\beta,C_2).$$

Mit (3.15) ergibt sich dann $\sup\limits_{B_{\alpha R}} \leq C(n,\alpha,\beta,C_2)\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} |u^+|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$, also die Behauptung. □

Lemma 3.10 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt. Dann gilt:*

$$\frac{1}{\inf\limits_{B_{\alpha R}} u} \leq \exp\left(C - \frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} \log u\, w\,dx\right) \tag{3.16}$$

<u>Beweis:</u> Sei zunächst $u \geq \epsilon > 0$, wähle als Testfunktion $\phi(x) = \eta(x)u^{-1}(x)$, $\eta \geq 0, \eta \in C_c^1(\Omega)$ (nach Lemma 3.8 ist ϕ zulässig). Da u eine Superlösung von (3.5) ist, ergibt Einsetzen von ϕ

$$\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u D_\alpha \eta u^{-1}\,dx - \int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u D_\alpha u \eta u^{-2}\,dx \geq 0$$

Setze $v := \log\left(\frac{t}{u}\right)$, $t = const. > 0 \to D_\beta v = -\frac{D_\beta u}{u}$

Da $\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u D_\alpha u\eta u^{-2}\,dx \geq \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\eta u^{-2} w\,dx \geq 0$, folgt $\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta v D_\alpha \eta\,dx \leq 0$. Somit ist v eine schwache Sublösung von (3.5) und mit Lemma 3.9 folgt

$$\sup_{B_{\alpha R}} v \leq C\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} |v^+|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.17}$$

Teste nun mit $\phi(x) = \eta^2(x)u^{-1}(x)$, $\eta \in C_c^1(\Omega)$. Einsetzen ergibt

$$2\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u\eta D_\alpha \eta u^{-1}\,dx - \int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u D_\alpha u\eta^2 u^{-2}\,dx \geq 0$$

Mit (3.6) und der Hölderungleichung folgt

$$\int\limits_{\Omega} \eta^2 u^{-2}|\nabla u|^2 w\,dx \leq C\int\limits_{\Omega} \eta|\eta_x||\nabla u|u^{-1} w\,dx$$

$$\leq C\left(\int\limits_{\Omega}|\eta_x|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\eta^2 u^{-2} w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Es gilt also $\int\limits_{\Omega}\eta^2 u^{-2}|\nabla u|^2 w\,dx \leq C\int\limits_{\Omega}\eta_x^2 w\,dx.$

Wähle η so, dass $\eta\equiv 1$ in $B_{\beta R}$, supp $\eta\subset B_R$, $|\eta_x|\leq\frac{2}{(1-\beta)R}$, beachte:
$\nabla v = u^{-1}\nabla u \to |\nabla v|^2 = u^{-2}|\nabla u|^2$, damit folgt aus der letzten Abschätzung

$$\int\limits_{B_{\beta R}}|\nabla v|^2 w\,dx \leq C\left(\frac{1}{R^2}\int\limits_{B_R} w\,dx\right)$$

Bestimme t so, dass $\int\limits_{B_{\beta R}} vw\,dx = 0$, d.h. $\log t = \frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}\log uw\,dx$. Aus der Poincaré-Ungleichung (Lemma 3.6) und der obigen Abschätzung folgt dann

$$\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}|v|^{2k} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \leq CR\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}|\nabla v|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C(n,\beta,C_2)$$

Mit dieser Ungleichung und mit (3.17) ergibt sich

$$\sup_{B_{\alpha R}} v = \log t - \inf_{B_{\alpha R}}(\log u) = \log t - \log\left(\inf_{B_{\alpha R}} u\right) = \log t + \log\left(\frac{1}{\inf\limits_{B_{\alpha R}} u}\right)$$

$$\leq C\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}|v^+|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \overset{\textit{Hölder}}{\leq} C\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}|v|^{2k} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \leq C$$

Also gilt $\log\left(\frac{1}{\inf\limits_{B_{\alpha R}} u}\right) \leq C - \log t$, mit der Definition von t folgt jetzt die

Behauptung $\quad \left(\inf\limits_{B_{\alpha R}} u\right)^{-1} \leq \exp\left(C - \frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}\log uw\,dx\right)$

Gilt nur $u\geq 0$ anstelle von $u\geq\epsilon>0$, so folgt die Behauptung mit dem Satz von Levi. □

Lemma 3.11 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt. Dann gilt:*

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})}\int\limits_{B_{\alpha R}}|u|^\gamma w\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \exp\left(C+\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}\log u w\,dx\right) \tag{3.18}$$

wobei $0<\gamma<k$, $C=C(n,\alpha,\beta,\gamma,C_2)$.

Beweis: O.E. gelte wieder $u\geq\epsilon>0$, die Aussage für $u\geq 0$ folgt dann wieder mit dem Satz von Levi.
Betrachte $f=v^-=\left(\log\frac{u}{t}\right)^+$ und teste mit $\phi(x)=\eta^2(x)u^{-1}(x)\left(f^\delta(x)+(2\delta)^\delta\right)$ mit $\delta\geq 1$, $\eta\in C^1_c(B_R),\eta\geq 0$ (ϕ ist eine zulässige Testfunktion). Es gilt:
$D_\alpha\phi=2\eta D_\alpha\eta u^{-1}\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right)+\eta^2u^{-2}\left(\delta f^{\delta-1}-f^\delta-(2\delta)^\delta\right)D_\alpha u$,
durch eine kurze Rechnung bestätigt man die Ungleichung

$$\delta f^{\delta-1}\leq\frac{1}{2}\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right) \tag{3.19}$$

Setze nun ϕ in die schwache Formulierung von (3.5) ein:

$$\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u\eta^2u^{-2}\left(-\delta f^{\delta-1}+f^\delta+(2\delta)^\delta\right)D_\alpha u\,dx\leq 2\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u\eta D_\alpha\eta u^{-1}\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right)dx$$

Mit den Elliptizitätsbedingungen (3.6) ergibt sich

$$\int\limits_\Omega\eta^2u^{-2}\left(f^\delta+(2\delta)^\delta-\delta f^{\delta-1}\right)|\nabla u|^2w\,dx\leq C\int\limits_\Omega\eta|\nabla u||\eta_x|u^{-1}\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right)w\,dx$$

Mit Abschätzung (3.19) folgt

$$\int\limits_\Omega\eta^2u^{-2}\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right)|\nabla u|^2w\,dx\leq C\int\limits_\Omega\eta|\eta_x|u^{-1}\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right)|\nabla u|w\,dx$$

Beachte nun, dass $|\nabla f|^2=u^{-2}|\nabla u|^2$, mit der Hölderungleichung folgt dann

$$\int\limits_\Omega\eta^2\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right)|\nabla f|^2w\,dx\leq C\int\limits_\Omega\eta_x^2\left(f^\delta+(2\delta)^\delta\right)w\,dx$$

Mit der Young'schen Ungleichung erhält man die Abschätzung
$f^\delta+(2\delta)^\delta\leq 2\left(f^{\delta+1}+(2\delta)^\delta\right)$, hiermit und mit (3.19) kommt man zu

$$\delta\int\limits_\Omega\eta^2f^{\delta-1}|\nabla f|^2w\,dx\leq C\int\limits_\Omega\eta_x^2\left(f^{\delta+1}+(2\delta)^\delta\right)w\,dx \tag{3.20}$$

Mit $q := \frac{\delta+1}{2} > 1$, der Sobolev-Ungleichung (Lemma 3.5) und der Young'schen Ungleichung erhält man für $\eta f^q \in H^1_{2,0}(B_R, w)$:

$$\left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\eta f^q|^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \left(\eta_x^2 f^{\delta+1} + \eta^2 (\delta+1)^2 f^{\delta-1} |\nabla f|^2 \right) w\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Mittels (3.20) kann man weiter abschätzen

$$\begin{aligned} & CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \left(\eta_x^2 f^{\delta+1} + \eta^2 (\delta+1)^2 f^{\delta-1} |\nabla f|^2 \right) w\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \left(q \eta_x^2 f^{\delta+1} + \frac{(\delta+1)^2}{\delta} \eta_x^2 \left(f^{\delta+1} + (2\delta)^\delta \right) \right) w\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & C\sqrt{q} R \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \eta_x^2 f^{2q} w\, dx + (2\delta)^\delta \frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \eta_x^2 w\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq\ & C\sqrt{q} R \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} (\eta_x f^q)^2 w\, dx + (2\delta)^\delta \sup_{B_R} |\eta_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also die Abschätzung

$$\left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\eta f^q|^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \leq C\sqrt{q} R \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} (\eta_x f^q)^2 w\, dx + (2\delta)^\delta \sup_{B_R} |\eta_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

Wähle ρ und σ so, dass $\alpha \leq \rho < \sigma \leq \beta$ und η so, dass $\operatorname{supp} \eta \subset B_{\sigma R}, \eta \equiv 1$ in $B_{\rho R}, |\nabla \eta| \leq \frac{2}{(\sigma-\rho)R}$. Ziehe dann die q-te Wurzel aus (3.21):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\eta f^q|^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2kq}} \\ \leq\ & (C\sqrt{q}R)^{\frac{1}{q}} \left\{ \left(\frac{2}{(\sigma-\rho)R} \right)^2 \frac{1}{w(B_{\sigma R})} \int\limits_{B_{\sigma R}} f^{2q} w\, dx + (2\delta)^\delta \left(\frac{2}{(\sigma-\rho)R} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2q}} \\ \leq\ & (CqR)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{2}{(\sigma-\rho)R} \right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \frac{1}{w(B_{\sigma R})} \int\limits_{B_{\sigma R}} f^{2q} w\, dx + (2\delta)^\delta \right\}^{\frac{1}{2q}} \end{aligned}$$

$$\leq (Cq)^{\frac{1}{q}}(\sigma-\rho)^{-\frac{1}{q}}\left\{(2\delta)^{\frac{\delta}{\delta+1}}+\left(\frac{1}{w(B_{\sigma R})}\int\limits_{B_{\sigma R}} f^{2q} w\,dx\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}$$

Mit der doubling property erhalten wir jetzt die Abschätzung

$$\left(\frac{1}{w(B_{\rho R})}\int\limits_{B_{\rho R}} f^{2qk} w\,dx\right)^{\frac{1}{2kq}} \leq (Cq)^{\frac{1}{q}}(\sigma-\rho)^{-\frac{1}{q}}\left\{Cq+\left(\frac{1}{w(B_{\sigma R})}\int\limits_{B_{\sigma R}} f^{2q} w\,dx\right)^{\frac{1}{2q}}\right\} \tag{3.22}$$

Setze $q_i = k^i \geq 1, \rho_i = \alpha + 2^{-i}(\beta-\alpha), \sigma_i = \rho_i + 2^{-i}(\beta-\alpha) \to \sigma_i - \rho_i = 2^{-i}(\beta-\alpha)$, beachte: $\sigma_i = \rho_{i-1}, \sigma_1 = \beta, \rho_\infty = \alpha$. (3.22) schreibt sich dann wie folgt:

$$\left(\frac{1}{w(B_{\rho_i R})}\int\limits_{B_{\rho_i R}} f^{2k^{i+1}} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k^{i+1}}} \leq (Ck^i)^{\frac{1}{k^i}}\left(2^{-i}(\beta-\alpha)\right)^{-\frac{1}{k^i}}\left[Ck^i+\left(\frac{1}{w(B_{\sigma_i R})}\int\limits_{B_{\sigma_i R}} f^{2k^i} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k^i}}\right]$$

$$\leq (Ck^i 2^i)^{\frac{1}{k^i}}(\beta-\alpha)^{-\frac{1}{k^i}}\left[Ck^i+\left(\frac{1}{w(B_{\sigma_i R})}\int\limits_{B_{\sigma_i R}} f^{2k^i} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k^i}}\right]$$

$$\leq (Ck^i 2^i)^{\frac{1}{k^i}}\left[Ck^i+\left(\frac{1}{w(B_{\sigma_i R})}\int\limits_{B_{\sigma_i R}} f^{2k^i} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k^i}}\right]$$

<u>Iteration dieser Ungleichung</u>

1.Iterationsschritt:

$$\left(\frac{1}{w(B_{\rho_i R})}\int\limits_{B_{\rho_i R}} f^{2k^{i+1}} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k^{i+1}}}$$

$$\leq (Ck^i 2^i)^{\frac{1}{k^i}}\left[Ck^i+(Ck^{i-1}2^{i-1})^{\frac{1}{k^{i-1}}}\left(Ck^{i-1}+\left(\frac{1}{w(B_{\sigma_{i-1} R})}\int\limits_{B_{\sigma_{i-1} R}} f^{2k^{i-1}} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k^{i-1}}}\right)\right]$$

Nach $i-1$ Iterationsschritten erhält man

$$\left(\frac{1}{w(B_{\rho_i R})}\int\limits_{B_{\rho_i R}} f^{2k^{i+1}} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k^{i+1}}} \leq \sum_{j=1}^{i} Ck^j \prod_{l=j}^{i}(Ck^l 2^l)^{\frac{1}{k^l}} + \prod_{j=1}^{i}(Ck^j 2^j)^{\frac{1}{k^j}}\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \tag{3.23}$$

Abschätzung der Summen und Produkte in (3.23)

1) $\prod_{j=1}^{i} (Ck^j 2^j)^{\frac{1}{k^j}} \leq \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} \log\left(Ck^j 2^j\right)\right)$

$= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k^j} \log(C) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{k^j} \log(2k)\right) < \infty$ (s. Beweis von Lemma 3.9),

somit gilt also:

$$\prod_{j=1}^{i} \left(Ck^j 2^j\right)^{\frac{1}{k^j}} \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx\right)^{\frac{1}{2k}} \leq C(n, \alpha, \beta, C_2) \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx\right)^{\frac{1}{2k}}$$

2a) Sei $1 < k < 2$, setze $p := 2k^{m+1}, m \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} Ck^i \prod_{j=i}^{m+1} (Ck^j 2^j)^{\frac{1}{k^j}} \leq C \sum_{i=1}^{m+1} k^i \prod_{j=i}^{m+1} (2k)^{\frac{j}{k^j}} \leq C \sum_{i=1}^{m+1} k^i \prod_{j=i}^{m+1} k^j$

$= C \left[k^{1+\sum_{i=1}^{m+1} i} + k^{2+\sum_{i=2}^{m+1} i} + \ldots + k^{(m+1)+(m+1)}\right]$

Die einzelnen Summanden haben die Form $k^{i+\sum_{l=i}^{m+1} l}$, es gilt:

$i + \sum_{l=i}^{m+1} l = \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{3i-i^2}{2}$, dieser Ausdruck nimmt sein Maximum (bei festem m) bei $i = 1$ und $i = 2$ an, für diese i gilt: $i + \sum_{l=i}^{m+1} l = \frac{(m+1)(m+2)}{2} + 1$, also:

$C \left[k^{1+\sum_{i=1}^{m+1} i} + \ldots + k^{(m+1)+(m+1)}\right] \leq Ck^{2+\sum_{i=2}^{m+1} i} \leq Ck^{1+\frac{(m+1)(m+2)}{2}} \leq C2k^{m+1} \leq Cp$

2b) Sei nun $k \geq 2$ und $p := 2k^{m+1}$, dann folgt:

$\sum_{i=1}^{m+1} Ck^i \prod_{j=i}^{m+1} (Ck^j 2^j)^{\frac{1}{k^j}} \leq C \sum_{i=1}^{m+1} k^i \prod_{j=1}^{\infty} (2k)^{\frac{j}{k^j}} \leq C \sum_{i=1}^{m+1} k^i \prod_{j=1}^{\infty} k^{\frac{j}{2^j}} \leq Ck^{m+1+\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{2^j}}$

$\leq Ck^{m+1+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}} \leq Ck^{m+3} \leq C(2k)^{m+1} \leq Cp$

Aus diesen Abschätzungen folgt mit Hilfe der doubling property für alle p der Form $p = 2k^{m+1}$

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int_{B_{\alpha R}} f^p w\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left[p + \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx\right)^{\frac{1}{2k}}\right] \tag{3.24}$$

Ist nun $p = 2ak^{i+1}$ für ein $i \in \mathbb{N}$ und $a \in (1, k)$, so wähle $r > 1, s > 1$ so, dass $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ und $pr = 2k^{i+2}$ und schätze mit der Hölderungleichung ab:

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} f^p w\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left[\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} 1^s w\, dx \right)^{\frac{1}{s}} \left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} f^{pr} w\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} f^{pr} w\, dx \right)^{\frac{1}{pr}}$$

Zusammen mit (3.24) folgt aus dieser Abschätzung

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} f^p w\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(2k^{i+2} + \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \right]$$

$$\leq C \left[p + \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \right]$$

Also gilt für alle $p > 2k$:

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} f^p w\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left[p + \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \right] \tag{3.25}$$

Sei $p_0 \in (0, e^{-1})$, betrachte

$$\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} e^{p_0 f} w\, dx = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{{p_0}^l}{l!} \left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} f^l w\, dx \right)$$

$$\leq C \sum_{l=0}^{[2k]} \frac{{p_0}^l}{l!} \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx \right)^{\frac{l}{2k}} + C \sum_{l=[2k]+1}^{\infty} \frac{{p_0}^l}{l!} \left(l + \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \right)^l$$

In dieser Abschätzung wurden die Hölder-Ungleichung, die doubling property sowie die Abschätzung (3.25) benutzt.

Setze $\Delta := \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} w\, dx \right)^{\frac{1}{2k}}$, mit der Stirling'schen Formel $n! \cong \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ erhält man dann

$$C\sum_{l=[2k]+1}^{\infty}\frac{{p_0}^l}{l!}(l+\Delta)^l \leq C\sum_{l=[2k]+1}^{\infty}\frac{(p_0e)^l\left(1+\frac{\Delta}{l}\right)^l}{\sqrt{2\pi l}} \leq C\sum_{l=[2k]+1}^{\infty}(p_0e)^l\left(1+\frac{\Delta}{l}\right)^l$$
$$\leq C\sum_{l=[2k]+1}^{\infty}(p_0e)^l e^{\Delta} \leq C\frac{1}{1-p_0e}e^{\Delta},\text{ da }\left(1+\tfrac{\Delta}{l}\right)^l \leq e^{\Delta}\ \forall\, l\in\mathbb{N}\text{ und }p_0<e^{-1}.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$C\sum_{l=[2k]+1}^{\infty}\frac{{p_0}^l}{l!}\left(l+\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k}w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}\right)^l \leq Ce^{\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k}w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}}$$

Die Summe $\sum\limits_{l=0}^{[2k]}\frac{{p_0}^l}{l!}\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k}w\,dx\right)^{\frac{l}{2k}}$ kann durch

$C\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{{p_0}^l}{l!}\Delta^l = Ce^{p_0\Delta} \leq Ce^{\Delta}$ nach oben abgeschätzt werden, so dass für $0<p_0<e^{-1}$ gilt:

$$\frac{1}{w(B_{\alpha R})}\int\limits_{B_{\alpha R}} e^{p_0 f}w\,dx \leq Ce^{\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k}w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}} \tag{3.26}$$

Da $f=\log\left(\frac{u}{t}\right)^+$ und $\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k}w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \leq C$

(s. Beweis Lemma 3.10: Der gewichtete Mittelwert von $|v|^{2k}$ auf $B_{\beta R}$ ist beschränkt, also ist auch der gewichtete Mittelwert von f^{2k} beschränkt) folgt:

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})}\int\limits_{B_{\alpha R}} e^{p_0 f}w\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \overset{u\geq 0}{\geqq} \left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})}\int\limits_{B_{\alpha R}}\left|\frac{u}{t}\right|^{p_0}w\,dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq C\left(e^{\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k}w\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}}\right)^{\frac{1}{p_0}} \leq C \tag{3.27}$$

Zum Schluß des Beweises von Lemma 3.11 wird $\left|\left|\frac{u}{t}\right|\right|_{L_\gamma(w,B_{\alpha R})}$ durch $\left|\left|\frac{u}{t}\right|\right|_{L_{p_0}(w,B_{\alpha' R})}$ für $\alpha<\alpha'<\beta<1$ abgeschätzt. Nach Vor. ist $u\geq 0$ Superlösung, also ist $-u\leq 0$ Sublösung von (3.5), ersetze nun im Beweis von Lemma 3.9 die Funktion $F(u)$

durch $F(u) = \begin{cases} -u^\delta, & u \le N \\ -\delta N^{\delta-1}u + (\delta-1)N^\delta & u > N \end{cases}$, wobei $\delta \in (-1,0)$.

Auch für dieses F gilt: $F(u) \le uF'(u)$. Analog zum Beweis von Lemma 3.9 erhält man (Bezeichnungen wie in Lemma 3.9):

$$\left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\eta G|^{2k} w\,dx \right)^{\frac{1}{2k}} \le CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\eta_x u G'|^2 w\,dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für $N = \infty$ ergibt sich: $G(u) = \frac{\sqrt{|\delta|}}{q} u^q$ mit $q = \frac{\delta+1}{2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Wählt man σ, ρ und η wie im Beweis von Lemma 3.9, so gilt (3.14) auch für $0 < q < \frac{1}{2}$, also (beachte: $u = u^+$, da $u \ge 0$)

$$\left(\frac{1}{w(B_{\rho R})} \int\limits_{B_{\rho R}} u^{2kq} w\,dx \right)^{\frac{1}{2kq}} \le \left(\frac{Cq}{\sigma - \rho} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\sigma R}} u^{2q} w\,dx \right)^{\frac{1}{2q}} \tag{3.28}$$

<u>Iteration von (3.28):</u>

Setze $q_0 := \frac{\gamma}{2k} < \frac{1}{2}$, $q_i := \frac{1}{k} q_{i-1} = \frac{\gamma}{2k^{i+1}} \to 0$, $i \to \infty$. Nach endlich vielen Iterationsschritten erreicht man $2q_i < p_0 < e^{-1}$.

Da (3.28) auch für $\frac{u}{t}$ anstelle von u gilt, folgt mit $2q_0 k = \gamma$, $\sigma_i =: \alpha' < \beta$ und der doubling property aus (3.27) und (3.28)

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} \left| \frac{u}{t} \right|^\gamma w\,dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \le C \left(\frac{1}{w(B_{\alpha' R})} \int\limits_{B_{\alpha' R}} \left| \frac{u}{t} \right|^{p_0} w\,dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \overset{(3.27), \alpha \leftrightarrow \alpha'}{\le} C \tag{3.29}$$

Also gilt: $\frac{1}{t} \left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} u^\gamma w\,dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \le e^C$, mit der Definition von t

$\left(\log t = \frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} \log uw\,dx, \text{ s. Beweis Lemma 3.10} \right)$ folgt:

$$\left(\frac{1}{w(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} u^\gamma w\,dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \le exp \left(C + \frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} \log uw\,dx \right) \qquad \square$$

Beweis von Satz 3.1

Multipliziere (3.16) mit (3.18), daraus folgt dann mit geeigneter Wahl von α und β die Aussage von Satz 3.1, nämlich $\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} u^\gamma w\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \le C \inf\limits_{B_{\alpha R}} u$ $\square$

3.3 Quasikonforme Abbildungen

Zum Beweis der schwachen Harnack-Ungleichung (Satz 3.1) wurden nur gewisse Eigenschaften des Gewichtes $w \in A_2$ verwendet, diese Harnack-Ungleichung gilt somit nicht nur für Gewichte w in der Muckenhouptklasse A_2, sondern für alle Gewicht w, die diese Eigenschaften erfüllen. In [FKS, sect. 3] wurde gezeigt, dass auch Gewichte, die aus quasikonformen Abbildungen hervorgehen (und i.a. nicht in A_2 liegen) diese Eigenschaften besitzen.

Definition 3.4 *Eine injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt* <u>*quasikonform*</u>*, falls die schwachen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ in $L^n_{loc}(\mathbb{R}^n)$ liegen und es eine Konstante $M > 0$ mit der Eigenschaft*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le M \left|det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)\right|^{\frac{1}{n}} \qquad f.f.a.\ x \in \mathbb{R}^n$$

gibt.

Setze $f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ und $|f'(x)| = |\det f'(x)|$. In [FKS, p.106-112] wurde gezeigt, dass das Gewicht $w(x) = |f'(x)|^{1-\frac{2}{n}}$, f quasikonform, die folgenden fünf Eigenschaften besitzt:

1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und (ϕ_k) eine Folge von $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-Funktionen mit den Eigenschaften: a) $\int\limits_\Omega |\phi_k|^2 w(x)\,dx \to 0, k \to \infty$,

b) $\int\limits_\Omega |D_i\phi_k - v_i|^2 w(x)\,dx \to 0, k \to \infty\ (i = 1,\ldots,n)$

Dann gilt: $v_i = 0, i = 1,\ldots,n$. Somit ist die schwache Ableitung einer $H^1_2(\Omega, w)$-Funktion eindeutig bestimmt.

2) Für jedes $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ existiert ein $C > 1$ mit:

$$\int\limits_\Omega |\phi(x)|^2 w(x)\,dx \le C \int\limits_\Omega |\nabla\phi(x)|^2 w(x)\,dx$$

3) $w(x) \in A_\infty$.
4) Es existiert ein $k > 1$, so dass für alle $\phi \in C_c^\infty(B_R)$ gilt:

$$\left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \phi^{2k}(x) w(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\nabla \phi(x)|^2 w(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

5) Es existiert ein $C > 0$, so dass für alle $\phi \in C^1(\overline{B_R})$ gilt:

$$\left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \left| \phi(x) - \frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} \phi(x) w(x)\, dx \right|^2 w(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\nabla \phi|^2 w\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dies sind genau die Eigenschaften des Gewichtes $w(x)$ die zum Beweis der schwachen Harnack-Ungleichung für Superlösungen (Satz 3.1) verwendet wurden. Also gilt Satz 3.1 auch für Gewichte der Form $w(x) = |f'(x)|^{1-\frac{2}{n}}$, f quasikonform.

Beispiel: (s.[FKS, p.105/106]) $f_\alpha(x) = |x|^\alpha x$ ist für $\alpha > -1$ eine quasikonforme Abbildung mit $|f'_\alpha(x)| = C|x|^{\alpha n} \to |f'_\alpha(x)|^{1-\frac{2}{n}} = C|x|^{\alpha(n-2)}$.
Somit ist $w(x) = |x|^\beta$ mit $\beta > 2 - n$ ein Gewicht, was aus einer quasikonformen Abbildung hervorgeht und Satz 3.1 gilt auch für dieses Gewicht.

3.4 Hölderstetigkeit von schwachen Lösungen in gewichteten Sobolevräumen

In diesem Abschnitt wird nun die Hölderstetigkeit schwacher Lösungen von singulär elliptischen Systemen gezeigt, deren Lösung einer Kleinheitsbedingung genügt. Die Singularität soll von einem Gewicht w, das entweder in A_2 liegt oder von der Form $w(x) = |f'(x)|^{1-\frac{2}{n}}$, f quasikonform ist, abhängen. Für diese Gewichte wurde in Abschnitt 3.2 eine schwache Harnack-Ungleichung hergeleitet. Der Regularitätsbeweis beruht auf dem Beweis von Caffarelli [CA], der Hölderstetigkeit von Lösungen entsprechender gleichmäßig elliptischer Systeme zeigte.
Betrachte also in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Systeme der Form

$$Au = -D_\alpha \left(A^{\alpha\beta}(x, u, \nabla u) D_\beta u^i \right) = f^i(x, u, \nabla u) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{3.30}$$

mit den Eigenschaften:

1) $\sup\limits_{\Omega} |u| \leq M$

2) $w(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq Cw(x)|\xi|^2$, wobei $a^{\alpha\beta}(x) := A^{\alpha\beta}(x, u, \nabla u)$

3) $|f(x, u, p)| \leq aa^{\alpha\beta}(x)p^i_\alpha p^i_\beta$, $a \geq 0$
$u(x) \cdot f(x, u, p) \leq a^* a^{\alpha\beta}(x)p^i_\alpha p^i_\beta$, $a^* \in \mathbb{R}$

$u \in H^1_2(\Omega, w, \mathbb{R}^m)$ heißt schwache Lösung von $Au = f$, falls für alle $\phi \in H^1_{2,0}(\Omega, w, \mathbb{R}^m) \cap L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^i D_\alpha \phi^i \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x, u, \nabla u)^i \phi^i \, dx \tag{3.31}$$

Die in Abschnitt 3.2 hergeleitete Harnack-Ungleichung wird jetzt in folgender Form benötigt:

Satz 3.2 *Sei u eine beschränkte, schwache, nicht-negative Superlösung von (3.5) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jeden Ball $B_{4R} \subset \Omega$ die Abschätzung*

$$\frac{1}{w(B_{2R})} \int\limits_{B_{2R}} uw \, dx \leq C(n, C_2) \inf_{B_R} u \tag{3.32}$$

Analog zu Lemma 1 in [CA] (s. auch [ME,p.30]) erhalten wir

Lemma 3.12 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (3.30) in $B_{4R}(0)$, wobei die Strukturbedingungen 1)-3) mit $a^* + aM = 2l < 2$ erfüllt seien. Dann existiert ein $\delta \in (0, 1), \delta = \delta(n, a, a^*, M, C_2)$, so dass*

$$u(B_R(0)) \subset B_{M(1-\delta)}(\delta\overline{u})$$

wobei $\overline{u} = \frac{1}{w(B_R(0))} \int\limits_{B_R(0)} uw \, dx.$

Beweis: Vergleiche den Beweis von Lemma 1.2.
Durch Nachrechnen bestätigt man: $A\left(\frac{1}{2}|u|^2\right) = -u \cdot f + Q(x, \nabla u)$;
für $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $|\xi| \leq \frac{1-l}{a}$ gilt dann

$$A\left(\frac{1}{2}|u|^2 + \xi \cdot u\right) \leq 0$$

Die skalare Funktion $h(x) := \frac{1}{2}M^2 + \frac{1-l}{a}M - \frac{1}{2}|u(x)|^2 - \xi \cdot u(x)$ ist eine nicht-negative Superlösung von A, da $Ah = -A\left(\frac{1}{2}|u|^2 + \xi \cdot u\right) \geq 0$. Für den Mittelwert von $h(x)$ gilt: $\overline{h} \geq \frac{1-l}{a}M - \xi \cdot \overline{u}$, aus der obigen Harnack-Ungleichung folgt dann für $x \in B_R(0)$ (unter Verwendung der doubling property):

$$h(x) \geq \inf_{B_R(0)} h(x) \geq \tilde{\delta}_1(n, C_2) \fint_{B_{2R}(0)} h(x) w\, dx \geq \delta_1 \left[\frac{1-l}{a} M - \xi \cdot \fint_{B_R(0)} u(x) w\, dx \right] \tag{3.33}$$

Wähle ξ in die Richtung von u, wobei $|\xi| = \frac{1-l}{a}$ gelte, θ sei der Winkel zwischen u und $\overline{u}$, setze $r := \frac{|u|}{M}$. Mit diesen Bezeichnungen folgt aus (3.33)

$M(1-r)\left[\frac{1}{2}(M + |u|) + \frac{1-l}{a}\right] = \frac{1}{2}(M - |u|)(M + |u|) + \frac{1-l}{a}M - |\xi| r M$

$\overset{(3.33)}{\geq} \delta_1 \left[\frac{1-l}{a}M - \xi \cdot \overline{u}\right] = M\delta_1 \frac{1-l}{a}\left(1 - \frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right)$

Somit ergibt sich

$$(1-r)\frac{1-l}{a}\left[\frac{M + |u|}{2\frac{1-l}{a}} + 1\right] \geq \delta_1 \frac{1-l}{a}\left(1 - \frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right)$$

Hieraus folgt wiederum

$$1 - \frac{|u|}{M} = 1 - r \geq \frac{\delta_1}{\frac{aM}{1-l} + 1}\left(1 - \frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \geq \delta_2(n, a, a^*, M, C_2)\left(1 - \frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \tag{3.34}$$

O.E. sei $\delta_2 < 1$, aus (3.34) folgt

$$\begin{aligned}
& & 1 - r + r(1-r) &\geq r\delta_2\left(1 - \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) + (1-r) \\
&\Leftrightarrow & 1 - r^2 &\geq 1 - r(1-\delta_2) - \delta_2 r \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta \\
& & &\geq \delta_2\left(1 - r\tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right) \qquad (r \leq 1) \\
&\Leftrightarrow & r^2 - \delta_2 r \tfrac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta &\leq 1 - \delta_2
\end{aligned}$$

Da $\frac{|\overline{u}|}{M} \leq 1$ folgt hieraus nun $r^2 - \delta_2 r\frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta + \left(\frac{1}{2}\delta_2\frac{|\overline{u}|}{M}\right)^2 \leq 1 - \delta_2 + \left(\frac{1}{2}\delta_2\right)^2$

Setze $\delta := \frac{1}{2}\delta_2$, dann schreibt sich die letzte Zeile als

$\frac{|u|^2}{M^2} - 2\delta\frac{|u||\overline{u}|}{M^2}\cos\theta + \delta^2\left(\frac{|\overline{u}|}{M}\right)^2 = \frac{1}{M^2}\left(|u - \delta\overline{u}|^2\right) \leq (1-\delta)^2$, also gilt

$$|u(x) - \delta\overline{u}|^2 \leq M^2(1-\delta)^2 \quad \forall\, x \in B_R(0) \tag{3.35}$$

Somit ist Lemma 3.12 bewiesen. □

Durch iterierte Anwendung von Lemma 3.12 erhält man (vgl. [CA], [ME,p.34/35])

Korollar 3.1 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (3.30) in B_{4R}, wobei die obigen Strukturbedingungen 1)-3) mit $a^* + aM = 2l < 2$ erfüllt seien. Dann existieren Punkte $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ und Radien M_k, so dass gelten:*

i) $M_k \le M(1-\delta)^k$

ii) $|\xi_k| \le \left[1-(1-\delta)^k\right] M$

iii) $|\xi_k| + M_k \le M$, $|u-\xi_k| \le M_k$ *f.ü. in* $B_{4^{1-k}R}$

iv) $u(B_{4^{1-k}R}) \subset B_{M_k}(\xi_k)$,

wobei δ die Konstante aus Lemma 3.12 bezeichnet.

<u>Beweis:</u> i)-iii)): Mit vollständiger Induktion:
Induktionsanfang: $k = 0 \to M_0 = M, \xi_0 = 0$.
Der Induktionsschritt verläuft analog zum Beweis von Korollar 1.1; $u^{(k)} = u - \xi_k$ ist eine schwache Lösung in $B_{4^{1-k}R}$ mit den Strukturbedingungen $|f| \le aQ(x, \nabla u)$ und $u^{(k)} \cdot f \le a_k^* Q(x, \nabla u)$ mit $a_k^* = a^* + a|\xi_k|$. Es folgt: $a_k^* + aM_k \le 2l < 2$ und $a_k^* \le l < 1$. Da $|u^{(k)}| \le M_k$ f.ü. in $B_{4^{1-k}R}$ folgt aus Lemma 3.12

$$\left| u^{(k)}(x) - \delta \fint_{B_{4^{-k}R}} u^{(k)} w \, dx \right| \le (1-\delta) M_k \qquad f.f.a.\ x \in B_{4^{-k}R} \tag{3.36}$$

Setze $\xi_{k+1} := \xi_k + \delta \fint_{B_{4^{-k}R}} u^{(k)} w \, dx$ und $M_{k+1} := \sup_{B_{4^{-k}R}} |u^{(k+1)}|$, man erhält:

$$M_{k+1} = \sup_{B_{4^{-k}R}} \left| u^{(k)} - \delta \fint_{B_{4^{-k}R}} u^{(k)} w \, dx \right| \le (1-\delta) M_k \le (1-\delta)^{k+1} M,$$

per Definition gilt: $|u - \xi_{k+1}| \le M_{k+1}$ in $B_{4^{-k}R}$. Aus ii) folgt

$|\xi_{k+1}| \le (1-\delta)|\xi_k| + \delta M \le (1-\delta)\left[1-(1-\delta)^k\right] M + \delta M = \left[1-(1-\delta)^{k+1}\right] M.$

i) und ii) liefern schließlich: $|\xi_{k+1}| + M_{k+1} \le M$, damit sind i)-iii) bewiesen.

iv) folgt unmittelbar aus dem zweiten Teil von iii). □

Lemma 3.13 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (3.30) in Ω, wobei $B_{4R} \subset \Omega$ und die Strukturbedingungen 1)-3) seien mit $a^* + aM < 2$ erfüllt. Für $r \in (0, R]$ gilt dann $osc_{B_r} u \le 4M \left(\frac{r}{4R}\right)^\alpha$, wobei α gegeben ist durch $4^{-\alpha} = \max\left(1-\delta, \frac{1}{2}\right)$, δ sei die Konstante aus Lemma 3.12.*

Beweis: Da $|u| \leq M$ gilt: $osc_{B_R} u \leq 2M$, aus Korollar 3.1 folgt nun:
$osc_{B_{4^{1-k}R}} u \leq 2M_k \leq 2M(1-\delta)^k \leq 2M\theta^k$ mit $\theta = 4^{-\alpha} := \max\left(1-\delta, \frac{1}{2}\right)$, d.h. $\theta^k = \left(\frac{1}{4^k}\right)^\alpha$. Da $4^\alpha \leq 2$ folgt:

$$osc_{B_{4^{1-k}R}} u \leq 2M4^\alpha \left(\frac{1}{4^{k+1}}\right)^\alpha \leq 4M \left(\frac{1}{4^{k+1}}\right)^\alpha \tag{3.37}$$

Für $\varrho \in (0,1]$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{4^k} < \varrho \leq \frac{1}{4^{k-1}}$, mit (3.37) erhält man

$$osc_{B_{\varrho R}} u \leq osc_{B_{4^{1-k}R}} u \leq 4M \left(\frac{1}{4^{k+1}}\right)^\alpha \leq 4M \left(\frac{\varrho}{4}\right)^\alpha \quad \forall\, 0 < \varrho \leq 1$$

Setze $r := \varrho R$, dann folgt aus obiger Abschätzung $osc_{B_r} u \leq 4M \left(\frac{r}{4R}\right)^\alpha$. $\square$

Hieraus folgt nun die Existenz eines stetigen Repräsentanten von u, nämlich $\overline{u}(x) := \lim\limits_{\varrho \to 0} \frac{1}{w(B_\varrho(x))} \int\limits_{B_\varrho(x)} u(y) w\, dy$, $x \in B_r$ bel., s. [EG,p.43].

Als Hauptresultat dieses Abschnittes erhalten wir

Satz 3.3 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (3.30) in Ω, wobei die Strukturbedingungen 1)-3) mit $a^* + aM < 2$ erfüllt seien. Dann ist u in Ω' für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ hölderstetig und für ein $\alpha = \alpha(n, a, a^*, M, C_2) \in (0,1)$ gilt:*

$$[u]_{\alpha,\Omega'} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega' \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(n, a, a^*, M, C_2, \Omega, \Omega') \tag{3.38}$$

Beweis: Sei $B_{9r}(x_0) \subset \Omega$. Zeige die Behauptung zunächst für $\Omega' = B_r(x_0)$.
Seien $x, y \in B_r(x_0)$ bel., $x \neq y$, aber fix gewählt, setze $r' := |x-y| \in (0, 2r)$. Da $B_{4(2r)}(x) \subset B_{9r}(x_0) \subset \Omega$ folgt aus Lemma 3.13:
$|u(x) - u(y)| \leq osc_{B_{r'}(x)} u \leq 4M \left(\frac{r'}{8r}\right)^\alpha$, also: $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(n, a, a^*, M, C_2, r)$.

Nun wird die Behauptung für ein beliebiges $\Omega' \subset\subset \Omega$ bewiesen. Überdecke dazu Ω' mit N Bällen $B_{r_i}(\alpha_i)$, so dass $B_{9r_i}(\alpha_i) \subset \Omega$. Seien $x, y \in \Omega'$ und setze $r(\Omega', \Omega) := \min\limits_{i=1,\ldots,N} r_i$.

1.Fall: $|x-y| < \frac{r}{2} \to \exists\, i \in \{1, \ldots, N\} : x, y \in B_{r_i}(\alpha_i)$. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt: $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(n, a, a^*, M, C_2, \Omega, \Omega')$.

2.Fall: $|x-y| \geq \frac{r}{2}$, es gilt dann: $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2M}{\left(\frac{r}{2}\right)^\alpha} \leq C(n, a, a^*, M, C_2, \Omega, \Omega')$.

Damit ist Satz 3.3 vollständig bewiesen. $\square$

Der voranstehende Satz verallgemeinert die Regularitätsresultate von Hildebrandt-Widman [HW2], Wiegner [WI1], [WI2] und Caffarelli [CA] auf den Fall von singulären Koeffizienten die durch ein Gewicht $w(x)$ beschrieben werden können, welches in A_2 liegt (bzw. von der Form $w(x) = |f'(x)|^{1-\frac{2}{n}}$, f quasikonform, ist). Im Fall $w \in A_2$, w beschränkt und $a^* + aM < 1$ hat bereits Baoyao [BAO, Thm.3] Hölderstetigkeit von beschränkten, schwachen Lösungen der hier betrachteten Systeme gezeigt. Für den Fall $w(x) = \prod_{k=1}^{m} |x - x_k|^{\tau_k}$, $\tau_k > 2 - n, x_k \in \Omega$ konnte Baldes [BA2, Thm. 3] zeigen, dass beschränkte, schwache Lösungen $u \in H(\Omega)$ ($H(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $C^1(\overline{\Omega})$ unter der Norm $\int D_\alpha u D_\alpha u w(x)\, dx + \int u u \chi(x)\, dx$ mit $\chi(x) = \prod_{k=1}^{m} |x - x_k|^{\frac{n\tau_k}{n-2}}$.) von Systemen

$$-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^i \right) = f^i(x, u, \nabla u) \qquad (i = 1, \dots, m)$$

mit

$$\lambda w(x) |\xi|^2 \le a^{\alpha\beta}(x) \xi_\alpha \xi_\beta \le \mu w(x) |\xi|^2 \qquad (0 < \lambda \le \mu)$$

und $|f(x, u, p)| \le a w(x) |p|^2 + b\chi(x)$ unter der Bedingung $aM < \frac{\lambda}{\theta}, \theta > 1$ hölderstetig sind. Die Bedingung $aM < \frac{\lambda}{\theta}$ bedeutet in unserem Kontext $a^* + aM < 2c$ mit $c < 1$.

Im Fall, dass $w \in A_p$ für $p > 2$ bel., $w \notin A_2$ kann man keine Regularitätsaussagen mehr zeigen, wie ein entsprechendes Gegenbeispiel in [FKS, p.100] zeigt.

Da es bereits im Fall glm. elliptischer Koeffizienten bei Verletzung der Bedingung $a^* + aM < 2$ beschränkte, schwache Lösungen gibt, die nicht hölderstetig sind (s. [HW1,p.68]), ist Satz 3.3 für den Fall, dass das Gewicht w in einer Muckenhouptklasse A_p liegt, optimal.

Beispiele: 1) Betrachte in $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ das Gewicht $w(x) = r^\alpha = |x|^\alpha$ mit $\alpha \in (-n, n)$. Dieses Gewicht liegt in A_2, denn:

$$\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} r^\alpha \, dx \right) \left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} r^{-\alpha} \, dx \right) = \frac{C}{R^{2n}} \frac{1}{(n+\alpha)(n-\alpha)} \, r^{n+\alpha}\Big|_0^R \; r^{n-\alpha}\Big|_0^R$$

$$= \frac{C}{(n+\alpha)(n-\alpha)} =: C_2 < \infty.$$

Für die quasikonforme Abbildung $f_\alpha(x) = |x|^\alpha x, \alpha > -1$, kann man zeigen, dass $|f'_\alpha(x)|^{1-\frac{2}{n}} = C|x|^{\alpha(n-2)}$ (s. [FKS, p. 105/106]). Somit erfüllt das Gewicht

$w(x) = |x|^\alpha$ mit $\alpha \in (2-n, \infty)$ die Voraussetzungen von Abschnitt 3.3. Da zusätzlich $|x|^\alpha \in A_2$ für $\alpha \in (-n, n)$ sind beschränkte, schwache Lösungen des Systems

$$-D_i(r^\alpha D_i u^k) = 0 \qquad (k = 1, \dots, m)$$

für $\alpha > -n$ in $B_R(0)$ lokal hölderstetig.

2) Sei $w(x) = (\log r)^k = (\log|x|)^k$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^n, k \in 2\mathbb{N}$. Dann ist $w \in A_2$, denn:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B_{1/2}|}\int\limits_{B_{1/2}} (\log r)^k \, dx\right)\left(\frac{1}{|B_{1/2}|}\int\limits_{B_{1/2}} (\log r)^{-k} \, dx\right) \\
&\leq C\left(\frac{1}{\omega_n 2^{-n}}\int\limits_0^{1/2} r^{n-1}(\log r)^k \, dr\right)\left(\log\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-k} \\
&\leq C\frac{1}{\omega_n 2^{-n}}\left[\left.\frac{r^n(\log r)^k}{n}\right|_0^{1/2} - \frac{k}{n}\int\limits_0^{1/2} r^{n-1}(\log r)^{k-1} \, dr\right] \\
&\leq \ldots < \infty
\end{aligned}$$

Somit sind sämtliche beschränkte schwache Lösungen des Systems

$$-D_\alpha((\log r)^k D_\alpha u^i) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

mit $k \in 2\mathbb{N}$ in $B_{\frac{1}{2}}(0)$ lokal hölderstetig.

3) Sei $w(x) = r^\alpha(\log r)^2$, $r = |x|$, $x \in B_{\frac{1}{2}}(0) \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in (-n, n)$. Dann ist $w \in A_2$, denn:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|B_{1/2}|}\int\limits_{B_{1/2}} r^\alpha(\log r)^2 \, dx\right)\left(\frac{1}{|B_{1/2}|}\int\limits_{B_{1/2}} r^{-\alpha}(\log r)^{-2} \, dx\right) \\
&\leq C\left(\frac{1}{\omega_n 2^{-n}}\int\limits_0^{1/2} r^{n-1+\alpha}(\log r)^2 \, dr\right)\left(\log\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)\left(\frac{1}{\omega_n 2^{-n}}\int\limits_0^{1/2} r^{n-1-\alpha} \, dr\right) \\
&\leq C\frac{1}{\omega_n 2^{-n}}\left[\left.\frac{r^{n+\alpha}(\log r)^2}{n+\alpha}\right|_0^{1/2} - \frac{2}{n+\alpha}\int\limits_0^{1/2} r^{n-1+\alpha}(\log r) \, dr\right]\left(\frac{2^\alpha}{\omega_n(n-\alpha)}\right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Somit sind alle beschränkten, schwachen Lösungen des Systems

$$-D_i(r^\alpha(\log r)^2 D_i u^k) = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

mit $\alpha \in (-n, n)$ in $B_{\frac{1}{2}}(0)$ lokal hölderstetig.

3.5 Liouville-Sätze für schwache Lösungen in gewichteten Soboleveräumen

Hier werden nun sogenannte Liouville-Sätze für ganze Lösungen singulär elliptischer Systeme gezeigt, d.h. eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Lösung u ist konstant. Hier werden nur Systeme betrachtet, deren Koeffizienten in einem beliebigen Ball $B_L = B_L(0)$ singulär elliptisch (mit den Gewichten w aus 3.2 und 3.3) sind, aber in $\mathbb{R}^n - B_L(0)$ gleichmäßig elliptsich sind. Diese Einschränkung ist notwendig, da sowohl w als auch w^{-1} in $L_1(\Omega)$ sein müssen. Betrachte also Systeme der Form (3.30), wobei für die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x)$ nun gelten soll

$$\frac{1}{C} v(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq Cv(x)|\xi|^2 \tag{3.39}$$

mit $C \geq 1$ und $v(x) = \begin{cases} w(x), & |x| < L \\ 1, & |x| \geq L \end{cases}$, wobei $w(x)$ ein in 3.2 oder 3.3 beschriebenes Gewicht sei. Ferner seien die Strukturbedingungen aus Abschnitt 3.4 erfüllt, d.h. $|f(x, u, \nabla u)| \leq aQ(x, \nabla u)$ und $u(x) \cdot f(x, u, \nabla u) \leq a^* Q(x, \nabla u)$ mit $a > 0, a^* \in \mathbb{R}$. Der Beweis des Liouville-Satz beruht auf dem Beweis eines Liouville-Satzes für gleichmäßig elliptische Systeme, der von Meier [ME] angegeben wurde. Dieser Liouville-Satz wurde zuerst von Hildebrandt-Widman [HW3] bewiesen, die für den Beweis Green'sche Funktionen verwendeten; unter Verwendung der Ideen von Caffarelli konnte Meier diesen Satz ohne Green'sche Funktionen herleiten. Um den Beweis von Meier für die obigen singulären Koeffizienten zu adaptieren, müssen zunächst einige Lemmata aus [ME, p.5-9] angepasst werden.

Lemma 3.14 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (3.30) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es gelte $a^* < 1$. Ist $\xi \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor mit $|\xi| \leq \frac{1-a^*}{a}$, so ist $|u - \xi|^2$ eine Sublösung, d.h. $-L|u - \xi|^2 = -D_\alpha\left(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta|u - \xi|^2\right) \leq 0$ in Ω.*

Beweis: Teste die schwache Formulierung $\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^k D_\alpha \phi^k \, dx = \int\limits_{\Omega} f^k(x,u,\nabla u)\phi^k \, dx$ mit $\phi = \eta(u-\xi), |\xi| \leq \frac{1-a^*}{a}, \eta \in C_c^\infty(\Omega), \eta \geq 0$. Für die linke Seite ergibt sich

$$\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^k D_\alpha \eta (u^k - \xi^k) \, dx + \int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^k D_\alpha u^k \eta \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x) D_\beta |u-\xi|^2 D_\alpha \eta \, dx + \int\limits_{\Omega} Q(x,\nabla u)\eta \, dx$$

Die rechte Seite $\int\limits_{\Omega} (u^k - \xi^k) f^k \eta \, dx$ kann nach oben durch

$\left(a^* + a\frac{1-a^*}{a}\right) \int\limits_{\Omega} Q(x,\nabla u)\eta \, dx \leq \int\limits_{\Omega} Q(x,\nabla u)\eta \, dx$ abgeschätzt werden.

Durch einen Vergleich der linken und rechten Seite kommt man zu

$$\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x) D_\beta |u-\xi|^2 D_\alpha \eta \, dx \leq 0 \quad \forall \eta \in C_c^\infty(\Omega), \eta \geq 0$$ □

Lemma 3.15 *Sei u eine beschränkte, schwache, nicht-negative Lösung von $Lu \leq 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei $B_{4L}(0) \subset \Omega$ sei. Die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ sollen die Bedingung (3.39) mit dem dort angegebenen Gewicht $v(x)$ erfüllen. Dann gilt für alle $R > 0$ mit $B_{4R}(0) \subset \Omega$*

$$\frac{1}{v(B_{2R})} \int\limits_{B_{2R}(0)} uv \, dx \leq C(n, C_2) \inf_{B_R(0)} u \tag{3.40}$$

Beweis: 1.Fall: $B_{4R}(0) \subseteq B_L(0)$. Dann folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.2.
2.Fall: $B_L(0) \subset B_{4R}(0)$. Analog zu [GT, p.195-198] kann man eine Harnack-Ungleichung für Superlösungen von $Lu = 0$ (glm. elliptische Koeffizienten) in $B_{4S} - B_S$ $(S \geq L)$ herleiten, wichtigster Unterschied ist der, dass die Testfunktionen als Abschneidefunktionen auf geeigneten Kugelspalten gewählt werden. Es gilt dann die Abschätzung

$$\frac{1}{v(B_{\beta_1 S} - B_{\beta_2 S})} \int\limits_{B_{\beta_1 S} - B_{\beta_2 S}} uv \, dx \leq C \inf_{B_{\alpha_1 S} - B_{\alpha_2 S}} u \tag{3.41}$$

mit $1 < \beta_2 < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_1 < 4$.
Seien $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ so gewählt, dass $1 < \alpha < \alpha_1 < 2$ und $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta < 4$ gelte, ferner seien α_1 und β_1 so bestimmt, dass $B_{\alpha_1 L} \subset B_{\beta_1 R}$. Dann ergibt sich:

$$\frac{1}{v(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} uv\,dx = \frac{1}{v(B_{\beta R}-B_{\alpha L})+v(B_{\alpha L})}\left[\int\limits_{B_{\beta R}-B_{\alpha L}} uv\,dx + \int\limits_{B_{\alpha L}} uv\,dx\right]$$
$$\leq \frac{1}{v(B_{\beta R}-B_{\alpha L})}\int\limits_{B_{\beta R}-B_{\alpha L}} uv\,dx + \frac{1}{v(B_{\alpha L})}\int\limits_{B_{\alpha L}} uv\,dx$$
$$\leq \frac{1}{v(B_{\beta R}-B_{\alpha L})}\int\limits_{B_{\beta R}-B_{\alpha L}} uv\,dx + C\frac{1}{v(B_{2L})}\int\limits_{B_{2L}} uv\,dx \quad \text{(doubling property)}$$
$$\leq C \inf_{B_{\beta_1 R}-B_{\alpha_1 L}} u + C\inf_{B_{\alpha_1 L}} u \leq C\inf_{B_{\beta_1 R}} u \leq C\inf_{B_R} u$$

Bei der Abschätzung der Integrale wurde einmal (3.41) und einmal Satz 3.1 angewendet.

Im Fall $B_L(0) \subset B_{2R}(0)$ wähle $\beta = 2, \beta_1 = \frac{3}{2}, \alpha_1 = \frac{5}{4}, \alpha = \frac{9}{8} \rightarrow$ Beh.

Ist $B_L(0) \not\subset B_{2R}(0)$ wähle $\beta \in (2,4)$, so dass $B_L(0) \subset B_{\beta R}(0)$. Dann folgt:

$$\frac{1}{v(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} uv\,dx \leq C\inf_{B_R} u$$

Den linken Term kann man mit Hilfe der doubling property und der Monotonie des Integrals durch $C\frac{1}{v(B_{2R})}\int\limits_{B_{2R}} uv\,dx$ nach unten abschätzen und es folgt die Behauptung. □

Lemma 3.16 *Sei $u \in H_2^1 \cap L_\infty(B_{4R})$ eine schwache Lösung von $-Lu \leq 0$ in $B_{4R}(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ die Eigenschaft (3.39) erfüllen sollen. Dann existiert ein $\delta = \delta(n, C_2) > 0$, so dass gilt:*

$$\sup_{B_R(0)} u \leq (1-\delta)\sup_{B_{4R}(0)} u + \delta\frac{1}{v(B_R)}\int\limits_{B_R(0)} uv\,dx$$

<u>Beweis:</u> Mit Lemma 3.15 folgt für die nicht-negative Superlösung $\sup\limits_{B_{4R}(0)} u - u$ in $B_{4R}(0)$:

$$\frac{1}{v(B_{2R})}\int\limits_{B_{2R}}\left(\sup_{B_{4R}} u - u\right)v\,dx \leq C\inf_{B_R}\left(\sup_{B_{4R}} u - u\right)$$

Aufgrund der doubling property von v ist die linke Seite durch $C_1\frac{1}{v(B_R)}\int\limits_{B_R}(\sup\limits_{B_{4R}} u - u)v\,dx$ abschätzbar und es folgt

$$\frac{C_1}{C}\sup_{B_{4R}} u - \frac{C_1}{C}\frac{1}{v(B_R)}\int\limits_{B_R} uv\,dx \leq \sup_{B_{4R}} u - \sup_{B_R} u$$

Mit $\delta := \frac{C_1}{C}$ folgt hieraus die Behauptung. $\square$

Lemma 3.17 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (3.30) in $\Omega = \mathbb{R}^n$, es gelte $a^* < 1$ und die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ sollen (3.39) erfüllen. Dann gelten:*

i) $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} u(x) v \, dx =: \overline{u}_\infty$ *existiert und es gilt:* $|\overline{u}_\infty| = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u| = M$.

ii) $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u - \overline{u}_\infty|^2 v \, dx = 0.$

iii) $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u - \xi| = |\overline{u}_\infty - \xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m$ *mit* $|\xi| \le \frac{1-a^*}{a}$

Beweis: i) Sei $\xi \in \mathbb{R}^m$ bel. mit $|\xi| \le \frac{1-a^*}{a}$. Dann ist nach Lemma 3.14 $v := |u-\xi|^2$ eine Lösung von $-Lv \le 0$ in $\mathbb{R}^n$. Offensichtlich gilt:

$$\frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u - \xi|^2 v \, dx \le \sup_{\mathbb{R}^n} |u - \xi|^2 \quad \forall R > 0 \tag{3.42}$$

Da $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{B_R(0)} |u - \xi|^2 = \lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{B_{4R}(0)} |u - \xi|^2 = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u - \xi|^2$ folgt aus Lemma 3.16

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u - \xi|^2 \le \lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u - \xi|^2 v \, dx \tag{3.43}$$

Aus (3.42) und (3.43) erhält man

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u - \xi|^2 v \, dx = \sup_{\mathbb{R}^n} |u - \xi|^2 \tag{3.44}$$

Im Fall $\xi = 0$ lautet die letzte Gleichung

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u|^2 v \, dx = \sup_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = M^2$$

Da $\frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u - \xi|^2 v \, dx = \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u|^2 v \, dx - 2\xi \cdot \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv \, dx + |\xi|^2$
folgt aus (3.44), dass $\lim\limits_{R\to\infty} \xi \cdot \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv \, dx$ existiert und es gilt:

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u - \xi|^2 = M^2 + |\xi|^2 - 2\xi \cdot \lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv \, dx \tag{3.45}$$

Setze $\tau := \frac{1-a^*}{aM} > 0$, es existiert dann ein $\overline{u}_\infty \in \mathbb{R}^m$ mit $|\overline{u}_\infty| = M$ und $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u + \tau\overline{u}_\infty| = (1+\tau)M$. Für $\xi := -\tau\overline{u}_\infty$ gilt: $|\xi| = \frac{1-a^*}{a}$ und aus (3.45) folgt

$$(1+\tau)^2M^2 = \sup_{\mathbb{R}^n} |u-\xi|^2 = M^2 + \left(\frac{1-a^*}{a}\right)^2 + 2\lim_{R\to\infty} \frac{1-a^*}{aM}\overline{u}_\infty \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx$$

Da $\frac{1-a^*}{a} = \tau M$ folgt nun

$$M^2 + 2\tau M^2 + \tau^2M^2 = M^2 + \tau^2M^2 + 2\frac{1-a^*}{aM}\overline{u}_\infty \lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx$$

$$\Leftrightarrow \qquad M^2 = \lim_{R\to\infty} \overline{u}_\infty \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx$$

Da $|\overline{u}_\infty|, |\frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx| \leq M$ folgt aus obiger Gleichung

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx = \overline{u}_\infty \tag{3.46}$$

ii) Es gilt:

$$\frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u-\overline{u}_\infty|^2 v\,dx = |\overline{u}_\infty|^2 + \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u|^2 v\,dx - 2\overline{u}_\infty \cdot \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad & \lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u-\overline{u}_\infty|^2 v\,dx \\ &= |\overline{u}_\infty|^2 + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u|^2 v\,dx - 2\overline{u}_\infty \cdot \lim_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx \\ &\overset{i)}{=} M^2 + M^2 - 2M^2 = 0\end{aligned}$$

iii) Aus (3.45) folgt für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $|\xi| \leq \frac{1-a^*}{a}$:

$$\begin{aligned}&\sup_{\mathbb{R}^n} |u-\xi|^2 = M^2 + |\xi|^2 - 2\lim_{R\to\infty} \xi \cdot \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx \\ &\overset{(3.46)}{=} |\overline{u}_\infty|^2 + |\xi|^2 - 2\xi \cdot \overline{u}_\infty = |\overline{u}_\infty - \xi|^2\end{aligned}$$

□

Satz 3.4 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (3.30) in $\mathbb{R}^n$, die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ sollen die Bedingung (3.39) erfüllen. Ferner gelte $a^* + a\sup\limits_{\mathbb{R}^n}|u| < 2$. Dann ist u konstant.*

Beweis: Definiere für $t \in [0,1] : u_t := u - t\overline{u}_\infty$ und $M_t := \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u_t|$, wobei $\overline{u}_\infty = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{v(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uv\,dx$. Setze $I := \{t \in [0,1]; M_t \leq (1-t)M_0\}$ und beachte, dass $|\overline{u}_\infty| = M = M_0$. Offenbar ist $0 \in I$ und I ist abgeschlossen, T sei die größte Zahl in I, nimm an $T < 1$. Die Funktion $u_T = u - T\overline{u}_\infty$ ist schwache Lösung eines Systems der Form (3.30) in $\mathbb{R}^n$ mit den Strukturbedingungen

$$|f| \leq aQ(x, \nabla u)$$
$$(u - T\overline{u}_\infty) \cdot f \leq (a^* + aT|\overline{u}_\infty|)Q(x, \nabla u)$$

Sei $a_T^* := a^* + aT|\overline{u}_\infty|$, da $\overline{u}_\infty$ in die Richtung von u gewählt wurde (s. Beweis von Lemma 3.17), folgt: $a_T^* + a\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u - T\overline{u}_\infty| = a^* + a\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u| < 2$. Die Abschätzung $(u - T\overline{u}_\infty) \cdot f \leq a_T^* Q(x, \nabla u)$ ist stets mit $a_T^* = a\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u - T\overline{u}_\infty|$ erfüllt, somit ist $a_T^* < 1$. Sei $t := \min\left(1, T + \frac{1-a_T^*}{aM}\right)$, beachte: $T < t \leq 1$ und $|(t-T)\overline{u}_\infty| \leq \frac{1-a_T^*}{a}$. Mit $\xi = (t-T)\overline{u}_\infty$ folgt aus Lemma 3.17 iii) für die Lösung u_T:

$\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u - t\overline{u}_\infty| = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u - T\overline{u}_\infty - (t-T)\overline{u}_\infty| = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u_T - \xi| = |u_\infty - T\overline{u}_\infty - (t-T)\overline{u}_\infty|$
$= (1-t)|\overline{u}_\infty|$, also $M_t \leq (1-t)M_0$ und $t \in I$.

Dies ist ein Widerspruch, da $T < t$ und nach Annahme $T < 1$ das größte Element in I ist. Es folgt $T = 1$ und somit $u = \overline{u}_\infty = const.$ $\square$

Da Satz 3.4 bereits bei gleichmäßig elliptischer Koeffizienten im Fall $a^* + aM = 2$ falsch wird (z.B. ist die nichtkonstante Funktion $u(x) = \frac{x^i}{|x|}, n \geq 3$, schwache Lösung des Systems $-\Delta u = \frac{2u}{1+|u|^2}|\nabla u|^2$, s. [HW1, p.68] bzw. [HW3, p.44] für ein weiteres Beispiel), ist Satz 3.4 das optimale Resultat falls $w \in A_2$.

Beispiele: 1) Sei $L > 0$ bel. und $v(x) := \begin{cases} |x|^\tau, & |x| < L \\ 1, & |x| \geq L \end{cases}$, $\tau \in (-n, \infty)$.

Wie in Abschnitt 3.4 zeigt man, dass die Voraussetzungen für die Gültigkeit der schwachen Harnack-Ungleichung erfüllt sind. Sei $a^{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} |x|^\tau \delta_{\alpha\beta}, & |x| < L \\ \delta_{\alpha\beta}, & |x| \geq L \end{cases}$, dann sind alle ganzen, beschränkten, schwachen Lösungen u des Systems

$$-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u^i\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

konstant.

2) Sei $k \in 2\mathbb{N}$ und $a^{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} \log(|x|)^k \delta_{\alpha\beta}, & |x| < 1/2 \\ \delta_{\alpha\beta}, & |x| \geq 1/2 \end{cases}$

Wie in Abschnitt 3.4 zeigt man, dass $\log(|x|)^k \in A_2$ $(x \in B_{1/2}(0))$, somit sind alle ganzen beschränkten, schwachen Lösungen von

$$-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x)u^i\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

konstant.

3) Sei $\tau \in (-n, n)$ und $a^{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} |x|^\tau \log(|x|)^2 \delta_{\alpha\beta}, & |x| < 1/2 \\ \delta_{\alpha\beta}, & |x| \geq 1/2 \end{cases}$

Wie in 3.4 zeigt man, dass $|x|^\tau \log(|x|)^2 \in A_2$ $(x \in B_{1/2}(0))$. Also sind alle ganzen, beschränkten, schwachen Lösungen des Systems

$$-D_\alpha \left(a^{\alpha\beta}(x)u^i\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N)$$

konstant.

Kapitel 4

Singulär elliptische Systeme mit unterschiedlichen Gewichten

In diesem Kapitel werden nun auch elliptische Systeme betrachtet, deren Koeffizienten von zwei unterschiedlichen singulären Gewichten w und v abhängen. Wie in Kapitel 3 wird auch hier eine Harnack-Ungleichung für Superlösungen entsprechender singulär elliptischer Gleichungen hergeleitet. Die Grundidee des Beweises geht wieder auf Trudinger [TR2] zurück. Chanillo und Wheeden [CW1] konnten zeigen, dass die im Beweis der Harnack-Ungleichung verwendeten Sobolev- und Poincaré-Ungleichungen unter gewissen Annahmen an die Gewichte w und v immer erfüllt sind.

4.1 Voraussetzungen an die Gewichte

Betrachte in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ quasilineare elliptische Systeme der Form

$$Au = -D_\alpha \left(A^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)D_\beta u^k\right) = f^k(x,u,\nabla u) \quad (k = 1,\dots,m) \tag{4.1}$$

Für die symmetrischen Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x) := A^{\alpha\beta}(x,u,\nabla u)$ soll u.a. folgende Abschätzung gelten (für die übrigen Strukturbedingungen an das System siehe Abschnitt 4.3)

$$w(x)|\xi|^2 \le a^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \le v(x)|\xi|^2 \;\text{ f.f.a. } x \in \Omega\; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{4.2}$$

wobei w und v nicht-negative, lokal integrierbare Funktionen seien. Setze $z := \frac{v^2}{w}$, z und w sollen folgende Eigenschaften erfüllen (s.[CW2]):

1) $z, w \in D_\infty$, d.h es gilt die „doubling property“: $z(B_{2R}) \leq Cz(B_R)$ und $w(B_{2R}) \leq Cw(B_R)$ mit einer von B_R unabhängigen Konstante C.

2) Es gelte die Poincaré-Ungleichung: Es existiert ein $k > 1$, so dass für alle $B_R \subset \Omega$ und alle $f \in C^1(\overline{B}_R)$ mit einer von f unabhänigen Konstante gilt

$$\left(\frac{1}{z(B_R)} \int\limits_{B_R} \left| f - \frac{1}{z(B_R)} \int\limits_{B_R} f z\, dx \right|^{2k} z\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\nabla f|^2 w\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.3}$$

3) Es gelte die Sobolev-Ungleichung: Es existiert ein $k > 1$, so dass für alle $B_R \subset \Omega$ und alle $f \in C_0^1(B_R)$ mit einer von f unabhänigen Konstante gilt

$$\left(\frac{1}{z(B_R)} \int\limits_{B_R} |f|^{2k} z\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int\limits_{B_R} |\nabla f|^2 w\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.4}$$

In [CW1] wurde gezeigt, dass diese drei Eigenschaften erfüllt sind, falls $w \in A_2$, $z \in D_\infty$ und ein $q > 2$ existiert, so dass für alle Bälle B_R, deren Mittelpunkt in B_{2R} liegt und alle $s \in (0,1)$ die „balance condition“

$$s \left[\frac{z(B_{sR})}{z(B_R)} \right]^{\frac{1}{q}} \leq C \left[\frac{w(B_{sR})}{w(B_R)} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.5}$$

erfüllt ist.

In 4.3 wird gezeigt, dass die Gewichte $w(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in (1,2)$ und $v(x) = |x|$ die geforderten Bedingungen in $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ erfüllen.

Bemerkung: Das zusätzliche Gewicht z tritt auf, da im Beweis der schwachen Harnack-Ungleichung die Sobolev- und Poincaré-Ungleichungen auf das Gewicht $z = \frac{v^2}{w}$ angewendet werden müssen.

Sei $H_2^1(\Omega)$ die Vervollständigung von $C^1(\Omega)$ unter der Norm

$$||u||_{1,2,\Omega} = \sqrt{\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta u^i\, dx + \int\limits_\Omega u^2 v\, dx}$$

Diese Norm ist abschätzbar durch

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 w\,dx + \int_\Omega u^2 v\,dx \leq ||u||^2_{1,2,\Omega} \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 v\,dx + \int_\Omega u^2 v\,dx < \infty \tag{4.6}$$

Ferner sei $H^1_{2,0}(\Omega)$ die Vervollständigung von $C^1_c(\Omega)$ bzgl. der Norm

$$||u||_{1,2,0,\Omega} = \sqrt{\int_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta u^i\,dx}$$

Ist u_k eine Folge in $C^1(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $H^1_2(\Omega)$, so sind u_k und ∇u_k konvergente Folgen in $L_2(\Omega, v)$ bzw. $L_2(\Omega, w)$. Ist $\lim\limits_{k\to\infty} \nabla u_k = v$, so setze $\nabla u = v$, wegen (4.6) ist ∇u wohldefiniert (s. [CW2, §2]).

Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 wird im nächsten Abschnitt zunächst eine schwache Harnack-Ungleichung für nicht-negative Superlösungen einer linearen Gleichung bewiesen. In Abschnitt 4.3 wird diese Harnack-Ungleichung dann benutzt um Regularität gewisser schwacher Lösungen des Systems (4.1) zu zeigen.

4.2 Eine Harnack-Ungleichung für Lösungen singulärer Gleichungen

Betrachte in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Gleichungen der Form

$$Lu = D_\alpha\left(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u\right) = 0 \tag{4.7}$$

Neben der Symmetrie sollen die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x)$ die gleichen Bedingungen wie im vorherigen Abschnitt erfüllen; es gelte also

$$w(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq v(x)|\xi|^2 \quad \forall\, x \in \Omega\, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Wie in Abschnitt 3.2 zeigt man, dass die Eigenschaften 2) und 3) aus 4.1 auch für $u \in H^1_2(\Omega)$ bzw. $u \in H^1_{2,0}(\Omega)$ gelten. Ebenso gilt Lemma 3.8 im hier vorliegenden Kontext.

Definition 4.1 $u \in H^1_2(\Omega)$ *heißt schwache Sublösung von (4.7), falls für alle* $\phi \in H^1_{2,0}(\Omega), \phi \geq 0$ *die Ungleichung*

$$\int_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u D_\alpha \phi\,dx \leq 0$$

gilt. u heißt schwache Superlösung, falls $-u$ schwache Sublösung ist. Ist u sowohl schwache Sub- als auch Superlösung, so heißt u schwache Lösung von (4.7).

Hauptresultat dieses Abschnittes ist

Satz 4.1 *Sei u eine beschränkte, schwache Superlösung von (4.7) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $B_R \subset \Omega$ mit $\frac{z(B_R)}{w(B_R)} \leq C_1$ und für alle $0 < \alpha < \beta < 1, 0 < \gamma < k$ die Abschätzung*

$$\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} |u|^\gamma z \, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq C(n, \alpha, \beta, \gamma, C_1) \inf_{B_{\alpha R}} u \tag{4.8}$$

wobei $k > 1$ die Konstante aus den Sobolev- und Poincaré-Ungleichungen ist.

Wie in Kapitel 3 wird der Beweis dieses Satzes in drei Lemmata unterteilt.

Lemma 4.1 *Sei u eine schwache Sublösung von (4.7). Dann gilt für alle $B_R \subset \Omega$ mit $\frac{z(B_R)}{w(B_R)} \leq C_1$ die Abschätzung*

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leq C(n, \alpha, \beta, C_1) \left(\frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} |u^+|^2 z \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.9}$$

wobei $\alpha < \beta < 1$ sei.

<u>Beweis:</u> Vergleiche den Beweis von Lemma 3.9 für den Fall $v = w$.
Für $\delta \geq 1$ und $0 < N < \infty$ definiere F durch

$$F(u) = F_\delta^N(u) = \begin{cases} (u^+)^\delta & u \leq N \\ \delta N^{\delta-1} u - (\delta - 1) N^\delta & u > N \end{cases}$$

Teste die schwache Formulierung $\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u D_\alpha \phi \, dx \leq 0$ mit $\phi(x) = \eta^2(x) F(u)$, $\eta \geq 0, \eta \in C_c^1(B_R)$. Wie im Beweis von Lemma 3.9 erhält man die Abschätzung

$$\int\limits_\Omega \eta^2 F'(u) |\nabla u|^2 w \, dx \leq 2 \int\limits_\Omega \eta |\eta_x| F |\nabla u| v \, dx \tag{4.10}$$

Mit $F(u) \leq u^+ F'(u)$ und der Hölderungleichung folgt aus (4.10)

$$\int\limits_\Omega \eta^2 F'(u) |\nabla u|^2 w \, dx \leq \left(\int\limits_\Omega \eta^2 F' |\nabla u|^2 w \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \eta_x^2 (u^+)^2 F' \frac{v^2}{w} \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Es folgt mit $z = \frac{v^2}{w}$:

$$\int_\Omega \eta^2 F' |\nabla u|^2 w \, dx \le \left(\int_\Omega \eta_x^2 (u^+)^2 F' z \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

Definiere wie in Kapitel 3 $G(u) := \int\limits_0^u |F'(t)|^{\frac{1}{2}} \, dt = \begin{cases} \sqrt{\delta} \frac{2}{\delta+1} |u^+|^{\frac{\delta+1}{2}} & u \le N \\ \sqrt{\delta} N^{\frac{\delta-1}{2}} |u| & u > N \end{cases}$

Aus (4.11) folgt jetzt

$$\int_\Omega \eta^2 |\nabla G|^2 w \, dx \le C \int_\Omega \eta_x^2 \left(u^+ G'\right)^2 z \, dx \tag{4.12}$$

Da $\eta G \in H^1_{2,0}(\Omega)$ folgt aus der Sobolev-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{z(B_R)} \int_{B_R} |\eta G|^{2k} z \, dx \right)^{\frac{1}{2k}} &\overset{Young}{\le} CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} \left(\eta^2 |\nabla G|^2 + \eta_x^2 G^2\right) w \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(4.12)}{\le} CR \left(\frac{1}{w(B_R)} \int_{B_R} \eta_x^2 \left[\left(u^+ G'\right)^2 + G^2 \right] z \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Da $G \le u^+ G'$ ergibt sich

$$\left(\frac{1}{z(B_R)} \int_{B_R} |\eta G|^{2k} z \, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \le CR \underbrace{\sqrt{\frac{z(B_R)}{w(B_R)}}}_{\le \sqrt{C_1}} \left(\frac{1}{z(B_R)} \int_{B_R} \eta_x^2 \left(u^+ G'\right)^2 z \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.13}$$

Setze $q := \frac{\delta+1}{2}$ und ziehe die q-te Wurzel aus (4.13):

$$\left(\frac{1}{z(B_R)} \int_{B_R} |\eta G|^{2k} z \, dx \right)^{\frac{1}{2kq}} \le (CR)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{z(B_R)} \int_{B_R} \eta_x^2 \left(u^+ G'\right)^2 z \, dx \right)^{\frac{1}{2q}}$$

Wähle ρ, σ und η so wie im Beweis von Lemma 3.9; für $N = \infty$ erhält man wieder $G(u) = \frac{\sqrt{\delta}}{q} (u^+)^q$. Da z nach Voraussetzung die doubling property besitzt erhalten wir

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})} \int_{B_{\rho R}} |\eta G|^{2k} z \, dx \right)^{\frac{1}{2kq}} \le (CR)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{z(B_{\beta R})} \int_{B_{\sigma R}} \eta_x^2 \left(u^+ G'\right)^2 z \, dx \right)^{\frac{1}{2q}}$$

Hieraus folgt nun weiter

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})}\int\limits_{B_{\rho R}}\left(u^{+}\right)^{2kq} z\,dx\right)^{\frac{1}{2kq}} \leq \left(\frac{Cq}{\sigma-\rho}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\sigma R}}\left(u^{+}\right)^{2q} z\,dx\right)^{\frac{1}{2q}} \tag{4.14}$$

<u>Iteration von (4.14):</u>
Setze $q_0 = 1, q_i = kq_{i-1} = k^i \to \infty, i \to \infty$. Weiterhin sei
$\rho_i = \alpha + (\beta-\alpha)^{1+i}, \sigma_i = \rho_{i-1}$ (dann ist $\rho_0 = \beta, \rho_\infty = \alpha$,
$\rho_i - \rho_{i+1} = (\beta-\alpha)^{1+i}(1-(\beta-\alpha)))$. Mit dieser Wahl von q_i und ρ_i folgt:

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})}\int\limits_{B_{\rho R}}\left(u^{+}\right)^{2kq_i} z\,dx\right)^{\frac{1}{2kq_i}} = \sup_{B_{\alpha R}} u^{+}$$

Mit (4.14) kommt man nun zu

$$\sup_{B_{\alpha R}} u \leq \prod_{l=0}^{\infty}\left(\frac{Cq_l}{\rho_l-\rho_{l+1}}\right)^{\frac{1}{q_l}}\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}\left(u^{+}\right)^{2} z\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.15}$$

Das unendliche Produkt schätzt man wie im Beweis von Lemma 3.9 ab, es ergibt sich dann die Behauptung $\sup\limits_{B_{\alpha R}} \leq C(n,\alpha,\beta,C_1)\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} |u^{+}|^2 z\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ $\square$

Lemma 4.2 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.1 erfüllt. Dann gilt:*

$$\frac{1}{\inf\limits_{B_{\alpha R}} u} \leq \exp\left(C - \frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} \log u z\,dx\right) \tag{4.16}$$

<u>Beweis:</u> Vergleiche den Beweis von Lemma 3.10 für den Fall $v = w$.
Sei zunächst $u \geq \epsilon > 0$, teste die schwache Formulierung mit $\phi(x) = \eta(x)u^{-1}(x)$, $\eta \in C_c^1(\Omega), \eta \geq 0$. Da u Superlösung ist, ergibt sich

$$\int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u D_\alpha \eta u^{-1}\,dx - \int\limits_{\Omega} a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u D_\alpha u \eta u^{-2}\,dx \geq 0 \tag{4.17}$$

Setze $v := \log\left(\frac{t}{u}\right)$, t sei eine positive Konstante, es folgt: $D_\beta v = -D_\beta u u^{-1}$.
Da $\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u D_\alpha u \eta u^{-2}\, dx \geq 0$ folgt $\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta v D_\alpha \eta\, dx \leq 0$. v ist also eine schwache Sublösung von (4.7) und mit Lemma 4.1 erhält man

$$\sup_{B_{\alpha R}} v \leq C \left(\frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} |v^+|^2 z\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.18}$$

Unter Verwendung der Testfunktion $\phi(x) = \eta^2(x) u^{-1}(x), \eta \in C_c^1(\Omega)$ ergibt sich

$$2 \int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u \eta D_\alpha \eta u^{-1}\, dx - \int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u D_\alpha u \eta^2 u^{-2}\, dx \geq 0$$

Mit den Elliptizitätsbedingungen und der Hölderungleichung folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \eta^2 u^{-2} |\nabla u|^2 w\, dx &\leq C \int\limits_\Omega \eta |\eta_x| |\nabla u| u^{-1} v\, dx \\ &\leq C \left(\int\limits_\Omega \eta_x^2 \frac{v^2}{w}\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_\Omega \eta^2 |\nabla u|^2 u^{-2} w\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also $\int\limits_\Omega \eta^2 u^{-2} |\nabla u|^2 w\, dx \leq C \int\limits_\Omega \eta_x^2 z\, dx.$

Wähle η so, dass $\eta = 1$ in $B_{\beta R}$, supp $\eta \subset B_R$, $|\eta_x| \leq \frac{2}{(1-\beta)R}$. Aus der letzten Abschätzung folgt dann unter Beachtung von $|\nabla v|^2 = u^{-2} |\nabla u|^2$ und der doubling property

$$\int\limits_{B_{\beta R}} |\nabla v|^2 w\, dx \leq C \left(\frac{1}{R^2} \int\limits_{B_R} z\, dx \right) \leq C \left(\frac{1}{R^2} \int\limits_{B_{\beta R}} z\, dx \right)$$

Sei t gegeben durch $\log t = \frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} \log u z\, dx$, mit dieser Wahl von t gilt $\int\limits_{B_{\beta R}} vz\, dx = 0$. Anwendung der Poincaré-Ungleichung und der letzten Abschätzung ergibt dann

$$\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} |v|^{2k} z\, dx \right)^{\frac{1}{2k}} \leq CR \left(\frac{1}{w(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} |\nabla v|^2 w\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left(\frac{1}{w(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} z\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{\frac{z(B_{\beta R})}{w(B_{\beta R})}}\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} z\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq C(n,\beta,C_1)$$

Zusammen mit (4.18) und der Hölderungleichung folgt hieraus wie im Beweis von Lemma 3.10

$$\sup_{B_{\alpha R}} v = \log t + \log\left(\frac{1}{\inf\limits_{B_{\alpha R}} u}\right) \leq C\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} |v|^{2k} z\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \leq C$$

Also ist $\log\left(\frac{1}{\inf\limits_{B_{\alpha R}} u}\right) \leq C - \log t$, aus der Definition von t folgt nun

$$\left(\inf_{B_{\alpha R}} u\right)^{-1} \leq \exp\left(C - \frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} \log u z\,dx\right)$$

Gilt nur $u \geq 0$, so folgt die Behauptung wieder mit dem Satz von Levi. □

Lemma 4.3 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.1 erfüllt. Dann gilt:*

$$\left(\frac{1}{z(B_{\alpha R})}\int\limits_{B_{\alpha R}} |u|^{\gamma} z\,dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \exp\left(C + \frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}} \log u z\,dx\right) \tag{4.19}$$

wobei $0 < \gamma < k$, $C = C(n,\alpha,\beta,\gamma,C_1)$

Beweis: Vergleiche den Beweis von Lemma 3.11 für den Fall $v = w$, o.E. gelte $u \geq \epsilon > 0$.
Sei $f = v^- = \log\left(\frac{u}{t}\right)^+$ und teste mit $\phi(x) = \eta^2(x)u^{-1}(x)\left(f^\delta(x) + (2\delta)^\delta\right)$, wobei $\delta \geq 1, \eta \in C_c^1(B_R), \eta \geq 0$. Wie im Fall gleicher Gewichte kommt man zu

$$\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u \eta^2 u^{-2}\left(-\delta f^{\delta-1} + f^\delta + (2\delta)^\delta\right) D_\alpha u\,dx \leq 2\int\limits_\Omega a^{\alpha\beta}(x) D_\beta u \eta D_\alpha \eta u^{-1}\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)\,dx$$

Aus den Elliptizitätsbedingungen folgt nun

$$\int\limits_\Omega \eta^2 u^{-2}\left(f^\delta + (2\delta)^\delta - \delta f^{\delta-1}\right)|\nabla u|^2 w\,dx \leq C\int\limits_\Omega \eta|\eta_x|u^{-1}\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)|\nabla u| v\,dx$$

Mit Hilfe der Ungleichung $\delta f^{\delta-1} \leq \frac{1}{2}\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)$ gelangt man zu

$$\int\limits_\Omega \eta^2 u^{-2}\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)|\nabla u|^2 w\,dx \leq C \int\limits_\Omega \eta|\eta_x|u^{-1}\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)|\nabla u| v\,dx$$

Durch Anwenden der Hölder-Ungleichung und Beachtung von $|\nabla f|^2 = u^{-2}|\nabla u|^2$ erhält man

$$\int\limits_\Omega \eta^2\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)|\nabla f|^2 w\,dx \leq C\left(\int\limits_\Omega \eta^2\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)|\nabla f|^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_\Omega \eta_x^2\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)\frac{v^2}{w}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Daraus folgt: $\displaystyle\int\limits_\Omega \eta^2\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)|\nabla f|^2 w\,dx \leq C\int\limits_\Omega \eta_x^2\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right) z\,dx$

Mit den Ungleichungen $\delta f^{\delta-1} \leq \frac{1}{2}\left(f^\delta + (2\delta)^\delta\right)$ und $f^\delta + (2\delta)^\delta \leq 2\left(f^{\delta+1} + (2\delta)^\delta\right)$ sowie der letzten Abschätzung kommt man zu

$$\delta\int\limits_\Omega \eta^2 f^{\delta-1}|\nabla f|^2 w\,dx \leq C\int\limits_\Omega \eta_x^2\left(f^{\delta+1} + (2\delta)^\delta\right) z\,dx \tag{4.20}$$

Setze $q := \frac{\delta+1}{2} > 1$. Für $\eta f^q \in H^1_{2,0}(B_R)$ liefert die Sobolev-Ungleichung unter Verwendung der Young'schen Ungleichung:

$$\left(\frac{1}{z(B_R)}\int\limits_{B_R}|\eta f^q|^{2k} z\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \leq CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}\left(\eta_x^2 f^{\delta+1} + \eta^2(\delta+1)^2 f^{\delta-1}|\nabla f|^2\right) w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Mit (4.20) kann man nun weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
&CR\left(\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}\left(\eta_x^2 f^{\delta+1} + \eta^2(\delta+1)^2 f^{\delta-1}|\nabla f|^2\right) w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\sqrt{q}R\left(\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}\eta_x^2 f^{2q} w\,dx + (2\delta)^\delta\frac{1}{w(B_R)}\int\limits_{B_R}\eta_x^2 w\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq C\sqrt{q}R\underbrace{\sqrt{\frac{z(B_R)}{w(B_R)}}}_{\leq\sqrt{C_1}}\left(\frac{1}{z(B_R)}\int\limits_{B_R}\left(\eta_x f^q\right)^2 z\,dx + (2\delta)^\delta\sup_{B_R}|\eta_x|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir jetzt

$$\left(\frac{1}{z(B_R)}\int\limits_{B_R}|\eta f^q|^{2k}z\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}\leq C\sqrt{q}R\left(\frac{1}{z(B_R)}\int\limits_{B_R}(\eta_x f^q)^2\,z\,dx+(2\delta)^\delta\sup_{B_R}|\eta_x|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.21}$$

Wähle ρ, σ und η so wie im Beweis von Lemma 3.11, es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{z(B_R)}\int\limits_{B_R}|\eta f^q|^{2k}z\,dx\right)^{\frac{1}{2kq}} &\leq (C\sqrt{q}R)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{2}{(\sigma-\rho)R}\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\frac{1}{z(B_{\sigma R})}\int\limits_{B_{\sigma R}}f^{2\delta}z\,dx+(2\delta)^\delta\right\}^{\frac{1}{2q}}\\ &\leq (Cq)^{\frac{1}{q}}(\sigma-\rho)^{-\frac{1}{q}}\left\{(2\delta)^{\frac{\delta}{\delta+1}}+\left(\frac{1}{z(B_{\sigma R})}\int\limits_{B_{\sigma R}}f^{2q}z\,dx\right)^{\frac{1}{2q}}\right\}\end{aligned}$$

Da z die doubling property besitzt, folgern wir weiter

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})}\int\limits_{B_{\rho R}}f^{2qk}z\,dx\right)^{\frac{1}{2kq}}\leq Cq^{\frac{1}{q}}(\sigma-\rho)^{-\frac{1}{q}}\left\{Cq+\left(\frac{1}{z(B_{\sigma R})}\int\limits_{B_{\sigma R}}f^{2q}z\,dx\right)^{\frac{1}{2q}}\right\} \tag{4.22}$$

Wie in Kapitel 3 setze $q_i = k^i \geq 1, \rho_i = \alpha + 2^{-i}(\beta-\alpha), \sigma_i = \rho_i + 2^{-i}(\beta-\alpha)$, wir erhalten:

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho_i R})}\int\limits_{B_{\rho_i R}}f^{2k^{i+1}}z\,dx\right)^{\frac{1}{2k^{i+1}}}\leq (C2^ik^i)^{\frac{1}{k^i}}\left\{Ck^i+\left(\frac{1}{z(B_{\sigma_i R})}\int\limits_{B_{\sigma_i R}}f^{2k^i}z\,dx\right)^{\frac{1}{2k^i}}\right\}$$

Analog zum Beweis von Lemma 3.11 kann man diese Ungleichung nun iterieren, nach $i-1$ Iterationsschritten kommt man zu

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho_i R})}\int\limits_{B_{\rho_i R}}f^{2k^{i+1}}z\,dx\right)^{\frac{1}{2k^{i+1}}}\leq\sum_{j=1}^{i}Ck^j\prod_{l=j}^{i}\left(Ck^l2^l\right)^{\frac{1}{k^l}}+\prod_{j=1}^{i}\left(Ck^j2^j\right)^{\frac{1}{k^j}}\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}f^{2k}z\,dx\right)^{\frac{1}{2k}} \tag{4.23}$$

Die in (4.23) auftretenden Summen und Produkte werden wie im Fall gleicher Gewichte abgeschätzt. Für alle $p > 2k$ folgt dann

$$\left(\frac{1}{z(B_{\alpha R})}\int\limits_{B_{\alpha R}}f^p z\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\left[p+\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})}\int\limits_{B_{\beta R}}f^{2k}z\,dx\right)^{\frac{1}{2k}}\right] \tag{4.24}$$

Mit Hilfe von (4.24), der Exponentialreihe, der Hölder-Ungleichung, der Stirling'schen Formel und der doubling property bekommt man als Analogon zu (3.26) für $0 < p_0 < e^{-1}$ die Abschätzung

$$\frac{1}{z(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} e^{p_0 f} z \, dx \leq C e^{\left(\frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} f^{2k} z \, dx \right)^{\frac{1}{2k}}} \tag{4.25}$$

Da nach dem Beweis von Lemma 4.2 die rechte Seite von (4.25) beschränkt ist, folgt weiter

$$\left(\frac{1}{z(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} e^{p_0 f} z \, dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq C \tag{4.26}$$

Nun muß noch die γ-Norm von $\frac{u}{t}$ durch die entsprechende p_0-Norm abgeschätzt werden. Wie in Kapitel 3 kommt man für $q \in (0, \frac{1}{2})$ und $\alpha < \rho < \sigma < \beta$ zu

$$\left(\frac{1}{z(B_{\rho R})} \int\limits_{B_{\rho R}} u^{2kq} z \, dx \right)^{\frac{1}{2kq}} \leq \left(\frac{Cq}{\sigma - \rho} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} u^{2q} z \, dx \right)^{\frac{1}{2q}} \tag{4.27}$$

Durch eine endliche Iteration von (4.27) und Beachtung der Definition von t $\left(\log t = \frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} \log u z \, dx \right)$ erreicht man schließlich die Behauptung

$$\left(\frac{1}{z(B_{\alpha R})} \int\limits_{B_{\alpha R}} u^{\gamma} z \, dx \right)^{\frac{1}{\gamma}} \leq \exp \left(C + \frac{1}{z(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} \log u z \, dx \right) \qquad \square$$

Beweis von Satz 4.1: Multipliziere (4.16) mit (4.19). $\square$

4.3 Regularitätsaussagen für Lösungen singulär elliptischer Systeme

Für schwache Lösungen von Gleichungen der Form (4.7) mit verschiedenen Gewichten gibt es Regularitätsresultate von Stredulinsky [STR] und Chanillo-Wheeden [CW2]. In [CW2] werden an die Gewichte w und v die Bedingungen 1) bis 3) aus

Abschnitt 4.1 gestellt. Stredulinsky fordert das Erfülltsein einer recht komplizierten Bedingung an die Kapazität (s. [STR, Thm. 2.2.41 und Thm. 3.1.10]), diese Bedingung macht es sehr schwer konkrete Beispiele anzugeben (in der Tat gibt Stredulinsky kein Beispiel mit unterschiedlichen Gewichten an).
Hier wird nun Hölderstetigkeit von schwachen Lösungen von Systemen der Form (4.1) gezeigt, v und w seien stets Gewichte, die die Bedingungen aus Abschnitt 4.1 erfüllen. Zunächst wird der Lösungsbegriff präzisiert:

Definition 4.2 *$u \in H_2^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ heißt schwache Lösung von (4.1), falls für alle $\phi \in H_{2,0}^1 \cap L_\infty(\Omega, \mathbb{R}^m)$ die Ungleichung*

$$\int_\Omega a^{\alpha\beta}(x, u, \nabla u) D_\beta u D_\alpha \phi \, dx = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) \phi \, dx$$

erfüllt ist.

Das System (4.1) soll folgende Strukturbedingungen erfüllen:

1) $\sup_\Omega |u| \leq M < \infty$

2) $w(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha \xi_\beta \leq v(x)|\xi|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $x \in \Omega$

3) $|f(x, u, p)| \leq aQ(x, p)$
   $u(x) \cdot f(x, u, p) \leq a^* Q(x, p)$
   für fast alle $x \in \Omega$ und für alle $p \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $a \geq 0$ und $a^* \in \mathbb{R}$, wobei $Q(x, p) := a^{\alpha\beta}(x) p_\alpha^i p_\beta^i$

Um den Regularitätssatz (Satz 4.3) zu beweisen, verfahren wir ähnlich wie im Beweis von Satz 3.3. Zunächst benötigen wir folgende Form von Satz 4.1:

Satz 4.2 *Sei u eine beschränkte, schwache, nicht-negative Superlösung von (4.7) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt für alle $B_{4R} \subset \Omega$ mit $\frac{z(B_{4R})}{w(B_{4R})} \leq C_1$ die Abschätzung*

$$\frac{1}{z(B_{2R})} \int_{B_{2R}} uz \, dx \leq C(n, C_1) \inf_{B_R} u$$

Mit dieser schwachen Harnack-Ungleichung erhalten wir

Lemma 4.4 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (4.1) in $B_{4R}(0)$, die Strukturbedingungen 1)-3) seien mit $a^*+aM < 2$ erfüllt, ferner gelte $\frac{z(B_{4R})}{w(B_{4R})} \leq C_1$. Dann existiert ein $\delta = \delta(n, a, a^*, M, C_1) \in (0,1)$, so dass*

$$u(B_R(0)) \subset B_{M(1-\delta)}(\delta \overline{u})$$

wobei $\overline{u} = \frac{1}{z(B_R(0))} \int\limits_{B_R(0)} uz\, dx$.

<u>Beweis:</u> Vergleiche auch die Beweise der Lemmata 1.2 und 3.12.
Für $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $|\xi| \leq \frac{1-l}{a}$ gilt: $A\left(\frac{1}{2}|u|^2 + \xi \cdot u\right) \leq 0$. Die nicht-negative Funktion $h(x) := \frac{1}{2}M^2 + \frac{1-l}{a}M - \frac{1}{2}|u(x)|^2 - \xi \cdot u(x)$ ist eine Superlösung von A und für den Mittelwert gilt: $\overline{h}(x) \geq \frac{1-l}{a}M - \xi \cdot \overline{u}(x)$. Unter Verwendung der doubling property für z folgt aus Satz 4.2 für $x \in B_R(0)$:

$$h(x) \geq \delta_1(n, C_1)\left[\frac{1-l}{a}M - \xi \cdot \fint\limits_{B_R(0)} u(x)z\, dx\right] \tag{4.28}$$

Wähle ξ in die Richtung von u, wobei $|\xi| = \frac{1-l}{a}$ sei, θ sei der Winkel zwischen u und $\overline{u}$. Mit $r := \frac{|u|}{M}$ folgt aus (4.28)

$$M(1-r)\left[\frac{1}{2}(M+|u|) + \frac{1-l}{a}\right] \geq M\delta_1 \frac{1-l}{a}\left(1 - \frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta\right)$$

Analog zu (3.34) folgt jetzt

$$1 - \frac{|u|}{M} \geq \delta_2(n, a, a^*, M, C_1)\left(1 - \frac{|u|}{M}\cos\theta\right) \tag{4.29}$$

O.E. sei $\delta_2 < 1$, damit erreicht man $r^2 - \delta_2 r\frac{|\overline{u}|}{M}\cos\theta \leq 1 - \delta_2$ und schließlich

$$|u(x) - \delta\overline{u}|^2 \leq M^2(1-\delta)^2 \qquad \text{f.f.a. } x \in B_R(0)$$

Dies beendet den Beweis von Lemma 4.4. □

Wie in Kapitel 3 beweist man mit vollständiger Induktion:

Korollar 4.1 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (4.1) in B_{4R}, wobei die obigen Strukturbedingungen 1)-3) mit $a^* + aM = 2l < 2$ erfüllt seien, ferner gelte $\frac{z(B_{4R})}{w(B_{4R})} \leq C_1$. Dann existieren Punkte $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ und Radien M_k, so dass gelten:*

i) $M_k \le M(1-\delta)^k$

ii) $|\xi_k| \le \left[1-(1-\delta)^k\right] M$

iii) $|\xi_k| + M_k \le M$, $|u-\xi_k| \le M_k$ *f.ü. in* $B_{4^{1-k}R}$

iv) $u\left(B_{4^{1-k}R}\right) \subset B_{M_k}(\xi_k)$,

wobei δ *die Konstante aus Lemma 4.4 bezeichnet.*

Beweis: Vergleiche den Beweis von Korollar 3.1.
i)-iii): Der Induktionsanfang ist klar, die Behauptung gelte für den Index k. $u^{(k)} = u - \xi_k$ ist eine schwache Lösung in $B_{4^{1-k}R}$ mit $|f| \le aQ(x,\nabla u)$ und $u^{(k)} \cdot f \le a_k^* Q(x,\nabla u)$, wobei $a_k^* = a^* + a|\xi_k|$. Es gilt $a_k^* + aM_k \le 2l < 2$ und $a_k^* \le l < 1$, ferner ist nach Induktionsvoraussetzung $|u^{(k)}| \le M_k$ in $B_{4^{1-k}R}$. Da w die doubling property besitzt folgt aus $\frac{z(B_{4R})}{w(B_{4R})} \le C_1$ auch $\frac{z(B_{4^{1-k}R})}{w(B_{4^{1-k}R})} \le \tilde{C}$. Durch Anwendung von Lemma 4.4 ergibt sich nun

$$\left| u^{(k)}(x) - \delta \fint_{B_{4^{-k}R}} u^{(k)} z\, dx \right| \le (1-\delta)M_k \qquad \text{f.f.a. } x \in B_{4^{-k}R} \tag{4.30}$$

Mit $\xi_{k+1} := \xi_k + \delta \fint_{B_{4^{-k}R}} u^{(k)} z\, dx$ und $M_{k+1} := \sup_{B_{4^{-k}}} \left|u^{(k+1)}\right|$ erhält man $M_{k+1} \le (1-\delta)^{k+1} M$, aus der Definition von M_{k+1} folgt $|u - \xi_{k+1}| \le M_{k+1}$ in $B_{4^{-k}R}$.
Mit der Induktionsvoraussetzung ii) kommt man wiederum zu $|\xi_{k+1}| \le \left[1-(1-\delta)^{k+1}\right] M$.
Schließlich folgt aus i) und ii) $|\xi_{k+1}| + M_{k+1} \le M$.
iv) folgt sofort aus iii). □

Analog zu Lemma 3.13 zeigt man

Lemma 4.5 *Sei* u *eine beschränkte, schwache Lösung von (4.1) in* Ω, *wobei* $B_{4R} \subset \Omega$. *Die Strukturbedingungen 1)-3) seien mit* $a^* + aM < 2$ *erfüllt, weiter gelte* $\frac{z(B_{4R})}{w(B_{4R})} \le C_1$. *Für* $r \in (0,R]$ *gilt dann* $osc_{B_r} u \le 4M\left(\frac{r}{4R}\right)^\alpha$; α *ist gegeben durch* $4^{-\alpha} = \max\left(1-\delta, \frac{1}{2}\right)$, *wobei* δ *die Konstante aus Lemma 4.4 bezeichnet.*

Beweis: Völlig analog zum Beweis von Lemma 3.13. □

Die Funktion $\overline{u}(x) := \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{z(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} u(y) z\, dy$ ist eine stetiger Repräsentant von

u in B_r.

Nun kann man folgenden Regularitätssatz beweisen:

Satz 4.3 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (4.1) in Ω. Die Strukturbedingungen 1)-3) seien mit $a^* + aM < 2$ erfüllt, ferner gelte für ein $R > 0$, dass $\frac{z(B_R)}{w(B_R)} \leq C_1$ für alle in Ω enthaltenen Bälle mit Radius R. Dann ist u in Ω' für alle $\Omega' \subset\subset \Omega$ hölderstetig und es existiert ein $\alpha = \alpha(n, a, a^*, M, C_1) \in (0, 1)$, so dass gilt:*

$$[u]_{\alpha,\Omega'} \leq C(n, a, a^*, M, C_1, \Omega, \Omega') \tag{4.31}$$

<u>Beweis:</u> Sei $B_{9r}(x_0) \subset \Omega$. Führe den Beweis zunächst für $\Omega' = B_r(x_0)$.
Seien $x, y \in B_r(x_0)$ beliebig, $x \neq y$. Sei $r' := |x - y| \in (0, 2r)$.
Da $B_{4(2r)}(x) \subset B_{9r}(x_0) \subset \Omega$ und $\frac{z(B_{8r})}{w(B_{8r})} \leq \tilde{C}_1$ (aus der doubling property und $\frac{z(B_R)}{w(B_R)} \leq C_1$ folgt $\frac{z(B_{8r})}{w(B_{8r})} \leq \tilde{C}_1$) erhält man mit Lemma 4.5:
$|u(x) - u(y)| \leq osc_{B_{r'}(x)} u \leq 4M \left(\frac{r'}{8r}\right)^\alpha \to \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(n, a, a^*, M, C_1, r)$.

Für ein beliebiges $\Omega' \subset \Omega$ überdecke Ω' mit N Bällen $B_{r_i}(\alpha_i)$, so dass $B_{9r_i}(\alpha_i) \subset \Omega$. Für $x, y \in \Omega'$ setze $r(\Omega, \Omega') := \min_{i=1,\dots,N} r_i$.

<u>1.Fall:</u> $|x - y| < \frac{r}{2} \to \exists i \in \{1, \dots, N\} : x, y \in B_{r_i}(\alpha_i)$. Aus dem oben gezeigtem folgt: $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C(n, a, a^*, M, C_1, \Omega, \Omega')$.

<u>2.Fall:</u> $|x - y| \geq \frac{r}{2}$, dann folgt: $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2M}{\left(\frac{r}{2}\right)^\alpha} \leq C(n, a, a^*, M, \Omega, \Omega')$. □

<u>Beispiel:</u> Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, $v(x) = |x|$, $w(x) = |x|^\tau$ mit $\tau \in (1, 2)$.
Klar: $w \in A_2$, $z = \frac{v^2}{w} = |x|^{2-\tau} \in D_\infty$. Um zu zeigen, dass die balance condition (4.5) erfüllt ist, zeige zunächst, dass für $\alpha > 0$ und $a \in B_R(0)$ gilt:

$$\int\limits_{B_R(a)} |x|^\alpha \, dx \cong R^n (R + |a|)^\alpha \tag{4.32}$$

i) <u>Abschätzung nach oben:</u>

$$\int\limits_{B_R(a)} |x|^\alpha \, dx = \int\limits_{B_R(0)} |x + a|^\alpha \, dx \leq \int\limits_{B_R(0)} |x|^\alpha \, dx + \int\limits_{B_R(0)} |a|^\alpha \, dx$$

$$\leq C \int\limits_0^R r^{n-1+\alpha} \, dr + CR^n |a|^\alpha \leq CR^n \left(R^\alpha + |a|^\alpha\right) \leq CR^n (R + |a|)^\alpha,$$

die letzte Abschätzung gilt, da $R^\alpha \leq (R+|a|)^\alpha$ und $|a|^\alpha \leq (R+|a|)^\alpha$

ii) Abschätzung nach unten:

Zeige zunächst: $|R\xi + a|^\alpha \geq C\,(R^\alpha|\xi|^\alpha + |a|^\alpha)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\xi \cdot a \geq 0$

Es gilt: $R^\alpha|\xi|^\alpha = (R^2|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \leq (R^2|\xi|^2 + |a|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ und $|a|^\alpha \leq (R^2|\xi|^2 + |a|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$

$\rightarrow R^\alpha|\xi|^\alpha + |a|^\alpha \leq 2\,(R^2|\xi|^2 + |a|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \leq 2\,((R|\xi| + |a|)^2)^{\frac{\alpha}{2}} \leq C|R\xi + a|^\alpha.$

Mit dieser Abschätzung folgt nun für $B^+ := B_1(0) \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n; \xi \cdot a \geq 0\}$:

$$\int\limits_{B_R(a)} |x|^\alpha\,dx = \int\limits_{B_R(0)} |x+a|^\alpha\,dx \geq R^n \int\limits_{B_1(0)} |R\xi + a|^\alpha\,d\xi \geq R^n \int\limits_{B^+} |R\xi + a|^\alpha\,d\xi$$

$$\geq CR^n \int\limits_{B^+} (R^\alpha|\xi|^\alpha + |a|^\alpha)\;d\xi \geq R^n \left(R^\alpha \int\limits_{B^+} |\xi|^\alpha\,d\xi + C_1|a|^2 \right)$$

$$\geq CR^n\,(C_2R^\alpha + C_1|a|^\alpha) \geq CR^n\,(R^\alpha + |a|^\alpha) \geq CR^n(R+|a|)^\alpha,$$

die letzte Abschätzung gilt, da $R = (R^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (R^\alpha + |a|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ und $|a| \leq (R^\alpha + |a|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, somit gilt also (4.32).

Aus (4.32) folgt jetzt, dass die Bedingung $\frac{z(B_R)}{w(B_R)} \leq C_1$ erfüllt ist, denn:

$z(B_R(a)) = \int\limits_{B_R(a)} |x|^{2-\tau}\,dx \cong R^n(R+|a|)^{2-\tau}$ und

$w(B_R(a)) = \int\limits_{B_R(a)} |x|^\tau\,dx \cong R^n(R+|a|)^\tau$. Da $\frac{(R+|a|)^{2-\tau}}{(R+|a|)^\tau} = (R+|a|)^{2-2\tau} \leq C_1$ für ein festes $R > 0$ folgt jetzt also $\frac{z(B_R)}{w(B_R)} \leq C_1$.

Zeige nun, dass die Gewichte z und w Bedingung (4.5) erfüllen: Für $2 < q \leq \frac{2n}{n+\tau-2}$ ($\frac{2n}{n+\tau-2} > 2$, da $\tau \in (1,2)$) erhält man für $s \in (0,1)$

$$s\left[\frac{z(B_{sR}(a))}{z(B_R(a))}\right]^{\frac{1}{q}} = sC\left[\frac{(sR)^n(sR+|a|)^{2-\tau}}{R^n(R+|a|)^{2-\tau}}\right]^{\frac{1}{q}} \leq Css^{\frac{n}{q}} \tag{4.33}$$

Ferner gilt:

$$\left[\frac{w(B_{sR}(a))}{w(B_R(a))}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(sR)^n(sR+|a|)^\tau}{R^n(R+|a|)^\tau}\right]^{\frac{1}{2}} \geq s^{\frac{n}{2}}s^{\frac{\tau}{2}} \tag{4.34}$$

Da

$$ss^{\frac{n}{q}} \leq Cs^{\frac{n+\tau}{2}}$$

folgt die Gültigkeit von

$$s\left[\frac{z(B_{sR}(a))}{z(B_R(a))}\right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\frac{w(B_{sR}(a))}{w(B_R(a))}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Somit ist (4.5) erfüllt und alle beschränkten, schwachen Lösungen von

$$-D_\alpha\left(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u^k)\right) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

mit

$$|x|^\tau|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq |x||\xi|^2 \qquad (\tau \in (1,2)) \tag{4.35}$$

sind nach Satz 4.3 in $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ lokal hölderstetig (da $a^* + aM = 0$).

Liouville-Sätze für ganze Lösungen

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.5 werden auch hier Liouville-Sätze für ganze, schwache Lösungen von (4.1) gezeigt. In einem beliebigen Ball $B_L(0)$ sollen die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}(x)$ singulär elliptisch im Sinne von (4.2) sein, außerhalb von $B_L(0)$ seien die Koeffizienten gleichmäßig elliptisch, d.h. es gelte

$$\frac{1}{C}s(x)|\xi|^2 \leq a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \leq Ct(x)|\xi|^2 \tag{4.36}$$

mit $C \geq 1$ und $s(x) = \begin{cases} w(x), & |x| < L \\ 1, & |x| \geq L \end{cases}$, $t(x) = \begin{cases} v(x), & |x| < L \\ 1, & |x| \geq L \end{cases}$.

Für w und v seien die Bedingungen aus Abschnitt 4.1 erfüllt. Weiterhin sollen für das System (4.1) die gleichen Strukturbedingungen wie zuvor erfüllt sein, d.h. es gelte $|f(x, u, \nabla u)| \leq aQ(x, \nabla u)$ und $u(x) \cdot f(x, u, \nabla u) \leq a^*Q(x, \nabla u)$ mit $a > 0$ und $a^* \in \mathbb{R}$. Um den Liouville-Satz zu beweisen, werden jetzt die Lemmata 3.14 bis 3.17 aus Abschnitt 3.5 an die hier vorliegende Situation mit zwei unterschiedlichen Gewichten angepasst. Völlig analog zu Lemma 3.14 beweist man

Lemma 4.6 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (4.1) in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, es gelte $a^* < 1$. Ist $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $|\xi| \leq \frac{1-a*}{a}$, so ist $|u - \xi|^2$ eine Sublösung, d.h. $-D_\alpha(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta|u - \xi|^2) \leq 0$ in Ω.*

Mit der Notation

$z_1(x) = \frac{t^2(x)}{s(x)} = \begin{cases} \frac{v^2(x)}{w(x)}, & |x| < L \\ 1, & |x| \geq L \end{cases}$ erhalten wir jetzt

Lemma 4.7 *Sei u eine beschränkte, schwache, nicht-negative Lösung von $Lu \leq 0$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wobei $B_{4L}(0) \subset \Omega$ sei. Die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ sollen die Bedingung (4.36) mit den dort angegebenen Gewichten s und t erfüllen, ferner gelte $\frac{z_1(B_{\frac{L}{2}})}{s(B_{\frac{L}{2}})} \leq C_1$. Dann gilt für alle $R > 0$ mit $B_{4R}(0) \subset \Omega$*

$$\frac{1}{z_1(B_{2R})} \int\limits_{B_{2R}(0)} u z_1 \, dx \leq C(n, C_1) \inf_{B_R(0)} u \tag{4.37}$$

Beweis: 1.Fall: $B_{4R}(0) \subseteq B_L(0)$. Dann folgt die Behauptung sofort aus Satz 4.2.
2.Fall: $B_L(0) \subset B_{4R}(0)$. Wie im Beweis von Lemma 3.15 zeigt man für gleichmäßig elliptische Koeffizienten auf Kugelspalten die Abschätzung

$$\frac{1}{z_1(B_{\beta_1 S} - B_{\beta_2 S})} \int\limits_{B_{\beta_1 S} - B_{\beta_2 S}} u z_1 \, dx \leq C \inf_{B_{\alpha_1 S} - B_{\alpha_2 S}} u \tag{4.38}$$

mit $1 < \beta_2 < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_1 < 4$.
Wähle $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ so, dass $1 < \alpha < \alpha_1 < 2$ und $\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta < 4$; α_1 und β_1 seien so bestimmt, dass $B_{\alpha_1 L} \subset B_{\beta_1 R}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1(B_{\beta R})} \int\limits_{B_{\beta R}} u z_1 \, dx &= \frac{1}{z_1(B_{\beta R} - B_{\alpha L}) + z_1(B_{\alpha L})} \left[\int\limits_{B_{\beta R} - B_{\alpha L}} u z_1 \, dx + \int\limits_{B_{\alpha L}} u z_1 \, dx \right] \\
&\leq \frac{1}{z_1(B_{\beta R} - B_{\alpha L})} \int\limits_{B_{\beta R} - B_{\alpha L}} u z_1 \, dx + C \frac{1}{z_1(B_{2L})} \int\limits_{B_{2L}} u z_1 \, dx \\
&\leq C \inf_{B_{\beta_1 R} - B_{\alpha_1 L}} u + C \inf_{B_{\alpha_1 L}} u \leq C \inf_{B_R} u
\end{aligned}$$

Bei der letzten Abschätzung wurde einmal (4.38) und einmal Satz 4.1 angewendet. Im Fall $B_L(0) \subset B_{2R}(0)$ wähle wie in Kapitel 3 $\beta = 2, \beta_1 = \frac{3}{2}, \alpha_1 = \frac{5}{4}, \alpha = \frac{9}{8}$. Ist $B_L(0) \not\subset B_{2R}(0)$, so wähle wieder ein $\beta \in (2, 4)$ für das $B_L(0) \subset B_{\beta R}(0)$ gilt. Mit Hilfe der doubling property erhält man dann wie im Beweis von Lemma 3.15 die Behauptung. □

Lemma 4.8 *Sei $u \in H_2^1 \cap L_\infty(B_{4R})$ eine schwache Lösung von $-Lu \leq 0$ in $B_{4R}(0) \subset \mathbb{R}^n$, wobei die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ die Eigenschaft (4.36) erfüllen sollen, ferner gelte $\frac{z_1(B_R)}{s(B_R)} \leq C_1$. Dann existiert ein $\delta = \delta(n, C_1) > 0$ mit der Eigenschaft*

$$\sup_{B_R(0)} u \leq (1 - \delta) \sup_{B_{4R}(0)} u + \delta \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} u z_1 \, dx$$

Beweis: Für die nicht-negative Superlösung $\sup\limits_{B_{4R}(0)} u - u$ folgt aus Lemma 4.7 die Abschätzung

$$\frac{1}{z_1(B_{2R})} \int\limits_{B_{2R}} \left(\sup_{B_{4R}} u - u \right) z_1 \, dx \leq C \inf_{B_R} \left(\sup_{B_{4R}} u - u \right)$$

Wie im Beweis von Lemma 3.16 kommt man mit der doubling property zu

$$\frac{\tilde{C}}{C} \sup_{B_{4R}} u - \frac{\tilde{C}}{C} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R} u z_1 \, dx \leq \sup_{B_{4R}} u - \sup_{B_R} u$$

Mit $\delta := \frac{\tilde{C}}{C}$ erhalten wir die Behauptung. □

Lemma 4.9 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (4.1) in $\Omega = \mathbb{R}^n$, es gelte $a^* < 1$, die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ sollen (4.36) erfüllen und ferner sei $\frac{z_1(B_R)}{s(B_R)} \leq C_1$ für ein $R \leq \frac{L}{2}$. Dann gelten:*

i) $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} u(x) z_1 \, dx =: \overline{u}_\infty$ *existiert und es gilt:* $|\overline{u}_\infty| = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u| = M$.

ii) $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u - \overline{u}_\infty|^2 z_1 \, dx = 0.$

iii) $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u - \xi| = |\overline{u}_\infty - \xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m$ *mit* $|\xi| \leq \frac{1-a^*}{a}$

Beweis: i) Für $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $|\xi| \leq \frac{1-a^*}{a}$ gilt nach Lemma 4.6 $-D_\alpha(a^{\alpha\beta}(x) D_\beta |u - \xi|^2) \leq 0$. Wie im Beweis von Lemma 3.17 zeigt man unter Verwendung von Lemma 4.8 die Identität

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u - \xi|^2 z_1 \, dx = \sup_{\mathbb{R}^n} |u - \xi|^2 \tag{4.39}$$

Für $\xi = 0$ gilt somit: $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u|^2 z_1 \, dx = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^2 = M^2$.

Analog zum Vorgehen in Kapitel 3 folgert man, dass $\lim\limits_{R\to\infty} \xi \cdot \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} u z_1 \, dx$ existiert. Ferner gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |u - \xi|^2 = M^2 + |\xi|^2 - 2\xi \cdot \lim_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} u z_1 \, dx \tag{4.40}$$

Sei $\tau := \frac{1-a^*}{aM}$ und $\overline{u}_\infty \in \mathbb{R}^m$ so gewählt, dass $|\overline{u}_\infty| = M$ und $\sup_{\mathbb{R}^n} |u + \tau\overline{u}_\infty| = (1+\tau)M$. Mit $\xi := -\tau\overline{u}_\infty$ kommt man wie in Kapitel 3 zu

$$M^2 = \lim_{R\to\infty} \overline{u}_\infty \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uz_1\,dx$$

Da $|\overline{u}_\infty|, |\frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uz_1\,dx| \leq M$ folgt hieraus

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uz_1\,dx = \overline{u}_\infty$$

ii) Es ist

$$\frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u-\overline{u}_\infty|^2 z_1\,dx = |\overline{u}_\infty|^2 + \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u|^2 z_1\,dx - 2\overline{u}_\infty \cdot \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uz_1\,dx$$

Mit $R \to \infty$ folgt hieraus unter Verwendung von i) die Behauptung

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} |u-\overline{u}_\infty|^2 z_1\,dx = M^2 + M^2 - 2M^2 = 0$$

iii) Nach (4.40) gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}^m$ mit $|\xi| \leq \frac{1-a^*}{a}$:

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{R}^n} |u-\xi|^2 &= M^2 + |\xi|^2 - 2\lim_{R\to\infty} \xi \cdot \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uz_1\,dx \\ &\overset{i)}{=} |\overline{u}_\infty|^2 + |\xi|^2 - 2\xi\cdot\overline{u}_\infty = |\overline{u}_\infty - \xi|^2 \end{aligned}$$

□

Es ergibt sich jetzt folgender Liouville-Satz:

Satz 4.4 *Sei u eine beschränkte, schwache Lösung von (4.1) in $\mathbb{R}^n$, die Koeffizienten $a^{\alpha\beta}$ sollen (4.36) erfüllen, ferner gelte $\frac{z_1(B_R(0))}{s(B_R(0))} \leq C_1$ für ein $R \leq \frac{L}{2}$. Die an das System (4.1) gestellten Strukturbedingungen sollen mit $a^* + aM < 2$ erfüllt sein. Dann ist u konstant.*

<u>Beweis:</u> Vergleiche den Beweis von Satz 3.4.
Definiere für $t \in [0,1]$: $u_t := u - t\overline{u}_\infty$ und $M_t := \sup_{\mathbb{R}^n} |u_t|$, wobei $\overline{u}_\infty = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{z_1(B_R)} \int\limits_{B_R(0)} uz_1\,dx$. Setze $I := \{t \in [0,1]; M_t \leq (1-t)M_0\}$. T sei die größte Zahl in I und nimm an, dass $T < 1$. $u_T = u - T\overline{u}_\infty$ ist schwache Lösung eines Systems der Form (4.1) mit den Strukturbedingungen

$$|f| \le aQ(x,\nabla u)$$
$$(u - T\overline{u}_\infty)\cdot f \le (a^* + aT|\overline{u}_\infty|)Q(x,\nabla u)$$

Sei $a_T^* := a^* + aT|\overline{u}_\infty|$, aus Lemma 4.9 folgt wie im Beweis von Satz 3.4
$a_T^* + a\sup\limits_{\mathbb{R}^n}|u - T\overline{u}_\infty| < 2$. Ferner gilt wieder $a_T^* < 1$.
Sei $t := \min\left(1, T + \frac{1-a_T^*}{aM}\right)$, beachte: $T < t \le 1$ und $|(t-T)\overline{u}_\infty| \le \frac{1-a_T^*}{a}$.
Mit $\xi = (t-T)\overline{u}_\infty$ folgt aus Lemma 4.9 iii) analog zu Kapitel 3:
$\sup\limits_{\mathbb{R}^n}|u - t\overline{u}_\infty| = (1-t)|\overline{u}_\infty|$ und somit $M_t \le (1-t)M_0$, also $t \in I$. Da $T < t$ steht dies im Widerspruch dazu, dass T das größte Element in I ist. Die Annahme $T < 1$ ist somit falsch und es folgt $T = 1$, also $u = \overline{u}_\infty = const.$ $\square$

Beispiel: Betrachte für $\tau \in (1,2)$ die Gewichte

$$s(x) = \begin{cases} |x|^\tau, & |x| < 1 \\ 1, & |x| \ge 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad t(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 1, & |x| \ge 1 \end{cases}.$$

Wie beim Beispiel zur Hölderstetigkeit zeigt man, dass die Gewichte s und t in $B_1(0)$ die Bedingung (4.5) erfüllen. Ferner gilt für $a \in B_1(0)$:
$z_1(B_R(a)) \cong R^n(R+|a|)^{2-\tau}$ und $s(B_R(a)) \cong R^n(R+|a|)^\tau$.
Da $\dfrac{R^n(R+|a|)^{2-\tau}}{R^n(R+|a|)^\tau} \le C_1$ für ein festes $R \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, folgt:

$$\frac{z_1(B_R)}{s(B_R)} \le C_1 \text{ für alle in } B_1(0) \text{ enthaltenen Bälle } B_R(a).$$

Somit sind nach Satz 4.4 alle beschränkten, schwachen, ganzen Lösungen des Systems

$$-D_\alpha\left(a^{\alpha\beta}(x)D_\beta u^k\right) = 0 \qquad (k = 1,\ldots,m) \tag{4.41}$$

mit

$$s(x)|\xi|^2 \le a^{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \le t(x)|\xi|^2$$

wobei $\quad s(x) = \begin{cases} |x|^\tau, & |x| < 1 \\ 1, & |x| \ge 1 \end{cases} \quad$ und $\quad t(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1 \\ 1, & |x| \ge 1 \end{cases}$

konstant.

Literaturverzeichnis

[BA1] Baldes, A., *Harmonic Mappings with Partially Free Boundary*, Manuscripta Math. 40, 1982, p.255-275

[BA2] Baldes, A., *Degenerate Elliptic Operators, Diagonal Systems and Variational Integrals*, Manuscripta Math. 55, 1986, p.467-486

[BAO] Baoyao, C., *Regularity of weak solutions for a class of degenerate elliptic systems in diagonal form*, Proc. Asian Math. Conference 1990, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hongkong, 1992, p.51-54

[BE] Bethuel, F., *On the Singular Set of Stationary Harmonic Maps*, Manuscripta Math. 78, 1993, p.417-443

[CA]

[CW1] Chanillo, S. und Wheeden, R.L., *Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano maximal functions*, Amer. Journal Math. 107, 1985, p.1191-1226

[CW2] Chanillo, S. und Wheeden, R.L., *Harnack's inequality and mean-value inequalities for solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. P.D.E. 11(10), 1986, p.1111-1134

[CF] Coifman, R.R. und Fefferman, C., *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. 51, 1974, p.241-250

[doC] do Carmo, M., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin (1992)

[EV] Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS, Providence (1998)

[EG] Evans, L.C. und Gariepy, R.F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, New York, London, Tokio (1992)

[FKS] Fabes, E., Kenig, C. und Serapioni, R., *The Local Regularity of Solutions of Degenerate Elliptic Equations*, Comm. P.D.E. 7(1), 1982, p.77-116

[GH] Giaquinta, M. und Hildebrandt, S., *A priori estimates for harmonic mappings*, Journal Reine Angew. Mathematik 336, 1982, p. 124-164

[GS] Giaquinta, M. und Struwe, M., *An Optimal Regularity Result For A Class Of Quasilinear Parabolic Systems*, Manuscripta math. 36, 1981, p. 223-239

[GT] Gilbarg, D. und Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer GL 224, Berlin, Heidelberg, New York (1998)

[GKM] Gromoll, D., Klingenberg, W. und Meyer, W., *Riemannsche Geometrie im Großen*, Lect. Notes Math. 55, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1968

[HA] Hamilton, R.S., *Harmonic maps of Manifolds with boundary*, Lect. Notes Math. 471, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975

[HE] Hélein, F., *Régularité des applications faiblement harmoniques entre une surface et une variété riemannienne*, C.R. Acad. Sci. Paris 312, Série I, 1991, p. 591-596

[HJW] Hildebrandt, S., Jost, J. und Widman, K.O., *Harmonic mappings and minimal submanifolds*, Inventiones math. 62, 1980, p.269-298

[HK] Hildebrandt, S. und Kaul, H., *Two-dimensional variational problems with obstructions, and Plateau's problem for H-surfaces in a Riemannian manifold*, Comm. Pure Appl. Math. 25, 1972, p.187-223

[HKW] Hildebrandt, S., Kaul, H. und Widman, K.0., *An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Acta Math. 138, 1977, p.1-16

[HW1] Hildebrandt, S. und Widman, K.O., *Some Regularity Results for Quasilinear Elliptic Systems of Second Order*, Math. Z. 142, 1975, p.67-86

[HW2] Hildebrandt, S. und Widman, K.O., *On the Hölder continuity of Weak Solutions of Quasilinear Elliptic Systems of Second Order*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IV, 1977, p.145-178

[HW3] Hildebrandt, S. und Widman, K., *Sätze vom Liouvilleschen Typ für quasilineare elliptische Gleichungen und Systeme*, Nachrichten der Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse, Nr.4, 1979, p.41-59

[JO1] Jost, J., *Eine geometrische Bemerkung zu Sätzen über harmonische Abbildungen, die ein Dirichletproblem lösen*, Manuscripta Math. 32, 1980, p.51-57

[JO2] Jost, J., *Lectures on harmonic maps* in E.Giusti (Ed.): *Harmonic mappings and minimal immersions*, Lect. Notes Math. 1161, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1985, p. 118-192

[LI] Lin, F.H., *Une remarque sur l'application* $\frac{x}{|x|}$, C.R. Acad. Sci. Paris 305, Série I, 1987, p. 529-531

[ME] Meier, M., *On quasilinear elliptic systems with quadratic growth*, preprint 1984

[MU1] Muckenhoupt, B., *Weighted Norm Inequalities for the Hardy Maximal Function*, Trans. Amer. Math. Soc. 165, 1972, p.207-226

[MU2] Muckenhoupt, B., *The equivalence of two conditions for weight functions*, Studia Math. 49, 1974, p.101-106

[MW] Muckenhoupt, B. und Wheeden, R.L., *Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert Transform*, Studia Math. 54, 1976, p. 221-237

[QI] Qing, J., *Boundary regularity of Weakly Harmonic Maps from Surfaces*, Journal Functional Anal. 114, 1993, p.458-466

[RI] Rivière, T., *Everywhere discontinous harmonic maps into spheres*, Acta Math. 175, 1995, p.197-226

[SU] Schoen, R. und Uhlenbeck, K., *A Regularity Theory for Harmonic Maps*, J. Diff. Geom. 17, 1982, p. 307-335

[STR] Stredulinsky, E., *Weighted Inequalities and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations*, Lect. Notes Math. 1074, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984

[ST] Struwe, M., *On The Hölder Continuity Of Bounded Weak Solutions Of Quasilinear Parabolic Systems*, Manuscripta Math. 35, 1981, p. 125-145

[TR1] Trudinger, N.S., *Pointwise Estimates and Quasilinear Parabolic Equations*, Comm. Pure Appl. Math. 21, 1968, p.205-226

[TR2] Trudinger, N.S., *On the regularity of generalized solutions of linear non-uniformly elliptic equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 42, 1971, p.51-62

[WI1] Wiegner, M., *Ein optimaler Regularitätssatz für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme*, Math. Z. 147, 1976, p.21-28

[WI2] Wiegner, M., *A-priori Schranken für Lösungen gewisser elliptischer Systeme*, Manuscripta math. 18, 1976, p.279-297