Allgemeine Nichtstandardintegrationstheorie mittels Integralnormen

Von der Fakultät für Naturwissenschaften
der Universität Duisburg-Essen
(Campus Duisburg)

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigte Dissertation von

Katja Schäfers

aus Oberhausen

Referent:	Prof. Dr. L. Rogge
Korreferent:	Prof. Dr. K.-W. Wiegmann

Tag der mündlichen Prüfung: 10.02.2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der Nichtstandard Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie sind die grundlegenden Konzepte von Peter A. Loeb von großer Bedeutung. In den siebziger Jahren konstruierte er in [15],[16] ausgehend von einem internen Inhalt ein (Standard) Maß, das sogenannte Loeb-Maß, welches seitdem in zahlreichen Veröffentlichungen untersucht worden ist und in vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik Anwendung findet.

Mitte der achtziger Jahre gelang es Loeb [17] seinen maßtheoretischen Ansatz des Loeb-Maßes auf die Integrationstheorie zu übertragen und das sogenannte Loeb-Integral zu konstruieren. Ausgehend von einer internen Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ hyperreellwertiger Funktionen über einer internen Menge Y, entwickelte der Autor eine reelle Integrationsstruktur $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ reellwertiger Funktionen über derselben internen Menge Y. Dieses sogenannte standardisierte System $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ zeichnet sich durch die Gültigkeit eines monotonen Konvergenztheorems aus. Infolgedessen ist die Integrationsstruktur $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ von großem Interesse für die Integrations- und Maßtheorie. Einen anderen Zugang zur Loeb-Integrationstheorie lieferten kürzlich Landers und Rogge [11]. Ähnlich wie zur Konstruktion des Loeb-Maßes ein inneres und äußeres Loeb-Maß verwendet werden kann (vgl. Landers, Rogge [14],[13]), führen die Autoren ausgehend von einer internen Integrationsstruktur hyperreellwertiger Funktionen über einer internen Menge ein sogenanntes oberes und unteres Loeb-Integral ein. Durch diesen Ansatz gelingt ihnen die Konstruktion der Standardisierung $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ von Loeb. Eine Definition des Loeb-Integrals mittels der Übereinstimmung eines Ober- und Unterintegrals, wie Landers und Rogge sie angegeben, ist jedoch, ebenso wie Loebs Konstruktion, zugeschnitten auf interne, positiv lineare Funktionale i, da sie auf der Monotonie des Funktionals beruhen. Verzichtet man auf die Annahme der Positivität des internen Funktionals, d.h. ist $(\mathcal{E}, i)$ nur als interne Pseudo-Integrationsstruktur gegeben, so lassen sich diese Ansätze demzufolge nicht ohne weiteres zur Konstruktion von Standardisierungen verwenden.

In der vorliegenden Arbeit wird daher eine Theorie entwickelt, die es gestattet, die Loeb-Integrationstheorie in einer Weise zu erweitern, dass auch bei Verzicht auf die Annahme der Positivität des Integrals i ein „geeignetes“ standardisiertes System gebildet werden kann.

In der Standardwelt verwendet man unter Einsatz von geeigneten Integralnormen ein Prinzip der Fortsetzung, um ein elementares Integral über einer Menge einfacher Funktionen auf einen möglichst umfassenden Bereich, der Menge der integrierbaren Funktionen, fortzusetzen. Das erweiterte System ergibt sich dabei als abgeschlossene Hülle der elementaren Funktionen bzgl. der induzierten Topologie hinsichtlich der Pseudometrik, welche durch die Integralnorm gegeben ist.

Die dieser Arbeit zugrunde liegende Idee ist nun die, Integralnormen in der Nichtstandardwelt einzuführen und mittels diesen, in ähnlicher Weise wie beim Fortsetzungsprinzip der Standardwelt, einen Prozess der Standardisierung zu entwickeln. Während das Fortsetzungsprinzip der Standardwelt jedoch zur Erweiterung einer gegebenen Pseudo-Integrationsstruktur verwendet wird, ist das Ziel des hier vorgestellten Ansatzes völlig anders. Ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur hyperreellwertiger Funktionen über einer internen Menge soll eine reelle Pseudo-Integrationsstruktur reellwertiger Funktionen über derselben internen Menge konstruiert werden. Im Gegensatz zur Standardtheorie ist jedoch die gegebene interne Pseudo-Integrationsstruktur i. Allg. keine Teilmenge des standardisierten Systems. Aufgrunddessen unterscheidet sich unser Vorgehen essentiell von der Methode der Standardwelt.

Im ersten Teil der Arbeit (Kapitel 1-4) werden wir stets eine interne Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ mit $\mathcal{E} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ und $i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R}$ betrachten. Darauf aufbauend werden wir standardisierte Systeme unter Zuhilfenahme von Integralnormen entwickeln und diese genauer untersuchen. Im zweiten Teil der Arbeit werden wir den Ansatz der Standardisierung mittels Integralnormen erweitern. Dazu werden wir von der Annahme abstrahieren, Systeme von hyperreellwertigen Funktionen und ${}^*\mathbb{R}$-wertige Funktionale zu betrachten. Bereits 1997 haben Loeb und Osswald [20] eine verallgemeinerte Daniell-Stonesche Integrationstheorie in topologischen Vektorverbänden entwickelt, die auf dem Standardisierungskonzept von Loeb [17] beruht. Ausgehend von zwei internen topologischen Vektorverbänden B, D, einem internen ${}^*\mathbb{R}$-linearen Vektorverband $\mathcal{E} \subset B^Y$ (über einer internen Menge Y) und einem internen, positiv ${}^*\mathbb{R}$-linearen Funktional $i : \mathcal{E} \to D$, konstruierten die beiden Autoren ein standardisiertes ($\mathbb{R}$-lineares) System $(\mathcal{L}_1, i^{\mathcal{L}_1})$, welches Werte in der Nichtstandardhülle der internen Vektorverbände annimmt. Loeb und Osswald zeigten, dass diese Standardisierung $(\mathcal{L}_1, i^{\mathcal{L}_1})$ ebenfalls ein monotones Konvergenztheorem erfüllt. Wie im hyperreellen Fall das Prinzip von Loeb und von Landers und Rogge ist jedoch auch die von Loeb und Osswald vorgestellte Methode der Standardisierung zugeschnitten auf positive Funktionale i. Wir werden daher die von Loeb und Osswald [20] vorgestellte Integrationstheorie in topologischen Vektorverbänden durch die Verwendung von geeigneten Integralnormen verallgemeinern. Dadurch wird es insbesondere möglich sein auf die Annahme der Positivität des Integrals i zu verzichten.

Nachfolgend wird nun ein Überblick über Aufbau und Inhalt der vorliegenden Arbeit gegeben. Dabei sollen die wesentlichen Ergebnisse kurz skizziert werden.

Ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ mit $\mathcal{E} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ interner Vektorverband und $i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R}$ internes, ${}^*\mathbb{R}$-lineares Funktional, wird im Kapitel 1 der Begriff einer zum Integral i passenden Integralnorm eingeführt. Dabei handelt es sich um eine messende Größe, die gewisse Normeigenschaften hat und in bestimmter Beziehung zum Integral i steht. Im Satz 1.1.8 wird dann unter Zuhilfenahme einer zum Integral i passenden Integralnorm $\|\cdot\|$ ein standardisiertes System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ reellwertiger Funktionen über Y entwickelt. Der Vorteil des Konzepts der mittels Integralnormen konstruierten Standardisierungen ist jedoch der, dass auf die Annahme der Positivität des Funktionals i verzichtet werden kann. Fernerhin erhält man einfach durch die Verwendung verschiedener geeigneter Integralnormen unterschiedliche standardisierte Systeme. Deshalb beschäftigt sich Kapitel 1.2 mit der Konstruktion verschiedener Integralnormen. In diesem Zusammenhang wird die Loeb-Integralnorm $\|\cdot\|_L$ über ${}^*[0,\infty[^Y$ eingeführt. Ist das interne, lineare Funktional i zusätzlich positiv, so läßt sich zeigen, dass die unter Verwendung der Loeb-Integralnorm gemäß Satz 1.1.8 gebildete Standardisierung zu dem von Loeb konstruiertem standardisiertem System $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ führt. Daher ergibt sich die in [17], [18] und somit auch die in [11] angegebene Standardisierung als Spezialfall des hier angegebenen Standardisierungsverfahrens. Im Abschnitt 1.3 erfolgt schließlich die Verallgemeinerung des von Loeb vorgeschlagenen Ansatzes der Standardisierung mittels einer Menge von Nullfunktionen durch die Verwendung von bestimmten Integralnormen.

Da sich das von Loeb entwickelte standardisierte System der Loeb-integrierbaren Funktionen durch die Gültigkeit eines monotonen Konvergenztheorems auszeichnet (siehe Loeb [7]), wird im Kapitel 2 untersucht, ob und unter welchen Bedingungen das mit Integralnormen gemäß Satz 1.1.8 standardisierte System ein monotones Konvergenztheorem erfüllt. Dazu werden unterschiedliche Forderungen an die Integralnorm gestellt. In diesem Kontext wird im Paragraph 2.2 die Annahme der (schwachen) Halbadditivität untersucht. Es zeigt sich, dass sich diese Eigenschaft von $\mathcal{E}_+$ auf $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ überträgt. Dadurch ist es möglich, die Gültigkeit von Konvergenzaussagen für das standardisierte System auf die Ergebnisse der Standardwelt zurückzuführen (vgl. Satz 2.2.3). Infolgedessen läßt sich ein monotones Konvergenztheorem für eine Klasse von standardisierten Systemen nachweisen. Insbesondere ist damit das monotone Konvergenztheorem u.a. für das System der Loeb-integrierbaren Funktionen $(\mathcal{L}(\|\cdot\|_L), i^L)$ erfüllt.

In der Standardwelt sind σ-stetige Integrale bzw. Daniell-Integrale wegen ihrem engen Zusammenhang zu $\mathbb{R}$-wertigen Maßen von beschränkter Variation bzw. klassischen Maßen von großer Bedeutung. Aus diesem Grund werden im Paragraph 3.1 interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstrukturen bzw. interne Daniell-Integrationsstrukturen (falls i positiv ist) betrachtet. Ähnlich wie Landers und Rogge ein oberes und unteres Loeb-Integral einführen, läßt sich für interne Daniell-Integrationsstrukturen unter Berücksichtigung der σ-Stetigkeit des Integrals ein oberes und unteres Daniell-Integral einführen. Durch diesen Ansatz gelingt die Konstruktion des standardisierten Systems der Daniell-integrierbaren Funktionen. Wir werden des Weiteren zunächst unter Zugrundelegung einer internen Daniell-Integrationsstruktur eine Daniell-Integralnorm einführen und zeigen, dass die damit gebildete Standardisierung ebenfalls zum System der Daniell-integrierbaren Funktionen führt. Unter Zu-

hilfenahme der hergeleiteten Ergebnisse für interne Daniell-Integrationsstrukturen läßt sich dann eine Daniell-Integralnorm für interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstrukturen konstruieren.
Anstatt aufsteigender, interner Folgen wie in 3.1 werden im Abschnitt 3.2 interne, gerichtete Mengen betrachtet. Dies führt zum Begriff einer internen, τ-stetigen Pseudo-Integrationsstruktur bzw., falls i als zusätzlich positiv vorausgesetzt wird, einer internen Bourbaki-Integrationsstruktur. Ausgehend von einer internen Bourbaki-Integrationsstruktur gelingt, analog wie in 3.1, die Einführung einer Standardisierung über zwei äquivalente Wege. Zum einen vermittels der Einführung eines oberen und unteren Bourbaki-Integrals und zum anderen durch die Verwendung einer Bourbaki-Integralnorm bei der Bildung der Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 (vgl. Satz 3.2.9). Durch die Einbeziehung dieser Resultate gelingt dann auch unter Zugrundelegung einer internen, τ-stetigen Pseudo-Integrationsstruktur die Konstruktion einer Bourbaki-Integralnorm.
Paragraph 3.3 beschäftigt sich ausgehend von einer gegebenen Integralnorm mit der Bildung einer zugehörigen lokalen Integralnorm. Ziel dieses Ansatzes ist dabei die Erweiterung des standardisierten Systems. Des Weiteren wird der Frage nachgegangen, ob das System der lokal integrierbaren Funktionen das monotone Konvergenztheorem erfüllt. Eine positive Antwort für das System der lokal Loeb-integrierbaren Funktionen liefert Satz 3.3.9.

Im Kapitel 4 wird aufgrund der engen Beziehung von Inhalten bzw. Maßen und linearen bzw. linear σ-stetigen Integralen in der Standardwelt, der Zusammenhang von internen Pseudo-Integrationsstrukturen und Inhalten untersucht. Ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur und einer zum Integral i passenden Integralnorm $\|\cdot\|$ werden wir durch die Verwendung des standardisierten Systems zu einem $\mathbb{R}$-wertigen Inhalt gelangen. In diesem Kontext werden auf Basis der Standardisierung die Eigenschaften von $\mathcal{M}_0$, dem System der integrierbaren Mengen, und von $\mathcal{M}_1$, dem System der meßbaren Mengen, untersucht. Des Weiteren werden wir auch auf Grundlage der mit der zugehörigen lokalen Integralnorm $\|\cdot\|_l$ gebildeten Standardisierung das System der „lokal-integrierbaren“ Mengen $\mathcal{M}_{0,l}$ und das System der „lokal-meßbaren“ Mengen $\mathcal{M}_{1,l}$ bilden und deren Zusammenhang zu $\mathcal{M}_0$ bzw. $\mathcal{M}_1$ analysieren. Zum Abschluss des Kapitels betrachten wir ausgehend von einer internen Stoneschen Integrationsstruktur das von Landers und Rogge eingeführte untere Loeb-Integral und die Menge $\mathcal{M}(\underline{i})$. In diesem Kontext werden wir einen Zusammenhang des Systems der lokal Loeb-integrierbaren Funktionen mit dem System der $\underline{i}|\mathcal{M}(\underline{i})$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen herleiten.

Im Kapitel 5 werden wir, wie bereits erwähnt, von der bisherigen Annahme $\mathcal{E} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ internes System und $i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R}$ internes, lineares Funktional abstrahieren. Zur Einführung wird zunächst im Abschnitt 5.1 das von Loeb und Osswald [20] für topologische Vektorverbände eingeführte Standardisierungsprinzip kurz erläutert, welches in Anlehnung an Loebs Methode für den hyperreellen Fall auf der Bestimmung einer Menge von Nullfunktionen basiert. Zur Verallgemeinerung des Ansatzes von Loeb und Osswald wird im Abschnitt 5.2 eine Integrationstheorie mittels Inte-

gralnormen entwickelt, welche auch bei Verzicht auf die Annahme der Positivität des internen Funktionals i anwendbar ist. Dabei werden grundsätzlich zwei verschiedene Fälle betrachtet. Zum einen setzt man $\mathcal{E} \subset B^Y$ als internen Vektorverband über $^*\mathbb{R}$ voraus, wobei B als interner topologischer Vektorverband über $^*\mathbb{R}$ angenommen wird. Zum anderen wird $\mathcal{E} \subset B^Y$ als internes Fundamentalsystem vorgegeben, während B als interner normierter, $^*\mathbb{R}$-linearer Raum fungiert. Des Weiteren wird in beiden Fällen stets $i : \mathcal{E} \to D$ als internes, $^*\mathbb{R}$-lineares Funktional betrachtet, wobei D als interner normierter, $^*\mathbb{R}$-linearer Raum vorausgesetzt wird. Nachdem der Begriff der Integralnorm aus Kapitel 1 auf allgemeinere Funktionensysteme erweitert worden ist, werden wir ein standardisiertes System $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ von Funktionen über Y entwickeln, die Werte in der Nichtstandardhülle von B annehmen. Über $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ wird ferner ein standardisiertes Funktional i^L konstruiert, welches Werte in der Nichtstandardhülle von D annimmt. Dazu benötigen wir fernerhin eine zusätzliche Bedingung, die sichert, dass die Definition von i^L von der speziellen Darstellung des Elementes der Nichtstandardhülle unabhängig ist. Dies führt zur Forderung einer $\approx$–Integralnorm, d.h. einer Integralnorm, die Funktionen, die nur infinitesimale Werte annehmen, den Wert Null zuordnet.
Da die Standardisierung $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ maßgeblich von der verwendeten Integralnorm abhängt, befassen wir uns im Paragraph 5.3 mit der Entwicklung von Integralnormen. Hierbei wird u.a. die Loeb-Integralnorm konstruiert.
Im Kapitel 5.4 wird schließlich der von Loeb und Osswald vorgeschlagene Ansatz der Konstruktion einer Menge von schwachen Nullfunktionen auf die Verwendung von bestimmten Integralnormen übertragen. Als Resultat zeigt sich, dass das auf diese Weise standardisierte System $(\mathcal{L}_{\|\cdot\|}, i^{\mathcal{L}})$ dem im Abschnitt 5.2 entwickeltem System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ entspricht. Schließlich ergibt sich im Falle eines positiven Integrals und bei der Verwendung der Loeb-Integralnorm die Übereinstimmung des in diesem Kapitel entwickelten standardisierten Systems $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ mit dem von Loeb und Osswald konstruiertem (siehe (5.17)).
Zum Abschluss des Kapitels wird in 5.5 die Gültigkeit von Konvergenzsätzen für das standardisierte System untersucht. Dabei erhalten wir schließlich als Endresultat ein monotones Konvergenztheorem, welches den Konvergenzsatz von Loeb und Osswald bedeutend verallgemeinert.

Es sei darauf hingewiesen, dass stets ein polysaturiertes Nichtstandardmodell zu Grunde gelegt wird, das die in den jeweiligen Sätzen auftretenden Grundmengen enthalten soll. Es sei zudem vermerkt, dass im Folgenden synonym $^\circ x$ und $\mathrm{st}(x)$ den Standardteil von $x \in {}^*\mathbb{R}$ bezeichnen, falls $x \in \mathrm{fin}(^*\mathbb{R})$ ist. Ist $x \in {}^*(\overline{\mathbb{R}}) \setminus \mathrm{fin}(^*\mathbb{R})$ negativ (positiv) unendlich, so setzen wir wie üblich $\mathrm{st}(x) := {}^\circ x := -\infty$ (∞).[1]

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. L. Rogge herzlich bedanken, der mit wertvollen und zahlreichen Anregungen und Ratschlägen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

[1]Betrachtet man die kanonische Topologie $\overline{\mathcal{T}}$ über $\overline{\mathbb{R}}$, so ist $st : {}^*(\overline{\mathbb{R}}) \to \overline{\mathbb{R}}$ gerade die Standardteilabbildung bzgl. der Topologie $\overline{\mathcal{T}}$.

Kapitel 1

Interne (Pseudo-) Integrationsstrukturen

1.1 Standardisierung mittels Integralnormen

In der Standardwelt ist die folgende Notation üblich:

Ein nicht-leeres System $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^Y$ von reellwertigen Funktionen über einer beliebigen Menge $Y \neq \emptyset$ heißt *(reeller) Vektorverband*, wenn gilt $\alpha f + \beta g, |f| \in \mathcal{L}$ für jedes $f, g \in \mathcal{L}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Gilt zusätzlich $1 \wedge f \in \mathcal{L}$ für jedes $f \in \mathcal{L}$, so heißt $\mathcal{L}$ *(reeller) Stonescher Vektorverband.*

Grundlage unserer Betrachtungen ist der Begriff eines internen Vektorverbandes von ${}^*\mathbb{R}$-wertigen Funktionen.

1.1.1 Definition. Sei $\mathcal{E}$ ein nicht-leeres, internes System von ${}^*\mathbb{R}$-wertigen Funktionen über einer internen Menge $Y \neq \emptyset$. $\mathcal{E}$ heißt interner (${}^*\mathbb{R}$–wertiger) Vektorverband, wenn gilt

$$(\forall \alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R})\ (\forall e, g \in \mathcal{E}) \quad (\alpha e + \beta g) \in \mathcal{E}, \quad |e| \in \mathcal{E}.$$

Der interne Vektorverband $\mathcal{E}$ heißt *Stonesch*, wenn zusätzlich $1 \wedge e \in \mathcal{E}$ gilt für jedes $e \in \mathcal{E}$.

1.1.2 Bemerkung. Ist $\mathcal{E}$ ein (interner) Vektorverband, so gehören mit e und g folglich auch das Infimum $e \wedge g$ $(= \frac{1}{2}(e+g) - \frac{1}{2}|e-g|)$ und das Supremum $e \vee g$ $(= \frac{1}{2}(e+g) + \frac{1}{2}|e-g|)$ zu $\mathcal{E}$.

Ausgangspunkt der nachfolgenden Überlegungen sind interne (Pseudo-) Integrationsstrukturen; ausgehend von diesen werden wir standardisierte Systeme konstruieren, welche reelle (Pseudo-) Integrationsstrukturen im Sinne der folgenden Definition sind.

1.1.3 Definition. (i) Ein System $(\mathcal{E}, i)$ mit einem internen, ${}^*\mathbb{R}$-wertigen (Stoneschen) Vektorverband $\mathcal{E} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ und einer internen, ${}^*\mathbb{R}$-linearen Abbildung

$i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R}$ heißt *interne (Stonesche) Pseudo-Integrationsstruktur*. Ist das Funktional i zusätzlich positiv (d.h. gilt $0 \leq i(e)$ für jedes $e \in \mathcal{E}_+$), so nennt man $(\mathcal{E}, i)$ *interne (Stonesche) Integrationsstruktur*.

(ii) Ein System $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ mit einem ($\mathbb{R}$-wertigen) (Stoneschen) Vektorverband $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^Y$ und einer $\mathbb{R}$–linearen Abbildung $i^{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ nennt man *reelle (Stonesche) Pseudo-Integrationsstruktur*. Ist i zusätzlich positiv, so heißt $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ *reelle (Stonesche) Integrationsstruktur*.

Folglich entsteht das System der internen (Pseudo-) Integrationsstrukturen per Transferprinzip aus dem System aller reellen (Pseudo-) Integrationsstrukturen.

Im Folgenden sei, wenn nichts anderes notiert ist,

- $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur.

1.1.4 Bemerkung. Da $(\mathcal{E}, i)$ intern ist, ergeben sich nach dem Permanenzprinzip automatisch stärkere Eigenschaften für $\mathcal{E}$ und i. Für alle *-endlichen Teilmengen $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ gilt:

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_1} e \in \mathcal{E} \text{ mit } i\Big(\sum_{e\in\mathcal{E}_1} e\Big) = \sum_{e\in\mathcal{E}_1} i(e).$$

Für das System $(\mathcal{E}, i)$ definiere nun $\mathcal{E}^{fin}$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{fin} &:= \{e \in \mathcal{E} : i(|e|), i(e) \in \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})\} \\ &= \{e \in \mathcal{E} : i(e^-), i(e^+) \in \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Beweis. Folgt sofort aus $e^+ = \frac{1}{2}(e + |e|)$, $e^- = -\frac{1}{2}(e - |e|)$. □

Es sei vermerkt, dass im Fall der Positivität und damit Monotonie von i insbesondere $i(-|e|) \leq i(e) \leq i(|e|)$ gilt und daher auch $\mathcal{E}^{fin} = \{e \in \mathcal{E} : i(|e|) \in \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})\}$ gültig ist.

Ausgehend von einer internen Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ auf einer internen Menge Y konstruiert Loeb [7] eine reelle Integrationsstruktur $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ über derselben Menge Y. Diesen Prozess nennt Loeb „Standardisierung“. Sie soll kurz erläutert werden.

Loebs Standardisierung[1]

Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne (Stonesche) Integrationsstruktur über der internen Menge $Y \neq \emptyset$. Setze dann

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{g \in {}^*\mathbb{R}^Y : (\forall\varepsilon \in]0,\infty[)\,(\exists e \in \mathcal{E})\ |g| \leq e,\ {}^\circ i(e) < \varepsilon\} \\ &= \text{„\textit{System der Nullfunktionen}“}, \\ \mathcal{L} &:= \{f \in \mathbb{R}^Y : (\exists e \in \mathcal{E}^{fin})\,(\exists g \in \mathcal{N})\ f = e + g\} \\ &= \text{„\textit{System der Loeb–integrierbaren Funktionen}“}. \end{aligned}$$

[1] vgl. Hurd, Loeb [7]

Definiere $i^{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ durch $i^{\mathcal{L}}(e+g) = {}^\circ i(e)$ für $(e+g) \in \mathcal{L}$ mit $e \in \mathcal{E}^{fin}$, $g \in \mathcal{N}$. Dann ist $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ eine reelle (Stonesche) Integrationsstruktur über Y, die sogenannte *Standardisierung* von $(\mathcal{E}, i)$. Es zeigt sich, dass das standardisierte System $(\mathcal{L}, i^{\mathcal{L}})$ sogar das monotone Konvergenztheorem erfüllt; d.h. es gilt

$$(\forall f_n \in \mathcal{L})\,(f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} i^{\mathcal{L}}(f_n) < \infty) \Longrightarrow f \in \mathcal{L},\ i^{\mathcal{L}}(f) = \lim_{n\to\infty} i^{\mathcal{L}}(f_n). \quad (1.2)$$

Landers und Rogge geben in [11] einen anderen Zugang zum System der Loeb–integrierbaren Funktionen. Dies geschieht durch die Einführung eines unteren und oberen Loeb–Integrals in der folgenden Weise:

Oberes und unteres Loeb–Integral[2]

Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur. Dann setze für $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$

$$\begin{aligned} \bar{i}(g) &:= \inf\{{}^\circ i(e) : g \le e \in \mathcal{E}^{fin}\} \text{ – „\textit{oberes Loeb–Integral}“}, && (1.3)\\ \underline{i}(g) &:= \sup\{{}^\circ i(e) : \mathcal{E}^{fin} \ni e \le g\} \text{ – „\textit{unteres Loeb–Integral}“}, && (1.4)\\ \mathcal{L}(i) &:= \{f \in \mathbb{R}^Y : \bar{i}(f) = \underline{i}(f) \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Definiere $i^l : \mathcal{L}(i) \to \mathbb{R}$ durch $i^l(f) = \bar{i}(f)$. Für eine Funktion $f \in \mathbb{R}^Y$ gilt damit

$$f \text{ Loeb–integrierbar} \Longleftrightarrow f \in \mathcal{L}(i) \Longleftrightarrow (\exists g_n \in \mathcal{E}^{fin}, n \in \mathbb{N})\ \bar{i}(|f - g_n|) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\mathcal{L}(i)$ nennt man daher wieder das System der Loeb–integrierbaren Funktionen. Für eine Loeb–integrierbare Funktion $f \in \mathcal{L}(i)$ gilt

$$i^{\mathcal{L}}(f) = i^l(f) = \bar{i}(f) = \underline{i}(f) \in \mathbb{R}.$$

i^l nennt man deswegen auch Loeb–Integral.

Das Ergebnis läßt sich verallgemeinern. Es wird sich zeigen, dass $\bar{i}$ eine Integralnorm im Sinne von Definition 1.1.5 ist. Daher läßt sich dieser Ansatz durch die Verwendung von Integralnormen abstrahieren, womit es möglich sein wird, standardisierte Systeme auch von internen Pseudo-Integrationsstrukturen (Verzicht auf die Positivität von i) zu bilden. Zudem werden wir durch die Verwendung verschiedener Integralnormen zu unterschiedlichen standardisierten Systemen gelangen.

Im Folgenden wird nun der Begriff der Integralnorm für Funktionen aus ${}^*\mathbb{R}^Y$ eingeführt. Dabei handelt es sich um eine messende Größe, die gewisse Normeigenschaften besitzt. Integralnormen werden im weiteren Verlauf ein wichtiges Hilfsmittel zur Konstruktion von standardisierten Systemen sein (vgl. Satz 1.1.8).

1.1.5 Definition (Integralnorm). Sei $\mathcal{F} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ mit $0 \in \mathcal{F}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ heißt *Integralnorm* über $\mathcal{F}$, wenn für $f, f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ gilt:

[2] vgl. Landers, Rogge [11]

(i) $\|0\| = 0$,

(ii) $|f| \leq |f_1| + |f_2| \Longrightarrow \|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ (endliche Subadditivität).

Ist $\mathcal{F}$ außerdem ein System mit $\alpha f \in \mathcal{F}$ für $f \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, und gilt

(iii) $(\forall f \in \mathcal{F}, \forall\, \alpha \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R}))\ \|\alpha f\| = {}^\circ|\alpha| \cdot \|f\|$,

dann heißt die Integralnorm *homogen* (über $\mathcal{F}$).

Eine homogene Integralnorm über $\mathcal{F}$ besitzt folglich die Eigenschaften einer $[0,\infty]$-wertigen Pseudonorm.

1.1.6 Bemerkung. Per definitionem ist eine Integralnorm über ${}^*\mathbb{R}^Y$ insbesondere eine Integralnorm über $\mathbb{R}^Y$ im Sinne der Standardtheorie. Diese läßt sich in kanonischer Weise durch

$$\|g\| \ := \ \sup\{\|f\| : f \in [0,\infty[^Y, f \leq |g|\},\ g \in [0,\infty]^Y, \tag{1.5}$$

zu einer kleinstmöglichen Integralnorm über $[0,\infty]^Y$ fortsetzen. Ist die Integralnorm über $\mathbb{R}^Y$ stark oder erfüllt sie den Norm-Limes Satz, so besitzt die kanonische Fortsetzung ebenfalls diese Eigenschaft (vgl. Hoffmann, Schäfke [5]).

1.1.7 Bemerkung. Ist nun $\|\cdot\|$ Integralnorm über $\mathcal{F} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$, so gilt insbesondere $\|f\| \leq \|g\|$ für $f, g \in \mathcal{F}$ mit $|f| \leq |g|$. Demzufolge gilt auch $\|f\| = \|g\|$ für alle $f, g \in \mathcal{F}$ mit $|f| = |g|$. Infolgedessen ist $\|\,|f|\,\| = \|f\|$ für jedes $f \in \mathcal{F}$ mit $|f| \in \mathcal{F}$ gültig. Die Integralnorm hängt also offenbar nur vom Betrag einer Funktion ab. Demzufolge ist eine Integralnorm über ${}^*\mathbb{R}^Y$ durch ihre Werte über ${}^*[0,\infty[^Y$ eindeutig bestimmt. Im Folgenden genügt es daher Integralnormen über ${}^*[0,\infty[^Y$ zu betrachten, da diese durch die Festsetzung

$$(\forall f \in {}^*\mathbb{R}^Y) \qquad \|f\|' := \||f|\|.$$

in kanonischer Weise über ${}^*\mathbb{R}^Y$ fortgesetzt werden.

Der Begriff der Integralnorm wird nun zur Formulierung des Standardisierungsprinzips[3] verwendet. Dazu benötigen wir noch die zusätzliche Voraussetzung, dass die Integralnorm in gewisser Beziehung zum Integral i steht. Wir werden daher in Satz 1.1.8 fordern, dass die Integralnorm zu i passend ist. Es wird sich zeigen, dass die Bildung eines standardisierten Systems gemäß Satz 1.1.8 auf der Angabe von zwei miteinander in Beziehung stehenden Größen beruht, nämlich zum einen der internen (Pseudo-) Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ und zum anderen der zu i passenden Integralnorm $\|\cdot\|$. Die Vollständigkeit des Werteraumes $\mathbb{R}$ ist hier erforderlich, weil beim Standardisierungsprinzip Limites von Cauchy-Folgen verwendet werden.

[3] Loeb [7] nennt den Prozess der Konstruktion einer reellen Integrationsstruktur aus einer hyperreellen Integrationsstruktur Standardisierungsprinzip. Es wird sich zeigen, dass das hier verwendete „Standardisierungsprinzip“ eine Verallgemeinerung des von Loeb eingeführten Verfahrens ist. Aus diesem Grund wird auch hier diese Bezeichnung verwendet.

1.1.8 Standardisierungsprinzip. *Es sei* $(\mathcal{E}, i)$ *eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und* $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ *eine zu* i *passende Integralnorm; d.h.* $\|\cdot\|$ *ist eine Integralnorm über* ${}^*[0,\infty[^Y$ *mit*

$$st\,|i(h)| \le \|h\|' := \|\,|h|\,\| \text{ für } h \in \mathcal{E}. \tag{1.6}$$

Sei $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}^{fin}$ *ein fin(*$^*\mathbb{R}$*)-linearer Vektorverband (d.h.* $\mathcal{D} \ne \emptyset$ *und* $|g|, g+h, \alpha \cdot g \in \mathcal{D}$ *für jedes* $\alpha \in fin({}^*\mathbb{R})$, $g, h \in \mathcal{D}$*). Definiere*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|) := \{f \in \mathbb{R}^Y : (\exists g_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N})\ \|g_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

Für $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ *setze* $i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ i(g_n)$*. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ *ist ein* $\mathbb{R}$*–linearer Vektorverband;*

(ii) $i^L : \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ *ist eine eindeutig definierte* $\mathbb{R}$*–lineare Abbildung;*

(iii) Mit i *ist auch* i^L *positiv.*

(iv) Mit $\mathcal{D}$ *ist auch* $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ *Stonesch.*

(v) $(\forall f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|))\,(\forall g_n \in \mathcal{D})\ \|g_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \|f\|' = \lim\limits_{n\to\infty} \|g_n\|'$;

(vi) $\|\cdot\|$ *ist zu* i^L *passend, d.h. es gilt:* $(\forall f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|))\ |i^L(f)| \le \|f\|'$.

(vii) $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ *ist abgeschlossen bzgl.* $\|\cdot\|$*, d.h. es gilt:*

$$(\forall f \in \mathbb{R}^Y, f_n \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|))\ \|f_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \begin{cases} f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|), \\ i^L(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} i^L(f). \end{cases}$$

Beweis. Wegen $0 \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ ist $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|) \ne \emptyset$. Sei $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$. Zunächst wird gezeigt, dass $i^L(f)$ eindeutig definiert ist.

Existenz: Zu $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ existieren $g_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|g_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann ist ${}^\circ i(g_n) \in \mathbb{R}$ und für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |{}^\circ i(g_n) - {}^\circ i(g_m)| &= \mathrm{st}(|i(g_n - g_m)|) \underset{(1.6)}{\le} \|g_n - g_m\|' \\ &\le \|g_n - f\|' + \|f - g_m\|' \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $({}^\circ i(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige Cauchy-Folge. Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ i(g_n) \in \mathbb{R}$.

Eindeutigkeit: Seien $h_n, g_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$, mit $\|h_n - f\|' \to 0$, $\|g_n - f\|' \to 0$. Es genügt der Nachweis von $\lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ i(g_n) = \lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ i(h_n)$. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} |{}^\circ i(g_n) - {}^\circ i(h_n)| &= st(|i(g_n - h_n)|) \underset{(1.6)}{\le} \|h_n - g_n\|' \\ &\le \|h_n - f\|' + \|f - g_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(i), (ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f,\, g \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$. Dann existieren $f_n,\, g_n \in \mathcal{D},\, n \in \mathbb{N}$, mit

$$\|f - f_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \|g - g_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ i^L(f) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(f_n),\ i^L(g) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(g_n).$$

<u>Linearität:</u> Es sind $\alpha f_n,\, f_n + g_n \in \mathcal{D}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha| \leq k$ fest gewählt. Wegen

$$\|(f+g) - (f_n + g_n)\|' \leq \|f - f_n\|' + \|g - g_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\|\alpha f - \alpha f_n\|' \leq \|k \cdot |f - f_n|\| \leq \sum_{i=1}^{k} \|f - f_n\|' = k \cdot \|f - f_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

sind $f + g,\, \alpha f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$. Da $i^L(f), i^L(g) \in \mathbb{R}$ sind, gilt ferner

$$\begin{aligned} i^L(f+g) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{st}(i(f_n + g_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{st}(i(f_n)) + \lim_{n\to\infty} \mathrm{st}(i(g_n)) = i^L(f) + i^L(g), \\ i^L(\alpha f) &= \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(\alpha \cdot f_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(f_n) = \alpha \cdot i^L(f). \end{aligned}$$

<u>Verbandseigenschaft:</u> Da mit f_n auch $|f_n| \in \mathcal{D}$ ist, ergibt sich $|f| \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ aus

$$\|\,|f| - |f_n|\,\|' \leq \|f - f_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iii) Sei $0 \leq f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$. Dann existieren $f_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - f_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und mit o.B.d.A. $f_n \geq 0$ (ansonsten betrachte $|f_n|$ anstatt von f_n). Somit gilt

$$i^L(f) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(f_n) \geq 0.$$

(iv) Sei $\mathcal{D}$ Stonesch. Es ist $1 \wedge f = 1 \wedge f^+ - f^-$. Daher kann o.B.d.A. $f \geq 0$ vorausgesetzt werden. Dann existieren o.B.d.A. $0 \leq f_n \in \mathcal{D},\, n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - f_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Es ist nun $(1 \wedge f_n) \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$, mit $|1 \wedge f - 1 \wedge f_n| \leq |f - f_n|$. Deshalb gilt

$$\|1 \wedge f - 1 \wedge f_n\|' \leq \|f - f_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Folglich ist auch $(1 \wedge f) \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$.
(v) Sei $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ und $g_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - g_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wir betrachten die folgende Fallunterscheidung:

a) Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|g_n\|' \neq \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, so ergibt sich für $n \geq n_0$ aus

$$\begin{aligned} |g_n| \leq |g_n - f| + |f| &\implies \|g_n\|' - \|f\|' \leq \|g_n - f\|', \\ |f| \leq |f - g_n| + |g_n| &\implies \|f\|' - \|g_n\|' \leq \|f - g_n\|', \end{aligned}$$

die Gültigkeit von $|\|g_n\|' - \|f\|'| \leq \|g_n - f\|' \to 0$.

b) Sei $\|g_n\| = \infty$ für unendlich viele n. Angenommen es wäre $\|f\|' < \infty$. Dann würde analog zum vorhergehenden $|\|g_n\|' - \|f\|'| \to 0$ folgen. Dies liefert den gewünschten Widerspruch.

(vi) Ist $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$, so existieren $f_n \in \mathcal{D}$ mit $\|f_n - f\|' \to 0$ $(n \to \infty)$. Die Behauptung folgt aus

$$|i^L(f)| = \lim_{n\to\infty} |{}^\circ i(f_n)| = \lim_{n\to\infty} st|i(f_n)| \underset{(1.6)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \|f_n\|' \underset{(v)}{=} \|f\|'.$$

(vii) Nach Definition von $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ existiert zu jedem f_n ein $g_n \in \mathcal{D}$ mit $\|f_n - g_n\|' \leq \frac{1}{n}$. Infolgedessen gilt

$$\|g_n - f\|' \leq \|g_n - f_n\|' + \|f_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Folglich ist $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$. Der Rest der Behauptung folgt aus

$$0 \leq |i^L(f_n) - i^L(f)| \underset{(ii)}{=} |i^L(f_n - f)| \underset{(vi)}{\leq} \|f_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

1.1.9 Bemerkung. In der Standardtheorie findet man häufig die Forderung nach der Endlichkeit der zugehörigen Integralnorm über $\mathcal{E} (\subset \mathbb{R}^Y)$. Es sei vermerkt, dass die Forderung der Endlichkeit einer zu i passenden Integralnorm über $\mathcal{E} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ in der Nichtstandardtheorie nicht sinnvoll ist. Ist nämlich $e \in \mathcal{E}$ mit $i(e) \neq 0$, so ist auch $h \cdot e \in \mathcal{E}$ für jedes $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Wegen $\|h \cdot e\|' \geq |{}^\circ(h \cdot i(e))|$ kann demzufolge die Integralnorm über $\mathcal{E}$ nicht endlich sein.

Aus Satz 1.1.8 folgt:

$$\begin{array}{c} (\mathcal{E}, i) \text{ interne (Pseudo)-Integrationsstruktur} \\ \Big\Downarrow \quad \text{Standardisierungsprinzip} \\ (\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|), i^L) \text{ reelle (Pseudo)-Integrationsstruktur.} \end{array}$$

Wegen Satz 1.1.8 (vii) führt eine Anwendung des Fortsetzungsprinzips in der Standardwelt auf das System $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|), i^L)$ mit der auf $\mathbb{R}^Y$ eingeschränkten Integralnorm $\|\cdot\|$ zu keiner Erweiterung des standardisierten Systems.

1.1.10 Bemerkung. Im Satz 1.1.8 ist $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}^{fin}$. Ausgehend von einem ${}^*\mathbb{R}$-linearen Raum $\mathcal{E}$ (der nicht unbedingt Verband sein muss) könnte man in analoger Weise wie in Satz 1.1.8 auch ein standardisiertes $\mathbb{R}$-lineares System mit der Menge $\mathcal{D} = \{e \in \mathcal{E} : i(e) \in \text{fin}({}^*\mathbb{R})\}$ konstruieren.[4] Allerdings würde dann im Allgemeinen $\mathcal{D}$ und daher auch das mittels $\mathcal{D}$ standardisierte System (selbst unter der Annahme $\mathcal{E}$ Vektorverband) keine Verbandseigenschaft besitzen. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Sei $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Betrachte

$$Y := {}^*\mathbb{N}_0, \quad \mathcal{E} := \{k_1 \cdot 1_{\{0\}} + k_2 \cdot 1_{{}^*\mathbb{N}} : k_1, k_2 \in {}^*\mathbb{R}\},$$
$$i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R} \text{ mit } i(k_1 \cdot 1_{\{0\}} + k_2 \cdot 1_{{}^*\mathbb{N}}) := h \cdot (k_1 + k_2).$$

[4] Die Endlichkeit des Integrals der Funktionen aus $\mathcal{D}$ wird hier zur Konstruktion eines standardisierten reellwertigen Integrals benötigt.

Dann ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Integrationsstruktur. Es ist aber $e := -1_{\{0\}} + 1_{^*\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$ mit $i(e) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})$ und $|e| = 1_Y \in \mathcal{E}$ mit $i(|e|) \notin \text{fin}(^*\mathbb{R})$. Daher wäre zwar e ein Element der mit $\{e \in \mathcal{E} : i(e) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})\}$ gebildeten Standardisierung, aber nicht $|e|$.

Zur Bildung eines standardisierten $\mathbb{R}$-linearen Vektorverbandes benötigt man somit die Annahme $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}^{\mathit{fin}}$ Vektorverband. Denn die Forderung der Endlichkeit des Integralwerts der Elemente von $\mathcal{D}$ ist zur Konstruktion eines reellen Integrals unverzichtbar. Zum Erhalt der Verbandseigenschaft des standardisierten Systems benötigen wir zusätzlich die Verbandseigenschaft von $\mathcal{D}$. Wie Bemerkung 1.1.10 zeigt, führt dies zu der zusätzlichen Forderung der Endlichkeit des Integralwerts der Betragsfunktion einer Funktion aus $\mathcal{D}$.

Sicherlich spielt die Wahl einer geeigneten Menge $\mathcal{D}$ bei der Konstruktion des Systems $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}(\|\cdot\|)$ eine wichtige Rolle. Wegen der Gültigkeit von

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \Longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(\|\cdot\|) \subset \mathcal{L}_{\mathcal{D}_2}(\|\cdot\|)$$

und wegen der Übereinstimmung der beiden Integrale auf der kleineren Menge $\mathcal{L}_{\mathcal{D}_1}(\|\cdot\|)$, ist die Wahl einer möglichst großen Menge $\mathcal{D}$ wünschenswert. Ist i positiv, so ist mit $\mathcal{E}$ auch $\mathcal{E}^{\mathit{fin}}$ selbst ein (Stonescher) Vektorverband. Daher wird man in diesem Fall das standardisierte System mit der Menge

$$\mathcal{D} = \mathcal{E}^{\mathit{fin}} = \{e \in \mathcal{E} : i(|e|) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})\}$$

bilden. Anders gestaltet sich die Situation, wenn man auf die Positivität des Integrals i verzichtet. In diesem Fall ist die Wahl von $\mathcal{D} = \{e \in \mathcal{E} : i(|e|) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})\}$ nicht sinnvoll; es existieren nämlich interne Pseudo-Integrationsstrukturen $(\mathcal{E}, i)$ mit $e \in \mathcal{E}$ und $i(|e|) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})$, aber $i(e) \notin \text{fin}(^*\mathbb{R})$; dies zeigt das nachfolgende Beispiel 1.1.11.

Die Standardisierung soll jedoch mit einer möglichst großen, geeigneten Menge $\mathcal{D}$ gebildet werden. Dies führt zu der berechtigten Frage, ob die Betrachtung von $\mathcal{E}^{\mathit{fin}}$ als Menge $\mathcal{D}$ sinnvoll ist. Eine negative Antwort auf diese Frage liefert Beispiel 1.1.12. Dies führt schließlich zur Betrachtung derjenigen Teilmenge von $\mathcal{E}$, die jene Elemente e aus $\mathcal{E}$ enthält, deren Integralnorm endlich ist (vgl. (1.7)). Es wird sich zeigen, dass diese Menge die geforderten Eigenschaften erfüllt. Wir kommen nun zunächst zum Beispiel 1.1.11.

1.1.11 Beispiel. Sei $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Wir betrachten $Y := {}^*\mathbb{N}$, den internen Stoneschen Vektorverband

$$\mathcal{E} = \{g \in {}^*\mathbb{R}^{^*\mathbb{N}} \text{ intern: } (\exists\, a, b \in {}^*\mathbb{R})\ g = a \cdot 1_{\{1,3,\ldots,2h-1\}} + b \cdot 1_{\{2,4,\ldots,2h\}}\}$$

und die interne, lineare Abbildung $i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R}$ mit

$$i(g) = h[g(2h) - g(2h-1)] = h(b-a).$$

Wir setzen $g := -1_{\{1,3,\ldots,2h-1\}} + 1_{\{2,4,\ldots,2h\}}$. Dann sind $g, |g| \in \mathcal{E}$ mit $i(|g|) = 0$, aber $i(g) = 2h \notin \text{fin}(^*\mathbb{R})$.

Ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur liefert daher die Definition eines standardisierten Systems

$$\{f \in \mathbb{R}^Y : (\exists g_n \in \{e \in \mathcal{E} : i(|e|) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}, n \in \mathbb{N})\ \|g_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$$

mit $i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n)$ i. Allg. keine reellwertige Pseudo-Integrationsstruktur.

Dies führt zu der Betrachtung des Systems $\mathcal{E}^{fin}$. $\mathcal{E}^{fin}$ ist jedoch i. Allg. kein Vektorverband. Sind nämlich $g, h \in \mathcal{E}^{fin}$, so gilt im Allgemeinen $i(|g+h|) \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ und daher $g + h \notin \mathcal{E}^{fin}$. Wir betrachten dazu Beispiel 1.1.12.

1.1.12 Beispiel. Seien $f, g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit $f = 1$, $g(x) = x$. Dann sind die Funktionen

$$f(x) = 1,\ g(x) = x,\ |g|(x) = |x|,\ |f+g|(x) = |1+x|\ \mathbb{R}\text{-linear unabhängig.} \tag{1}$$

zu (1): Sind nämlich $\lambda_1, \cdots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 |g|(x) + \lambda_4 |f+g|(x) = 0$ und betrachtet man dieses Gleichungssystem an den Stellen $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $x = -2$, so ist die Lösung des Gleichungssystems äquivalent zur Lösung von $A \cdot \Lambda = 0$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix vollen Rang hat, besitzt das homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung. Damit gilt (1).

Definiere nun eine lineare Abbildung $j : \mathrm{span}\{f, g, |g|, |f+g|\} \to \mathbb{R}$ durch

$$j(f) := 0,\ j(g) := 0,\ j(|g|) := 0,\ j(|f+g|) := 1.$$

Setze dann j zu einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ fort. Wegen der Gültigkeit von $j(1 + |x| - |1+x|) = -1$ ist das Funktional j nicht positiv. Sei $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ fest gewählt. Setze $i := h \cdot {}^*j$. Dann ist $({}^*(\mathbb{R}^\mathbb{R}), i)$ eine interne Stonesche Pseudo-Integrationsstruktur mit

$$i(|{}^*f|) = i({}^*f) = h \cdot {}^*j({}^*f) = 0, \quad i({}^*g) = 0, \quad i(|{}^*g|) = 0$$

und $i(|{}^*f + {}^*g|) = h \cdot j({}^*|f+g|) = h \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$.

Ist das Integral i nicht positiv, so stellt sich an dieser Stelle die Frage mit welchem Vektorverband $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}^{fin}$ die Standardisierung gebildet werden kann. Insbesondere muss eine solche Menge $\mathcal{D}$ die Eigenschaft besitzen, dass $i(|e_1+e_2|) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ ist für jedes $e_1, e_2 \in \mathcal{D}$. Ist das Integral i nicht positiv und daher nicht monoton, so wird diese Eigenschaft durch die Verwendung einer monotonen Abbildung, nämlich der Integralnorm, gewährleistet.

Betrachte im Folgenden für eine zu i passende Integralnorm über $\mathcal{E}$ die Menge

$$\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|} := \{e \in \mathcal{E} : \|e\|' < \infty\} \subset \mathcal{E}^{fin}. \tag{1.7}$$

Wegen der Subadditivität der Integralnorm ist $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ ein fin($^*\mathbb{R}$)-linearer Vektorverband.

1.1.13 Bemerkung. Ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur wird im Folgenden aufgrund der Vorüberlegungen, wenn nichts anderes explizit angegeben ist, die Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 allgemein mit der Menge

$$\mathcal{D} := \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$$

gebildet. Das auf Grundlage dieser Menge $\mathcal{D}$ gebildete standardisierte System reellwertiger Funktionen werden wir kurz mit $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ bezeichnen. Da mit $\mathcal{E}$ auch $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ ein fin($^*\mathbb{R}$)-linearer (Stonescher) Vektorverband ist, ist folglich auch $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ein $\mathbb{R}$-linearer (Stonescher) Vektorverband (vgl. Satz 1.1.8).

Ist i positiv, so wird man, um ein möglichst großes, gemäß Satz 1.1.8 gebildetes System standardisierter Funktionen zu erhalten, von der Integralnorm die Eigenschaft verlangen, dass sie die Funktion $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt.[5] In diesem Fall erhält man aber trivialerweise $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|} = \mathcal{E}^{fin}$. Auf Basis dessen werden wir später die Gleichheit des gemäß Satz 1.1.8 mit einer speziellen Integralnorm standardisierten Systems mit dem von Loeb bzw. von Landers und Rogge eingeführten System Loeb-integrierbarer Funktionen erhalten (vgl. (1.15)).

Bildet man nun das standardisierte System mittels $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, so hängt das gemäß Satz 1.1.8 gebildete System $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ im besonderem Maß von der Integralnorm über $\mathcal{E}_+$ ab. Daher kommt der Wahl von „geeigneten“ Integralnormen (über $\mathcal{E}_+$) eine besondere Bedeutung zu. Dieser Thematik widmet sich Kapitel 1.2. Im Satz 1.2.3 wird daher allgemein für interne Pseudo-Integrationsstrukturen eine kleinste, zu i passende Integralnorm über $\mathcal{E}_+$ konstruiert.

Aus der Definition des standardisierten Systems erhält man sofort die folgende Eigenschaft:

1.1.14 Bemerkung. Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und ist $g \in \mathbb{R}^Y$ mit $\|g\|' = 0$, so ist $g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L(g) = 0$.

Für positive Funktionale i und Integralnormen, die $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzen, ergibt sich ein enger Zusammenhang zwischen dem standardisierten Integral i^L und der Integralnorm. Dies liefert das nachfolgende Korollar.

[5] In 1.2 wird gezeigt, dass man das System der Loeb-integrierbaren Funktionen als Standardisierung mit einer speziellen Integralnorm erhält. Es wird sich zeigen, dass diese Integralnorm gerade die geforderte Eigenschaft besitzt.

1.1.15 Korollar. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur und setzt die Integralnorm $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fort, so gilt*

$$\|f\| = i^L(f) \text{ für jedes } f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+.$$

Daher ist $i^L|\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ nur eine Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$.

Beweis. Zu $0 \le f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ existiert nun eine Folge $0 \le e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|' \to 0$. Die Behauptung folgt mit Satz 1.1.8(v) sofort aus

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} \|e_n\| = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n) = i^L(f). \qquad \square$$

Lemma 1.1.16 zeigt, dass alle Elemente der Standardisierung eine endliche Integralnorm besitzen. Daher ist die Endlichkeit der Integralnorm einer reellwertigen Funktion eine notwendige Voraussetzung dafür, dass diese Funktion ein Element der Standardisierung ist.

1.1.16 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm, so gilt*

$$\|f\|' < \infty \text{ für jedes } f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|).$$

Insbesondere ist daher i^L von beschränkter Variation[6] *über $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$.*

Beweis. Ist $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, so existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|' \to 0$. Also gilt auch

$$|\,\|e_m\|' - \|e_n\|'| \le \|e_m - e_n\|' \le \|e_m - f\|' + \|e_n - f\|' \to 0 \ (n, m \to \infty).$$

Folglich ist $(\|e_n\|')_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\mathbb{R}$-wertige Cauchyfolge. Daraus folgt nach Satz 1.1.8 (v)

$$\|f\|' = \lim_{n\to\infty} \|e_n\|' < \infty. \qquad \square$$

1.1.17 Bemerkung. Aufgrund von Lemma 1.1.16 läßt sich i^L nach den Ergebnissen der Standardtheorie[7] als Differenz zweier „kleinster“ positiver linearer Funktionale auf $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ darstellen. In Lemma 1.2.9 wird gezeigt, dass i^L sogar Differenz zweier standardisierter, positiver, linearer Funktionale über $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ist.

Zunächst sollen nun verschiedene Integralnormen betrachtet werden. Da i^L und $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ von der verwendeten Integralnorm abhängen, ist es von Interesse, Integralerweiterungen mit verschiedenen Integralnormen zu vergleichen. Der nachfolgende wichtige Satz ermöglicht einen Vergleich verschiedener „Standardisierungen“. Sind

[6] In der Standardtheorie (vgl. [24]) heißt das reelle, lineare Funktional i^L auf dem reellen Vektorverband $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ von beschränkter Variation, wenn $\sup\{|i^L(g)| : g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), |g| \le f\}$ für jedes $0 \le f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ endlich ist. Die Bedingung der Endlichkeit ist aber erfüllt, da dieses Supremum die kleinste zu i^L passende Integralnorm über $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ist.

[7] vgl. z.B. [24]

nämlich zwei verschiedene zum Integral i passende Integralnormen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ über ${}^*\mathbb{R}^Y$ gegeben, die in der Beziehung $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2$ stehen, so umfaßt das standardisierte System der bzgl. $\|\cdot\|_1$ integrierbaren Funktionen das standardisierte System der bzgl. $\|\cdot\|_2$ integrierbaren Funktionen. Außerdem stimmen die beiden Integrale auf dem kleineren standardisierten System überein. Dies liefert das nachfolgende Vergleichsprinzip.

1.1.18 Satz (Vergleichsprinzip). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und sind $\|\cdot\|_j, j = 1, 2$, zwei Integralnormen über ${}^*\mathbb{R}^Y$, von denen $\|\cdot\|_1$ zu i passend ist, und für die gilt*

$$(\forall f \in {}^*\mathbb{R}^Y) \quad \|f\|_1' \le \|f\|_2', \tag{1.8}$$

so ist auch $\| \; \|_2$ zu i passend. Und es gilt:

(i) $\mathcal{L}(\|\cdot\|_2) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_1)$*;*

(ii) $i_1^L|\mathcal{L}(\|\cdot\|_2) = i_2^L$*, hierbei seien $i_j^L, j = 1, 2$, die nach dem Standardisierungsprinzip 1.1.8 mittels $\|\cdot\|_j$ gebildeten Standardisierungen von $i|\mathcal{E}$.*

Beweis. (i) ergibt sich sofort aus der Definition von $\mathcal{L}(\|\cdot\|_j), j = 1, 2$, und (1.8).
(ii) Ist nun $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_2) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_1)$, so existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_2} \subset \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_1}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|e_n - f\|_2' \to 0$ $(n \to \infty)$. Daraus folgt einerseits $i_2^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n)$ nach Definition von i_2^L. Wegen $\|e_n - f\|_1' \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt andererseits aber auch $i_1^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n)$. □

1.2 Konstruktion von Integralnormen

Vieles des bisher Dargestellten basierte nur darauf, dass eine Integralnorm auf einem Vektorverband gegeben ist, die zu der gegebenen internen, linearen Abbildung passend ist. In Fortführung dieses Gedanken sollen nun im Folgenden verschiedene standardisierte Systeme unter Verwendung unterschiedlicher Integralnormen gewonnen werden. Ziel ist die Konstruktion möglichst kleiner, d.h. „guter“ Integralnormen, um einen möglichst umfassenden Bereich zugehöriger „standardisierter“ Funktionen $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ zu gewinnen.

1.2.1 Satz (Fortsetzung von Integralnormen). *Sei $\mathcal{F} \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ ein System von Funktionen mit $0 \in \mathcal{F}$. Ist dann $\|\cdot\|$ irgendeine Integralnorm über $\mathcal{F}_+$, so ist*

$$\|f\|_1 := \inf\{\sum_{i=1}^n \|g_i\| : f \le \sum_{i=1}^n g_i,\ g_i \in \mathcal{F}_+, n \in \mathbb{N}\},\ f \in {}^*[0, \infty[^Y,$$

die größte Integralnorm über ${}^*[0, \infty[^Y$, die $\|\cdot\||\mathcal{F}_+$ fortsetzt.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{F}_+$. Da $\|\cdot\|$ eine Integralnorm über $\mathcal{F}_+$ ist, gilt $\|f\|_1 = \|f\|$ wegen der Gültigkeit von $\|f\| \leq \sum_{i=1}^n \|g_i\|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $g_i \in \mathcal{F}_+$ mit $f \leq \sum_{i=1}^n g_i$. Daher ist $\|\cdot\|_1$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\||\mathcal{F}_+$. Zum Beweis, dass $\|\cdot\|_1$ eine Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$ ist, reicht es zu zeigen

$$(\forall f, f_1, f_2 \in {}^*[0,\infty[^Y) \quad f \leq f_1 + f_2 \Longrightarrow \|f\|_1 \leq \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1. \tag{1}$$

<u>zu (1):</u> Ist $\|f_1\|_1 = \infty$ oder $\|f_2\|_1 = \infty$, so gilt (1) sofort. Seien daher $\|f_1\|_1, \|f_2\|_1 < \infty$. Sei zudem $\varepsilon \in]0,\infty[$. Nach Definition von $\|\cdot\|_1$ existieren dann $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $g_1^{(1)}, \ldots, g_{n_1}^{(1)}, g_1^{(2)}, \ldots, g_{n_2}^{(2)} \in \mathcal{F}_+$ mit

$$f_i \leq \sum_{k=1}^{n_i} g_k^{(i)}, \quad \sum_{k=1}^{n_i} \|g_k^{(i)}\| \leq \|f_i\|_1 + \tfrac{\varepsilon}{2},\ i = 1,2. \tag{2}$$

Sei o.B.d.A. $n_1 \leq n_2$ und setze $g_k^{(1)} := 0$ für $n_1 < k \leq n_2$. Nach Definition von $\|\cdot\|_1$ gilt daher

$$\|f\|_1 \leq \|f_1 + f_2\|_1 \leq \sum_{k=1}^{n_2} (\|g_k^{(1)}\| + \|g_k^{(2)}\|) \underset{(2)}{\leq} \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1 + \varepsilon. \tag{3}$$

Da $\varepsilon \in]0,\infty[$ beliebig gewählt worden war, folgt $\|f\|_1 \leq \|f_1\|_1 + \|f_2\|_1$ aus (3). Damit ist (1) bewiesen.
Sei $\|\cdot\|_a$ eine weitere Integralnorm, die $\|\cdot\||\mathcal{F}_+$ fortsetzt. Ist $f \in {}^*[0,\infty[^Y$, so gilt

$$\|f\|_a \leq \sum_{k=1}^n \|g_k\|_a = \sum_{k=1}^n \|g_k\|$$

für jedes $f \leq \sum_{k=1}^n g_k$ mit $g_k \in \mathcal{F}_+$, $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $\|f\|_a \leq \|f\|_1$. Somit ist $\|\cdot\|_1$ die größte Integralnorm, die $\|\cdot\||\mathcal{F}_+$ fortsetzt. $\square$

1.2.2 Bemerkung. Ist $\mathcal{F}$ aus Satz 1.2.1 ein fin(${}^*\mathbb{R}$)-linearer Vektorverband, so gilt

$$\|f\|_1 = \inf\{\|g\| : f \leq g,\ g \in \mathcal{F}_+\},\ f \in {}^*[0,\infty[^Y.$$

Interne, positiv lineare Funktionale i über einem internen Vektorverband $\mathcal{E}$ lassen sich zum System der Loeb-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}(i)$ mit dem zugehörigen Loeb-Integral $i^{\mathcal{L}} = i^l$ standardisieren. Es wird sich zeigen, dass unter der Annahme einer internen Integrationsstruktur eine Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 mit einer bestimmten Integralnorm, der sogenannten Loeb-Integralnorm, ebenfalls zum System der Loeb-integrierbaren Funktionen führt. Verzichtet man auf die Annahme der Positivität des Integrals und setzt man nur eine interne Pseudo-Integrationsstruktur als gegeben voraus, so ist sowohl eine Standardisierung mit Hilfe von Ober- und Unterintegralen, wie Landers und Rogge [11] sie angeben, als auch eine Standardisierung mit Nullfunktionen, wie Loeb [7] sie angibt, nicht sinnvoll, da beide

Ansätze auf der Monotonie des Integrals beruhen. Allerdings ist eine Standardisierung mit Hilfe einer geeigneten Integralnorm auch in diesem Fall möglich. Daher werden wir durch die Verwendung der Loeb-Integralnorm in der Lage sein, auch ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur ein standardisiertes System Loeb-integrierbarer Funktionen zu entwickeln. Demzufolge liefert die Standardisierung unter Zuhilfenahme von Integralnormen eine Erweiterung des Prinzips der Standardisierung von Loeb auf interne Pseudo-Integrationsstrukturen. Zudem wird die Verwendung verschiedener Integralnormen zu unterschiedlichen standardisierten Systemen führen.

Nachfolgend benötigen wir die folgende Notation:

Per Transferprinzip folgt, dass jede nicht leere, interne Teilmenge von ${}^*\mathbb{R}$, die bzgl. $\leq$ in ${}^*\mathbb{R}$ nach oben (unten) beschränkt ist, eine kleinste obere (größte untere) Schranke in ${}^*\mathbb{R}$ bzgl. $\leq$ besitzt. Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden mit dem Infimum bzw. Supremum von internen, nach unten bzw. oben beschränkten Mengen gearbeitet. Transferiere dazu die Abbildung $\sup : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\inf : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Wir bezeichnen die so entstehende Abbildung wieder mit sup bzw. inf. Ist dann $M \subset {}^*\mathbb{R}$ eine bzgl. $\leq$ nach oben (unten) (in ${}^*\mathbb{R}$) unbeschränkte, interne Menge, so ist $\sup M = \infty$ bzw. $\inf M = -\infty$.

1.2.3 Satz (Integralnorm über $\mathcal{E}_+$). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so definiere für $e \in \mathcal{E}_+$:*

$$\begin{aligned} \|e\|_0 &:= \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|) : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\} \\ &= \mathrm{st}(\sup\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\}) \\ &= \mathrm{st}(|i(g_{max})|) \quad \textit{für ein } g_{max} \in \mathcal{E} \textit{ mit } |g_{max}| \leq e. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Dann ist $\|\cdot\|_0$ eine zu i passende, positiv homogene, additive Integralnorm über $\mathcal{E}_+$; $\|\cdot\|_0$ ist die kleinste zu i passende Integralnorm über $\mathcal{E}_+$.

1.2.4 Bemerkung. Ist i positiv, so gilt $\|e\|_0 = {}^\circ i(e)$ für jedes $e \in \mathcal{E}_+$ und somit insbesondere auch $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} = \mathcal{E}^{fin}$.

Beweis. Ist i positiv, so gilt für jedes $g \in \mathcal{E}$:

$$|g| \leq e \Longrightarrow -e \leq g \leq e \Longrightarrow -i(e) = i(-e) \leq i(g) \leq i(e) \Longrightarrow |i(g)| \leq i(e). \qquad \square$$

Zum Beweis des Satzes 1.2.3 benötigen wir den folgenden Hilfssatz 1.2.5, der auch noch in späteren Sätzen Verwendung findet.

1.2.5 Hilfssatz. *Ist $\emptyset \neq M \subset {}^*\mathbb{R}$ intern, so gilt:*

$$\mathrm{st}(\sup M) = \sup\{{}^\circ m : m \in M\}, \quad \mathrm{st}(\inf M) = \inf\{{}^\circ m : m \in M\}.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Gleichheit der Supremumsausdrücke.

„$\geq$“ Folgt sofort, da ${}^\circ m \leq \mathrm{st}(\sup M)$ für jedes $m \in M$ ist.

„$\leq$" Betrachte die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $\sup M = \infty$, so existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m_n \in M$ mit $m_n \geq n$. Daraus folgt $\sup\{{}^\circ m : m \in M\} = \infty (= \mathrm{st}(\sup M))$.

b) Ist $\sup M < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon \in]0, \infty[$ ein $m(\varepsilon) = m \in M$ mit $m \geq \sup M - \varepsilon$. Infolgedessen gilt $\mathrm{st}(\sup M) - \varepsilon \leq \sup\{{}^\circ m : m \in M\}$. Da $\varepsilon \in]0, \infty[$ beliebig war, folgt $\mathrm{st}(\sup M) \leq \sup\{{}^\circ m : m \in M\}$.

Aus a) und b) folgt „$\leq$".

Die Gleichheit der Infimumausdrücke folgt nun aus

$$\mathrm{st}(\inf M) = -\,\mathrm{st}(\sup(-M)) = -\sup\{{}^\circ(-m) : m \in M\} = \inf\{{}^\circ m : m \in M\}. \quad \square$$

Beweis von Satz 1.2.3. Wir zeigen zuerst (1.9).
zu (1.9): Da mit $\mathcal{E}$ und i nach dem Prinzip der internen Definition auch die Menge $\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\}$ intern ist, folgt nach Hilfssatz 1.2.5

$$\|e\|_0 = \mathrm{st}(\sup\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\}).$$

Zum Nachweis von (1.9) verbleibt für $e \in \mathcal{E}_+$ zu zeigen:

$$\|e\|_0 = \mathrm{st}(|i(g_{max})|) \;\text{ für ein } g_{max} \in \mathcal{E} \text{ mit } |g_{max}| \leq e. \tag{1}$$

Zum Beweis (1) betrachten wir die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist nun $\sup\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\} = \infty$, so existiert für jedes $h \in {}^*\mathbb{N}$ ein $g_h \in \mathcal{E}$, $|g_h| \leq e$ mit $|i(g_h)| \geq h$. Wähle $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Setzt man dann $g_{max} := g_h$, so ist (1) erfüllt.

b) Im Fall $\sup\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\} < \infty$ gilt

$$(\forall h \in {}^*\mathbb{N})(\exists g_h \in \mathcal{E}, |g_h| \leq e) \quad \sup\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\} - \tfrac{1}{h} \leq |i(g_h)|.$$

Ist $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ fest und setzt man $g_{max} := g_h$, so erhält man auch in diesem Fall die Gültigkeit von (1).

Damit ist (1) und somit auch (1.9) bewiesen. Nach Definition von $\|\cdot\|_0$ gilt $\|0\|_0 = 0$. Ferner gilt per definitionem

$$(\forall e, g \in \mathcal{E}_+) \quad (e \leq g \Longrightarrow \|e\|_0 \leq \|g\|_0).$$

Da mit $e, g \in \mathcal{E}_+$ auch $e+g \in \mathcal{E}_+$ ist, genügt zum Beweis der Integralnormeigenschaft von $\|\cdot\|_0$ über $\mathcal{E}_+$ der Nachweis von

$$(\forall e, g \in \mathcal{E}_+) \quad \|e + g\|_0 \leq \|e\|_0 + \|g\|_0. \tag{2}$$

<u>zu (2)</u>: Sei $h \in \mathcal{E}$ mit $|h| \leq e + g$ gegeben (z.B. $h = 0$). Setze

$$h_1 := (h \vee -e) \wedge e, \quad h_2 := h - h_1. \tag{3}$$

Dann sind $h_1, h_2 \in \mathcal{E}$ mit $|h_1| \leq e$ und $h_1 + h_2 = h$. Es wird gezeigt

$$|h_2| \leq g. \tag{4}$$

Daraus folgt $|{}^\circ i(h)| \leq |{}^\circ i(h_1)| + |{}^\circ i(h_2)| \leq \|e\|_0 + \|g\|_0$. Da $h \in \mathcal{E}$ mit $|h| \leq e + g$ beliebig gewählt worden war, gilt daher (2). Es verbleibt der Nachweis von (4).

<u>zu (4)</u>: Mit h_1, h_2 sind auch $|h_1|, |h_2| \in \mathcal{E}$. Es gilt nun punktweise für jedes $y \in Y$:

a) Ist $|h(y)| \leq e(y)$, so ist $h_1(y) = h(y)$ und somit gilt auch $0 = |h_2(y)| \leq g(y)$.

b) Ist $y \in Y$ mit $|h(y)| > e(y)$, so gilt

$$\begin{cases} h_1(y) = e(y), & \text{falls } h(y) \geq 0, \\ h_1(y) = -e(y), & \text{falls } h(y) < 0, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} h_1(y) = e(y), 0 \leq h_2(y) \underset{(3)}{=} h(y) - h_1(y) \leq g(y), & \text{falls } h(y) \geq 0, \\ h_1(y) = -e(y), 0 \leq -h_2(y) \underset{(3)}{=} -h(y) + h_1(y) \leq g(y), & \text{falls } h(y) < 0, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |h_2(y)| \leq |g(y)|.$$

Folglich ist (4) gültig. Somit ist $\|\cdot\|_0$ eine Integralnorm über $\mathcal{E}_+$. Nach Definition ist $\|\cdot\|_0$ zu i passend. Ist nun $\|\cdot\|$ eine weitere zu i passende Integralnorm über $\mathcal{E}_+$ und ist $e \in \mathcal{E}_+$, so gilt

$$|{}^\circ i(g)| \leq \|g\|' \leq \|e\|$$

für jedes $g \in \mathcal{E}$ mit $|g| \leq e$. Daraus folgt $\|e\|_0 \leq \|e\|$. Folglich ist $\|\cdot\|_0$ die kleinste zu i passende Integralnorm über $\mathcal{E}_+$.

Seien $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_+, 0 \leq \alpha \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$. Dann sind auch $e_1 + e_2, \alpha e \in \mathcal{E}_+$. Zum Beweis der positiven Homogenität und der Additivität genügt wegen (2) der Nachweis von

$$\|e_1 + e_2\|_0 \geq \|e_1\|_0 + \|e_2\|_0, \tag{5}$$

$$\|\alpha e\|_0 = {}^\circ\alpha \cdot \|e\|_0. \tag{6}$$

<u>zu (5)</u>: Ist $\|e_j\|_0 = \infty$ für ein $j = 1, 2$, so folgt (5) sofort aus der Monotonie von $\|\cdot\|_0$. Seien deshalb des Weiteren $\|e_1\|_0, \|e_2\|_0 < \infty$. Ist dann $\varepsilon \in]0, \infty[$, so existieren $g_1, g_2 \in \mathcal{E}$ mit

$$|g_i| \leq e_i, \quad |{}^\circ i(g_i)| \geq \|e_i\|_0 - \tfrac{\varepsilon}{2}, \ i = 1, 2. \tag{7}$$

Hierbei seien g_1 bzw. g_2 so gewählt, dass ${}^\circ i(g_1), {}^\circ i(g_2) \geq 0$ gilt (ansonsten betrachte $-g_1$ bzw. $-g_2$ anstatt g_1 bzw. g_2). Dann ist $g_1 + g_2 \in \mathcal{E}$ mit

$$\begin{aligned} |g_1 + g_2| &\leq |g_1| + |g_2| \leq e_1 + e_2, \\ \|e_1 + e_2\|_0 &\geq |{}^\circ i(g_1 + g_2)| = {}^\circ i(g_1) + {}^\circ i(g_2) \underset{(7)}{\geq} \|e_1\|_0 + \|e_2\|_0 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in]0, \infty[$ beliebig war, folgt daraus (5).

<u>zu (6):</u> (6) ergibt sich aus der Gültigkeit von

$$\begin{aligned}{}^\circ\alpha \|e_1\|_0 &= {}^\circ\alpha \sup\{|{}^\circ i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e_1\} = \sup\{|{}^\circ i(\alpha g)| : g \in \mathcal{E}, |\alpha g| \leq \alpha e_1\} \\ &= \sup\{|{}^\circ i(h)| : h \in \mathcal{E}, |h| \leq \alpha e_1\} = \|\alpha e_1\|_0. \qquad \square\end{aligned}$$

Es sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Additivität von $\|\cdot\|_0$ über $\mathcal{E}_+$ später, bei der Untersuchung der Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems im Kapitel 2, von großer Bedeutung sein wird.

1.2.6 Bemerkung. Da $\|\cdot\|_0$ die kleinste zu i passende Integralnorm über $\mathcal{E}_+$ ist, liefert die Verwendung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ bzw. einer $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzenden Integralnorm ein möglichst großes System standardisierter Funktionen; insbesondere ist daher $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|} \subset \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ für jede zu i passende Integralnorm $\|\cdot\|$. Daher ist $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ die größtmögliche Menge unter den Mengen $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, die zur Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 verwendet werden kann. Wir werden daher i.d.R. unseren Betrachtungen eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm zugrunde legen.

In der Standardtheorie steht im Zusammenhang mit der Integralnorm $\|\cdot\|_0$ der Begriff der beschränkten Variation, bei der die Endlichkeit von $\|\cdot\|_0$ über $\mathcal{E}$ gefordert wird. Es sei vermerkt, dass diese Forderung an $\|\cdot\|_0$ in genau derselben Weise hier nicht möglich ist. Ist nämlich $e \in \mathcal{E}$ mit $\|e\|_0' > 0$, so gibt es stets ein $e_1 \in \mathcal{E}$ mit $\|e_1\|_0' = \infty$ (wähle $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ und setze $e_1 := h \cdot e \in \mathcal{E}$; dann ist $|n \cdot e| \leq |h \cdot e|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit gilt auch $\infty = \lim_{n\to\infty} (n \cdot \|e\|_0') = \lim_{n\to\infty} \|n \cdot e\|_0' \leq \|h \cdot e\|_0'$).

Allerdings läßt sich die Aussage der Standardtheorie über den Zusammenhang zwischen linearen Funktionalen von beschränkter Variation und positiven linearen Funktionalen transferieren (vgl. [24]). Dies liefert Satz 1.2.7. Dazu benötigen wir die folgende Notation.

Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so setze für $e \in \mathcal{E}_+$:

$$\begin{aligned}|i|(e) &:= \sup\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\}, \\ i_+(e) &:= \sup\{i(g) : g \in \mathcal{E}, 0 \leq g \leq e\}, \\ i_-(e) &:= \sup\{-i(g) : g \in \mathcal{E}, 0 \leq g \leq e\}.\end{aligned}$$

i heißt von *beschränkter Variation* auf $\mathcal{E}$, wenn $|i|(e) \in {}^*\mathbb{R}$ für jedes $e \in \mathcal{E}_+$ ist. In diesem Fall setze

$$|i|(e) := |i|(e_+) - |i|(e_-),\ i_+(e) := i_+(e_+) - i_+(e_-),\ i_-(e) := i_-(e_+) - i_-(e_-).$$

Es sei vermerkt, dass die Positivität von i eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass i von beschränkter Variation über $\mathcal{E}$ ist.

1.2.7 Satz. *(i) $i|\mathcal{E}$ ist genau dann von beschränkter Variation auf $\mathcal{E}$, wenn zwei interne, positive, ${}^*\mathbb{R}$-lineare Funktionale i_1, i_2 auf $\mathcal{E}$ existieren mit $i = i_1 - i_2$.*

(ii) *Ist i von beschränkter Variation auf $\mathcal{E}$, so sind $|i|$, i_+ und i_- interne, positiv ${}^*\mathbb{R}$-lineare Funktionale auf $\mathcal{E}$ mit*

$$i(e) = i_+(e) - i_-(e), \;\; |i|(e) = i_+(e) + i_-(e).$$

(iii) *Sind i_1, i_2 zwei interne, positive, ${}^*\mathbb{R}$-lineare Funktionale auf $\mathcal{E}$ mit $i = i_1 - i_2$, so gilt auf $\mathcal{E}_+ : i_+ \leq i_1$, $i_- \leq i_2$. Ist i von beschränkter Variation über $\mathcal{E}$, so ist folglich $i = i_+ - i_-$ eine Darstellung von i als Differenz zweier „kleinster" interner, positiv ${}^*\mathbb{R}$-linearer Funktionale auf $\mathcal{E}$.*

Im Allgemeinen wird das lineare Funktional jedoch nicht von beschränkter Variation auf $\mathcal{E}$ sein. Wir betrachten daher die Menge

$$\mathcal{E}_{|i|} := \{e \in \mathcal{E} : |i|(|e|) \in {}^*\mathbb{R}\}.$$

Mit $(\mathcal{E}, i)$ ist aber auch $(\mathcal{E}_{|i|}, i)$ ein interner, ${}^*\mathbb{R}$-linearer (Stonescher) Vektorverband. Per definitionem ist i jedoch von beschränkter Variation auf $\mathcal{E}_{|i|}$. Nach Satz 1.2.7 besteht daher der folgende Zusammenhang zwischen dem auf $\mathcal{E}_{|i|}$ eingeschränkten linearen Funktional i und positiven linearen Funktionalen.

1.2.8 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so sind $|i|$, i_+ und i_- interne, positive, ${}^*\mathbb{R}$-lineare Funktionale auf dem internen Vektorverband $\mathcal{E}_{|i|}$. $i = i_+ - i_-$ ist eine Darstellung von i als Differenz zweier „kleinster", positiver, interner, ${}^*\mathbb{R}$-linearer Funktionale auf $\mathcal{E}_{|i|}$.*

Ist nun zudem $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm über ${}^*[0, \infty[^Y$, so gilt:

$$\|e\|_0 \underset{(1.9)}{=} \begin{cases} \mathrm{st}(|i|(e)), & \text{falls } 0 \leq e \in \mathcal{E}_{|i|}, \\ \infty, & \text{falls } 0 \leq e \in \mathcal{E} \backslash \mathcal{E}_{|i|}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Folglich ist die Integralnorm $\|\cdot\|$ eine Fortsetzung von $\mathrm{st}(|i|) \,|\, \mathcal{E}_{|i|}$ und somit insbesondere zu $(\mathcal{E}_{|i|}, |i|)$, $(\mathcal{E}_{|i|}, i_+)$ und $(\mathcal{E}_{|i|}, i_-)$ passend. Daher läßt sich auf Grundlage der Integralnorm $\|\cdot\|$ eine Standardisierung der internen Integrationsstrukturen $(\mathcal{E}_{|i|}, |i|)$, $(\mathcal{E}_{|i|}, i_+)$ und $(\mathcal{E}_{|i|}, i_-)$ gemäß Satz 1.1.8 durchführen. Wegen (1.10) gilt $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|} = \mathcal{E}^{endl}_{\| \|_0} \subset \mathcal{E}_{|i|}$. Daher erhält man die standardisierten Systeme

$$(\mathcal{L}(\|\cdot\|), (|i|)^L), \;\; (\mathcal{L}(\|\cdot\|), (i_+)^L) \text{ und } (\mathcal{L}(\|\cdot\|), (i_-)^L).$$

Für diese gilt dann:

1.2.9 Lemma. $(|i|)^L$, $(i_+)^L$, $(i_-)^L : \mathcal{L}(\|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ *sind eindeutig definierte, positive, $\mathbb{R}$-lineare Funktionale mit*

$$i^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f), \qquad (|i|)^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f).$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ und $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|e_n - f\|' \to 0$. Dann gilt:

$$i^L(f) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_+(e_n) - \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_-(e_n) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f),$$
$$(|i|)^L(f) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_+(e_n) + \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_-(e_n) = (i_+)^L(f) + (i_-)^L(f). \quad \square$$

Somit ist das standardisierte Funktional i^L Differenz zweier positiv linearer, standardisierter Funktionale auf $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Infolgedessen ist i^L insbesondere von beschränkter Variation über $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ (vgl. auch Lemma 1.1.16).

Aufbauend auf dem Ergebnis des Satzes 1.2.3 wird nun der Begriff der „Loeb-Integralnorm“ eingeführt. Dabei handelt es sich um eine Fortsetzung der Integralnorm $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ auf ${}^*[0,\infty[^Y$ gemäß Satz 1.2.1. Es wird sich zeigen, dass im Falle einer internen Integrationsstruktur die Verwendung der Loeb-Integralnorm im Standardisierungsprinzip 1.1.8 zum standardisierten System der Loeb-integrierbaren Funktionen führt. Da mittels der Loeb-Integralnorm auch dann ein standardisiertes System gebildet werden kann, wenn $(\mathcal{E}, i)$ nur als interne Pseudo-Integrationsstruktur gegeben ist (also bei Verzicht auf die Positivität von i), gelingt auf diesem Weg eine Erweiterung des Standardisierungsprinzips von Loeb.

In Satz 1.2.14 wird gezeigt, dass die Loeb-Integralnorm eine besondere Eigenschaft besitzt, nämlich dass sie im Sinne der folgenden Definition σ-stetig ist.

1.2.10 Definition. Eine Integralnorm $\|\cdot\|$ über ${}^*[0,\infty[^Y$ heißt *σ-stetig*, wenn ihre Einschränkung $\|\cdot\||[0,\infty[^Y$ den Norm-Limes Satz erfüllt, d.h. wenn gilt:

$$(\forall f_n, f \in [0,\infty[^Y,\ n \in \mathbb{N})\ f_n \uparrow f \implies \|f_n\| \uparrow \|f\|. \tag{1.11}$$

Die Integralnorm heißt *fast σ-stetig*, wenn sie die schwächere Bedingung erfüllt:

$$(\forall f_n, f \in [0,\infty[^Y,\ n \in \mathbb{N})\ f_n \uparrow f,\ \|f\| < \infty \implies \|f_n\| \uparrow \|f\|. \tag{1.12}$$

In Proposition 1.2.12 wird gezeigt, dass jede σ-stetige Integralnorm stark ist. Dabei heißt eine Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$ stark, wenn ihre Einschränkung auf $[0,\infty[^Y$ im Sinne der Standardtheorie stark ist.

1.2.11 Definition. Eine Integralnorm heißt *stark*[8], wenn $\|\cdot\||[0,\infty[^Y$ abzählbar subadditiv ist, d.h. wenn gilt:

$$(\forall f, f_1, f_2, \ldots \in [0,\infty[^Y)\ f \le \sum_{i=1}^{\infty} f_i \implies \|f\| \le \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|.$$

Die Integralnorm heißt *fast stark*, wenn gilt:

$$(\forall f, f_1, f_2, \ldots \in [0,\infty[^Y)\ \|f\| < \infty, f \le \sum_{i=1}^{\infty} f_i \implies \|f\| \le \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|.$$

[8] vgl. Hoffmann, Schäfke [5]

Stärker als die Forderung einer starken Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$, ist die Annahme

$$(\forall g, g_n \in {}^*[0,\infty[^Y,\ n \in \mathbb{N})\ \sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(\sum_{i=1}^n g_i - g) \geq 0 \implies \|g\| \leq \sum_{i=1}^\infty \|g_i\|.$$

Diese Bedingung ist jedoch sehr stark. Ist nämlich $\|\cdot\|$ eine Integralnorm mit dieser Eigenschaft, so gilt auch $\|h\| = \|g\|$ für alle $g, h \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $h \approx g$.

1.2.12 Proposition. *Jede (fast) $\sigma-$stetige Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$ ist eine (fast) starke Integralnorm über $[0,\infty[^Y$.*

Beweis. Sind nämlich $f, f_n \in [0,\infty[^Y$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f \leq \sum_{n=1}^\infty f_n$, so sind auch $\phi_n := f \wedge \sum_{i=1}^n f_i \in [0,\infty[^Y$ mit $\phi_n \uparrow f$. Ist die Integralnorm σ-stetig, so folgt die Behauptung aus

$$\sum_{i=1}^\infty \|f_i\| \geq \sum_{i=1}^n \|f_i\| \geq \|\phi_n\| \uparrow \|f\|.$$

Analog erhält man die Aussage für eine fast σ-stetige Integralnorm. □

1.2.13 Bemerkung. Nach Korollar 1.1.15 stimmen, im Falle eines positiven Integrals und einer ${}^\circ i|\,\mathcal{E}_+$ fortsetzenden Integralnorm, die Integralnorm und das standardisierte Integral i^L auf $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ überein. Daher impliziert die Forderung der σ-Stetigkeit der Integralnorm auch die σ-Stetigkeit des standardisierten Integrals über $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$. Dies verdeutlicht insbesondere, welche große Bedeutung der Wahl einer geeigneten Integralnorm zukommt.

Wegen Bemerkung 1.2.13 erscheint die Forderung einer σ-stetigen Integralnorm recht stark. Satz 1.2.14 zeigt jedoch, dass die im nächsten Satz konstruierte Loeb-Integralnorm insbesondere σ-stetig ist. Es sei vermerkt, dass die Loeb-Integralnorm ähnlich aufgebaut ist wie die Riemann-Integralnorm der Standardwelt. Letztere dient jedoch in der Standardwelt zur Fortsetzung zum System der Riemann-integrierbaren Funktionen, währenddessen die Loeb-Integralnorm gemäß Satz 1.1.8 zur Standardisierung verwendet wird.

Im Satz 1.2.14 wird gezeigt, dass die Loeb-Integralnorm nicht nur σ-stetig ist, sondern dass sie sogar die folgende stärkere Bedingung erfüllt, die den Norm-Limes Satz impliziert:

$$(\forall f_n, f \in (\mathrm{fin}({}^*[0,\infty[))^Y,\ n \in \mathbb{N}) \quad f_n \uparrow_S f \Longrightarrow \|f_n\| \ \uparrow \|f\|; \tag{1.13}$$

dabei schreiben wir $f_n \uparrow_S f$, falls punktweise $f_n(y) \uparrow_S f(y)$ für jedes $y \in Y$ gilt. Für $x_n, x \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, schreiben wir fernerhin im Folgenden $x_n \uparrow_S x$, falls $x_n \leq x_{n+1}$ ist und falls $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0)$ entweder $x_n = x_{n+1} = x \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ oder $x_n, x \in \mathbb{R}$, $x_n \uparrow x$ gilt. Bedingung (1.13), die zunächst etwas ungewohnt erscheint, spielt vor allem später im Zusammenhang mit lokalen Integralnormen eine Rolle.

Für eine Funktion $f \in {}^*\mathbb{R}^Y$ wird nun die Loeb-Integralnorm definiert, indem man die Betragsfunktion $|f|$ durch nicht-negative Funktionen aus $\mathcal{E}$ mit möglichst kleinem $\|\cdot\|_0$-Integralnormwert majorisiert.

1.2.14 Satz (Loeb-Integralnorm). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so definiere für $f \in {}^*[0,\infty[^Y$:*

$$\|f\|_L \quad := \quad \inf\{\|g\|_0 : f \leq g \in \mathcal{E}\}. \tag{1.14}$$

Dann ist $\|\cdot\|_L$ eine zu i passende, positiv homogene Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$, welche die auf $\mathcal{E}_+$ definierte Integralnorm $\|\cdot\|_0$ fortsetzt und Bedingung (1.13) *erfüllt; daher ist $\|\cdot\|_L$ insbesondere σ-stetig. $\|\cdot\|_L$ ist die größte Integralnorm, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt.*

Beweis. Nach Satz 1.2.1 und Bemerkung 1.2.2 ist $\|\cdot\|_L$ die größte Integralnorm, welche die Integralnorm $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ über ${}^*[0,\infty[^Y$ fortsetzt. Mit $\|\cdot\|_0$ ist damit auch $\|\cdot\|_L$ zu i passend. Wegen der positiven Homogenität von $\|\cdot\|_0$ ist auch $\|\cdot\|_L$ positiv homogen. Es verbleibt der Nachweis von (1.13). Seien dazu $f_n, f \in \mathrm{fin}({}^*[0,\infty[)^Y$ mit $f_n \uparrow_S f$. Wegen der Monotonie von $\|\cdot\|_L$ existiert ein $\alpha \geq 0$ mit $\|f_n\|_L \uparrow \alpha$. Sei o.B.d.A. $\alpha < \infty$ (beachte: wegen der Monotonie von $\|\cdot\|_L$ gilt insbesondere $\alpha \leq \|f\|_L$). Sei $\varepsilon \in]0,\infty[$. Es reicht zu zeigen, dass für jedes $\delta \in]0,\infty[$ gilt

$$\|f\|_L \leq (1+\delta)(\alpha+\varepsilon).$$

Nach Definition von $\|\cdot\|_L$ existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in \mathcal{E}$ mit

$$f_n \leq g_n, \quad \|g_n\|_0 \leq \|f_n\|_L + \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{1}$$

Setzt man $h_n := (g_1 \vee \ldots \vee g_n)$, so gilt $f_n \leq h_n \in \mathcal{E}$. Wir zeigen die Gültigkeit von

$$\|h_n\|_0 \leq \|f_n\|_L + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}. \tag{2}$$

Setzt man dann für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_n := \{h \in \mathcal{E} : h_n \leq h,\ (\forall e \in \mathcal{E}, |e| \leq h)\ |i(e)| \leq \alpha + \tfrac{\varepsilon}{2}\},$$

so ist $\emptyset \neq \mathcal{H}_n \downarrow$ intern. Nach Saturation existiert daher ein $h \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_n$. Wegen $f_n \uparrow_S f$ gilt infolgedessen

$$f \leq (1+\delta)h \in \mathcal{E}$$

für jedes $\delta \in]0,\infty[$. Daraus ergibt sich

$$\|f\|_L \leq \|(1+\delta)h\|_0 = (1+\delta)\|h\|_0 \leq (1+\delta)(\alpha+\varepsilon),$$

woraus die Behauptung folgt. Es verbleibt der Nachweis von (2).
zu (2): Der Beweis wird mittels vollständiger Induktion geführt. Wegen $h_1 = g_1$

erhält man (2) für $n = 1$ sofort aus (1). Gelte nun die Behauptung bereits für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit Satz 1.2.3

$$\begin{aligned} \|h_{n+1}\|_0 + \|h_n \wedge g_{n+1}\|_0 &= \|h_{n+1} + (h_n \wedge g_{n+1})\|_0 = \|h_n + g_{n+1}\|_0 \\ &= \|h_n\|_0 + \|g_{n+1}\|_0. \end{aligned}$$

Aus $f_n \leq h_n, g_{n+1} \in \mathcal{E}$ folgt $\|h_n \wedge g_{n+1}\|_0 \geq \|f_n\|_L$ nach Definition von $\|\cdot\|_L$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \|h_{n+1}\|_0 &= \|h_n\|_0 + \|g_{n+1}\|_0 - \|h_n \wedge g_{n+1}\|_0 \leq \|h_n\|_0 + \|g_{n+1}\|_0 - \|f_n\|_L \\ &\underset{I.V.,(1)}{\leq} \|f_n\|_L + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{2^{i+1}} + \|f_{n+1}\|_L + \tfrac{\varepsilon}{2^{n+2}} - \|f_n\|_L \\ &= \|f_{n+1}\|_L + \sum_{i=1}^{n+1} \tfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}; \end{aligned}$$

damit gilt (2) für $(n + 1)$ und folglich per Induktion auch insgesamt. □

1.2.15 Lemma. *Für eine interne Integrationsstruktur* $(\mathcal{E}, i)$ *gilt:*

$$\|f\|'_L = \inf\{{}^\circ i(g) : |f| \leq g \in \mathcal{E}\} = \bar{i}(|f|),\ f \in {}^*\mathbb{R}^Y.$$

Beweis. Existiert kein $|f| \leq g \in \mathcal{E}$, so gilt die Behauptung sofort. Ansonsten ist „$\leq$“ klar. Zum Beweis von „$\geq$“ betrachten wir die folgende Fallunterscheidung:

a) Existiert ein $|f| \leq g \in \mathcal{E}^{fin}$, so gilt $\infty = {}^\circ i(g') > {}^\circ i(g)$ für jedes $g' \in \mathcal{E} \backslash \mathcal{E}^{fin}$ mit $|f| \leq g'$. Daraus folgt $\|f\|'_L = \bar{i}(|f|)$.

b) Existiert kein $|f| \leq g \in \mathcal{E}^{fin}$, so ist $i(g) \notin \text{fin}({}^*\mathbb{R})$, also ${}^\circ i(g) = \infty$, für jedes $|f| \leq g \in \mathcal{E}$. Demzufolge gilt $\|f\|'_L = \infty = \bar{i}(|f|)$. □

Folglich stimmt $\|\cdot\|_L$ mit dem oberen Loeb-Integral $\bar{i}$ überein, falls i positiv ist. Nach Theorem 1 in Landers, Rogge [11] erhält man damit für interne Integrationsstrukturen die Gleichheit der Systeme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(i) = \mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \tag{1.15}$$

und der darauf definierten Integrale $i^{\mathcal{L}}(f) = i^l(f) = i^L$ (siehe auch Paragraph 1.3). Demzufolge führt eine Verwendung der Integralnorm $\|\cdot\|_L$ im Standardisierungsprinzip 1.1.8 unter der Annahme einer internen Integrationsstruktur zum System der Loeb-integrierbaren Funktionen. Die Integralnorm $\|\cdot\|_L$ und das darauf basierende standardisierte System $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ lassen sich jedoch gemäß Satz 1.2.14 bzw. Satz 1.1.8 auch unter der Annahme $(\mathcal{E}, i)$ interne Pseudo-Integrationsstruktur bilden. Dies führt dann zu einer Erweiterung des von Loeb eingeführten Standardisierungsprinzips. Infolgedessen bezeichnen wir im Folgenden die auf Basis von internen Pseudo-Integrationsstrukturen gebildete Integralnorm $\|\cdot\|_L$ als *Loeb-Integralnorm.*

Ferner bezeichne $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ als *System der Loeb-integrierbaren Funktionen* und das darauf definierte Integral i^L als *Loeb-Integral.* Auf diese Weise erhalten wir eine Erweiterung des von Loeb eingeführten Systems der Loeb-integrierbaren Funktionen.

Wegen Lemma 1.1.16 gilt $\|f\|'_L < \infty$ für jede Funktion $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. Folglich existiert eine die Betragsfunktion $|f|$ majorisierende Funktion e aus $\mathcal{E}$, deren Integralnorm endlich ist (also ist $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$). Dies führt uns zu dem nächsten Lemma.

1.2.16 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so existiert für jedes $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ ein $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ mit $|f| \le e$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus Lemma 1.1.16 und der Definition der Loeb-Integralnorm. □

1.2.17 Korollar. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur, so erfüllt $^\circ i|\,\mathcal{E}_+$ Bedingung (1.13). Sind also $e_n, e \in \mathcal{E}_+ \cap fin(^*[0,\infty[^Y)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $e_n \uparrow_S e$, so gilt $^\circ i(e_n) \uparrow {}^\circ i(e)$. Insbesondere ist daher $^\circ i|\,\mathcal{E}_+ \cap [0,\infty[^Y$ σ-stetig.*

Beweis. Da i positiv ist, ist $\|\cdot\|_L$ eine Fortsetzung von $^\circ i|\,\mathcal{E}_+$ (siehe Bemerkung 1.2.4 und Satz 1.2.14). Die Behauptung folgt dann aus Satz 1.2.14. □

In diesem Zusammenhang sei vermerkt, dass nach Satz 1.2.14 und Bemerkung 1.2.13 für positive Integrale i das (standardisierte) Loeb-Integral $i^L|\,\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)_+$ σ-stetig ist.

Ist nun $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, dann ist $(\mathcal{E}_{|i|}, |i|)$ eine interne Integrationsstruktur. Bezeichnet man

$$\mathcal{E}^{fin}(j) := \{e \in \mathcal{E}_{|i|} : j(|e|) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})\}, \quad \text{für } j = |i|, i_+, i_-,$$

so gilt (vgl. (1.10))

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} &= \{e \in \mathcal{E} : \text{st}(|i|(|e|)) < \infty\} \\ &= \{e \in \mathcal{E}_{|i|} : \text{st}(|i|(|e|)) < \infty\} = \mathcal{E}^{fin}(|i|) \\ &= \{e \in \mathcal{E}_{|i|} : \text{st}(i_+(|e|)), \text{st}(i_-(|e|)) < \infty\} = \mathcal{E}^{fin}(i_+) \cap \mathcal{E}^{fin}(i_-). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Ferner gilt für $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$

$$\begin{aligned} \|g\|'_L &\underset{(1.14)}{=} \inf\{\text{st}(|i|(e)) : |g| \le e \in \mathcal{E}\} \\ &= \inf\{\text{st}(|i|(e)) : |g| \le e \in \mathcal{E}_{|i|}\} \underset{Lemma\,1.2.15}{=} \overline{|i|}(|g|). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Folglich liegt eine Funktion $f \in \mathbb{R}^Y$ genau dann in $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$, wenn $f \in \mathcal{L}(|i|)$ ist. Also gilt:

$$f \text{ ist Loeb-integrierbar bzgl. } i \iff f \text{ ist Loeb-integrierbar bzgl. } |i|. \tag{1.18}$$

Allerdings läßt sich die Loeb-Integralnorm nicht nur für i über $\mathcal{E}$ und $|i|$ über $\mathcal{E}_{|i|}$, sondern auch für i_+ und i_- über $\mathcal{E}_{|i|}$ bilden. Unter Zuhilfenahme des nächsten Satzes 1.2.18 und von Korollar 1.2.19 läßt sich der Zusammenhang der so entstehenden standardisierten Systeme angeben. Dies liefert Satz 1.2.20.

1.2.18 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ interne Pseudo-Integrationsstruktur, so gilt:*

$$\|g\|'_L = \|g\|'_{L(i_+)} + \|g\|'_{L(i_-)},\ g \in {}^*\mathbb{R}^Y; \tag{1.19}$$

hierbei bezeichne $\|\cdot\|_{L(i_+)}$ bzw. $\|\cdot\|_{L(i_-)}$ die mit dem entsprechenden internen, positiv linearen Funktional i_+ bzw. i_- über $\mathcal{E}_{|i|}$ gemäß Satz 1.2.14 gebildete Loeb-Integralnorm

$$\|g\|'_{L(j)} = \inf\{\mathrm{st}(j(e)) : |g| \le e \in \mathcal{E}_{|i|}\},\ j = i_+, i_-.$$

Beweis. Für $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$ gilt

$$\begin{aligned} \|g\|'_L \underset{(1.14)}{=} & \inf\{\mathrm{st}(|i|(e)) : |g| \le e \in \mathcal{E}_{|i|}\} \\ = & \inf\{\mathrm{st}(i_+(e) + i_-(e)) : |g| \le e \in \mathcal{E}_{|i|}\} \ge \|g\|'_{L(i_+)} + \|g\|'_{L(i_-)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Damit gilt „$\ge$". Wegen (1) seien zum Beweis von „$\le$" nun $|g| \le e, h \in \mathcal{E}_{|i|}$. Setzt man $b := e \wedge h$, so ist auch $|g| \le b \in \mathcal{E}_{|i|}$ mit

$$i_+(b) \le i_+(e),\ i_-(b) \le i_-(h).$$

Somit gilt $\|g\|'_L \le \mathrm{st}(i_+(e)) + \mathrm{st}(i_-(h))$. Daraus folgt $\|g\|'_L \le \|g\|'_{L(i_+)} + \|g\|'_{L(i_-)}$. $\square$

1.2.19 Korollar. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ interne Pseudo-Integrationsstruktur und bildet man die oberen und unteren Loeb-Integrale gemäß* (1.3) *und* (1.4) *für die internen Integrationsstrukturen $(\mathcal{E}_{|i|}, |i|)$, $(\mathcal{E}_{|i|}, i_+)$ und $(\mathcal{E}_{|i|}, i_-)$, so gilt für $f \in {}^*\mathbb{R}^Y_+$:*

$$\overline{|i|}(f) \;=\; \overline{i_+}(f) + \overline{i_-}(f), \quad \underline{|i|}(f) = \underline{i_+}(f) + \underline{i_-}(f). \tag{1.20}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt mit Lemma 1.2.15 und Satz 1.2.18 sofort aus

$$\begin{aligned} \overline{|i|}(f) \underset{(1.17)}{=} & \|f\|'_L \underset{(1.19)}{=} \|f\|'_{L(i_+)} + \|f\|'_{L(i_-)} \\ \underset{(1.14),\,Lemma\,1.2.15}{=} & \overline{i_+}(f) + \overline{i_-}(f). \end{aligned}$$

Zum Beweis der zweiten Aussage zeigen wir zuerst:

Ist $(\mathcal{F}, j)$ eine interne Integrationsstruktur, so gilt für $f \in {}^*\mathbb{R}^Y_+$:

$$\underline{j}(f) = \sup\{{}^\circ j(e) : \mathcal{F} \ni e \le f\} \tag{1}$$

<u>zu (1):</u> „$\le$" klar (beachte: $0 \in \mathcal{F}^{\mathrm{fin}}$).

„$\geq$“ Existiert ein $e \in \mathcal{F}$ mit $0 \leq e \leq f$ und $j(e) \notin \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})$, so gilt

$$\mathcal{F}^{\text{fin}} \ni (\tfrac{e}{j(e)} \cdot k) \leq f \text{ mit } k = j(\tfrac{e}{j(e)} \cdot k) \leq \underline{j}(f) \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Also folgt $\underline{j}(f) = \infty = \sup\{{}^\circ j(e) : \mathcal{F} \ni e \leq f\}$ und somit auch „$\geq$“. Ansonsten gilt $e \in \mathcal{F}^{\text{fin}}$ für jedes $0 \leq e \in \mathcal{F}$ mit $e \leq f$. Daraus folgt $\underline{j}(f) \geq {}^\circ j(e)$ und somit insgesamt auch „$\geq$“.

Wir kommen nun zum Nachweis der zweiten Aussage von (1.20).

„$\leq$“ folgt aus

$$\begin{aligned}\underline{|i|}(f) &\underset{(1)}{=} \sup\{st(|i|(g)) : \mathcal{E}_{|i|} \ni g \leq f\} = \sup\{\operatorname{st}((i_+ + i_-)(g)) : \mathcal{E}_{|i|} \ni g \leq f\} \\ &\underset{(1)}{\leq} \underline{i_+}(f) + \underline{i_-}(f).\end{aligned}$$

„$\geq$“ Sind $g, h \in \mathcal{E}_{|i|}$, $0 \leq g, h \leq f$, so betrachte $b := (g \vee h) \in \mathcal{E}_{|i|}$. Dann ist

$$0 \leq b \leq f \text{ mit } i_+(b) \geq i_+(g),\ i_-(b) \geq i_-(h),$$

also gilt auch $\underline{|i|}(f) \geq {}^\circ(i_+(g)) + {}^\circ(i_-(h))$. Daraus folgt $\underline{|i|}(f) \geq \underline{i_+}(f) + \underline{i_-}(f)$ und somit insgesamt die zweite Aussage. □

Geht man nun von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur aus, so läßt sich für die internen Integrationsstrukturen $(\mathcal{E}_{|i|}, |i|)$, $(\mathcal{E}_{|i|}, i_+)$ und $(\mathcal{E}_{|i|}, i_-)$ das standardisierte System der Loeb-integrierbaren Funktionen durch Verwendung der Loeb-Integralnorm bzw. des oberen und unteren Loeb-Integrals bilden. Der nächste Satz gibt nun den Zusammenhang der so gebildeten Systeme an.

1.2.20 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so gilt:*

$$\mathcal{L}(|i|) = \mathcal{L}(\|\cdot\|_L) = \mathcal{L}(i_+) \cap \mathcal{L}(i_-). \tag{1.21}$$

Also ist $f \in \mathbb{R}^Y$ genau dann Loeb-integrierbar bzgl. i, wenn f Loeb-integrierbar bzgl. i_+ und i_- ist. Für das Loeb-Integral gilt dann:

$$i^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f), \quad (|i|)^L = (i_+)^L(f) + (i_-)^L(f).$$

Beweis. Es genügt Satz 1.2.20 für $f \in [0, \infty[^Y$ nachzuweisen. Ist nämlich $f \in \mathbb{R}^Y$, so gilt Satz 1.2.20 zuerst für f^+, f^- und damit insgesamt auch für f. Sei also des Weiteren $f \in [0, \infty[^Y$. Wir zeigen zuerst (1.21). Es gilt nun:

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \quad &\underset{(1.18)}{\Longleftrightarrow} \quad f \in \mathcal{L}(|i|) \Longleftrightarrow \overline{|i|}(f) = \underline{|i|}(f) \in \mathbb{R} \\
&\underset{\substack{(1.20),\\ Lemma\,1.2.8,\,(f\geq 0)}}{\Longleftrightarrow} \quad \underbrace{\overline{i_+}(f) - \underline{i_+}(f)}_{\underset{Lemma 1,\,[11]}{\geq} 0} = \underbrace{\underline{i_-}(f) - \overline{i_-}(f)}_{\underset{Lemma 1,\,[11]}{\leq} 0} \in \mathbb{R} \\
& \qquad\quad \overline{i_+}(f), \underline{i_+}(f), \underline{i_-}(f), \overline{i_-}(f) \in \mathbb{R}_+ \\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{i_+}(f) = \underline{i_+}(f) \in \mathbb{R}, \quad \underline{i_-}(f) = \overline{i_-}(f) \in \mathbb{R}, \\
&\Longleftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}(i_+) \cap \mathcal{L}(i_-).
\end{aligned}$$

Damit ist (1.21) bewiesen. Sei nun $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. Wegen (1.20) gilt dann mit Korollar 1.1.15 und Lemma 1.2.15

$$(|i|)^L(f) = \overline{|i|}(f) = \overline{i_+}(f) + \overline{i_-}(f) = (i_+)^L(f) + (i_-)^L(f).$$

Es verbleibt der Nachweis von

$$i^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f). \tag{1}$$

<u>zu (1)</u>: Zu $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L) = \mathcal{L}(|i|)$ existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|'_L \to 0$. Wegen $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} = \mathcal{E}^{fin}(|i|) = \mathcal{E}^{fin}(i_+) \cap \mathcal{E}^{fin}(i_-)$ (vgl. (1.16)), sind $e_n \in \mathcal{E}^{fin}(i_+) \cap \mathcal{E}^{fin}(i_-)$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\|f - e_n\|'_{L(i_+)} \to 0, \quad \|f - e_n\|'_{L(i_-)} \to 0$$

nach Satz 1.2.18. Damit gilt nun:

$$i^L(f) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_+(e_n) - \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_-(e_n) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f). \qquad \square$$

Im Satz 1.2.14 ist ausgehend von einer internen Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ gezeigt worden, dass $\|\cdot\|_L = \bar{i}$ (vgl. Lemma 1.2.15) eine σ-stetige Integralnorm über ${}^*[0, \infty[^Y$ ist. Betrachtet man das untere Loeb-Integral, so ist $\underline{i}$ eine Integralnorm über $\mathcal{E}_+$ (klar, denn: $\underline{i}|_{\mathcal{E}_+} = \bar{i}|_{\mathcal{E}_+} = {}^\circ i|_{\mathcal{E}_+}$ (vgl. Lemma 16 in Landers, Rogge [11])). $\underline{i}$ ist jedoch i. Allg. keine Integralnorm über ${}^*[0, \infty[^Y$ (vgl. auch Landers, Rogge [11], Lemma 1(iv)). [Betrachtet man nämlich $Y := {}^*\mathbb{R}$, $\mathcal{E} := \{c \cdot 1_Y : c \in {}^*\mathbb{R}\}$, $i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R}$ mit $i(c \cdot 1_Y) = c$, dann ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur über Y, aber es gilt $\underline{i}(1) = 1 > 0 = \underline{i}(1_{{}^*]-\infty,0[}) + \underline{i}(1_{{}^*[0,\infty[})$.] $\underline{i}$ läßt sich allerdings gemäß Lemma 1.2.1 zu einer Integralnorm fortsetzen; die Fortsetzung ergibt dann aber wieder die Loeb-Integralnorm.

Der nachfolgende Satz zeigt die $\widehat{S}$-Stetigkeit der Loeb-Integralnorm $\|\cdot\|_L$. Er ist eine Verallgemeinerung des Theorem 6 (ii) aus Landers, Rogge [11] auf interne Pseudo-Integrationsstrukturen.

1.2.21 Satz. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Pseudo-Integrationsstruktur und sei $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_+$ mit $\operatorname{card}(\mathcal{E}_1) \leq \operatorname{card}(\widehat{S})$, $\mathcal{E}_1 \uparrow$. Ist dann $\sup_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ e \in \mathbb{R}^Y$, so gilt*

$$\sup_{e\in\mathcal{E}_1} \|{}^\circ e\|_L = \|\sup_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ e\|_L.$$

Beweis. Sei zuerst $0 \leq e \leq 1$ für alle $e \in \mathcal{E}_1$. Dann gilt „$\leq$“ sofort. Zum Beweis von „$\geq$“ sei o.B.d.A. $\sup_{e\in\mathcal{E}_1} \|{}^\circ e\|_L =: \alpha < \infty$. Sei $\varepsilon \in]0, \infty[$ fest gewählt. Für $e \in \mathcal{E}_1, n \in \mathbb{N}$, setze

$$G_{e,n} := \{g \in \mathcal{E} : e 1_{\{e \geq \frac{1}{n}\}} \leq g \leq 2, (\forall h \in \mathcal{E}, |h| \leq g)\ |i(h)| \leq \alpha + \varepsilon\}.$$

Dann ist $G_{e,n}$ eine interne Menge. Es wird gezeigt:

$$(\forall l \in \mathbb{N})\,(\forall e_1, \dots, e_l \in \mathcal{E}_1)\,(\forall n_1, \dots, n_l \in \mathbb{N}) \quad \bigcap_{i=1}^{l} G_{e_i,n_i} \neq \emptyset. \tag{1}$$

Damit hat $(G_{e,n})_{n\in\mathbb{N},e\in\mathcal{E}_1}$ nicht-leere, endliche Durchschnitte. Daher existiert nach Saturation ein

$$g \in \bigcap_{n\in\mathbb{N},e\in\mathcal{E}_1} G_{e,n},$$

also ein $g \in \mathcal{E}$ mit $\|g\|_0 \leq \alpha + \varepsilon$ und $e1_{\{e\geq\frac{1}{n}\}} \leq g$ für jedes $e \in \mathcal{E}_1, n \in \mathbb{N}$. Somit gilt $^\circ e \leq {}^\circ g$ für jedes $e \in \mathcal{E}_1$. Folglich ist $\sup\limits_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ e \leq {}^\circ g$ und daher gilt

$$\sup_{e\in\mathcal{E}_1}(^\circ e - \tfrac{1}{n})^+ \leq g$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Infolgedessen ergibt sich

$$\|\sup_{e\in\mathcal{E}_1}(^\circ e - \tfrac{1}{n})^+\|_L \leq \|g\|_0 \leq \alpha + \varepsilon$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\sup\limits_{e\in\mathcal{E}_1}(^\circ e - \frac{1}{n})^+ \uparrow (\sup\limits_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ e) \in \mathbb{R}_+^Y$ für $n \to \infty$, folgt aus der σ-Stetigkeit von $\|\cdot\|_L$ auch

$$\|\sup_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ e\|_L = \lim_{n\to\infty} \|\sup_{e\in\mathcal{E}}(^\circ e - \tfrac{1}{n})^+\|_L \leq \alpha + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in]0, \infty[$ beliebig war, gilt daher „$\geq$“ für alle Systeme $\mathcal{E}_1$ mit $(\forall e \in \mathcal{E}_1)\, 0 \leq e \leq 1$, falls die Bedingung (1) gilt. Gilt die Behauptung nun für alle Systeme $\mathcal{E}_1$ mit $(\forall e \in \mathcal{E}_1)\, 0 \leq e \leq 1$, so gilt sie wegen der positiven Homogenität der Loeb-Integralnorm auch unter der Annahme $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall e \in \mathcal{E}_1)\, 0 \leq e \leq n$.
Sei nun $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_+$ mit $\mathrm{card}(\mathcal{E}_1) \leq \mathrm{card}(\widehat{S})$, $\mathcal{E}_1 \uparrow$ und $\sup\limits_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ e \in \mathbb{R}^Y$. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{E}$ Stonesch, also ist auch $(\mathcal{E}_1 \wedge n) \subset \mathcal{E}_+$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt dann

$$\mathrm{card}(\mathcal{E}_1 \wedge n) \leq \mathrm{card}(\widehat{S}),\ (\mathcal{E}_1 \wedge n) \uparrow \ \text{ und } \sup_{e\in\mathcal{E}_1}(^\circ e \wedge n) \in \mathbb{R}^Y.$$

Da $\|\cdot\|_L$ eine σ-stetige Integralnorm ist, folgt der Rest der Behauptung aus

$$\begin{aligned}
\sup_{e\in\mathcal{E}_1} \|^\circ e\|_L \underset{\sigma-Stetigk.}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{e\in\mathcal{E}_1} \|^\circ e \wedge n\|_L &\underset{(\mathcal{E}_1\wedge n)\,\subset\,\mathcal{E}_+}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sup_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ(e \wedge n)\|_L \\
\underset{\sigma-Stetigk}{=} \|\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ(e \wedge n)\|_L &= \|\sup_{e\in\mathcal{E}_1} {}^\circ e\|_L.
\end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes verbleibt daher nur noch der Nachweis von (1).

zu (1): Setze $n := n_1 \vee \ldots \vee n_l$ und wähle $\tilde{e} \in \mathcal{E}_1$ mit $e_1 \vee \ldots \vee e_l \leq \tilde{e}$ (dies ist wegen $\mathcal{E}_1 \uparrow$ möglich). Somit gilt

$$e_1 1_{\{e_1 \geq \frac{1}{n_1}\}} \vee \ldots \vee e_l 1_{\{e_l \geq \frac{1}{n_l}\}} \leq \tilde{e} 1_{\{\tilde{e} \geq \frac{1}{n}\}}.$$

Wegen $\tilde{e} \in \mathcal{E}_1$ ist $\|{}^\circ\tilde{e}\|_L \leq \alpha < \infty$. Folglich existiert ein $\tilde{g} \in \mathcal{E}$ und ein $\delta \in]0,1]$ mit

$$\tilde{g} \leq 1 \ (\mathcal{E} \text{ Stonesch}), \ {}^\circ\tilde{e} \leq \tilde{g} \ \text{ und } \ (1+\delta)\|\tilde{g}\|_0 \leq \alpha + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Setzt man $g := (1+\delta)\tilde{g}$, so gilt $\tilde{e} 1_{\{\tilde{e} \geq \frac{1}{n}\}} \leq g \leq 2$ mit $\|g\|_0 \leq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. Damit ist $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{l} G_{l_i, n_i}$, d.h. es gilt (1). □

Im nächsten Kapitel 2 werden weitere Eigenschaften des standardisierten Systems der Loeb-integrierbaren Funktionen $(\mathcal{L}(\|\cdot\|_L), i^L)$ hergeleitet. Dabei wird insbesondere die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems untersucht.

Zuvor wird aber im folgenden Paragraphen gezeigt, dass sich Loebs Ansatz der Konstruktion einer Menge von Nullfunktionen auf die Verwendung geeigneter Integralnormen verallgemeinern läßt.

1.3 Verallgemeinerung von Loebs Zugang

Loeb [7] entwickelt für interne Integrationsstrukturen unter Verwendung einer Menge von Nullfunktionen das standardisierte System der Loeb-integrierbaren Funktionen. Die Konstruktion basiert dabei auf der Positivität und damit Monotonie des zu Grunde gelegten internen Funktionals. Verzichtet man nun auf die Forderung der Positivität des Funktionals, so ist Loebs Ansatz in derselben Weise folglich nicht mehr anwendbar. Die Idee, die diesem Abschnitt zu Grunde liegt, ist die, Loebs Methode der Konstruktion eines standardisierten Systems integrierbarer Funktionen mittels einer Menge von Nullfunktionen durch die Verwendung von geeigneten Integralnormen zu verallgemeinern. Dadurch läßt sich von der Positivität des Funktionals abstrahieren und Loebs Standardsierungsmethode auch unter Zugrundelegung einer internen Pseudo-Integrationsstruktur durchführen. Ferner besteht durch die Variation der Integralnormen die Möglichkeit der Entwicklung verschiedener standardisierter Systeme.

Wir werden die Konstruktion allgemein für eine $\|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm durchführen. In diesem Kapitel 1.3 sei daher, wenn nichts anderes explizit angegeben ist,

- $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$.

Unter Zuhilfenahme der (monotonen) Integralnorm, wird nun die Menge der Nullfunktionen konstruiert. Um die Abhängigkeit dieser Menge von der zu Grunde gelegten Integralnorm zu verdeutlichen, wird diese im Folgenden mit $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ bezeichnet.

1.3.1 Definition. Für eine interne Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ definiere

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\|\cdot\|} &:= \{g \in {}^*\mathbb{R}^Y : \|g\|' = 0\} \\ &= \text{„System der Nullfunktionen}^9\text{“}, \\ \mathcal{L}_{\|\cdot\|} &:= \{f \in \mathbb{R}^Y : f = e + g,\ e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0},\ g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}\}.\end{aligned}$$

Für $f = e + g \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ setze nun $i^{\mathcal{L}}(f) := {}^\circ i(e)$.

Verwendet man speziell die Loeb-Integralnorm, so gilt für das System der Nullfunktionen

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\|\cdot\|_L} &= \{g \in {}^*\mathbb{R}^Y : \|g\|'_L = 0\} \\ &= \{g \in {}^*\mathbb{R}^Y : (\forall \varepsilon \in]0, \infty[)(\exists e \in \mathcal{E})\ |g| \le e,\ \|e\|_0 < \varepsilon\}.\end{aligned}$$

1.3.2 Bemerkung. Ist das Funktional i positiv, so gilt $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} = \mathcal{E}^{fin}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4). Daher stimmen im Fall der Positivität des Integrals bei Verwendung der Loeb-Integralnorm die obigen Mengen $\mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}$, $\mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ und das Funktional $i^{\mathcal{L}}$ mit Loebs Konstruktion überein (vgl. Hurd, Loeb, Kap. IV, [7]).

1.3.3 Lemma. *$\mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ ist ein reeller Stonescher Vektorverband.*

Beweis. Zum Nachweis der $\mathbb{R}$-Linearität seien $g_1, g_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\|\alpha g_1 + \beta g_2\|' \le \min\{n \in \mathbb{N} : |\alpha| \le n\} \cdot \underbrace{\|g_1\|'}_{=0} + \min\{n \in \mathbb{N} : |\beta| \le n\} \cdot \underbrace{\|g_2\|'}_{=0}.$$

Also ist auch $(\alpha g_1 + \beta g_2) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Nach Definition sind mit g auch $1 \wedge g, |g| \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. □

1.3.4 Lemma. *(i) Ist $f = e + g = \widetilde{e} + \widetilde{g} \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ mit $e, \widetilde{e} \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $g, \widetilde{g} \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$, so ist $e - \widetilde{e} \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ und $i(e) \approx i(\widetilde{e})$. Infolgedessen ist $i^{\mathcal{L}}$ von der Darstellung von f unabhängig.*

(ii) Sind $f_i = e_i + g_i \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ mit $e_i \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}, g_i \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$, $i = 1, 2$, so gilt

$$(f_1 \wedge f_2) - (e_1 \wedge e_2),\ (f_1 \vee f_2) - (e_1 \vee e_2) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}.$$

Beweis. (i) Es sind $e, \widetilde{e} \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ mit $\mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0} \ni e - \widetilde{e} = \widetilde{g} - g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ nach Lemma 1.3.3. Da $\|\cdot\|_0$ zu i passend ist, folgt

$$|{}^\circ i(e - \widetilde{e})| \le \|e - \widetilde{e}\|'_0 = \|\widetilde{g} - g\|' = 0,$$

also gilt $i(e) \approx i(\widetilde{e})$.
(ii) Aus $|(f_1 \wedge f_2) - (e_1 \wedge e_2)| \le |f_1 - e_1| + |f_2 - e_2|$ folgt

$$\|(f_1 \wedge f_2) - (e_1 \wedge e_2)\|' \le \|f_1 - e_1\|' + \|f_2 - e_2\|' = \|g_1\|' + \|g_2\|' = 0,$$

also ist $(f_1 \wedge f_2) - (e_1 \wedge e_2) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Der Nachweis von $(f_1 \vee f_2) - (e_1 \vee e_2) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ folgt analog. □

[9] Analog wie in der Standardwelt (vgl. Hoffmann, Schäfke [5], S.15), bezeichnen wir eine Funktion $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$, deren Integralnorm $\|g\|'$ Null ist, als Nullfunktion. Des Weiteren führen wir dadurch die von Loeb verwendete Bezeichnung fort (vgl. Bemerkung 1.3.2).

$\mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ ist ebenfalls ein reeller Vektorverband. Dies folgt unmittelbar aus dem nächsten Satz 1.3.5. Ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ erhält man nämlich nach Satz 1.3.5 die Gleichheit der standardisierten Systeme $(\mathcal{L}_{\|\cdot\|}, i^{\mathcal{L}})$ und $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$. Damit entspricht das System $\mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ einem mit der Integralnorm $\|\cdot\|$ gemäß dem Standardisierungsprinzip 1.1.8 gebildetem standardisierten System. Folglich liefert Definition 1.3.1 eine Spezialisierung des Satzes 1.1.8 für $\|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnormen. Insbesondere gilt dies natürlich auch für die Loeb-Integralnorm.

1.3.5 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so entspricht das gemäß Definition 1.3.1 gebildete standardisierte System $(\mathcal{L}_{\|\cdot\|}, i^{\mathcal{L}})$ dem gemäß Satz 1.1.8 gebildetem standardisiertem System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$. D.h. es gilt*

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|) = \mathcal{L}_{\|\cdot\|}, \quad i^L = i^{\mathcal{L}}.$$

Beweis. „$\mathcal{L}(\|\cdot\|) \supset \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$“ Sei $f = e + g \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ mit $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}, g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Wegen $\|f - e\| = \|g\| = 0$ ist dann auch $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L(f) = {}^\circ i(e) = i^{\mathcal{L}}(f)$.
„$\mathcal{L}(\|\cdot\|) \subset \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$“ Es genügt der Nachweis von

$$0 \le f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \implies f \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|},\ i^L(f) = i^{\mathcal{L}}(f). \tag{1}$$

Ist nämlich $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, so sind auch $0 \le f^+, f^- \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ und wegen (1) somit auch Elemente von $\mathcal{L}_{\|\cdot\|}$. Folglich existieren $e_1, e_2 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0}$, $g_1, g_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit $f^+ = e_1 + g_1$, $f^- = e_2 + g_2$. Wegen Lemma 1.3.3 und nach Definition von $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ ist damit ebenfalls

$$f = f^+ - f^- = \underbrace{(e_1 - e_2)}_{\in \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0}} + \underbrace{(g_1 - g_2)}_{\in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}} \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|} \text{ mit}$$
$$i^L(f) = i^L(f^+) - i^L(f^-) = i^{\mathcal{L}}(f^+) - i^{\mathcal{L}}(f^-) = {}^\circ i(e_1) - {}^\circ i(e_2) = i^{\mathcal{L}}(f).$$

zu (1): Sei $0 \le f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Dann existiert eine Folge $0 \le e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|' \to 0$ $(n \to \infty)$. Nach Theorem 8.5, II, in Loeb [7] existiert eine interne Erweiterung $0 \le e_n \in \mathcal{E}$, $n \in {}^*\mathbb{N}$. Es gilt nun

$$\begin{aligned}(\forall m \in \mathbb{N})\,(\exists N(m) \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}^{\ge N(m)})\ \|e_{N(m)} - e_n\|_0' &\le \|f - e_{N(m)}\|' + \|f - e_n\|' \\ &\le \tfrac{1}{3m}.\end{aligned} \tag{2}$$

Betrachte für $m \in \mathbb{N}$ die Menge $A_m := \{n \in {}^*\mathbb{N} : \phi[n, m] \text{ gilt}\}$ mit

$$\phi[n, m] : \sup\{|i(g)| : g \in \mathcal{E}, |g| \le |e_n - e_{N(m)}|\} < \tfrac{2}{3m}. \tag{3}$$

Dann ist $\phi[n, m]$ eine interne Formel und A_m ist nach dem Prinzip der internen Definition intern. Folglich ist $\mathcal{D} := \{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ ein System mit nicht-leeren, endlichen Durchschnitten, welches aus höchstens $\widehat{S}$-vielen internen Mengen besteht.

Da eine $\widehat{S}$-kompakte Nichtstandard-Einbettung vorausgesetzt worden ist, existiert ein

$$h \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_m.$$

Damit gilt

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \qquad \|f - e_h\| \leq \underbrace{\|f - e_{N(m)}\|'}_{\underset{(2)}{\leq} \frac{1}{3m}} + \underbrace{\|e_{N(m)} - e_h\|_0'}_{\underset{(3)}{\leq} \frac{2}{3m}} \leq \frac{1}{m},$$

d.h. es ist $(f - e_h) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Zum Beweis von (1) genügt nun der Nachweis von $e_h \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$. Dies folgt aber sofort aus

$$\|e_h\|_0' \leq \|e_h - e_{N(1)}\|_0' + \|e_{N(1)}\|_0' \underset{(3)}{\leq} \frac{2}{3} + \|e_{N(1)}\|_0' < \infty. \qquad \square$$

An dieser Stelle stellt sich die Frage, ob sich das Ergebnis des Satzes 1.3.5 nicht verallgemeinern läßt, indem man auf die Forderung einer $\|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+$ fortsetzenden Integralnorm verzichtet. Dies ist aber nicht möglich, wie das nächste Beispiel 1.3.6 zeigt. Ist nämlich eine Integralnorm gegeben, die keine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+$ ist, so gibt es Fälle, in denen gilt:

$$\{f \in \mathbb{R}^Y : (\exists\, e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})\, (\exists\, g \in {}^*\mathbb{R}^Y \text{ mit } \|g\|' = 0)\; f = e + g\} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}(\|\cdot\|).$$

1.3.6 Beispiel. Wir betrachten die interne Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ mit

$$Y := {}^*\mathbb{N},\; \mathcal{E} := \{e \in {}^*\mathbb{R}^{{}^*\mathbb{N}} : e \text{ intern}\},\; i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R},\; i \equiv 0.$$

Definiere des Weiteren $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ durch

$$\|g\| := [\sup_{h \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}} {}^\circ(g(h))] \vee [\sup_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ(\tfrac{g(n)}{n})], \quad g \in {}^*[0,\infty[^Y.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm, die $\|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+$ nicht fortsetzt und für die gilt:

$$\{f \in \mathbb{R}^Y : f = e + g, e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}, g \in {}^*\mathbb{R}^Y, \|g\|' = 0\} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}(\|\cdot\|). \qquad (1.22)$$

Beweis. Wie zeigen zuerst:

$$\|\cdot\| \text{ ist eine zu } i \text{ passende Integralnorm, die } \|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+ \text{ nicht fortsetzt.} \qquad (1)$$

zu (1): Es gilt $\|0\| = 0$ und $\|f\| \leq \|g\|$ für $f, g \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $f \leq g$. Sind $f_1, f_2 \in {}^*[0,\infty[^Y$, so gilt zudem

$$\|f_1 + f_2\| = [\sup_{h \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}} {}^\circ(f_1(h) + f_2(h))] \vee [\sup_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ(\tfrac{f_1(n)+f_2(n)}{n})] \leq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Außerdem gilt $\|e\|_0 = 0 < 1 = \|e\|$ für $e \equiv 1 \in \mathcal{E}$. Daraus folgt (1).
zu (1.22): Betrachte die Funktion $f \in {}^*[0,\infty[^{{}^*\mathbb{N}}$ mit

$$f(m) := \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } m \in \mathbb{N}, \\ 1, & \text{falls } m \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}. \end{cases}$$

Wir zeigen nun zunächst $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Betrachte dazu für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$e_n(m) := \begin{cases} \frac{1}{m}, & \text{falls } m \in \{1,\ldots,n\}, \\ 1, & \text{falls } m \in {}^*\mathbb{N}\backslash\{1,\ldots,n\}. \end{cases}$$

Dann ist $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|' = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}, m>n} (\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2})$. Da die Funktion $[2,\infty[\ni x \mapsto (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})$ monoton fallend ist, gilt daher für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\|f - e_n\|' \;\leq\; (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n^2}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

demzufolge ist $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Zum Beweis von (1.22) genügt nun der Nachweis von

$$f \notin \{f_1 \in \mathbb{R}^Y : (\exists\, e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})\,(\exists\, g \in {}^*\mathbb{R}^Y \text{ mit } \|g\|' = 0)\; f_1 = e + g\}. \tag{2}$$

zu (2): Indirekt: Angenommen es gäbe ein $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ und ein $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$ mit $\|g\|' = 0$ und mit $f = e + g$. Wegen $\|g\| = 0$ ist

$$g(h) \approx 0 \text{ für } h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}, \qquad \tfrac{g(n)}{n} \approx 0 \text{ für } n \in \mathbb{N},$$

also gilt $g(i) \approx 0$ für jedes $i \in {}^*\mathbb{N}$. Daraus folgt

$$f(i) \approx e(i) \text{ für jedes } i \in {}^*\mathbb{N}.$$

Folglich ist $e(h) \approx 1$ für $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ und $|e(n) - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Permanenzprinzip existiert aber dann ein $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ mit $|e(h) - \frac{1}{h}| \leq \frac{1}{h}$. Daraus folgt $e(h) \approx 0$ im Widerspruch zu $e(h) \approx 1$. □

Wir betrachten nun speziell die Loeb-Integralnorm. Die nächste Proposition ist dann eine Folgerung aus Satz 1.3.5 und liefert eine Charakterisierung der Loeb-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$. Proposition 1.3.7 ist eine Verallgemeinerung des Theorem 1.14 in Loeb [7] auf interne Pseudo-Integrationsstrukturen.

1.3.7 Proposition. *Sei $f \in \mathbb{R}^Y$ und betrachte speziell die Loeb-Integralnorm $\|\cdot\|_L$. Dann ist $f \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ genau dann, wenn gilt:*

$$(\forall\varepsilon \in]0,\infty[)\;(\exists e_1, e_2 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}) \;\textit{ mit } e_1 \leq f \leq e_2 \textit{ und } \|e_2 - e_1\|_0' < \varepsilon.$$

Beweis. „$\Longrightarrow$“ Sei $f = e + g \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ mit $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}$. Nach Definition der Loeb-Integralnorm existiert zu jedem $\varepsilon \in]0, \infty[$ ein $e(\varepsilon) \in \mathcal{E}$ mit $|g| \leq e(\varepsilon)$ und $\|e(\varepsilon)\|_0 < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann sind $e_1 := e - e(\varepsilon), e_2 := e + e(\varepsilon) \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ mit

$$e_1 \leq f \leq e_2, \quad \|e_2 - e_1\|_0 = 2 \cdot \|e(\varepsilon)\|_0 < \varepsilon.$$

„$\Longleftarrow$“ Sei $f \in {}^*\mathbb{R}^Y$ mit

$$(\forall \varepsilon \in]0, \infty[)\ (\exists\, e_1(\varepsilon), e_2(\varepsilon) \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0})\ e_1(\varepsilon) \leq f \leq e_2(\varepsilon), \quad \|e_2(\varepsilon) - e_1(\varepsilon)\|_0' < \varepsilon.$$

Wegen $0 \leq f - e_1(\varepsilon) \leq e_2(\varepsilon) - e_1(\varepsilon)$ ist $\|f - e_1(\varepsilon)\|_L < \varepsilon$. Da $\varepsilon \in]0, \infty[$ beliebig war, folgt $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ und nach Satz 1.3.5 gilt daher auch $f \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$. $\square$

Es sei vermerkt, dass die Rückrichtung „$\Longleftarrow$“ im vorherigen Beweis von der Definition der Loeb-Integralnorm unabhängig ist und somit für jede $\|\cdot\|_0 \,|\, \mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm gilt.

Kapitel 2

Konvergenzsätze

2.1 Monotones Konvergenztheorem

Loeb erhält durch seine Standardisierung einer internen Integrationsstruktur ein System, welches insbesondere das monotone Konvergenztheorem (1.2) erfüllt. Daher stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen Konvergenzsätze für das mittels Integralnormen standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ gültig sind. Eine erste Antwort darauf gibt der nachfolgende Satz.

2.1.1 Satz (Monotones Konvergenztheorem). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur und $\|\cdot\| : {}^*[0, \infty[^Y \to [0, \infty]$ eine zu i passende, σ-stetige Integralnorm, die $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt, so gilt:*

$$(\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y, \ \sup i^L(f_n) < \infty) \implies f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \ i^L(f_n) \uparrow i^L(f).$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $f_n \geq 0$ (ansonsten betrachte $0 \leq f_n - f_1 \uparrow f - f_1$). Wegen Satz 1.1.8 (vii) reicht es $\|f - f_n\| \to 0$ zu zeigen. Mit i ist auch i^L positiv (vgl. Satz 1.1.8 (iii)), also gilt $i^L(f_n) \uparrow \sup i^L(f_n) < \infty$. Folglich gilt

$$\lim_{\substack{n<m \\ n,m\to\infty}} i^L(f_m - f_n) \to 0.$$

Da $\|\cdot\|$ eine σ-stetige Integralnorm ist, gilt insbesondere $\|f_m - f_n\| \uparrow \|f - f_n\|$ für $n < m \to \infty$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = \lim_{\substack{n<m \\ n,m\to\infty}} \|f_m - f_n\| \underset{Korollar\ 1.1.15}{=} \lim_{\substack{n<m \\ n,m\to\infty}} i^L(f_m - f_n) = 0. \qquad \square$$

Für interne Integrationsstrukturen zeigen Landers und Rogge [11], dass das mittels dem oberen Loeb-Integral (= Loeb-Integralnorm) standardisierte System der Loeb-integrierbaren Funktionen (vgl. (1.15)) das monotone Konvergenztheorem erfüllt. In Satz 1.2.14 ist gezeigt worden, dass die Loeb-Integralnorm σ-stetig ist. Folglich ist Satz 2.1.1 eine Verallgemeinerung von Theorem 2 in Landers und Rogge [11].

Satz 2.1.1 zeigt, dass $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ eine reelle vollständige Integrationsstruktur ist (vgl. Hurd, Loeb [7], S. 175), wenn $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine σ-stetige Integralnorm über ${}^*\mathbb{R}^Y$ ist, die ${}^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt.

Aus Satz 2.1.1 (ii) folgt auch (betrachte $-f_n$ bzw. $-f$ anstatt von f_n bzw. f):

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n \downarrow f \in \mathbb{R}^Y,\ \inf_{n\in\mathbb{N}} i^L(f_n) < \infty \Longrightarrow f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|),\ i^L(f_n) \downarrow i^L(f). \tag{2.1}$$

Ist das Integral i jedoch nicht als positiv gegeben, so ist die Forderung der Eigenschaft (1.2) nicht sinnvoll, da i nicht monoton ist. Daher benötigt man in diesem Fall eine modifizierte Definition eines monotonen Konvergenztheorems. Wir betrachten dazu die nachfolgende Definition.

2.1.2 Definition. Ist eine interne (Pseudo-) Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ und eine zu i passende Integralnorm $\|\cdot\|$ gegeben, so sagt man, die Standardisierung erfüllt das *monotone Konvergenztheorem*, wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen gilt:

$$(\forall f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|))\ (f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y, \|f\|' < \infty) \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \\ i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n); \end{cases} \tag{2.2}$$

$$(\forall f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|))\ (f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y, \|f - f_1\| < \infty) \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \\ i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n). \end{cases} \tag{2.3}$$

Beweis der Äquivalenz von (2.2) *und* (2.3). Es seien $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y$.
„(2.2) $\Rightarrow$ (2.3)“ Sei $\|f - f_1\|$ endlich. Es ist $\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n - f_1 \uparrow f - f_1$. Nach (2.2) gilt daher $f - f_1 \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $i^L(f - f_1) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n - f_1)$. Wegen der Linearität von $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ und i^L ist damit (2.3) gültig.
„(2.3) $\Rightarrow$ (2.2)“ Es gilt $\|f - f_1\| \le \|f\|' + \|f_1\|'$. Daher ist mit $\|f\|'$ auch $\|f - f_1\|$ endlich (vgl. Lemma 1.1.16). □

Sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y$, so gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' - \|f_1\|' \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - f_1\| \le \|f - f_1\| \le \|f\|' + \|f_1\|'.$$

Mit Lemma 1.1.16 sind infolgedessen mit $\|f\|'$ bzw. $\|f - f_1\|$ auch $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|'$ und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - f_1\|$ endlich. Dies führt zu dem nächsten Lemma.

2.1.3 Lemma. *Ist* $(\mathcal{E}, i)$ *eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und* $\|\cdot\|$ *eine zu* i *passende Integralnorm, so sind stärker als die Annahmen* (2.2) *bzw.* (2.3) *die beiden folgenden äquivalenten Bedingungen:*

$$(\forall \mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' < \infty) \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \\ i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n); \end{cases} \tag{2.4}$$

$$(\forall \mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y, \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - f_1\| < \infty) \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \\ i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n). \end{cases} \tag{2.5}$$

Beweis. Das (2.2) schwächer als (2.4) sein kann, zeigt Beispiel 2.1.5. Die Äquivalenz von (2.4) und (2.5) folgt mit Lemma 1.1.16 sofort aus

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - f_1\|' + \|f_1\|', \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - f_1\|' \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' + \|f_1\|'. \qquad \square$$

2.1.4 Bemerkung. Im Fall der Positivität des Funktionals i und einer Integralnorm, die $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt, gilt (2.4) genau dann, wenn die zu (2.1) äquivalente Bedingung gilt:

$$(\forall f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|))\,(f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y, \sup_{n\in\mathbb{N}} i^L(f_n) < \infty) \Longrightarrow \begin{cases} f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \\ i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n). \end{cases} \tag{2.6}$$

Betrachtet man speziell die Loeb-Integralnorm[1], so ist Loebs Bedingung (1.2) gleichbedeutend mit (2.6).

Beweis. Nach Korollar 1.1.15 gilt $\|f\| = i^L(f) \in [0,\infty[$ für jedes $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$. Sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y$, so folgt die Äquivalenz der Aussagen mit Lemma 1.1.16 sofort aus

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} i^L(f_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{i^L(f_n - f_1)}_{\underset{Korollar\,1.1.15}{=} \|f_n - f_1\|'} + i^L(f_1) \underset{Satz\,1.1.8\,(vi)}{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' + 2\|f_1\|',$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - f_1\| + \|f_1\|' \underset{Korollar\,1.1.15}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} i^L(f_n) - i^L(f_1) + \|f_1\|'. \qquad \square$$

Das nächste Beispiel zeigt, dass es Integrationsstrukturen und Integralnormen gibt, so dass das standardisierte System der Annahme (2.2), jedoch nicht der Bedingung (2.4) genügt.

2.1.5 Beispiel. Sei $Y := {}^*\mathbb{N}$. Wir betrachten die interne Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ mit

$$\mathcal{E} := \{g \in {}^*\mathbb{R}^Y : g \text{ intern}, (\exists H \subset {}^*\mathbb{N}\ {}^*\text{-endlich})\,(\forall y \in Y \backslash H)\ g(y) = 0\},$$

und $i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R}$ mit $i(e) := e(1)$ für $e \in \mathcal{E}$. Für $g \in {}^*[0,\infty[^Y$ setze

$$\|g\| := \begin{cases} \sup\limits_{y\in Y} st(g(y)), & \text{falls der Träger } \mathrm{Tr}(g) \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm. Das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ erfüllt die Bedingung (2.2), es gilt jedoch nicht (2.4).

[1]Wie bereits in (1.15) gezeigt wurde, führt eine Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 mit der Loeb-Integralnorm zum System der Loeb-integrierbaren Funktionen. Die Loeb-Integralnorm ist im Falle der Positivität des Integrals i aber eine Fortsetzung von $^\circ i|\mathcal{E}_+$ (vgl. Satz 1.2.14 und Satz 1.2.3).

Beweis. Integrationsstruktur: Das System $(\mathcal{E}, i)$ ist eine interne Integrationsstruktur über Y, da es Sternbild der reellen Integrationsstruktur $(\mathbb{N}, \mathcal{H}, j)$ über $\mathbb{N}$ ist mit

$$\mathcal{H} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\exists N \subset \mathbb{N} \text{ endlich})(\forall y \in Y \backslash N)\ f(y) = 0\},$$

$$j : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \text{ mit } j(l) = l(1) \text{ für } l \in \mathcal{H}.$$

Integralnorm: $\|0\| = 0$ klar. Sind $f, f_1, f_2 \in {}^*[0, \infty[^Y$ mit $f \leq f_1 + f_2$, so gilt:

a) Ist $\|f_i\| = \infty$ für ein $i = 1, 2$, so gilt sofort $\|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$.

b) Ansonsten ist $\|f_i\| < \infty$ für $i = 1, 2$. Dann ist der Träger von f_1 und f_2 und damit auch von f endlich. Folglich gilt $\|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ nach der Definition von $\|\cdot\|$.

zu (2.2): Sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y$ und $\|f\|' < \infty$, so gilt $\|f_n\|' < \infty$ nach Lemma 1.1.16 für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also sind die Träger von f und f_n, $n \in \mathbb{N}$, endlich. Wegen $f_n \uparrow f$ gilt dann auch $\|f_n - f\|' \to 0$ $(n \to \infty)$ nach Definition von $\|\cdot\|$. Nach Satz 1.1.8 (vii) folgt daraus $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n)$.

Es gilt jedoch nicht (2.4). Betrachte $f_n := 1_{\{1,\ldots,n\}} \uparrow 1_{\mathbb{N}}$. Dann sind $f_n \in \mathcal{E}$ mit $\|f_n\| = 1$. Folglich sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = 1$. Wegen $\|f\| = \infty$ ist jedoch $f \notin \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ (vgl. Lemma 1.1.16). □

Geht man von einer internen Integrationsstruktur aus, so zeigt sich, dass das System $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ i. Allg. jedoch nicht einmal die Eigenschaft (2.2) erfüllt, selbst wenn $\|\cdot\|$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ ist (vgl. Beispiel 2.1.6). Infolgedessen kommt der Wahl einer geeigneten Integralnorm eine besondere Bedeutung zu, da diese die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems beeinflußt.

2.1.6 Beispiel. Sei $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Wir betrachten die interne Integrationsstruktur

$$Y := {}^*\mathbb{N}, \quad \mathcal{E} := \{k \cdot 1_Y : k \in {}^*\mathbb{R}\}, \quad i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R} \text{ mit } i(k \cdot 1_Y) := k.$$

Definiere nun $\|\cdot\| : {}^*[0, \infty[^Y \to [0, \infty]$ durch

$$\|f\| := \tfrac{1}{2}\Big(\overline{\lim_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n\to\infty}}}\ \mathrm{st}(f(n)) + \mathrm{st}(f(h))\Big)$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm, die ${}^\circ i|\mathcal{E}_+ = \|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt. Bildet man nun $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ gemäß dem Standardisierungsprinzip 1.1.8, so erfüllt dieses System i. Allg. jedoch nicht das monotone Konvergenztheorem (2.2).

Beweis. Per definitionem ist $\|\cdot\|$ eine Fortsetzung von ${}^\circ i|\mathcal{E}_+$ mit $\|0\| = 0$. Aus der Definition von $\|\cdot\|$ erhält man auch sofort die Gültigkeit von $\|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ für $f, f_1, f_2 \in {}^*[0, \infty[^Y$ mit $f \leq f_1 + f_2$. Folglich ist $\|\cdot\|$ eine Integralnorm über ${}^*[0, \infty[^Y$.

Daher ist das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ gemäß Satz 1.1.8 bildbar. Dieses erfüllt jedoch nicht (2.2). Betrachte dazu

$$[0,\infty[^Y \ni f_n := \sum_{i=1}^{n}(1-\tfrac{1}{i^2})1_{\{i\}} \uparrow \sum_{i\in\mathbb{N}}(1-\tfrac{1}{i^2})1_{\{i\}} =: f \in \mathbb{R}^Y.$$

Wegen $\|f_n\|' = 0$ sind dann $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit

$$\sup\{i^L(f_n) : n\in\mathbb{N}\} \underset{Korollar\,1.1.15}{=} \sup\{\|f_n\| : n\in\mathbb{N}\} = 0.$$

Ferner ist $\|f\|' = \frac{1}{2}$. Wegen

$$\|f - k\cdot 1_Y\|' = \tfrac{1}{2}(\overline{\lim_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\to\infty}}}\,|1-\tfrac{1}{n^2} - {}^\circ k| + |{}^\circ k|) \geq \tfrac{1}{2}$$

für jedes $k \in {}^*\mathbb{R}$ ist aber $f \notin \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. □

Beispiel 2.1.6 zeigt, dass das monotone Konvergenztheorem nicht für mit beliebigen Integralnormen gebildeten Standardisierungen gilt. Daher ist eine verstärkte Anforderung an die Integralnorm notwendig. Im Folgenden wird untersucht unter welchen zusätzlichen Annahmen die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems gewährleistet ist. Das nachfolgende Lemma liefert eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems.

2.1.7 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm, die der Bedingung*

$$(\forall h_n \in [0,\infty[^Y, n\in\mathbb{N})\; h_n \downarrow 0,\ \|h_1\|' < \infty \implies \|h_n\| \downarrow 0 \tag{2.7}$$

genügt, so erfüllt $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ das monotone Konvergenztheorem (2.2).

Beweis. Sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y$ und $\|f\|' < \infty$, so gilt

$$0 \leq f - f_n \downarrow 0 \text{ mit } \|f - f_1\|' \leq \|f\|' + \|f_1\|' \underset{Lemma\,1.1.16}{<} \infty.$$

Aus (2.7) folgt daher $\|f - f_n\|' \to 0$. Nach Satz 1.1.8 (vii) ist somit $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $\lim_{n\to\infty} i^L(f_n) = i^L(f)$. □

Die Forderung (2.7) ist jedoch sehr stark. Existiert nämlich eine Funktion $f \in [0,\infty[^Y$ mit $\|f\| < \infty$, so impliziert (2.7) $\|h\| = 0$ für jedes ${}^*[0,\infty[^Y \ni h \leq f$ mit $h \approx 0$. Im Folgenden soll daher der Frage nachgegangen werden, unter welchen schwächeren Annahmen, das monotone Konvergenztheorem gültig ist.

An dieser Stelle stellt sich aufgrund von Satz 2.1.1 die berechtigte Frage, ob allein die Annahme der σ-Stetigkeit der Integralnorm zum Erfülltsein des monotonen Konvergenztheorems genügt. Dies muss allerdings verneint werden, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

2.1.8 Beispiel. Wir betrachten die interne Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ mit $Y := {}^*\mathbb{N}$,

$$\mathcal{E} \quad := \quad \{g \in {}^*\mathbb{R}^Y : g \text{ intern}, (\exists H \subset {}^*\mathbb{N}\, {}^*\text{-endlich})\, (\forall y \in Y \backslash H)\ g(y) = 0\}$$

und $i(e) := e(1)$ für $e \in \mathcal{E}$ (vgl. Beispiel 2.1.5). Setzt man für $g \in {}^*[0, \infty[^Y$

$$\|g\| := \sup_{y \in Y} st(g(y)),$$

so ist $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm, die σ-stetig ist. Das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ erfüllt jedoch nicht das monotone Konvergenztheorem (2.2).

Beweis. Die Integralnormeigenschaften ergeben sich sofort aus der Definition von $\|\cdot\|$. Zum Beweis der $\sigma-$Stetigkeit von $\|\cdot\|$ seien $f_n, f \in [0, \infty[^Y$ mit $f_n \uparrow f$. Wegen der Monotonie der f_n existiert $\lim_{n \to \infty} f_n(y)$ und $\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in Y} f_n(y)$ in $[0, \infty]$. Wir betrachten die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $\|f\| < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon \in [0, \infty[$ ein $y_0 \in Y$ mit

$$\begin{aligned} & f(y_0) \geq \sup_{y \in Y} f(y) - \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad & (\exists n_0(y_0) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0(y_0))\ f_n(y_0) \geq \sup_{y \in Y} f(y) - 2\varepsilon \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{n \to \infty} \sup_{y \in Y} f_n(y) \geq \lim_{n \to \infty} f_n(y_0) \geq \sup_{y \in Y} f(y) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in Y} f_n(y) \geq \sup_{y \in Y} f(y)$. Wegen $\|f_n\| \leq \|f\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt daher $\|f_n\| \uparrow \|f\|$.

b) Ist $\|f\| = \infty$, so existiert zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $y_0 \in Y$ mit $f(y_0) \geq m + 1$. Also gilt

$$\begin{aligned} & (\exists n_0(y_0) \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0(y_0))\ f_n(y_0) \geq m \\ \Longrightarrow \quad & \lim_{n \to \infty} \sup_{y \in Y} f_n(y) \geq \lim_{n \to \infty} f_n(y_0) \geq m. \end{aligned}$$

Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt $\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in Y} f_n(y) = \infty = \sup_{y \in Y} f(y)$.

Aus (a) und (b) ergibt sich nun die σ-Stetigkeit der Integralnorm. Das monotone Konvergenztheorem ist jedoch nicht erfüllt. Wir betrachten dazu $1_{\{1,\ldots,n\}} \uparrow 1_{\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^Y$ mit $\|1_{\{1,\ldots,n\}}\|' = 1 = \|1_{\mathbb{N}}\|$. Wegen $1_{\{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{E}$ ist damit auch $1_{\{1,\ldots,n\}} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Es ist aber $1_{\mathbb{N}} \notin \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Angenommen es wäre $f := 1_{\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, dann gäbe es ein $e \in \mathcal{E}$ mit

$$\|1_{\mathbb{N}} - e\|' = \sup_{y \in Y}(st|f(y) - e(y)|) < \tfrac{1}{4}. \tag{1}$$

Folglich gilt die interne Formel $|1 - e(n)| < \frac{1}{2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Permanenzprinzip existiert damit ein $h \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ mit $|1 - e(h)| < \frac{1}{2}$. Infolgedessen ist $e(h) > \frac{1}{2}$, was im Widerspruch zu (1) und $f(h) = 0$ steht. $\square$

Im vorigem Beispiel war die Integralnorm zwar σ-stetig, sie war jedoch keine Fortsetzung von $^\circ i|\mathcal{E}_+$. Das wäre auch nicht möglich gewesen, da ja im Falle eines positiven Integrals nach Satz 2.1.1 die σ-Stetigkeit einer $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzenden Integralnorm hinreichend für die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems (2.4) ist. Der nächste Satz liefert nun eine ähnliche hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems (2.2) für interne Integrationsstrukturen. Da Bedingung (2.2) schwächer ist als (2.4), genügt dazu die schwächere Forderung nach einer fast σ-stetigen Integralnorm, die $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt.

2.1.9 Satz (Monotones Konvergenztheorem). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur und $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ eine zu i passende, fast σ-stetige Integralnorm, die $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt, so erfüllt das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ das monotone Konvergenztheorem* (2.2).

Beweis. Seien $\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y$ mit $\|f\|' < \infty$. Wegen Satz 1.1.8 genügt der Nachweis von $\|f - f_n\| \to 0$. Da mit i auch i^L positiv ist, gilt $i^L(f_n) \uparrow \sup_{n\in\mathbb{N}} i^L(f_n)$ mit

$$i^L(f_1) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} i^L(f_n) \underset{\textit{Satz}\,1.1.8(vi)}{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' \leq \|f\|' + \|f_1\|' \underset{\textit{Lemma}\,1.1.16}{<} \infty.$$

Folglich gilt $\lim\limits_{\substack{n<m\\ n,m\to\infty}} i^L(f_m - f_n) \to 0$. Ferner erhält man mit Lemma 1.1.16 die Gültigkeit von

$$\|f - f_n\| \leq \|f\|' + \|f_n\|' < \infty.$$

Wegen der fast σ-Stetigkeit der Integralnorm gilt daher $\|f_m - f_n\| \uparrow \|f - f_n\|$ für $n < m \to \infty$. Daraus folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = \lim_{\substack{n<m\\ n,m\to\infty}} \|\underbrace{f_m - f_n}_{\in\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+}\| \underset{\textit{Korollar}\,1.1.15}{=} \lim_{\substack{n<m\\ n,m\to\infty}} i^L(f_m - f_n) = 0. \qquad \square$$

Wie Beispiel 2.1.8 zeigt, kann man im Satz 2.1.9 nicht auf die Annahme verzichten, dass die Integralnorm $^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt. Daher läßt sich das Ergebnis nicht direkt auf interne Pseudo-Integrationsstrukturen übertragen. In der Standardwelt sind für eine Integralnorm die Eigenschaften „stark“ und „halbadditiv“ bedeutend, da sie die Gültigkeit von Konvergenzsätzen gewährleisten (vgl. z.B. Schäfke [25]). Im Kapitel 2.2 wird gezeigt, dass eine zur Standardtheorie analoge Begrifflichkeit der Halbadditivität auch hier von Bedeutung ist. Damit werden wir das Ergebnis des Satzes 2.1.9 bzw. des Satzes 2.1.1 verallgemeinern und ein monotones Konvergenztheorem entwickeln, welches auch dann gültig ist, wenn man auf die Annahme der Positivität von i verzichtet und nur eine interne Pseudo-Integrationsstruktur als gegeben voraussetzt.

2.2 (Schwache) Halbadditivität

2.2.1 Definition. Eine Integralnorm $\|\cdot\|$ über ${}^*[0,\infty[^Y$ heißt *schwach halbadditiv auf* $\mathcal{F} \subset {}^*[0,\infty[^Y$, wenn für alle $\varphi, \varphi_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$(\forall \varphi, \varphi_n \in \mathcal{F},\ n \in \mathbb{N})\ [(\forall m \in \mathbb{N})\ \textstyle\sum_{n=1}^m \varphi_n \leq \varphi, \|\varphi\| < \infty] \Longrightarrow \|\varphi_n\| \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\|\cdot\|$ heißt *halbadditiv auf* $\mathcal{F}$, wenn gilt

$$(\varphi_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N},\ \text{ mit } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\textstyle\sum_{\nu=1}^n \varphi_\nu\| < \infty) \Longrightarrow \|\varphi_n\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Jede additive Integralnorm auf $\mathcal{F}$ ist offensichtlich halbadditiv auf $\mathcal{F}$, jede halbadditive Integralnorm ist offenbar schwach halbadditiv auf $\mathcal{F}$. Wegen Satz 1.2.3 ist jede $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm halbadditiv auf $\mathcal{E}_+$. Infolgedessen ist insbesondere die Loeb-Integralnorm $\|\cdot\|_L$ halbadditiv auf $\mathcal{E}_+$ (vgl. Satz 1.2.14).

Der nächste Satz zeigt, dass sich die Eigenschaft der (schwachen) Halbadditivität von $\mathcal{E}_+$ auf die Menge der nicht-negativen Funktionen des standardisierten Systems $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ überträgt.

2.2.2 Satz ((Halb-) Additivität von $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$). *Es sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$. Ist dann $\|\cdot\|$ (schwach) halbadditiv auf $\mathcal{E}_+$, so ist auch $\|\cdot\|$ (schwach) halbadditiv auf dem System $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$.*

Beweis. Schwache Halbadditivität: Sei $\|\cdot\|$ schwach halbadditiv auf $\mathcal{E}_+$. Es genügt zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ nicht gelten kann:

$$f, f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+ \text{ mit } (\forall m, n \in \mathbb{N}) \textstyle\sum_{i=1}^m f_i \leq f,\ \|f\|' < \infty,\ \|f_n\|' \geq \varepsilon. \qquad (1)$$

Daraus folgt die schwache Halbadditivität. Sind nämlich $f, f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ mit $\|f\| < \infty$ und $\sum_{n=1}^\infty f_n \leq f$ gegeben, so muss $\|f_n\|' \to 0$ $(n \to \infty)$ gelten. Angenommen es wäre $\|f_n\|' \not\to 0$ $(n \to \infty)$, so gäbe es ein $\varepsilon \in]0,\infty[$ und eine Teilfolge $n_1 < n_2 < \ldots$ mit $\|f_{n_\alpha}\| \geq \varepsilon$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$, $\sum_{\alpha=1}^\infty f_{n_\alpha} \leq f, \|f\| < \infty$. Dies steht aber im Widerspruch zu (1).
zu (1): Indirekt: Angenommen es gäbe ein $\varepsilon \in]0,\infty[$, so dass (1) gilt. Nach Definition von $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ existieren Funktionen $0 \leq g, g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\|f - g\|' \leq \tfrac{\varepsilon}{12}, \quad \|f_n - g_n\|' \leq \tfrac{\varepsilon}{12 \cdot 2^{n-1}}. \qquad (2)$$

Setze $\gamma_n := (\sum_{\nu=1}^n g_\nu) \wedge g \in \mathcal{E}_+$, dann ist auch $\delta_n := \gamma_{n+1} - \gamma_n \in \mathcal{E}_+$ mit

$$\sum_{n=1}^m \delta_n = \gamma_m - \gamma_1 \leq g \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Wegen $\|g\|' < \infty$ und da $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{E}_+$ schwach halbadditiv ist, folgt

$$\|\delta_n\|' \to 0 \ (n \to \infty). \qquad (3)$$

Es gilt nun

$$
\begin{aligned}
|\delta_n - g_{n+1}| =&|(\gamma_{n+1} - \gamma_n) - (\sum_{\nu=1}^{n+1} g_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu)| \le |\gamma_n - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu| + |\gamma_{n+1} - \sum_{\nu=1}^{n+1} g_\nu| \\
\Longrightarrow \quad & \|\delta_n - g_{n+1}\|' \le \|\gamma_n - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\|' + \|\gamma_{n+1} - \sum_{\nu=1}^{n+1} g_\nu\|'. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Dabei gilt

$$
\begin{aligned}
\|\gamma_n - \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu\|' \underset{Def.}{=} & \|\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu - (\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu) \wedge g\|' \\
\le & \ \|\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu - (\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu)\|' + \|(\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu) \wedge f - (\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu) \wedge g\|' \\
\underset{(*)}{\le} & \ 2\|\sum_{\nu=1}^{n} g_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu\|' + \|f - g\|' \\
\le & \ 2\sum_{\nu=1}^{n} \|g_\nu - f_\nu\|' + \|f - g\|' \underset{(2)}{\le} \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{12} = \tfrac{5\varepsilon}{12}.
\end{aligned}
$$

(*): Für $f_1, f_2, f_3, f_4 \in {}^*[0, \infty[^Y$ gilt $|(f_1 \wedge f_2) - (f_3 \wedge f_4)| \le |f_1 - f_3| + |f_2 - f_4|$; daraus folgt $\|f_1 \wedge f_2 - f_3 \wedge f_4\|' \le \|f_1 - f_3\|' + \|f_2 - f_4\|'$.

Dementsprechend folgt $\|\delta_n - g_{n+1}\|' \le \frac{5}{6}\varepsilon$ aus (4). Damit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& \|\delta_n - f_{n+1}\|' \le \|\delta_n - g_{n+1}\|' + \|g_{n+1} - f_{n+1}\|' \underset{(2)}{\le} \tfrac{11}{12}\varepsilon \\
\Longrightarrow \quad & \|\delta_n\| \ge \|f_{n+1}\| - \|\delta_n - f_{n+1}\|' \ge \varepsilon - \tfrac{11}{12}\varepsilon > 0.
\end{aligned}
$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (3).

<u>Halbadditivität:</u> Sei $\|\cdot\|$ halbadditiv auf $\mathcal{E}_+$. Sind dann $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu\| < \infty$, so existieren $g_n \in \mathcal{E}_+$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f_n - g_n\|' < \frac{1}{2^n}$. Somit gilt

$$
\begin{aligned}
& \|\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu - \sum_{\mu=1}^{n} g_\mu\|' \le \sum_{\mu=1}^{n} \|f_\mu - g_\mu\|' < 1 \\
\Longrightarrow \quad & \|\sum_{\mu=1}^{n} g_\mu\|' \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{\mu=1}^{n} f_\mu\|' + 1 < \infty.
\end{aligned}
$$

Folglich ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{\mu=1}^{n} g_\mu\|' < \infty$. Da $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{E}_+$ halbadditiv ist, folgt $\|g_n\|' \to 0$ $(n \to \infty)$. Also gilt auch $\|f_n\|' \le \|g_n\|' + \|f_n - g_n\|' \to 0$ $(n \to \infty)$. □

Demzufolge überträgt sich die Eigenschaft der (schwachen) Halbadditivität von $\mathcal{E}_+$ auf das standardisierte System $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ reellwertiger Funktionen. Per definitionem ist die Einschränkung einer Integralnorm $\|\cdot\|$ über ${}^*\mathbb{R}^Y$ auf $\mathbb{R}^Y$ eine Integralnorm im Sinne der Standardtheorie (vgl. Bemerkung 1.1.6). Ist die Integralnorm zu i passend, so ist die eingeschränkte Integralnorm $\|\cdot\||\mathbb{R}^Y$ auch zu i^L passend (vgl. Satz 1.1.8). Wegen der Abgeschlossenheit des standardisierten Systems $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ (vgl. Satz 1.1.8) ergibt jedoch in der Standardwelt die Bildung des mit der eingeschränkten Integralnorm gebildeten $\|\cdot\|$-Abschlusses von $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ nur das standardisierte System selbst. Wegen Satz 2.2.2 kann man infolgedessen zum Beweis von Konvergenzsätzen für das standardisierte System auf die Standardintegrationstheorie zurückgreifen. Daher erhalten wir die Gültigkeit von unterschiedlichen Sätzen für zu i passende, halbadditive, starke Integralnormen. Insbesondere gelten die folgenden Sätze von der monotonen und majorisierenden Konvergenz (vgl. Schäfke [26], Rogge [24]). Die Sätze sind in der Literatur für starke Integralnormen angegeben. Der Beweis für fast starke Integralnormen verläuft aber völlig analog. Er ist im Anhang angegeben.

2.2.3 Satz. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und sei $\|\cdot\|$ eine zu i passende, starke (bzw. fast starke) Integralnorm, die auf $\mathcal{E}_+$ halbadditiv ist.*

(i) Sind dann $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathbb{R}^Y$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\| < \infty$ (bzw. mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} |f_k|\| < \infty$, $\|f\|' < \infty$), so gilt $\|f - \sum_{k=1}^{n} f_k\|' \to 0$. Insbesondere ist daher $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L(f) = \sum_{l=1}^{\infty} i^L(f_l)$.

(ii) Sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $f_n \downarrow 0$, so gilt $\|f_n\| \downarrow 0$.

(iii) $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ist $\|\cdot\|$-vollständig; d.h. es gilt:
Sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' < \infty$ (bzw. mit $\|f\|' < \infty$), so gilt $\|f_n - f\|' \to 0$. Infolgedessen ist $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L(f) = \lim_{n\to\infty} i^L(f_n)$.

(iv) Sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^Y$ mit $f_n \to f$ und existiert ein $\phi \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $|f_n| \leq \phi$, dann gilt $\|f_n - f\|' \to 0$. Somit ist $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L(f_n) \to i^L(f)$.

Sind die f_n in (i) nicht-negativ, so impliziert die Forderung $\|f\|' < \infty$ auch die Endlichkeit von $\sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{n} |f_k|\|$.

2.2.4 Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des Satz 2.2.3 folgt auch (wende Satz 2.2.3(iii) auf $-f_n$ anstatt von f_n an):

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n \downarrow f \in \mathbb{R}^Y, \sup \|f_n\|' < \infty \Longrightarrow f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|),\ i^L(f_n) \downarrow i^L(f).$$

Dann ist das reellwertige Integral i^L auf $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ insbesondere σ-stetig; dies ist in der Standardwelt insofern von Bedeutung, da das Maß, das i^L zugeordnet wird, von beschränkter Variation ist und sich somit als Differenz zweier klassischer Maße darstellen läßt.

Ausgehend von einer internen Integrationsstruktur geben Landers und Rogge [11] ein monotones Konvergenztheorem für die spezielle σ-stetige Integralnorm $\bar{i}|^*[0,\infty[^Y = \|\cdot\|_L|^*[0,\infty[^Y$ (vgl. Lemma 1.2.15) an. Im folgenden Korollar wird dieses Ergebnis auf interne Pseudo-Integrationsstrukturen und die Verwendung von Integralnormen verallgemeinert.

2.2.5 Korollar. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine fast σ-stetige (σ-stetige) Integralnorm über ${}^*\mathbb{R}^Y$, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt, dann erfüllt das standardisierte System das monotone Konvergenztheorem* (2.2) (*bzw.* (2.4)).

Beweis. Die Behauptung folgt mit Satz 1.2.3 sowie Proposition 1.2.12 sofort aus Satz 2.2.3. □

Die Verwendung der Loeb-Integralnorm ist im Korollar 2.2.5 bzw. Satz 2.2.3 möglich, da sie σ-stetig ist und $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt (vgl. Satz 1.2.14). Folglich erfüllt das System der Loeb-integrierbaren Funktionen $(\mathcal{L}(\|\cdot\|_L), i^L)$ das monotone Konvergenztheorem (2.4). Wegen (1.15) und Bemerkung 2.1.4 ist daher Korollar 2.2.5 bzw. Satz 2.2.3 eine Verallgemeinerung des monotonen Konvergenztheorems 1.15, IV, von Hurd, Loeb [7] bzw. von Theorem 2 (ii) in Landers, Rogge [11].

Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine σ-stetige Integralnorm, die ${}^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt (betrachte z.B. die Loeb-Integralnorm), so impliziert die Forderung der σ-Stetigkeit der Integralnorm die σ-Stetigkeit von ${}^\circ i$ auf $\mathcal{E}_+ \cap \mathbb{R}^Y$. Dies ist jedoch keine Einschränkung an das System $(\mathcal{E}, i)$, wie Korollar 1.2.17 zeigt.

Der Notation von Hurd, Loeb [7] folgend, heißt eine reellwertige Integrationsstruktur $(\mathcal{H}, j)$ *vollständig*, wenn gilt:

$$(\forall f_n \in \mathcal{H})\, f_n \uparrow f \in \mathbb{R}^Y,\ \sup\{j(f_n) : n \in \mathbb{N}\} < \infty \Longrightarrow f \in \mathcal{H},\ j(f) = \lim_{n\to\infty} j(f_n).$$

Ist $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm, so ist jede vollständige reelle Integrationsstruktur $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ insbesondere $\|\cdot\|$-vollständig (vgl. Satz 1.1.8(vi)). Hingegen ist eine $\|\cdot\|$-vollständige Integrationsstruktur $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ selbst für eine zu i passende Integralnorm i. Allg. nicht vollständig. Dies zeigt das nächste Beispiel.

2.2.6 Beispiel. Sei $h_1 \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Wir betrachten den internen Ring

$$\mathcal{R} := \{H \subset {}^*\mathbb{R} : H\ {}^*\text{−endlich}\}$$

des *−Werts des Systems der endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und den internen Inhalt

$$\nu : \mathcal{R} \to {}^*[0,\infty[\ \text{ mit }\ \nu(R) = \tfrac{1}{h_1}|R|.$$

Ferner sei $\mathcal{E}$ das System aller internen Summen $\sum_{j=1}^{h} \alpha_j 1_{R_j}$ mit $\alpha_j \in {}^*\mathbb{R}, R_j \in \mathcal{R}, h \in {}^*\mathbb{N}$, und es sei

$$i_\nu : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R} \text{ mit } i_\nu(\sum_{j=1}^{h} \alpha_j 1_{R_j}) := \sum_{j=1}^{h} \alpha_j \nu(R_j).$$

Dann ist $(\mathcal{E}, i_\nu)$ eine interne Integrationsstruktur (vgl. Beispiel 5 in Landers, Rogge [11]). Setze des Weiteren für $g \in {}^*[0,\infty[^Y$

$$\|g\| := \begin{cases} \mathrm{st}(\max_{y\in Y} g(y)) \cdot |\operatorname{Tr}(g)|, & \text{falls der Träger } \operatorname{Tr}(g) \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i_\nu^L)$ zwar $\|\cdot\|$-vollständig, aber nicht vollständig.

Beweis. Zum Nachweis, dass das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i_\nu^L)$ $\|\cdot\|$-vollständig ist, genügt es wegen Satz 2.2.3 zu zeigen (siehe auch Proposition 1.2.12):

$$\|\cdot\| \text{ ist eine zu } i \text{ passende, } \sigma\text{-stetige Integralnorm, die auf } \mathcal{E}_+ \text{ halbadditiv ist.} \quad (1)$$

zu (1): zu i passende Integralnorm: $\|0\| = 0$ klar. Per definitionem ist $\|\cdot\|$ zu i passend. Zum Beweis der Subadditivität von $\|\cdot\|$ seien $g, g_1, g_2 \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $g \le g_1 + g_2$. Wir betrachten die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $\operatorname{Tr}(g_i)$ nicht endlich für ein $i = 1, 2$, so gilt $\|g\| \le \infty = \|g_1\| + \|g_2\|$.

b) Sind $\operatorname{Tr}(g_i)$ endlich für $i = 1, 2$, so folgt:

$$\begin{aligned} \|g\| &\le \|g_1 + g_2\| = \mathrm{st}(\underbrace{\max_{y\in Y}(g_1(y) + g_2(y))}_{\le \max_{y\in Y} g_1(y) + \max_{y\in Y} g_2(y)})) \cdot \underbrace{|\operatorname{Tr}(g_1 + g_2)|}_{\le |\operatorname{Tr}(g_1)| + |\operatorname{Tr}(g_2)|} \\ &\le \mathrm{st}(\max_{y\in Y} g_1(y)) \cdot |\operatorname{Tr}(g_1)| + \mathrm{st}(\max_{y\in Y} g_2(y)) \cdot |\operatorname{Tr}(g_2)| = \|g_1\| + \|g_2\|. \end{aligned}$$

σ-Stetigkeit: Seien $f_n, f \in [0,\infty[^Y$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \uparrow f$. Betrachte die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $\operatorname{Tr}(f)$ nicht endlich und ist $\operatorname{Tr}(f_n)$ endlich für jedes $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein $m_1 \in \mathbb{N}$ mit $|\operatorname{Tr}(f_{m_1})| \ge 1$ und für jedes $n \in \mathbb{N}^{\ge 2}$ ein $m_{n-1} \le m_n \in \mathbb{N}$ mit $|\operatorname{Tr}(f_{m_n})| \ge n$. Damit erhält man für $l \in \mathbb{N}, l \ge m_n$,

$$\|f_l\| \ge \|f_{m_n}\| = (\max_{y\in Y} f_{m_n}(y)) \cdot |\operatorname{Tr}(f_{m_n})| \ge \underbrace{(\max_{y\in Y} f_{m_1}(y))}_{>0} \cdot n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Also gilt $\|f_n\| \uparrow \infty = \|f\|$.

b) Ist $\mathrm{Tr}(f)$ nicht endlich und ist $\mathrm{Tr}(f_n)$ nicht endlich für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt wegen $f_n \uparrow f$ und der Monotonie von $\|\cdot\|$ auch $\|f_n\| \uparrow \|f\|$.

c) Sind $\mathrm{Tr}(f)$ und $\mathrm{Tr}(f_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\,\mathrm{Tr}(f_{n_0})| = |\,\mathrm{Tr}(f)|$. Mit $f_n \uparrow f$ gilt auch $\max\limits_{y\in Y} f_n(y) \uparrow \max\limits_{y\in Y} f(y)$ (siehe Fallunterscheidung a) im Beweis von Beispiel 2.1.8). Also gilt auch in diesem Fall $\|f_n\| \uparrow \|f\|$.

Folglich ist $\|\cdot\|$ σ-stetig. Zum Beweis von (1) verbleibt der Nachweis der Halbadditivität über $\mathcal{E}_+$.
Halbadditivität: Seien $e_n \in \mathcal{E}_+$, $n \in \mathbb{N}$, mit $C := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\sum_{k=1}^{n} e_k\| < \infty$. Dann ist zu zeigen:

$$\|e_n\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{2}$$

Sei o.B.d.A. $C > 0$ (ansonsten ist $\|e_n\| = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt (2) sofort). Wegen $C < \infty$ ist $\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n} e_k)$ endlich für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Integralnorm folgt daraus

$$\mathrm{st}(\max_{y\in Y} \sum_{k=1}^{n} e_k(y)) \in [0, \infty[$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aus $C > 0$ folgt die Existenz eines $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{st}(\max\limits_{y\in Y} \sum_{k=1}^{n_1} e_k) > 0$. Es ist nun $\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n} e_k)$, $n \in \mathbb{N}$, eine aufsteigende Mengenfolge. Daher sind die reellwertigen Folgen $(|\,\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n} e_k)|)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{st}(\max\limits_{y\in Y} \sum_{k=1}^{n} e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Somit gilt

$$|\,\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n} e_k)| \le \frac{C}{\mathrm{st}(\max\limits_{y\in Y} \sum\limits_{k=1}^{n} e_k)} \le \frac{C}{\mathrm{st}(\max\limits_{y\in Y} \sum\limits_{k=1}^{n_1} e_k)} < \infty$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_1$. Damit ist $(|\,\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n} e_k)|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, $\mathbb{N}_0$-wertige, (in $\mathbb{R}$) beschränkte Folge. Folglich existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \ge n_1$, mit

$$|\,\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n_2} e_k)| = \lim_{n\to\infty} |\,\mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n} e_k)| < \infty.$$

Damit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_2$,

$$\mathrm{Tr}(e_n) \subset \mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n} e_k) = \mathrm{Tr}(\sum_{k=1}^{n_2} e_k) \text{ endlich,} \tag{3}$$

$$\mathrm{st}(\max_{y\in Y} \sum_{k=1}^{n} e_k) \le \frac{C}{|\,\mathrm{Tr}(\sum\limits_{k=1}^{n} e_k)|} \underset{(3)}{=} \frac{C}{|\,\mathrm{Tr}(\sum\limits_{k=1}^{n_2} e_k)|} < \infty.$$

Daher ist auch $(\mathrm{st}(\max\limits_{y\in Y} \sum_{k=1}^{n} e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, (in $\mathbb{R}$) beschränkte Folge. Folglich existiert

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{st}(\max_{y\in Y} \sum_{k=1}^{n} e_k) =: M \in\,]0,\infty[. \tag{4}$$

Angenommen (2) würde nicht gelten. Dann würde folgen:

$$(\exists \varepsilon \in]0,\infty[)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m_n \in \mathbb{N}, m_n \geq n) \quad \|e_{m_n}\| \geq \varepsilon.$$

Daraus folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_2$,

$$\mathrm{st}(\max_{y\in Y} e_{m_n}) \geq \frac{\varepsilon}{|\operatorname{Tr}(e_{m_n})|} \underset{(3)}{\geq} \frac{\varepsilon}{|\operatorname{Tr}(\sum_{k=1}^{n_2} e_k)|} := \varepsilon_1 > 0.$$

Sei $s \in \mathbb{N}$ mit $s > \frac{M}{\varepsilon_1}$. Wegen (3) existieren dann ein $y \in Y$ und $l_1, \ldots, l_s \in \mathbb{N}$, $n_2 \leq l_1 < \ldots < l_s$, mit $\mathrm{st}(e_{l_i}(y)) \geq \varepsilon_1$ für $i = 1, \ldots, s$. Daraus folgt aber

$$\mathrm{st}(\max_{y\in Y} \sum_{k=1}^{l_s} e_k) > M,$$

was wegen der Monotonie von $(\mathrm{st}(\max\limits_{y\in Y} \sum_{k=1}^{n} e_k))_{n\in\mathbb{N}}$ im Widerspruch zu (4) steht. Somit ist (2) bewiesen und daher die Halbadditivität der Integralnorm über $\mathcal{E}_+$ nachgewiesen. Damit ist insgesamt (1) bewiesen.

Es verbleibt der Nachweis, dass die Integrationsstruktur $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i_\nu^L)$ nicht vollständig ist. Wir betrachten dazu

$$f_n := 1_{\{1,\ldots,n\}} \uparrow 1_{\mathbb{N}} =: f \in \mathbb{R}^Y.$$

Wegen $f_n \in \mathcal{E} \cap \mathbb{R}^Y$ und $\|f_n\| = n$, also $f_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|}$, sind $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i_\nu^L(f_n) = 0$. Folglich gilt auch $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} i_\nu^L(f_n) = 0$. Wegen $\|f\| = \infty$ ist aber $f \notin \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ (siehe Lemma 1.1.16). $\square$

Finite Funktionen aus $\mathcal{E}$, für die der Standardteil integrierbar ist, für die also ${}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ gilt, und für die der Standardteil des internen Integrals mit dem Integral des Standardteils übereinstimmt, d.h. für die $i^L({}^\circ e) = {}^\circ i(e)$ gilt, spielen in der Nichtstandardtheorie eine wichtige Rolle. Loeb nennt solche Funktionen im Falle einer internen Integrationsstruktur und bei der Betrachtung der Loeb-integrierbaren Funktionen S-integrierbar (siehe [7]). Die nächste Proposition und das nächste Lemma sind eine Verallgemeinerung der Resultate von Loeb [1] auf interne Pseudo-Integrationsstrukturen.

2.2.7 Proposition. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und ist $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm mit $1 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, so gilt ${}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L({}^\circ e) = {}^\circ i(e)$ für jedes $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ mit $e(Y) \subset \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$.*

Beweis. Für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ gilt $|e - {}^\circ e| \leq \varepsilon$. Die Behauptung folgt dann aus

$$\|e - {}^\circ e\|' \underset{Satz 1.2.3}{\leq} \varepsilon \cdot \|1\|_0 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

Es sei vermerkt, dass jedes $e \in \mathcal{E}$ mit $e(Y) \subset \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Dies folgt sofort aus dem Permanenzprinzip, da die interne Formel

$$\psi[h] := (\forall y \in Y)\ |e(y)| \leq h$$

für jedes $h \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$ gültig ist.

Die Annahme $1 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ ist jedoch sehr speziell. Ein weitaus allgemeineres Ergebnis liefert das folgende Lemma.

2.2.8 Lemma. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Pseudo-Integrationsstruktur und sei $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende, fast σ-stetige (σ-stetige) Integralnorm. Ist dann $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ mit $e(Y) \subset \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, so gilt*

$${}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|),\ i^L({}^\circ|e|) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i((|e| - \tfrac{1}{n})^+) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i({}^\circ(|e| - \tfrac{1}{n})^+),\ \|{}^\circ e\|' \leq \|e\|_0'.$$

Ist i zusätzlich positiv, dann gilt $i^L({}^\circ|e|) \leq {}^\circ i(|e|)$.

Beweis. Sei o.B.d.A. $e \geq 0$ (zum Beweis von ${}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ betrachte ansonsten e^+, e^-). Setze $e_n := (e - \frac{1}{n})^+ = e - (\frac{1}{n} \wedge e)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$0 \leq e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} \text{ mit } {}^\circ e_n \uparrow {}^\circ e \text{ und } |e_n - {}^\circ e_n| \leq \alpha e \text{ für } 0 < \alpha \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Wegen $\|e\|_0 < \infty$ folgt daraus

$$\begin{aligned} &(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \|e_n - {}^\circ e_n\|' \leq \|\alpha e\|_0 \underset{Satz\,1.2.3}{=} \alpha\|e\|_0 \to 0 \quad (\alpha \to 0) \\ \Longrightarrow\ &(\forall n \in \mathbb{N}) \quad {}^\circ e_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \text{ mit } i^L({}^\circ e_n) = {}^\circ i(e_n), \quad \|{}^\circ e_n\| = \|e_n\|_0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Wegen $|e - {}^\circ e| \leq |e|$ (bzw. wegen $\|{}^\circ e_n\| = \|e_n\|' \leq \|e\|_0' < \infty$) gilt

$$\|{}^\circ e\|' \leq \|e\|' + \|e - {}^\circ e\|' \leq 2\|e\|' < \infty \quad (\text{bzw. } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|{}^\circ e_n\| < \infty).$$

Aus Satz 2.2.3 bzw. Korollar 2.2.5 folgt $\|{}^\circ e - {}^\circ e_n\|' \to 0$, also ist ${}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit

$$i^L({}^\circ e) = \lim_{n\to\infty} i^L({}^\circ e_n) \underset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n), \quad \|{}^\circ e\| = \lim_{n\to\infty} \|{}^\circ e_n\| \underset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \|e_n\|_0 \leq \|e\|_0. \quad (3)$$

Ist nun i zusätzlich positiv und somit monoton, so folgt $i^L({}^\circ e) \leq {}^\circ i(e)$ aus (3). $\square$

2.2.9 Korollar. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ interne Integrationsstruktur und $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ eine zu i passende, σ-stetige Integralnorm, die ${}^\circ i|\mathcal{E}_+ = \|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt.*

(i) Für $g \in \mathbb{R}^Y$, $f, h \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ gilt dann:

$$f \leq g \leq h,\ i^L(f) = i^L(h) \implies g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|),\ i^L(f) = i^L(g).$$

(ii) Ist $\mathcal{E}$ Stonesch, so gilt:

$$e \in \mathcal{E},\ |e| \le f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \implies {}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|),\ i^L({}^\circ e) = \mathrm{st}(i(e)).$$

Beweis. (i) Es ist $0 \le g - f \le h - f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $\|h-f\| = i^L(h-f) = 0$ (vgl. Korollar 1.1.15). Also ist auch $\|g-f\| = 0$. Daher folgt (vgl. Bemerkung 1.1.14)

$$(g-f) \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \text{ mit } i^L(g-f) = 0.$$

Folglich ist $g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L(g) = i^L(f)$.
(ii) Es ist $\mathrm{st}(i(|e|)) = \|e\|_0' \le \|f\| < \infty$ nach Lemma 1.1.16 und Bemerkung 1.2.4. Folglich ist $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$. Infolgedessen gilt auch ${}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ nach Lemma 2.2.8. O.B.d.A. sei $e \ge 0$. Ist nun $\varepsilon \in]0,\infty[$, so ist $|e - {}^\circ e| \le \varepsilon f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Also gilt

$$\|e - {}^\circ e\|' \le \|\varepsilon f\|' \underset{Korollar\,1.1.15}{=} i^L(\varepsilon f) = \varepsilon\, i^L(f). \tag{1}$$

Wegen $i^L(f) \in [0,\infty[$ folgt $\|e - {}^\circ e\|' = 0$ mit $\varepsilon \to 0$ aus (1). Daher gilt

$$\mathrm{st}(i(e)) = \|e\|_0 \le \|e - {}^\circ e\|' + \|{}^\circ e\| = \|{}^\circ e\| \underset{Korollar\,1.1.15}{=} i^L({}^\circ e) \underset{Lemma\,2.2.8}{\le} \mathrm{st}(i(e)). \qquad \square$$

Das nachfolgende Lemma ist ein Analogon zu Proposition 2.33, IV, in Hurd, Loeb [7] für interne Pseudo-Integrationsstrukturen. Es gibt für eine Funktion aus $\mathcal{E}$ eine hinreichende Bedingung dafür an, dass der Standardteil dieser Funktion Loeb-integrierbar ist.

2.2.10 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Pseudo-Integrationsstruktur und ist $e \in \mathcal{E}$ mit $e(Y) \subset \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, so gilt:*

$$\sup\{\||e| - (\tfrac{1}{n} \wedge |e|)\|_0 : n \in \mathbb{N}\} < \infty \implies {}^\circ e \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L).$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $e \ge 0$ (ansonsten betrachte e^+, e^-; dies ist möglich wegen $0 \le e^+ - (\frac{1}{n} \wedge e^+),\ e^- - (\frac{1}{n} \wedge e^-) \le |e| - (\frac{1}{n} \wedge |e|)$). Setze $e_n := e - (\frac{1}{n} \wedge e)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $0 \le e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$. Nach Lemma 2.2.8 ist damit ${}^\circ e_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. Wegen

$$\{e_n > 0\} = \{e > \tfrac{1}{n}\} = \{e - (\tfrac{1}{2n} \wedge e) > \tfrac{1}{2n}\} \subset \{2ne_{2n} \ge 1\}$$

gilt $|e_n - {}^\circ e_n| \le \alpha(2n \cdot e_{2n})$ für jedes $\alpha \in]0,\infty[$. Daraus folgt nach Voraussetzung

$$\|e_n - {}^\circ e_n\|_L' \le \alpha \cdot 2n \|e_{2n}\|_0 \underset{\alpha \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Somit ist $\|e_n\|_0 = \|{}^\circ e_n\|_L$ und daher gilt $\sup\{\|{}^\circ e_n\|_L : n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Wegen ${}^\circ e_n \uparrow {}^\circ e$ folgt daraus mit Satz 1.2.14 und Korollar 2.2.5 die Behauptung. $\square$

Der nächste Satz gibt eine Bedingung an, unter der der Standardteil ${}^\circ e$ einer Funktion $e \in \mathcal{E}$ im standardisierten System $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ liegt mit $i^L({}^\circ e) = {}^\circ i(e)$. Er ist eine Verallgemeinerung von Satz 1.16, IV, in Hurd, Loeb [7].

2.2.11 Satz. *Sei* $(\mathcal{E}, i)$ *eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und sei* $\|\cdot\|$ *eine* $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ *fortsetzende Integralnorm. Ist dann* $g \in \mathcal{E}$ *mit* $g(Y) \subset \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})$ *und existiert ein* $0 \leq e \in \mathcal{E}^{endl}_{\| \|_0}$ *mit* $\{y \in Y : g(y) \neq 0\} \subset \{y \in Y : e(y) \geq 1\}$, *so gilt:*

$$^\circ g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \text{ mit } i^L(^\circ g) = {}^\circ i(g).$$

Beweis. Für jedes $\varepsilon \in]0, \infty[$ gilt $|g - {}^\circ g| \leq \varepsilon \cdot e$. Daraus folgt wegen der positiven Homogenität von $\|\cdot\|_0$ (vgl. Satz 1.2.3)

$$\|g - {}^\circ g\| \leq \varepsilon \|e\|_0 \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Daher genügt der Nachweis von $g \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$. Da die interne Formel $|g| \leq n \cdot e$ für jedes $n \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$ gilt, existiert nach dem Permanenzprinzip ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|g| \leq m \cdot e$. Folglich gilt $\|g\|_0' \leq m\|e\|_0 < \infty$. □

Kapitel 3

Integralnormen

In der Standardwelt sind σ-stetige, lineare Funktionale und speziell Daniell-Integrale von großer Bedeutung, da sie im engen Zusammenhang mit $\mathbb{R}$-wertigen Maßen von beschränkter Variation bzw. klassischen Maßen stehen. Im folgenden Abschnitt werden wir daher das Sternbild des Systems aller Daniell-Integrationsstrukturen bzw. σ-stetigen Pseudo-Integrationsstrukturen betrachten.

An dieser Stelle sei vermerkt, dass das Supremum bzw. Infimum von internen Mengen $\Phi \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ stets punktweise zu verstehen ist. Dies ist möglich, da mit Φ und Y nach dem Prinzip der internen Definition auch die Menge $\{\varphi(y) : \varphi \in \Phi\}$ für jedes $y \in Y$ intern ist.

3.1 Interne σ-stetige und Daniell-Integrale

Betrachtet man die Menge aller reellen, σ-stetigen Pseudo-Integrationsstrukturen (oder Daniell-Integrationsstrukturen) und transferiert diese in die Nichtstandardwelt, so gelangt man zu der nachfolgenden Definition.

3.1.1 Definition. Eine interne Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ heißt *σ-stetig*, falls gilt:

$$\begin{aligned}&(\forall\, e \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}} \text{ intern}) \quad e(n) =: e_n \downarrow \text{ mit } \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = 0\\ &\Longrightarrow (\forall\, \varepsilon \in {}^*]0, \infty[)\, (\exists\, n_0 \in {}^*\mathbb{N})\, (\forall\, n_0 \leq n \in {}^*\mathbb{N}) \quad |i(e_n)| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Ist i zusätzlich positiv, so heißt $(\mathcal{E}, i)$ *interne Daniell-Integrationsstruktur.*

Mit $M \subset \mathcal{E}_+$ ist auch $i(M)$ intern. Ist i positiv, so ist $i(M)$ nach unten durch Null beschränkt. Daher ist im Falle eines positiven Integrals die σ-Stetigkeit äquivalent zu

$$(\forall e \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}} \text{ intern}) \quad e(n) =: e_n \downarrow \text{ mit } \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = 0 \Longrightarrow \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n) = 0.$$

Damit ist für jede Daniell-Integrationsstruktur (σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur) $(\mathcal{F}, j)$ der Standardwelt das „gesternte“ System $({}^*\mathcal{F}, {}^*j)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur (interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur).

3.1.2 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur, so gilt*

$$(\forall\, e \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}} \text{ intern})(\forall\, g \in \mathcal{E})\ e(n) =: e_n \uparrow \ \text{ mit } g \leq \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n \quad \Longrightarrow \quad i(g) \leq \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n).$$

Beweis. Definiere $h : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}_+$ durch $h(n) := h_n := g - (g \wedge e_n)$. Dann ist $h \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}}$ intern mit $h_n \downarrow$ und $\inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} h_n = 0$. Also folgt aus der σ-Stetigkeit von $i|\mathcal{E}$, dass $\inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(h_n) = \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(g - g \wedge e_n) = 0$ gilt. Daraus folgt

$$i(g) = \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(g \wedge e_n) \leq \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n). \qquad \square$$

Per Transfer ist jedes interne, σ-stetige, ${}^*\mathbb{R}$-lineare Funktional über $\mathcal{E}$ von beschränkter Variation über $\mathcal{E}$. Zudem erhält man durch Transfer den folgenden Zusammenhang der σ-Stetigkeit von i, $|i|$, i_+ und i_- (vgl. Rogge [24]).

3.1.3 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und i von beschränkter Variation über $\mathcal{E}$, so sind äquivalent:*

(i) i ist σ-stetig über $\mathcal{E}$,

(ii) i_+, i_- sind σ-stetig über $\mathcal{E}$,

(iii) $|i|$ ist σ-stetig über $\mathcal{E}$.

Damit ist für eine interne Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ die σ-Stetigkeit von i über $\mathcal{E}$ äquivalent zu der Bedingung[1]

$$(\forall e \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}} \text{ intern}) \quad e_n \downarrow,\ \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} |i|(e_n) = 0. \tag{3.1}$$

Im Folgenden soll nun ausgehend von einer internen, σ-stetigen Pseudo-Integrationsstruktur ein standardisiertes System Daniell-integrierbarer Funktionen entwickelt werden. Dabei werden wir in der Weise vorgehen, dass wir unseren Betrachtungen zuerst eine interne Daniell-Integrationsstruktur zugrunde legen und unter dieser Annahme ein standardisiertes System Daniell-integrierbarer Funktionen konstruieren. Später werden wir auf diesen Ergebnissen aufbauend von der Annahme der Positivität des Integrals i abstrahieren und ausgehend von einer internen, σ-stetigen Pseudo-Integrationsstruktur ein System Daniell-integrierbarer-Funktionen entwickeln.

Daher betrachten wir im Folgenden zunächst eine interne Daniell-Integrationsstruktur. In ähnlicher Weise wie Landers und Rogge [11] ein oberes und unteres Loeb-Integral einführen, werden wir nun unter Berücksichtigung der vorausgesetzten σ-Stetigkeit des Funktionals ein oberes und unteres Daniell-Integral konstruieren. Dadurch wird uns die Konstruktion des Systems der Daniell-integrierbaren Funktionen gelingen. Zur Vorbereitung darauf dienen die nächsten Lemmata.

[1] In Bedingung (3.1) läßt sich $|i|$ nicht durch $\|\cdot\|_0$ ersetzen; dies ist in Standardwelt möglich und wird von Schäfke [26], [28] verwendet.

3.1.4 Lemma. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur. Ist dann $g \in \mathcal{E}$ und $e : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}$ intern, so gilt*

(i) $(e(n) := e_n \uparrow,\ \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = g) \Longrightarrow \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n) = i(g);$

(ii) $(e(n) := e_n \downarrow,\ \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = g) \Longrightarrow \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n) = i(g).$

Beweis. (i) Setzt man $h(n) := h_n := g - e_n$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$, so ist $h : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}_+$ intern mit $h_n \downarrow$ und $\inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} h_n = 0$. Daher folgt aus der Eigenschaft eines Daniell-Integrals

$$0 = \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(h_n) = i(g) - \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n).$$

(ii) folgt analog. □

3.1.5 Lemma. *Es sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur. Sind dann $g, h \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y$ mit $g \leq h$ und $e, d : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}$ intern, so gilt:*

(i) $(e_n \uparrow,\ \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = g),\ (d_n \downarrow,\ \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} d_n = h) \Rightarrow \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n) \leq \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n),$

(ii) $(e_n \uparrow,\ \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = g),\ (d_n \uparrow,\ \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} d_n = h) \Rightarrow \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n) \leq \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n),$

(iii) $(e_n \downarrow,\ \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = g),\ (d_n \downarrow,\ \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} d_n = h) \Rightarrow \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n) \leq \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n),$

(iv) $(e_n \downarrow,\ \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} e_n = g),\ (d_n \uparrow,\ \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} d_n = h) \Rightarrow \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n) \leq \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n).$

Beweis. Es bezeichne

$$e_i := \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n),\ e_s := \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n),\ d_i := \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n),\ d_s := \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n).$$

(i) Es ist $e_k \leq g \leq h \leq d_n$ für jedes $k \in {}^*\mathbb{N}$, $n \in {}^*\mathbb{N}$. Also gilt $i(e_k) \leq \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n)$ für jedes $k \in {}^*\mathbb{N}$. Daraus folgt $e_s \leq d_i$.
(ii) Ist $d_s = \infty$, so gilt (ii) sofort. Sei daher $d_s < \infty$. Ist $k \in {}^*\mathbb{N}$ fest, so setze $l(n) := l_n := (e_k - d_n)^+$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$. Dann ist $l : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}_+$ intern mit $l_n \downarrow$ und

$$\inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} l_n \ = \ \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} (e_k - d_n)^+ = (\inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} (e_k - d_n))^+ = (e_k - h)^+ = 0.$$

Somit folgt aus der Eigenschaft des Daniell-Integrals

$$0 = \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(l_n) = \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i((e_k - d_n)^+) \geq \inf_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_k - d_n) = i(e_k) - \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n).$$

Da $k \in {}^*\mathbb{N}$ beliebig war, folgt daraus $\sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(d_n) \geq \sup_{n \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n)$.
(iii) Folgt aus (ii) durch Betrachtung von $(-e_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}, (-d_n)_{n \in {}^*\mathbb{N}}, -g, -h$ und der Linearität von i.
(iv) Ist $e_i = -\infty$ oder $d_s = \infty$, so folgt die Behauptung sofort. Seien daher im

Folgenden $e_i > -\infty, d_s < \infty$. Also sind $e_i, d_s \in {}^*\mathbb{R}$. Setzt man $l(n) := l_n := (e_n - d_n)^+$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$, so ist $l : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}_+$ intern mit $l_n \downarrow$. Wegen $g < \infty$, $h > -\infty$ gilt weiter

$$\begin{aligned} & \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} l_n = \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} (e_n - d_n)^+ = (\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n - \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n)^+ = 0 \\ \underset{i \text{ Daniell-Integral}}{\Longrightarrow} \quad & 0 = \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(l_n) = \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i((e_n - d_n)^+) \geq \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n - d_n) \\ \Longrightarrow \quad & \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(d_n) \geq \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n). \end{aligned}$$ □

Das nachfolgende Korollar ergibt sich unmittelbar aus dem vorigem Lemma.

3.1.6 Korollar. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur und $g \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y$. Sind dann $e, d \in \mathcal{E}^{{}^*\mathbb{N}}$ intern, so gilt:*

$$\begin{aligned} e_n \uparrow, d_n \uparrow \ \textit{mit} \ \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n = g = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n \quad &\Longrightarrow \quad \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n) = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(d_n); \\ e_n \downarrow, d_n \uparrow \ \textit{mit} \ \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n = g = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n \quad &\Longrightarrow \quad \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n) = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(d_n); \\ e_n \uparrow, d_n \downarrow \ \textit{mit} \ \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n = g = \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n \quad &\Longrightarrow \quad \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n) = \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(d_n); \\ e_n \downarrow, d_n \downarrow \ \textit{mit} \ \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n = g = \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n \quad &\Longrightarrow \quad \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n) = \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(d_n). \end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\uparrow &:= \{e \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y \,|\, (\exists g : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}^{fin} \text{ intern}) \ g_n \uparrow, \ \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n = e\}, \\ \mathcal{E}^\downarrow &:= \{e \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y \,|\, (\exists g : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}^{fin} \text{ intern}) \ g_n \downarrow, \ \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n = e\}, \\ i(e) &:= \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(g_n) \ \text{ für } e \in \mathcal{E}^\downarrow \ \text{ und } \ i(e) := \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(g_n) \ \text{ für } e \in \mathcal{E}^\uparrow, \end{aligned}$$

so ist die Abbildung nach Korollar 3.1.6 wohldefiniert und von der e approximierenden internen Abbildung $g : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}^{fin}$ unabhängig.

Es wird nun ein standardisiertes System Daniell-integrierbarer Funktionen eingeführt. Dabei wird sich zeigen, dass hierzu, wie beim Loeb-Integral, zwei äquivalente Wege möglich sind. Zum einen die Einführung mittels der Übereinstimmung eines oberen und unteren Daniell-Integrals, zum anderen die Einführung mit Hilfe einer Daniellschen Integralnorm.

Oberes/ unteres Daniell-Integral

Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur, so setze für $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$:

$$\begin{aligned} \widetilde{i}(g) \quad &:= \quad \inf\{{}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n)) : e : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}^{fin} \text{ intern}, \ e_n \uparrow, \ \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g\} \\ &= \quad \inf\{{}^\circ i(e) : g \leq e \in \mathcal{E}^\uparrow\} \\ &= \quad \text{„oberes Daniell-Integral“}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{i}\,(g) &:= \sup\{{}^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n)) : e : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}^{\mathit{fin}} \text{ intern}, e_n \downarrow, \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \le g\} \\
&= \sup\{{}^\circ i(e) : \mathcal{E}^{\downarrow} \ni e \le g\} \\
&= \text{„unteres Daniell-Integral“;} \\
\mathcal{L}_D(i) &:= \{f \in \mathbb{R}^Y : \widetilde{i}(f) = \underset{\sim}{i}\,(f) \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{„Menge der Daniell-integrierbaren Funktionen“.}
\end{aligned}$$

Damit ist das obere bzw. untere Daniell-Integral ähnlich aufgebaut wie das obere bzw. untere Loeb-Integral; allerdings erfolgt hier die Approximation nicht nur durch Funktionen aus $\mathcal{E}^{\mathit{fin}}$, sondern aus $\mathcal{E}^{\uparrow}$ bzw. $\mathcal{E}^{\downarrow}$.

3.1.7 Satz. *Für $e \in \mathcal{E}^{\mathit{fin}}$, $g, h \in {}^*\mathbb{R}^Y$, $0 \le \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:*

(i) $\widetilde{i}(e) = {}^\circ i(e) = \underset{\sim}{i}\,(e)$;

(ii) $\underset{\sim}{i}\,(g) \le \widetilde{i}(g)$;

(iii) $\widetilde{i}(\alpha \cdot g) = \alpha \cdot \widetilde{i}(g)$, $\underset{\sim}{i}\,(\alpha \cdot g) = \alpha \cdot \underset{\sim}{i}\,(g)$;

(iv) $g \le h \implies \widetilde{i}(g) \le \widetilde{i}(h)$, $\underset{\sim}{i}\,(g) \le \underset{\sim}{i}\,(h)$.

Beweis. (i) Es ist $e \in \mathcal{E}^{\uparrow} \cap \mathcal{E}^{\downarrow}$. Sind nun $h_1 \in \mathcal{E}^{\downarrow}$ und $h_2 \in \mathcal{E}^{\uparrow}$ mit $h_1 \le e \le h_2$, so gilt ${}^\circ i(h_1) \le {}^\circ i(e) \le {}^\circ i(h_2)$ nach Lemma 3.1.5. Daraus folgt (i).
(ii) Seien o.B.d.A. $\widetilde{i}(g) < \infty$, $\underset{\sim}{i}\,(g) > -\infty$ (ansonsten gilt (ii) sofort). Dann existieren $\mathcal{E}^{\downarrow} \ni h_1 \le g \le h_2 \in \mathcal{E}^{\uparrow}$. Nach Lemma 3.1.5 folgt $i(h_1) \le i(h_2)$. Also gilt auch ${}^\circ i(h_1) \le {}^\circ i(h_2)$. Da $g \le h_2 \in \mathcal{E}^{\uparrow}$ beliebig war, folgt daraus zuerst ${}^\circ i(h_1) \le \widetilde{i}(g)$. Da dies für jedes $\mathcal{E}^{\downarrow} \ni h_1 \le g$ gilt, folgt schließlich (ii).
(iii), (iv) folgen sofort aus der Definition von $\widetilde{i}$ bzw. $\underset{\sim}{i}$. □

Wir werden nun zeigen, dass man die Menge der Daniell-integrierbaren Funktionen auch auf einem anderen Weg erhalten kann, nämlich durch die Bildung der Standardisierung auf Basis einer Integralnorm gemäß Satz 1.1.8. Zu diesem Zweck konstruieren wir im nächsten Satz 3.1.8 eine Daniell-Integralnorm. Diese wird für jede Funktion $g \in {}^*[0, \infty[^Y$ gebildet, indem man das Infimum der Standardteile des Supremum der Integralwerte von g majorisierenden, aufsteigenden, internen Folgen nicht-negativer Funktionen aus $\mathcal{E}$ bildet.

3.1.8 Satz (Daniell-Integralnorm $\|\cdot\|_D$). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur, so setze für $g \in {}^*[0, \infty[^Y$:*

$$\begin{aligned}
\|g\|_D &:= \inf\{{}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n)) : e \in \mathcal{E}_+^{{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, e_n \uparrow, g \le \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n\} \\
&= \inf\{\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(e_n) : e \in \mathcal{E}_+^{{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, e_n \uparrow, g \le \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n\}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Dann ist $\|\cdot\|_D$ eine zu i passende Integralnorm, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+ = {}^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzt und die Bedingung (1.13) erfüllt. Folglich ist $\|\cdot\|_D$ insbesondere σ-stetig.

Beweis. (3.2) folgt sofort aus Hilfssatz 1.2.5.
$\|\cdot\|_D$ ist zu i passend: Ist $g \in \mathcal{E}_+$, so gilt per definitionem (wähle $g_n := g$)

$$\|g\|_D \leq {}^\circ i(g) \underset{Bem.\,1.2.4}{=} \|g\|_0.$$

Andererseits liefert Lemma 3.1.2 ${}^\circ i(g) \leq \|g\|_D$. Damit ist $\|\cdot\|_D$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ und daher insbesondere zu i passend (vgl. Satz 1.2.3).
Integralnorm: Per definitionem ist $\|\cdot\|_D : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ mit $\|0\|_D = 0$. Seien $g, g_1, g_2 \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $g \leq g_1 + g_2$. Ist dann $\|g_i\|_D = \infty$ für $i = 1$ oder $i = 2$, so gilt $\|g\|_D \leq \|g_1\|_D + \|g_2\|_D$ sofort. Im Folgenden seien daher $\|g_1\|_D, \|g_2\|_D < \infty$. Ist nun $\varepsilon \in]0,\infty[$, so existieren $e_j \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}}$ intern mit

$$e_j(n) =: e_{n,j} \uparrow, \ \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_{n,j} \geq g_j, \ \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(e_{n,j}) \leq \|g_j\|_D + \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

für $j = 1, 2$. Setzt man $d(n) := d_n := e_{n,1} + e_{n,2}$, so ist $d \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}}$ intern mit $d_n \uparrow$ und

$$g_1 + g_2 \underset{(1)}{\leq} \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_{n,1} + \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_{n,2} \underset{0\leq e_{n,i}\uparrow}{=} \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} (e_{n,1} + e_{n,2}) = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n.$$

Wegen (1) und Hilfssatz 1.2.5 gilt weiter

$$\begin{aligned} {}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_{n,1} + e_{n,2})) &\underset{e_{n,j}\in\mathcal{E}_+}{\leq} {}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_{n,1})) + {}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_{n,2})) \\ &\underset{Satz\,1.2.5,\,(1)}{\leq} \|g_1\|_D + \|g_2\|_D + \varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\|g\|_D \leq \|g_1\|_D + \|g_2\|_D + \varepsilon$. Da $\varepsilon \in]0,\infty[$ beliebig war, gilt damit

$$\|g\|_D \leq \|g_1\|_D + \|g_2\|_D,$$

also ist $\|\cdot\|_D$ eine Integralnorm. Es verbleibt der Nachweis von (1.13).
zu (1.13): Seien $g_n, g \in (\text{fin}({}^*[0,\infty[))^Y$, $n \in \mathbb{N}$, mit $g_n \uparrow_S g$. Wegen der Monotonie der Integralnorm reicht es zu zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in [0,\infty[) \quad \|g\|_D \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_D + \varepsilon. \tag{2}$$

Sei o.B.d.A. $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_D < \infty$. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Dann existiert $h^n \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}}$ intern mit

$$h^n(m) =: h^n_m \uparrow, \ \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} h^n_m \geq g_n \ \text{ und } {}^\circ(\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i(h^n_m)) \leq \|g_n\|_D + \tfrac{\varepsilon}{2^n} \leq \alpha + \varepsilon. \tag{3}$$

Damit ist auch $h^1 \vee \ldots \vee h^n \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}}$ intern mit $h^1_m \vee \ldots \vee h^n_m \uparrow$ und

$$g_1 \vee \ldots \vee g_n = g_n \underset{(3)}{\leq} \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} (h^1_m \vee \ldots \vee h^n_m). \tag{4}$$

Es wird gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) \leq \|g_n\|_D + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{2^i}. \tag{5}$$

Setzt man dann für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_n := \{e \in \mathcal{E}^{{}^*\mathbb{N}} \text{ intern} : h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n \leq e_m,\, e_m \uparrow,\, \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i(e_m) \leq \alpha + \varepsilon\}, \tag{6}$$

so ist $\emptyset \neq \mathcal{H}_n \downarrow$ intern. Nach Saturation existiert ein $e \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ intern. Dann gilt

$$g \underset{(4),(6)}{\leq} (1+\delta)(\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} e_m)$$

für jedes $\delta \in]0,\infty[$. Nach Definition von $\|\cdot\|_D$ folgt daraus

$$\|g\|_D \leq (1+\delta) \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(e_m) \underset{(6)}{\leq} (1+\delta)(\alpha+\varepsilon)$$

für jedes $\delta \in]0,\infty[$, d.h. es gilt (2). Es verbleibt somit der Nachweis von (5).
zu (5): Der Beweis wird per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ geführt. Für $n = 1$ folgt (5) sofort aus (3). Sei daher (5) bereits für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gültig. Da i positiv ist, sind nach (3) und Induktionvoraussetzung

$$0 \leq i(h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^{n+1}),\, i(h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n),\, i((h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) \wedge h_m^{n+1}),\, i(h_m^{n+1}) \uparrow$$

und nach oben in $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ beschränkt (und nach unten durch 0). Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i(h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^{n+1}) + \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i((h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) \wedge h_m^{n+1}) = \\
&\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i((h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^{n+1}) + (h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) \wedge h_m^{n+1})) = \\
&\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i((h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) + h_m^{n+1}) = \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i(h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) + \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i(h_m^{n+1}).
\end{aligned} \tag{7}$$

Daraus folgt nach Hilfssatz 1.2.5 und nach Definition von $\|\cdot\|_D$ (beachte, dass die Standardteile in der unteren Gleichung bildbar sind, da die entsprechenden Suprema in $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ existieren und nach unten durch 0 beschränkt sind)

$$\begin{aligned}
&\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^{n+1}) \\
\underset{(7)}{=}\ &\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) + \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(h_m^{n+1}) - \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ i((h_m^1 \vee \ldots \vee h_m^n) \wedge h_m^{n+1}) \\
\underset{I.V.,(3)}{\leq} &\|g_n\|_D + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{2^i} + \|g_{n+1}\|_D + \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \|g_n\|_D = \|g_{n+1}\|_D + \sum_{i=1}^{n+1} \tfrac{\varepsilon}{2^i}.
\end{aligned}$$

□

Ausgehend von einer internen Daniell-Integrationsstruktur läßt sich nun mit der zu i passenden Integralnorm $\|\cdot\|_D$ die Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 bilden. Das standardisierte System $\mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$ entspricht dann dem mittels oberen und unteren Daniell-Integral gebildetem System $\mathcal{L}_D(i)$, wie Satz 3.1.10 zeigt. Zum Beweis benötigen wir das nachfolgende Lemma 3.1.9.

3.1.9 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur, so gilt*

$$\|g\|_D = \inf\{{}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n)) : e \in (\mathcal{E}_+^{fin})^{*\mathbb{N}} \textit{ intern, } e_n \uparrow, \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g\} (= \widetilde{i}(g))$$

für jedes $g \in {}^*[0,\infty[^Y$.

Beweis. Wir zeigen der Reihe nach:

$$\|g\|_D = \inf\{{}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n)) : e \in (\mathcal{E}_+^{fin})^{*\mathbb{N}} \text{ intern, } e_n \uparrow, \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g\}, \tag{1}$$

$$\|g\|_D = \widetilde{i}(g). \tag{2}$$

zu (1): „$\leq$“ klar. „$\geq$“ Existiert kein $e \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}}$ intern mit $e_n \uparrow$ und $\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g$, so gilt (1) sofort. Ansonsten existiert ein internes $e \in \mathcal{E}_+^{*\mathbb{N}}$ mit diesen Eigenschaften. Gibt es dann zusätzlich ein $m \in {}^*\mathbb{N}$ mit $e_m \in \mathcal{E}\backslash\mathcal{E}^{fin}$, so gilt $e_n \in \mathcal{E}\backslash\mathcal{E}^{fin}$ für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \geq m$, wegen $e_n \uparrow$ und der Monotonie von i. Daher gilt ${}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n)) = \infty$. Daraus folgt „$\geq$“.

zu (2): „$\geq$“ folgt sofort aus (1). „$\leq$“ Ist $e \in (\mathcal{E}^{fin})^{*\mathbb{N}}$ intern mit $e_n \uparrow$ und $\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g$ und setzt man $d(n) := d_n := e_n^+$, so ist auch $d \in (\mathcal{E}_+^{fin})^{*\mathbb{N}}$ intern mit $d_n \uparrow$ und $\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g$. Nach Korollar 3.1.6 folgt daraus

$$\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n^+) = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i(e_n).$$

Wegen (1) gilt damit „$\leq$“ und somit insgesamt (2). □

3.1.10 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur, so ist $f \in \mathcal{L}_D(i)$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$ ist. In diesem Fall gilt $\widetilde{i}(f) = i^L(f)$.*

Beweis. „$\Longleftarrow$“ Sei $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$. Dann existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0} = \mathcal{E}^{fin}$ (vgl. Bemerkung 1.2.4 und Satz 3.1.8), $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|'_D \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Sei o.B.d.A. $\|f - e_n\|'_D \in [0,\infty[$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 3.1.9 existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $g_n \in (\mathcal{E}_+^{fin})^{*\mathbb{N}}$ intern mit

$$g_n(m) =: g_{m,n} \uparrow, \quad \sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} g_{m,n} \geq |e_n - f|, \quad {}^\circ(\sup_{m\in{}^*\mathbb{N}} i(g_{m,n})) \leq \|f - e_n\|'_D + \tfrac{1}{n}. \tag{1}$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ fest, so sind folglich $(e_n - g_n)$, $(e_n + g_n) \in (\mathcal{E}^{fin})^{*\mathbb{N}}$ intern mit

$$e_n - g_{m,n} \downarrow, \quad \inf_{m \in {}^*\mathbb{N}} (e_n - g_{m,n}) = e_n - \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} g_{m,n} \underset{(1)}{\leq} e_n - |f - e_n| \leq f, \tag{2}$$

$$e_n + g_{m,n} \uparrow, \quad \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} (e_n + g_{m,n}) = e_n + \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} g_{m,n} \underset{(1)}{\geq} e_n + |f - e_n| \geq f. \tag{3}$$

Nach (1) gilt $0 \leq {}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_{m,n})) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und nach Satz 1.1.8 konvergiert ${}^\circ i(e_n)$ gegen $i^L(f) \in \mathbb{R}$. Deshalb folgt:

$$\begin{aligned}
i^L(f) \underset{Satz\,1.1.8}{=} & \lim_{n\to\infty} ({}^\circ i(e_n) - {}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_{m,n}))) \underset{e_n \in \mathcal{E}^{fin}}{=} \lim_{n\to\infty} {}^\circ(\inf_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n - g_{m,n})) \\
\leq\ & \sup_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ(\inf_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(e_n - g_{m,n})) \underset{(2)}{\leq} \underset{\sim}{i}(f) \underset{Lemma\ 3.1.7}{\leq} \widetilde{i}(f) \\
\underset{(3)}{\leq}\ & \inf_{n \in \mathbb{N}} {}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_{m,n} + e_n)) \leq \lim_{n\to\infty} {}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_{m,n} + e_n)) \\
\underset{e_n \in \mathcal{E}^{fin}}{=}\ & \lim_{n\to\infty} ({}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_{m,n})) + {}^\circ i(e_n)) \underset{Satz\,1.1.8}{=} i^L(f) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Somit ist $f \in \mathcal{L}_D(i)$ mit $\widetilde{i}(f) = i^L(f)$.
„$\Longrightarrow$“ Sei $f \in \mathcal{L}_D(i)$. Dann ist $f \in \mathbb{R}^Y$ mit $\underset{\sim}{i}(f) = \widetilde{i}(f) \in \mathbb{R}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren daher g_n, $h_n \in (\mathcal{E}^{fin})^{*\mathbb{N}}$ intern mit

$$\begin{gathered}
g_n(m) =: g_m^{(n)} \uparrow, \quad \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} g_m^{(n)} \geq f, \quad h_n(m) =: h_m^{(n)} \downarrow, \quad \inf_{m \in {}^*\mathbb{N}} h_m^{(n)} \leq f, \\
{}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_m^{(n)})) - {}^\circ(\inf_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(h_m^{(n)})) \leq \tfrac{1}{n}, \quad {}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_m^{(n)})),\ {}^\circ(\inf_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(h_m^{(n)})) \in \mathbb{R}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Ist nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt, so existiert ein Index $m_1 \in {}^*\mathbb{N}$ mit

$$i(g_{m_1}^{(n)}) \approx \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_m^{(n)}). \tag{5}$$

Somit ist $(g_m^{(n)} - g_{m_1}^{(n)})_{m \in {}^*\mathbb{N}}$ intern und $(g_m^{(n)} - g_{m_1}^{(n)}) \in \mathcal{E}^{fin}$ für $m \in {}^*\mathbb{N}$ mit $(g_m^{(n)} - g_{m_1}^{(n)}) \uparrow$ und $\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} (g_m^{(n)} - g_{m_1}^{(n)}) \underset{(4)}{\geq} (f - g_{m_1}^{(n)})^+$. Daraus folgt mit Lemma 3.1.9 und Hilfssatz 1.2.5

$$\|(f - g_{m_1}^{(n)})^+\|_D \leq \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} {}^\circ i(g_m^{(n)} - g_{m_1}^{(n)}) \underset{(5)}{=} 0. \tag{6}$$

Andererseits ist nach (4) auch $(g_m^{(n)} - h_m^{(n)})_{m \in {}^*\mathbb{N}}$ intern mit $(g_m^{(n)} - h_m^{(n)}) \in \mathcal{E}^{fin}$ für $m \in {}^*\mathbb{N}$ und

$$(g_m^{(n)} - h_m^{(n)}) \uparrow, \quad \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} (g_m^{(n)} - h_m^{(n)}) \underset{(4)}{\geq} \sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} (g_{m_1}^{(n)} - h_m^{(n)})^+ \underset{(4)}{\geq} (g_{m_1}^{(n)} - f)^+. \tag{7}$$

Daraus folgt nach Lemma 3.1.9 und wegen der Positivität von i

$$\begin{aligned}
\|(f - g_{m_1}^{(n)})^-\|_D = \|(g_{m_1}^{(n)} - f)^+\|_D &\underset{(7)}{\leq} {}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_m^{(n)} - h_m^{(n)})) \\
&\underset{(4)}{=} {}^\circ(\sup_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(g_m^{(n)})) - {}^\circ(\inf_{m \in {}^*\mathbb{N}} i(h_m^{(n)})) \underset{(4)}{\leq} \tfrac{1}{n}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Insgesamt erhalten wir mit (8) und (6)

$$\|(f - g_{m_1}^{(n)})\|'_D \leq \|(f - g_{m_1}^{(n)})^+\|_D + \|(f - g_{m_1}^{(n)})^-\|_D \leq \tfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen $g_{m_1}^{(n)} \in \mathcal{E}^{fin} \underset{Bem.\,1.2.4}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0}$, folgt daraus $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$. □

$(\mathcal{L}(\|\cdot\|_D), i^L)$ nennen wir im Folgenden auch System der Daniell-integrierbaren Funktionen und i^L bezeichnen wir als Daniell-Integral.

3.1.11 Bemerkung. Betrachtet man in der Nichtstandardwelt analog zur Standardwelt die Klasse der internen Stoneschen Integrationsstrukturen $(\mathcal{E}, i)$ mit

$$(g_n \in \mathcal{E}_+,\ g_n \downarrow \ \text{mit} \ \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ g_n = 0 \ \Longrightarrow \ \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_0 \underset{Bem.\,1.2.4}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n) = 0)$$

und bildet darauf eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm gemäß

$$\|g\|_d := \inf\{\sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n) : g_n \in \mathcal{E}_+^{fin},\ n \in \mathbb{N},\ g_n \uparrow \ \text{mit} \ \sup {}^\circ(g_n - g) \geq 0\},$$

so entspricht das nach Satz 1.1.8 standardisierte System $\mathcal{L}(\|\cdot\|_d)$ dem System der Loeb-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$.

Beweis. Der Beweis, dass $\|\cdot\|_d$ eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm ist, verläuft analog zum Beweis von Satz 3.1.8.
Bilde Ober- und Unterintegrale gemäß

$$\begin{aligned} \widehat{i}(g) &:= \inf\{\sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n) : \mathcal{E}^{fin} \ni g_n \uparrow \ \text{mit} \ \sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n - g) \geq 0\}, \\ \underset{\frown}{i}(g) &:= \sup\{\inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n) : \mathcal{E}^{fin} \ni g_n \downarrow \ \text{mit} \ \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n - g) \leq 0\}. \end{aligned}$$

für $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$ und setze $\mathcal{L}_d(i) := \{f \in \mathbb{R}^Y : \widehat{i}(f) = \underset{\frown}{i}(f) \in \mathbb{R}\}$. Analog wie in Lemma 3.1.9 läßt sich zeigen

$$\|g\|_d = \widehat{i}(g) \quad \text{für} \quad g \in {}^*[0,\infty[^Y. \tag{1}$$

Ferner läßt sich analog zu Satz 3.1.10 nachweisen:

$$\mathcal{L}_d(i) = \mathcal{L}(\|\cdot\|_d). \tag{2}$$

Wir zeigen im Folgenden:

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|_d) = \mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \underset{(1.15)}{=} \mathcal{L}(i). \tag{3}$$

zu (3): „$\supset$“ Wegen $\|\cdot\|_d \leq \|\cdot\|_L$ gilt $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_d)$ (vgl. Vergleichsprinzip 1.1.18).
„$\subset$“ Sei $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_d)$, dann sind auch $f^+, f^- \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_d)$ (vgl. Satz 1.1.8). Da $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$

ein Vektorverband ist (vgl. Satz 1.1.8), genügt der Nachweis von $f^+, f^- \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. Sei im folgenden daher o.B.d.A. $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_d)$. Dann gilt per definitionem

$$\underline{i}(f) \leq \underset{\frown}{i}(f) \underset{(2)}{=} \widehat{i}(f) \leq \bar{i}(f).$$

Es reicht daher zu zeigen

$$\bar{i}(f) \leq \widehat{i}(f), \tag{4}$$
$$\underset{\frown}{i}(f) \leq \underline{i}(f). \tag{5}$$

<u>zu (4):</u> Sei $g_n \in \mathcal{E}^{fin}, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq g_n \uparrow$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n - f) \geq 0$. Setzt man

$$\widetilde{g}_n := (g_n \wedge n),$$

so ist $0 \leq \widetilde{g}_n \in \mathcal{E}^{fin} \underset{Bem.1.2.4}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0}$ mit $\widetilde{g}_n(Y) \subset \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ und mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(\widetilde{g}_n - f) \geq 0$ (letzteres gilt punktweise wegen $f \in \mathbb{R}^Y$). Nach Lemma 2.2.8 ist damit

$$^\circ\widetilde{g}_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L),\ n \in \mathbb{N},\ \text{mit}\ i^L(^\circ\widetilde{g}_n) \underset{Korollar\,1.1.15}{=} \|^\circ\widetilde{g}_n\|_L \leq {}^\circ i(\widetilde{g}_n). \tag{6}$$

Wegen $[0, \infty[^Y \ni f = {}^\circ f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ\widetilde{g}_n$ folgt mit Satz 1.2.14 und Lemma 1.2.15

$$\begin{aligned} \bar{i}(f) \quad &= \quad \bar{i}(\sup_{n\in\mathbb{N}}(^\circ\widetilde{g}_n \wedge f)) \underset{Satz\,1.2.14}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{i}(^\circ\widetilde{g}_n \wedge f) \ \leq\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{i}(^\circ\widetilde{g}_n) \\ &\underset{^\circ\widetilde{g}_n\in\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} i^L(^\circ\widetilde{g}_n) \underset{(6)}{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(\widetilde{g}_n) \ \leq\ \sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n). \end{aligned} \tag{7}$$

Somit gilt (7) für jede aufsteigende Folge $\mathcal{E}^{fin}_+ \ni g_n \uparrow$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n - f) \geq 0$. Wegen $f \geq 0$ und (1) folgt (4) dann aus (7).

<u>zu (5):</u> Sei $\mathcal{E}^{fin} \ni g_n \downarrow$ mit $\inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n - f) \leq 0$. Dann ist auch $\mathcal{E}^{fin}_+ \ni g_n^+ \downarrow$ mit $\inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n^+ - f) \leq 0$. Setze $\alpha := \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n^+)$, dann ist $\alpha \in [0, \infty[$. Setzt man

$$\mathcal{C}_n := \{e \in \mathcal{E} : 0 \leq e \leq g_n^+ \wedge i(e) \geq \alpha - \tfrac{1}{n}\},\ n \in \mathbb{N},$$

so ist $\emptyset \neq \mathcal{C}_n \downarrow$ ein System mit nicht-leeren endlichen Durchschnitten, welches aus abzählbar vielen internen Mengen besteht. Nach Saturation existiert ein

$$g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n,$$

d.h. es ist $g \in \mathcal{E}^{fin}_+$ mit ${}^\circ i(g) \geq \alpha$, $g \leq g_n^+$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen ${}^\circ(g - f) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n^+ - f) \leq 0$ und $f \in [0, \infty[^Y$ ist auch ${}^\circ g \leq f$. Wir betrachten

$$e_n := (g - \tfrac{1}{n})^+ = (g - (g \wedge \tfrac{1}{n})),\ n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $0 \leq e_n \in \mathcal{E}^{fin}$ mit $e_n \leq f$. Also gilt

$$^\circ i(e_n) \leq \underline{i}(f) \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Es ist $\mathcal{E}_+^{fin} \ni (g - e_n) \downarrow$ mit $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g - e_n) = 0$. Aus der Voraussetzung folgt

$$0 = \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g - e_n) \underset{g\in\mathcal{E}^{fin}}{=} {}^\circ i(g) - \sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(e_n) \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \quad \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(g_n^+) = \alpha \underset{\alpha\in\mathbb{R}}{\leq} {}^\circ i(g) \underset{(9)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ i(e_n) \underset{(8)}{\leq} \underline{i}(f). \tag{10}$$

Damit ist (10) für jede Folge $\mathcal{E}^{fin} \ni g_n \downarrow$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} {}^\circ(g_n - f) \leq 0$ gültig. Folglich gilt (5). □

An dieser Stelle tritt die Frage auf, ob es Fälle gibt, in denen das System der Loeb-integrierbaren Funktionen echt in dem System der Daniell-integrierbaren Funktionen enthalten ist. Eine positive Antwort darauf liefert das folgende Beispiel.

3.1.12 Beispiel ($\mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$). Sei $h_0 \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$. Wir betrachten

$$Y := {}^*\mathbb{N}, \quad \mathcal{R} := \{H \subset {}^*\mathcal{P}({}^*\mathbb{N}) : H \text{ }^*\text{-endlich}\},$$
$$\nu : \mathcal{R} \to {}^*[0, \infty[\text{ mit } \nu(R) := \begin{cases} 1, & \text{falls } h_0 \in R, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{R}$ ein interner Ring und ν ein interner Inhalt. Sei $\mathcal{E}$ das System aller internen Summen $\sum_{j=1}^h \alpha_j 1_{R_j}$ mit $\alpha_j \in {}^*\mathbb{R}$, $R_j \in \mathcal{R}$, $h \in {}^*\mathbb{N}$, und setze

$$i_\nu\Big(\sum_{j=1}^h \alpha_j 1_{R_j}\Big) := \sum_{j=1}^h \alpha_j \, \nu(R_j).$$

Dann ist $(\mathcal{E}, i_\nu)$ eine interne Stonesche Daniell-Integrationsstruktur. Es gilt aber:

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}(\|\cdot\|_D).$$

Beweis. Aus der Definition folgt sofort, dass $\mathcal{R}$ ein interner Ring und ν ein interner Inhalt über $\mathcal{R}$ ist. Nach Beispiel 5 in Landers, Rogge [11] ist damit $(\mathcal{E}, i_\nu)$ eine interne Stonesche Integrationsstruktur. Wegen $0 \leq i_\nu(e) \leq e(h_0)$ für jedes $e \in \mathcal{E}_+$, ist $(\mathcal{E}, i)$ σ-stetig. Wir betrachten $f := 1_{^*\mathbb{N}}$. Dann ist $\widetilde{i_\nu}(f) = 1 = \underset{\sim}{i_\nu}(f)$ und somit gilt $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$ (vgl. Satz 3.1.10). Wegen $\overline{i_\nu}(f) = \infty$ ist aber $f \notin \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. □

Im Folgenden soll auch unter der Voraussetzung $(\mathcal{E}, i)$ interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, d.h. bei Verzicht auf die Annahme der Positivität von i, ein standardisiertes System Daniell-integrierbarer Funktionen entwickelt werden. Dazu werden wir im Satz 3.1.13 den bisherigen Begriff der Daniell-Integralnorm erweitern.

Ist $(\mathcal{E}, i)$ als interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur gegeben, so ist $(\mathcal{E}, |i|)$ gemäß Satz 3.1.3 eine interne Daniell-Integrationsstruktur ($|i|$ ist somit insbesondere von beschränkter Variation über $\mathcal{E}$). Infolgedessen ist die Daniell-Integralnorm für das System $(\mathcal{E}, |i|)$ gemäß Satz 3.1.8 bildbar. Definiert man nun auf diese Weise die Daniell-Integralnorm für i, so lassen sich die bisher erzielten Ergebnisse verwenden. Für eine Funktion $g \in {}^*[0,\infty[^Y$ bilden wir daher die Daniell-Integralnorm, indem wir g durch aufsteigende, interne Folgen nicht-negativer Funktionen aus $\mathcal{E}$ so majorisieren, dass das Supremum der entsprechenden $\|\cdot\|_0$-Integralnormwerte möglichst klein wird. Dies liefert der nächste Satz.

3.1.13 Satz (Daniell-Integralnorm $\|\cdot\|_D$). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur und setzt man für $g \in {}^*[0,\infty[^Y$:*

$$\begin{aligned} \|g\|_D := \; & \inf\{(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} \|e_n\|_0 : (e_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern, } e_n \in \mathcal{E}_+, e_n \uparrow, \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g\} \\ = \; & \inf\{\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} {}^\circ|i|(e_n) : (e_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern, } e_n \in \mathcal{E}_+, e_n \uparrow, \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq g\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

so ist $\|\cdot\|_D$ eine zu i passende Integralnorm, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt und Bedingung (1.13) *erfüllt. Folglich ist $\|\cdot\|_D$ insbesondere σ-stetig.*

Beweis. Da $(\mathcal{E}, |i|)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur ist (siehe Satz 3.1.3), ist $\|\cdot\|_D$ nach Satz 3.1.8 eine zu $|i|$ passende Integralnorm, die ${}^\circ|i||\mathcal{E}_+ = \|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt und Bedingung (1.13) erfüllt. □

Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, so liegt eine Funktion $f \in \mathbb{R}^Y$ nach (1.16) und Satz 3.1.10 genau dann in $\mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$, wenn $f \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}}(|i|)$ ist; d.h. es gilt:

$$f \text{ ist Daniell-integrierbar bzgl. } i \iff f \text{ ist Daniell-integrierbar bzgl. } |i|. \tag{3.4}$$

Eine Funktion $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$ wird im Folgenden *Daniell-integrierbar* (bzgl. i) genannt; $i^L(f)$ bezeichne dann als *Daniell-Integral* von f.

Mit i ist nach Satz 3.1.3 aber nicht nur $|i|$, sondern auch i_+, i_- σ-stetig (insbesondere sind dann $i_+, i-$ von beschränkter Variation über $\mathcal{E}$). Daher läßt sich die Daniell-Integralnorm auch für $(\mathcal{E}, i_+)$ und $(\mathcal{E}, i_-)$ bilden. Unter Zuhilfenahme des nächsten Satzes 3.1.14 und von Korollar 3.1.15 läßt sich ein Zusammenhang der so entstehenden standardisierten Systeme angeben. Dies liefert Satz 3.1.16.

3.1.14 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, so gilt:*

$$\|g\|'_D = \|g\|'_{D(i_+)} + \|g\|'_{D(i_-)}, \; g \in {}^*\mathbb{R}^Y; \tag{3.5}$$

hierbei bezeichne $\|\cdot\|_{D(i_+)}$ bzw. $\|\cdot\|_{D(i_-)}$ die mit den entsprechenden internen, positiven, linearen, σ-stetigen Funktionalen i_+ bzw. i_- über $\mathcal{E}$ gemäß Satz 3.1.8 gebildete Daniell-Integralnorm

$$\|g\|'_{D(j)} = \inf\{{}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(e_n)) : e \in (\mathcal{E}_+)^{{}^*\mathbb{N}} \text{ intern, } e_n \uparrow, \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} e_n \geq |g|\}, \; j = i_+, i_-.$$

Beweis. Zum Nachweis von (3.5) sei $(g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern mit $g_n \in \mathcal{E}$, $n \in {}^*\mathbb{N}$, $0 \le g_n \uparrow$ und $\sup\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \ge |g|$. (Existiert eine solche interne Folge $(g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ nicht, so gilt (3.5) sofort.) Dann gilt

$$\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} |i|(g_n) = \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} (i_+(g_n) + i_-(g_n))) \underset{0\le g_n\uparrow}{=} \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n) + \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(g_n). \tag{1}$$

Wegen $i_+(g_n), i_-(g_n) \ge 0$ für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}$, folgt aus (1)

$$^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} |i|(g_n)) = {}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n)) + {}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(g_n)). \tag{2}$$

Damit erhält man die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}\|g\|'_D = \ & \inf\{\underbrace{^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} (i_+ + i_-)(g_n))}_{\underset{(2)}{=}\ ^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n)) + {}^\circ(\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(g_n))} : (g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, g_n \in \mathcal{E}_+, g_n \uparrow, \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \ge |g|\} \\ \ge \ & \|g\|'_{D(i_+)} + \|g\|'_{D(i_-)}.\end{aligned}$$

Somit verbleibt der Nachweis von

$$\|g\|'_D \le \|g\|'_{D(i_+)} + \|g\|'_{D(i_-)}. \tag{3}$$

<u>zu (3):</u> Seien $g_n, h_n \in \mathcal{E}_+$, $n \in {}^*\mathbb{N}$, $(g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern mit $g_n, h_n \uparrow$ und $\sup\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n, \sup\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} h_n \ge |g|$. Setze $b_n := g_n \wedge h_n$. Dann ist auch $b_n \in \mathcal{E}_+$, $n \in {}^*\mathbb{N}$, $(b_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern mit $b_n \uparrow$ und $\sup\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} b_n \ge |g|$. Aufgrund der Positivität von i_+, i_- (vgl. Satz 1.2.7) gilt

$$\sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(b_n) \le \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n), \quad \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(b_n) \le \sup_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(h_n),$$

also auch $\|g\|'_D \le {}^\circ(\sup\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n)) + {}^\circ(\sup\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(h_n))$. Daraus folgt (3). □

3.1.15 Korollar. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, so gilt für $f \in [0, \infty[^Y$:*

$$\widetilde{|i|}(f) = \widetilde{i_+}(f) + \widetilde{i_-}(f), \quad \utilde{|i|}(f) = \utilde{i_+}(f) + \utilde{i_-}(f). \tag{3.6}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst:

Ist $(\mathcal{E}, j)$ eine interne Daniell-Integrationsstruktur, so gilt für $0 \le f \in \mathbb{R}^Y$:

$$\begin{aligned}\utilde{j}\,(f) &= \sup\{^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n)) : (g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, \mathcal{E} \ni g_n \downarrow, \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \le f\} & (1)\\ &= \sup\{^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n)) : (g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, \mathcal{E}_+ \ni g_n \downarrow, \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \le f\}. & (2)\end{aligned}$$

zu (2): „$\geq$" klar.
„$\leq$" Ist $(g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern mit $\mathcal{E} \ni g_n \downarrow$ und $\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \leq f$, so ist auch $(g_n^+)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern mit $\mathcal{E} \ni g_n^+ \downarrow$, $\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n^+ \leq f$ und ${}^\circ(\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n)) \leq {}^\circ(\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n^+))$. Daraus folgt „$\leq$" und somit insgesamt (2).
zu (1): „$\leq$" klar wegen $0 \in \mathcal{E}^{fin}$.
„$\geq$" Sei $g_n \in \mathcal{E}$, $n \in {}^*\mathbb{N}$, $(g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern und $g_n \downarrow$ mit $\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \leq f$. O.B.d.A. seien $g_n \geq 0$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$ (betrachte ansonsten g_n^+, $n \in {}^*\mathbb{N}$). Wir betrachten die folgenden Fallunterscheidung:

a) Angenommen es ist $\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, dann existiert ein $n_0 \in {}^*\mathbb{N}$ mit $j(g_n) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Da j positiv und somit auch monoton ist, ist dann $j(g_n) \in \mathcal{E}^{fin}$ für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Daher ist $\underset{\sim}{j}(f) \geq {}^\circ(\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n))$.

b) Ist $\alpha := (\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n)) \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, so gilt $g_n \in \mathcal{E} \backslash \mathcal{E}^{fin}$ für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}$. Dann existiert ein $m \in {}^*\mathbb{N}$ mit $\frac{j(g_m)}{\alpha} \in \mathrm{fin}({}^*[0,\infty[)$. Setzt man $d_n := \frac{g_m}{\alpha}$ für $n \in {}^*\mathbb{N}, n \leq m$, und $d_n := \frac{g_n}{\alpha}$ für $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n > m$, so gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$d_n \cdot k \in \mathcal{E}^{fin},\ (d_n \cdot k)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern},\ d_n \cdot k \downarrow,\ \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} d_n \cdot k \leq f.$$

Daraus folgt $k = {}^\circ(\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(d_n \cdot k)) \leq \underset{\sim}{j}(f)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, also $\underset{\sim}{j}(f) = \infty = {}^\circ(\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} j(g_n))$.

Aus a) und b) folgt „$\geq$" und somit insgesamt (1).

Wir kommen nun zum Beweis von (3.6). Die erste Aussage von (3.6) folgt mit Lemma 3.1.9 sofort aus Satz 3.1.14. Es verbleibt der Nachweis von

$$\underset{\sim}{|i|}(f) = \underset{\sim}{i_+}(f) + \underset{\sim}{i_-}(f). \tag{3}$$

zu (3): „$\leq$" folgt aus:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{|i|}(f) &\underset{(2)}{=} \sup\{{}^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} |i|(g_n)) : (g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, \mathcal{E}_+ \ni g_n \downarrow, \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \leq f\} \\
&= \sup\{{}^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} (i_+ + i_-)(g_n)) : (g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, \mathcal{E}_+ \ni g_n \downarrow, \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \leq f\} \\
&= \sup\{{}^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n)) + {}^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(g_n)) : (g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}} \text{ intern}, \mathcal{E}_+ \ni g_n \downarrow, \\
&\qquad \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \leq f\} \\
&\underset{(2)}{\leq} \underset{\sim}{i_+}(f) + \underset{\sim}{i_-}(f).
\end{aligned}$$

„$\geq$" Seien $g_n, h_n \in \mathcal{E}_+$, $n \in {}^*\mathbb{N}$, $(g_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$, $(h_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern, $g_n, h_n \downarrow$ mit $\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} g_n \leq f$, $\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} h_n \leq f$. Setzt man $b_n := g_n \vee h_n$, so ist $b_n \in \mathcal{E}_+$, $n \in {}^*\mathbb{N}$, $(b_n)_{n\in{}^*\mathbb{N}}$ intern mit

$b_n \downarrow$ und $\inf\limits_{n\in{}^*\mathbb{N}} b_n \leq f$. Damit gilt

$$\begin{aligned} & \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(b_n) \geq \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n), \quad \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(b_n) \geq \inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(h_n), \\ \Longrightarrow \quad & \underset{\sim}{|i|}(f) \geq {}^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_+(g_n)) + {}^\circ(\inf_{n\in{}^*\mathbb{N}} i_-(h_n)). \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst „$\geq$“ und somit insgesamt (3). □

3.1.16 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, so gilt:*

$$\mathcal{L}_D(|i|) \underset{(3.4)}{=} \mathcal{L}(\|\cdot\|_D) = \mathcal{L}_D(i_+) \cap \mathcal{L}_D(i_-). \tag{3.7}$$

Folglich ist $f \in \mathbb{R}^Y$ genau dann bzgl. i Daniell-integrierbar, wenn f bzgl. i_+ und i_- Daniell-integrierbar ist. Für das Daniell-Integral gilt dann:

$$i^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f), \quad (|i|)^L = (i_+)^L(f) + (i_-)^L(f).$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $f \in [0, \infty[^Y$. (Ist nämlich $f \in \mathbb{R}^Y$, so gilt Satz 3.1.16 dann zunächst für f^+ und f^- und damit insgesamt auch für f.) Da $f \geq 0$ ist, gilt nach Satz 3.1.7 $\widetilde{i_+}(f), \widetilde{i_-}(f), \underset{\sim}{i_+}(f), \underset{\sim}{i_-}(f) \geq 0$. Demzufolge gilt nun:

$$\begin{aligned} & f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D) \underset{(3.4)}{\Longleftrightarrow} f \in \mathcal{L}_D(|i|) \Longleftrightarrow \widetilde{|i|}(f) = \underset{\sim}{|i|}(f) \in \mathbb{R} \\ \underset{(3.6)}{\Longleftrightarrow} \quad & \widetilde{i_+}(f) + \widetilde{i_-}(f) = \underset{\sim}{i_+}(f) + \underset{\sim}{i_-}(f),\ \widetilde{i_+}(f),\ \widetilde{i_-}(f),\ \underset{\sim}{i_+}(f),\ \underset{\sim}{i_-}(f) \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow \quad & \underbrace{\widetilde{i_+}(f) - \underset{\sim}{i_+}(f)}_{\underset{Satz\,3.1.7}{\geq} 0} = \underbrace{\underset{\sim}{i_-}(f) - \widetilde{i_-}(f)}_{\underset{Satz\,3.1.7}{\leq} 0},\ \widetilde{i_+}(f),\ \widetilde{i_-}(f),\ \underset{\sim}{i_+}(f),\ \underset{\sim}{i_-}(f) \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow \quad & \widetilde{i_+}(f) = \underset{\sim}{i_+}(f) \in \mathbb{R}, \quad \underset{\sim}{i_-}(f) = \widetilde{i_-}(f) \in \mathbb{R} \\ \Longleftrightarrow \quad & f \in \mathcal{L}_D(i_+) \cap \mathcal{L}_D(i_-). \end{aligned}$$

Damit ist (3.7) gültig. Für $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D)$ gilt weiter

$$(|i|)^L(f) \underset{Satz\,3.1.10}{=} \widetilde{|i|}(f) \underset{(3.6)}{=} \widetilde{i_+}(f) + \widetilde{i_-}(f) \underset{Satz\,3.1.10}{=} (i_+)^L(f) + (i_-)^L(f).$$

Wir kommen nun zum Nachweis von

$$i^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f).$$

Zu $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_D) = \mathcal{L}_D(|i|)$ existieren $0 \leq e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} \underset{(1.16)}{=} \mathcal{E}^{fin}(|i|) \underset{(1.16)}{=} \mathcal{E}^{fin}(i_+) \cap \mathcal{E}^{fin}(i_-)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|'_D \to 0$. Nach Satz 3.1.14 folgt daraus

$$\begin{aligned} & \|f - e_n\|'_{D(i_+)} \to 0, \quad \|f - e_n\|'_{D(i_-)} \to 0 \\ \Longrightarrow \quad & i^L(f) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_+(e_n) - \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_-(e_n) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f). \end{aligned}$$ □

3.2 Interne τ-stetige und Bourbaki-Integrale

Der Bildung der Daniell-Integralnorm lag gegenüber der Loeb-Integralnorm die wesentliche Idee zugrunde anstatt einzelner Funktionen aufsteigende, interne „Folgen" zu betrachten. Es liegt nahe noch eine weitere Verallgemeinerung durchzuführen und nun gerichtete, interne Mengen statt aufsteigender, interner Folgen zu betrachten. Dazu benötigen wir die folgenden Begriffe:

Ist Y eine interne Menge und $\Phi \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ eine interne Familie hyperreellwertiger Funktionen über Y, so heißt die interne Familie $\emptyset \neq \Phi$ *nach oben* bzw. *unten gerichtet* (kurz $\Phi \uparrow$ bzw. $\Phi \downarrow$), wenn für jedes Paar von Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ eine Funktion $\varphi_3 \in \Phi$ existiert mit $\varphi_1 \vee \varphi_2 \leq \varphi_3$ bzw. $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \geq \varphi_3$. Ist $\Phi \subset {}^*\mathbb{R}^Y$ intern und $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$, so schreiben wir im Folgenden $\Phi \geq g$ ($\Phi \leq g$), falls für jede Funktion $\varphi \in \Phi$ punktweise $\varphi(y) \geq g(y)$ ($\varphi(y) \leq g(y)$), $y \in Y$, gilt.

3.2.1 Definition (Bourbaki-Integral). Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, so heißt $(\mathcal{E}, i)$ τ-stetig, wenn $i|\mathcal{E}$ *τ-stetig* ist, d.h. falls gilt

$$\begin{aligned}&(\forall \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern}) \ \Phi \downarrow, \ \inf_{\phi \in \Phi} \phi = 0 \\ &\Longrightarrow (\forall \varepsilon \in {}^*]0, \infty[) \, (\exists \phi_0 \in \Phi) \, (\forall \phi \in \Phi, \phi \leq \phi_0) \ |i(\phi)| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Ist i zusätzlich positiv, so heißt i auch *internes Bourbaki-Integral* und $(\mathcal{E}, i)$ *interne Bourbaki-Integrationsstruktur*.

Mit $\emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}$ intern ist auch $i(\Phi)$ intern. Ist i ferner positiv, so ist $i(\Phi)$ nach unten durch Null beschränkt. Für eine interne Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ ist somit die τ-Stetigkeit von i äquivalent zu

$$(\forall \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern}) \quad \Phi \downarrow, \ \inf_{\phi \in \Phi} \phi = 0 \quad \Longrightarrow \quad \inf_{\phi \in \Phi} i(\phi) = 0.$$

Damit ist für jede Bourbaki-Integrationsstruktur bzw. τ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{F}, j)$ der Standardwelt das „gesternte" System $({}^*\mathcal{F}, {}^*j)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur bzw. interne, τ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur.

Insbesondere ist jede interne, τ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur bzw. jede interne Bourbaki-Integrationsstruktur eine interne, σ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur bzw. eine interne Daniell-Integrationsstruktur. Die Umkehrung gilt jedoch im Allgemeinen nicht.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Beweise der in diesem Abschnitt 3.2 angegebenen Sätze analog zu den Beweisen des Paragraphen 3.1 verlaufen. Sie sind daher im Anhang A.1 angegeben.

3.2.2 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur und ist $g \in \mathcal{E}_+$, so gilt:*

$$\Phi \subset \mathcal{E}_+ \ \textit{intern}, \Phi \uparrow \ \ \textit{mit } g \leq \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi \quad \Longrightarrow \quad i(g) \leq \sup_{\varphi \in \Phi} i(\varphi).$$

Durch Transfer erhält man den folgenden Zusammenhang der τ-Stetigkeit von i, $|i|$, i_+ und i_- für Funktionale von beschränkter Variation (vgl. Rogge [24]).

3.2.3 Satz. *Ist i ein internes, lineares Funktional von beschränkter Variation über $\mathcal{E}$, so sind äquivalent:*

(i) i *ist* τ*-stetig über* $\mathcal{E}$,

(ii) i_+, i_- *sind* τ*-stetig über* $\mathcal{E}$,

(iii) $|i|$ *ist* τ*-stetig über* $\mathcal{E}$.

Nachfolgend soll nun unter Zugrundelegung einer internen, τ-stetigen Pseudo-Integrationsstruktur ein standardisiertes System Bourbaki-integrierbarer Funktionen entwickelt werden. Dazu werden wir in zwei Schritten vorgehen. Zunächst wird unter der zusätzlichen Annahme der Positivität des Funktionals i ein solches standardisiertes System entwickelt. Später werden wir dann von der Annahme der Positivität von i abstrahieren und ausgehend von einer internen, τ-stetigen Pseudo-Integrationsstruktur unter Verwendung der bis dahin hergeleiteten Ergebnisse ein standardisiertes System Bourbaki-integrierbarer Funktionen konstruieren.

Daher legen wir unseren Betrachtungen im Folgenden zunächst eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur zugrunde. Es wird sich zeigen, dass zur Konstruktion des standardisierten Systems Bourbaki-integrierbarer Funktionen, wie bei der Entwicklung der Systeme der Loeb- und Daniell-integrierbaren Funktionen, zwei äquivalente Wege möglich sind. Zum einen die Einführung mittels der Übereinstimmung eines oberen und unteren Bourbaki-Integrals, zum anderen die Einführung mit Hilfe einer Bourbakischen Integralnorm. Im Unterschied zur Konstruktion des Loeb- bzw. Daniell-Integrals werden hier statt einzelner majorisierender Funktionen bzw. aufsteigender, interner Folgen jedoch nach oben gerichtete, interne Mengen verwendet.

Wir werden nun zunächst ausgehend von einer internen Bourbaki-Integrationsstruktur mit Hilfe eines oberen und unteren Bourbaki-Integrals das System der Bourbaki-integrierbaren Funktionen entwickeln. Dazu benötigen wir die nachfolgenden Lemmata.

3.2.4 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur, $g \in \mathcal{E}$ und $\Phi \subset \mathcal{E}$ intern, so gilt*

(i) $(\Phi \uparrow,\ \sup\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi = g) \Longrightarrow \sup\limits_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) = i(g)$;

(ii) $(\Phi \downarrow,\ \inf\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi = g) \Longrightarrow \inf\limits_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) = i(g)$.

3.2.5 Lemma. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur. Sind dann $g, h \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y$ mit $g \leq h$ und $\emptyset \neq \Phi, \Theta \subset \mathcal{E}$ intern, so gilt:*

(i) $(\Phi\uparrow,\ \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi = g),\ (\Theta\downarrow,\ \inf_{\vartheta\in\Theta}\vartheta = h) \implies \sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) \le \inf_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta);$

(ii) $(\Phi\uparrow,\ \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi = g),\ (\Theta\uparrow,\ \sup_{\vartheta\in\Theta}\vartheta = h) \implies \sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) \le \sup_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta);$

(iii) $(\Phi\downarrow,\ \inf_{\varphi\in\Phi}\varphi = g),\ (\Theta\downarrow,\ \inf_{\vartheta\in\Theta}\vartheta = h) \implies \inf_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) \le \inf_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta);$

(iv) $(\Phi\downarrow,\ \inf_{\varphi\in\Phi}\varphi = g),\ (\Theta\uparrow,\ \sup_{\vartheta\in\Theta}\vartheta = h) \implies \inf_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) \le \sup_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta).$

Das nachfolgende Korollar ergibt sich unmittelbar aus dem vorhergehenden Lemma.

3.2.6 Korollar. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur, $g \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y$ und sind $\emptyset \neq \Phi, \Theta \subset \mathcal{E}$ intern, so gilt*

$$\begin{aligned}
\Phi\uparrow, \Theta\uparrow \ \textit{mit}\ \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi = g = \sup_{\vartheta\in\Theta}\vartheta &\implies \sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) = \sup_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta);\\
\Phi\downarrow, \Theta\uparrow \ \textit{mit}\ \inf_{\varphi\in\Phi}\varphi = g = \sup_{\vartheta\in\Theta}\vartheta &\implies \inf_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) = \sup_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta);\\
\Phi\uparrow, \Theta\downarrow \ \textit{mit}\ \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi = g = \inf_{\vartheta\in\Theta}\vartheta &\implies \sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) = \inf_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta);\\
\Phi\downarrow, \Theta\downarrow \ \textit{mit}\ \inf_{\varphi\in\Phi}\varphi = g = \inf_{\vartheta\in\Theta}\vartheta &\implies \inf_{\varphi\in\Phi} i(\varphi) = \inf_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta).
\end{aligned}$$

Setzt man

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{\Uparrow} &:= \{g \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y \,|\, (\exists\, \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}^{fin} \text{ intern})\ \Phi\uparrow, \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi = g\};\\
\mathcal{E}^{\Downarrow} &:= \{g \in {}^*\overline{\mathbb{R}}^Y \,|\, (\exists\, \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}^{fin} \text{ intern})\ \Phi\downarrow, \inf_{\varphi\in\Phi}\varphi = g\},
\end{aligned}$$

so ist die Approximation von $i(g) := \sup i(\Phi)$ für $g \in \mathcal{E}^{\Uparrow}$ und $i(g) := \inf i(\Phi)$ für $g \in \mathcal{E}^{\Downarrow}$ von dem g approximierenden Φ unabhängig, wie Korollar 3.2.6 zeigt.

Wir kommen nun zur Definition des oberen und unteren Bourbaki-Integrals, mit deren Hilfe ein standardisiertes System Bourbaki-integrierbarer Funktionen eingeführt wird.

Oberes/ unteres Bourbaki-Integral

Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur, so setze für $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$:

$$\begin{aligned}
\widehat{i}(g) &:= \inf\{{}^\circ i(h) : g \le h \in \mathcal{E}^{\Uparrow}\}\\
&= \inf\{{}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}^{fin} \text{ intern mit } \Phi\uparrow, g \le \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi\}\\
&= \text{„oberes Bourbaki-Integral“};\\
\underset{\smile}{i}\,(g) &:= \sup\{{}^\circ i(h) : g \ge h \in \mathcal{E}^{\Downarrow}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup\{{}^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}^{fin} \text{ intern mit } \Phi\downarrow, \inf_{\varphi\in\Phi}\varphi \leq g\} \\
&= \text{„unteres Bourbaki-Integral“;} \\
\mathcal{L}_B(i) &:= \{f \in \mathbb{R}^Y : \widehat{i}(f) = \underset{\frown}{i}(f) \in \mathbb{R}\} \\
&= \text{„System der Bourbaki-integrierbaren Funktionen“.}
\end{aligned}$$

3.2.7 Lemma. *Für $e \in \mathcal{E}^{fin}$, $g, h \in {}^*\mathbb{R}^Y$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ gilt:*

(i) $\widehat{i}(e) = {}^\circ i(e) = \underset{\frown}{i}(e)$;

(ii) $\underset{\frown}{i}(g) \leq \widehat{i}(g)$;

(iii) $\widehat{i}(\alpha\cdot g) = \alpha\cdot\widehat{i}(g)$, $\underset{\frown}{i}(\alpha\cdot g) = \alpha\cdot\underset{\frown}{i}(g)$;

(iv) $g \leq h \implies \widehat{i}(g) \leq \widehat{i}(h)$, $\underset{\frown}{i}(g) \leq \underset{\frown}{i}(h)$.

Alternativ läßt sich das standardisierte System der Bourbaki-integrierbaren Funktionen auch durch die Verwendung einer geeigneten Integralnorm erzeugen (vgl. Satz 3.2.9). Daher werden wir in Satz 3.2.8 eine Bourbaki-Integralnorm konstruieren. Der Vorteil der Verwendung der Bourbaki-Integralnorm ist jedoch der, dass sich der Ansatz auf interne, τ-stetige Pseudo-Integrationsstrukturen verallgemeinern läßt (vgl. Satz 3.2.10).

3.2.8 Satz (Bourbaki-Integralnorm). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur und setzt man für $g \in {}^*[0,\infty[^Y$*

$$\begin{aligned}
\|g\|_B &:= \inf\{{}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+^{fin} \textit{ intern mit } \Phi\uparrow,\ g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi\} \\
&= \inf\{{}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \textit{ intern mit } \Phi\uparrow,\ g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi\} \\
&= \widehat{i}(g),
\end{aligned}$$

so ist $\|\cdot\|_B$ eine ${}^\circ i|\mathcal{E}_+ \underset{Bem.\,1.2.4}{=} \|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm, die Bedingung (1.13) *erfüllt und somit insbesondere σ-stetig ist.*

Wegen Satz 3.2.8 und Hilfssatz 1.2.5 gilt für $g \in {}^*[0,\infty[^Y$:

$$\begin{aligned}
\|g\|_B &= \inf\{\sup_{\varphi\in\Phi} {}^\circ i(\varphi) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+^{fin} \text{ intern mit } \Phi\uparrow,\ g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi\} \\
&= \inf\{\sup_{\varphi\in\Phi} {}^\circ i(\varphi) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern mit } \Phi\uparrow,\ g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi\}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Ist eine Bourbaki-Integrationsstruktur gegeben, so gilt $\|\cdot\|_L \geq \|\cdot\|_D \geq \|\cdot\|_B$ und somit auch $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_D) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_B)$ (vgl. Satz 1.1.18).

Der nächste Satz zeigt, dass das mittels den oberen und unteren Bourbaki-Integralen gebildete standardisierte System $\mathcal{L}_B(i)$ dem mit der Bourbaki-Integralnorm gemäß Satz 1.1.8 gebildetem standardisiertem System $\mathcal{L}(\|\cdot\|_B)$ entspricht.

3.2.9 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur, so gilt:*

$$f \in \mathcal{L}_B(i) \iff f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_B).$$

In diesem Fall gilt $\widehat{i}(f) = i^L(f)$.

$(\mathcal{L}(\|\cdot\|_B), i^L)$ nennen wir auch System der Bourbaki-integrierbaren Funktionen und i^L bezeichnen wir als Bourbaki-Integral.

Im Folgenden soll nun ausgehend von einer internen, τ-stetigen Pseudo-Integrationsstruktur ein standardisiertes System Bourbaki-integrierbarer Funktionen eingeführt werden. Zu diesem Zweck werden wir in Satz 3.2.10 den bisherigen Begriff der Bourbaki-Integralnorm erweitern.

Geben wir uns $(\mathcal{E}, i)$ als eine interne, τ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur vor, so ist $(\mathcal{E}, |i|)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur (vgl. Satz 3.2.3). Folglich ist die Bourbaki-Integralnorm gemäß Satz 3.2.8 für $|i|$ bildbar. Auf diese Weise werden wir nun die Bourbaki-Integralnorm für $(\mathcal{E}, i)$ definieren. Insbesondere lassen sich somit die bisher bewiesenen Resultate verwenden.

3.2.10 Satz (Bourbaki-Integralnorm $\|\cdot\|_B$). *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine τ-stetige, interne Pseudo-Integrationsstruktur, so setze für $g \in {}^*[0, \infty[^Y$:*

$$\begin{aligned} \|g\|_B &:= \inf\{\sup_{\varphi\in\Phi} \|\varphi\|_0 : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern mit } \Phi \uparrow, g \leq \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi\} \\ &= \inf\{\sup_{\varphi\in\Phi} {}^\circ|i|(\varphi) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern mit } \Phi \uparrow, g \leq \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\|\cdot\|_B$ eine zu i passende Integralnorm, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt und Bedingung (1.13) *erfüllt.*

Nach Satz 3.2.10 und wegen (1.16) liegt eine Funktion $f \in \mathbb{R}^Y$ genau dann in $\mathcal{L}(\|\cdot\|_B)$, wenn $f \in \mathcal{L}_B(|i|)$ ist; d.h. es gilt:

$$f \text{ ist Bourbaki-integrierbar bzgl. } i \iff f \text{ ist Bourbaki-integrierbar bzgl. } |i|. \quad (3.9)$$

Wir bezeichnen daher im Folgenden eine Funktion $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_B)$ als *Bourbaki-integrierbar* mit dem *Bourbaki-Integral* $i^L(f)$.

Wegen Satz 3.2.3 läßt sich die Bourbaki-Integralnorm jedoch nicht nur für $(\mathcal{E}, |i|)$, sondern auch für $(\mathcal{E}, i_+)$ und $(\mathcal{E}, i_-)$ bilden. Daher stellt sich auch hier die berechtigte Frage, in welcher Beziehung die mit den entsprechenden Integralnormen gebildeten Standardisierungen zueinander stehen. Eine Antwort darauf liefert Satz 3.2.11.

3.2.11 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, τ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, so ist f genau dann Bourbaki-integrierbar bzgl. $|i|$, wenn f Bourbaki-integrierbar bzgl. i_+ und i_- ist; d.h. es gilt:*

$$\mathcal{L}_B(|i|) = \mathcal{L}(\|\cdot\|_B) = \mathcal{L}_B(i_+) \cap \mathcal{L}_B(i_-). \quad (3.10)$$

Für das Bourbaki-Integral gilt dann:

$$i^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f), \quad (|i|)^L(f) = (i_+)^L(f) + (i_-)^L(f).$$

3.3 Lokale Integralnormen

Im Folgenden werden andere Integralnormen einfach durch die Verwendung der bisher angegebenen Integralnormen konstruiert, indem zu einer gegebenen Integralnorm $\|\cdot\|$ die sogenannte lokale Integralnorm $\|\cdot\|_l \leq \|\cdot\|$ gebildet wird. Dazu betrachten wir für eine Funktion $g \in {}^*[0,\infty[^Y$ die Integralnormwerte der „Beschneidungen“ $g \wedge h$ der Funktion g durch nicht-negative Funktionen h aus einer noch näher zu bestimmenden Menge $0 \in \mathcal{C} \subset {}^*[0,\infty[^Y$. Intuition der Entwicklung lokaler Integralnormen ist, durch die Verwendung von lokalen Integralnormen beim Standardisierungsprinzip eine „geeignete“ Erweiterung des standardisierten Systems $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ zu erzielen.

3.3.1 Satz (Lokale Integralnormen). *Sei $0 \in \mathcal{C} \subset {}^*[0,\infty[^Y$ ein System von Funktionen und $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ eine Integralnorm. Definiert man die „zugehörige lokale Integralnorm“ $\|\cdot\|_l$ durch*

$$\|g\|_l := \sup\{\|g \wedge h\| : h \in \mathcal{C}\},\ \ g \in {}^*[0,\infty[^Y,$$

so gilt:

(i) $\|\cdot\|_l : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ *ist eine Integralnorm mit* $\|\cdot\|_l \leq \|\cdot\|$;

(ii) $\|\cdot\|_l$ *ist die kleinste Integralnorm auf* ${}^*[0,\infty[^Y$ *mit* $\|g\|_l = \|g\|$ *für jedes* $g \in {}^*[0,\infty[^Y$*, für das ein* $g \leq h \in \mathcal{C}$ *existiert.*

(iii) $(\|\cdot\|_l)_l = \|\cdot\|_l$.

Beweis. (i) Nach Definition ist $\|\cdot\|_l : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ mit $\|0\|_l = \|0\| = 0$. Sind $g, g_1, g_2 \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $g \leq g_1 + g_2$, so gilt

$$\begin{aligned}\|g\|_l &\leq \sup\{\|h \wedge (g_1 + g_2)\| : h \in \mathcal{C}\} \leq \sup\{\|h \wedge g_1\| + \|h \wedge g_2)\| : h \in \mathcal{C}\}\\ &\leq \|g_1\|_l + \|g_2\|_l.\end{aligned}$$

Damit ist $\|\cdot\|_l$ eine Integralnorm. Aus der Definition der zugehörigen lokalen Integralnorm folgt sofort $\|\cdot\|_l \leq \|\cdot\|$.
(ii) Ist $0 \leq g \leq h \in \mathcal{C}$, so gilt

$$\|g\|_l = \sup\{\|h \wedge g\| : 0 \leq h \in \mathcal{C}\} = \|g\|,$$

da $\|\cdot\|$ als Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$ monoton ist. Sei nun $\|\cdot\|_{l_1}$ eine weitere Integralnorm mit dieser Eigenschaft. Dann ist $\|h \wedge g\|_{l_1} = \|h \wedge g\|$ für jedes $g \in {}^*[0,\infty[^Y$, $h \in \mathcal{C}$ nach Voraussetzung. Daher gilt

$$\|g\|_{l_1} \geq \sup\{\|h \wedge g\|_{l_1} : 0 \leq h \in \mathcal{C}\} = \sup\{\|h \wedge g\| : 0 \leq h \in \mathcal{C}\} = \|g\|_l.$$

(iii) Sei $g \in {}^*[0,\infty[^Y$. Dann gilt $\|h \wedge g\|_l = \|h \wedge g\|$ nach (ii) für alle $h \in \mathcal{C}$, $g \in {}^*[0,\infty[^Y$. Daraus folgt

$$(\|g\|_l)_l = \sup\{\|h \wedge g\|_l : 0 \leq h \in \mathcal{C}\} = \sup\{\|h \wedge g\| : 0 \leq h \in \mathcal{C}\} = \|g\|_l. \qquad \square$$

Wegen Satz 3.3.1 (ii) stimmt die zugehörige lokale Integralnorm mit der Integralnorm einer Funktion $g \in {}^*[0,\infty[^Y$ überein, wenn eine g überdeckende Funktion aus dem relevanten System existiert.

Ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ tritt an dieser Stelle die Frage auf, mit welcher Menge $\mathcal{C}$ die zugehörige lokale Integralnorm gebildet werden soll. Sicherlich ist es möglich die zugehörige lokale Integralnorm gemäß Satz 3.3.1 mit $\mathcal{C} := \mathcal{E}_+$ zu bilden; d.h. man betrachtet für jedes beliebige $g \in {}^*[0,\infty[^Y$ die Beschneidungen $e \wedge g$ von g durch nicht-negative Funktionen e aus $\mathcal{E}$. Um eine möglichst kleine Integralnorm zu erzielen, wird man jedoch bemüht sein, die zugehörige lokale Integralnorm mit einem möglichst kleinem System $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}_+$ zu bilden. Da die Bildung der Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 auf Basis der Menge $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ beruht, stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob die Bildung der zugehörigen lokalen Integralnorm mit $(\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})_+$ sinnvoll ist. Dies muss jedoch verneint werden. Sicherlich wird man erwarten, dass mit der zugrunde liegenden Integralnorm auch deren zugehörige lokale Integralnorm zu i passend ist. Dann muss die zugehörige lokale Integralnorm über $\mathcal{E}_+$ aber mindestens so gross sein wie $\|\cdot\|_0$ (vgl. Satz 1.2.3). Bildet man die zugehörige lokale Integralnorm jedoch mit $\mathcal{C} = (\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})_+$, so ist diese Eigenschaft im Allgemeinen gerade nicht erfüllt. Wir betrachten dazu das folgende Beispiel:

3.3.2 Beispiel. Betrachte in der Standardwelt die Menge $X := [0,\infty[$ und das System

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \;:=\; & \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{[a_i,b_i[} : n \in \mathbb{N}, a_i, b_i \in [0,\infty[, 0 \le a_1 < b_1 \le a_2 < \ldots \le a_n < b_n, \\ & \alpha_i \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^X$ ein reeller Vektorverband. Sei $B : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a,b] \subset [0,\infty[$ von unbeschränkter Variation ist, mit $B(0) = 0$. Eine solche existiert. Man betrachte beispielsweise den Pfad einer Brownschen Bewegung[2]. Sei ferner $B(1) \neq 0$. Setzt man nun für $\sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{[a_i,b_i[} \in \mathcal{F}$

$$j(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{[a_i,b_i[}) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (B(b_i) - B(a_i)),$$

so ist $j : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional und somit $(\mathcal{F}, j)$ eine reelle Pseudo-Integrationsstruktur. Für $f \in \mathcal{F}\backslash\{0\}$ gilt dann

$$_S\|f\|_0' := \sup\{|j(g)| : g \in \mathcal{F}, |g| \le |f|\} = \infty$$

und daher auch

$$_S\|f\|_{l0}' := \sup\{_S\||f| \wedge k\|_0 : 0 \le k \in \mathcal{F}, {}_S\|k\|_0 < \infty\} = 0$$

[2]Ist $(\Omega, \mathcal{A}, P, (B_t)_{t\ge 0})$ eine Brownsche Bewegung, so gilt für P-f.a. $\omega \in \Omega$: Die Funktion $t \mapsto B_t(\omega)$, $t \in [0,\infty[$, ist auf jedem Intervall $[a,b]$ mit $a, b \in [0,\infty[$, $a < b$, von unbeschränkter Variation.

für $f \in \mathcal{F}$. Insbesondere existiert ein $0 \leq f \in \mathcal{F}$ mit $|j(f)| > {}_S\|f\|_{l_0}$. Daher ist ${}_S\|f\|_{l_0}$ nicht zu j passend. Wir transferieren das System $(\mathcal{F}, j)$ nun in die Nichtstandardwelt. Es ist ${}^*B : {}^*[0,\infty[\to {}^*\mathbb{R}$ intern mit ${}^*B(1) \neq 0$, ${}^*B(0) = 0$. Setzt man

$$Y := {}^*[0,\infty[,\ \mathcal{E} := {}^*\mathcal{F},\ i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R} \ \text{ mit } \ i := {}^*j,$$

so ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, ${}^*\mathbb{R}$-lineare Pseudo-Integrationsstruktur mit $1_{{}^*[0,1[} \in \mathcal{E}$ und

$$i(1_{{}^*[0,1[}) = {}^*(j(1_{[0,1[})) = B(1) - B(0) \neq 0.$$

Es wird nun gezeigt:

$$(\forall e \in \mathcal{E}\backslash\{0\}) \quad \|e\|_0' = \infty. \tag{3.11}$$

Aus (3.11) folgt dann $\|1_{{}^*[0,1[}\|_{l_0}' := \sup\{\|1_{{}^*[0,1[} \wedge k\|_0 : 0 \leq k \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}\} = 0$. Daher ist $\|\cdot\|_{l_0}$ nicht zu i passend.

Beweis. Es ist nur (3.11) nachzuweisen. Transfer der Eigenschaft der unbeschränkten Variation auf jedem Intervall liefert:

$$\begin{aligned}&(\forall a, b \in {}^*[0,\infty[, a < b)\,(\forall r \in {}^*]0,\infty[)\,(\exists h \in {}^*\mathbb{N})(\exists x : \{1,\ldots,h\} \to {}^*[a,b]\\ &\text{interne Funktion mit } x : i \mapsto x_i,\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{h-1} < x_h = b)\\ &\sum_{k=1}^{h} |{}^*B(x_k) - {}^*B(x_{k-1})| \geq r.\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$(\forall a, b \in {}^*[0,\infty[, a < b) \quad \|1_{{}^*[a,b[}\|_0 = \infty.$$

Ist nämlich $r \in {}^*]0,\infty[$, so existieren $h = h(r) \in {}^*\mathbb{N}$ und eine interne Funktion $x : \{1,\ldots,h\} \ni i \mapsto x_i \in {}^*[a,b[$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{h-1} < x_h = b$, so dass

$$\sum_{k=1}^{h} |{}^*B(x_k) - {}^*B(x_{k-1})| \geq r$$

gilt. Betrachte $g := \sum_{k=1}^{h} \alpha_k 1_{{}^*[x_{k-1},x_k[}$ mit $\alpha_k = 1$, falls ${}^*B(x_k) - {}^*B(x_{k-1}) \geq 0$ ist, und mit $\alpha_k = -1$ sonst. Nach dem Prinzip der internen Definition sind die Mengen

$$\begin{aligned}&\{k \in \{1,\ldots,h\} : {}^*B(x_k) - {}^*B(x_{k-1}) \geq 0\},\\ &\{k \in \{1,\ldots,h\} : {}^*B(x_k) - {}^*B(x_{k-1}) < 0\}\end{aligned}$$

intern. Daher ist auch $\alpha : \{1,\ldots,h\} \ni i \mapsto \alpha_i \in \{-1,1\}$ intern. Also ist $g \in \mathcal{E}$ mit $|g| \leq 1_{{}^*[a,b[}$ und $|i(g)| \geq r$. Folglich ist $\|1_{{}^*[a,b[}\|_0 = \infty$. Ist $0 \neq \alpha \in {}^*\mathbb{R}$, so erhält man analog $\|\alpha 1_{{}^*[a,b[}\|_0 = \infty$ (betrachte dazu $r := \frac{h}{|\alpha|}$ für $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$). Insgesamt folgt daraus (3.11). □

Folglich ist es im Allgemeinen nicht sinnvoll, die lokale Integralnorm mit $(\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})_+$ zu bilden. Betrachtet man jedoch die mittels $\mathcal{E}^{fin}_+$ gebildete zugehörige lokale Integralnorm, so ist diese nach dem nächsten Satz immer zu i passend. Im vorhergehenden Beispiel war das Integral i nicht positiv. Wegen der Gültigkeit von $\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} \underset{Bem. 1.2.4}{=} \mathcal{E}^{fin}$ im Falle der Positivität des Integrals i, wäre dies auch nicht möglich gewesen.

3.3.3 Satz. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm. Betrachtet man die zugehörige lokale Integralnorm*

$$\|g\|_l' := \sup\{\| \, |g| \wedge e\| : 0 \leq e \in \mathcal{E}^{fin}\}, \ g \in {}^*\mathbb{R}^Y,$$

so ist $\|\cdot\|_l$ eine zu i passende Integralnorm mit $\|\cdot\|_l \leq \|\cdot\|$ und $\mathcal{E}^{endl}_{\| \|} = \mathcal{E}^{endl}_{\| \|_l}$. Mit $\|\cdot\|$ ist auch $\|\cdot\|_l$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$. $\|\cdot\|_l$ wird im Folgenden als die der Integralnorm zugeordnete lokale Integralnorm bezeichnet.

Beweis. <u>zu i passende Integralnorm:</u> Nach Satz 3.3.1 ist $\|\cdot\|_l$ eine Integralnorm mit $\|\cdot\|_l \leq \|\cdot\|$. Zum Beweis, dass $\|\cdot\|_l$ zu i passend ist, betrachten wir die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $e \in \mathcal{E}$ mit $|e| \in \mathcal{E}^{fin}$, so gilt $\|e\|_l' \underset{Satz\, 3.3.1}{=} \|e\|' \underset{Vor.}{\geq} {}^\circ|i(e)|$.

b) Ist $e \in \mathcal{E}$ mit $|e| \notin \mathcal{E}^{fin}$, so ist $i(|e|) \notin \text{fin}({}^*\mathbb{R})$ und somit $\frac{\alpha}{|i(|e|)|} \cdot |e| \in \mathcal{E}^{fin}$ für $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Damit gilt

$$\|e\|_l' \geq \sup\{\| |e| \wedge \tfrac{\alpha}{|i(|e|)|}|e| \| : \alpha \in]0,\infty[\} \geq \underbrace{\sup\{{}^\circ|\overbrace{i(|e| \wedge \tfrac{\alpha}{|i(|e|)|} \cdot |e|)}^{=\alpha}| : \alpha \in]0,\infty[\}}_{=\infty}$$

$$\geq {}^\circ|i(e)|.$$

Aus a) und b) folgt, dass $\|\cdot\|_l$ eine zu i passende Integralnorm ist.
<u>$\mathcal{E}^{endl}_{\| \|} = \mathcal{E}^{endl}_{\| \|_l}$:</u> „$\subset$“ klar. „$\supset$“ Sei $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\| \|_l}$. Dann gilt

$$\|g \wedge |e|\| \leq M < \infty \ \text{ für jedes } g \in \mathcal{E}^{fin}_+. \tag{1}$$

Da mit $\|\cdot\|$ auch $\|\cdot\|_l$ zu i passend ist, gilt $st|i(e)|, st|i(|e|)| \leq \|e\|_l' < \infty$; also ist $|e| \in \mathcal{E}^{fin}$. Nach (1) ist damit auch $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\| \|}$.
<u>Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$:</u> Ist $\|\cdot\|$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$, so betrachte die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $e \in \mathcal{E}$ mit $|e| \in \mathcal{E}^{fin}$, so gilt $\|e\|_0' = \|e\|' \underset{Satz\, 3.3.1}{=} \|e\|_l'$.

b) Ist $e \in \mathcal{E}$ mit $|e| \notin \mathcal{E}^{fin}$, so ist $\|e\|_0' = \infty$ (vgl. Satz 1.2.3). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist aber $|e| \geq \frac{n \cdot |e|}{|i(|e|)|} \in \mathcal{E}^{fin}$ mit

$$n = \text{st}\, |i(\tfrac{n \cdot |e|}{|i(|e|)|})| \leq \| |e| \wedge \tfrac{n \cdot |e|}{|i(|e|)|} \|_0 = \| |e| \wedge \tfrac{n \cdot |e|}{|i(|e|)|} \| \leq \|e\|_l';$$

daraus folgt $\|e\|_0' = \infty = \|e\|_l'$.

Nach a) und b) ist folglich auch $\|\cdot\|_l$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$. $\square$

Die einer Integralnorm zugeordnete lokale Integralnorm einer Funktion $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$ ist infolgedessen Majorante der Integralnormwerte der „Beschneidungen" der Betragsfunktion $|g|$ mit nicht-negativen Funktionen aus $\mathcal{E}^{fin}$.

Ist $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm, so gilt

$$\mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|} = \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} \underset{Satz\,3.3.3}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_l}, \tag{3.12}$$

d.h. die Menge, deren Elemente der Standardisierung gemäß Satz 1.1.8 zugrunde gelegt werden, ändert sich durch die Verwendung der zugehörigen lokalen Integralnorm nicht. Das mit der gegebenen Integralnorm auch deren zugehörige Integralnorm eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ ist auch insofern von Bedeutung, als das die zugehörige lokale Integralnorm daher über $\mathcal{E}_+$ additiv und somit auch halbadditiv ist (vgl. Satz 1.2.3). Dies spielt insbesondere für die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems eine Rolle (vgl. Satz 2.2.3 und Korollar 2.2.5). Das nächste Lemma gibt nun weitere Eigenschaften der zugehörigen lokalen Integralnorm an.

3.3.4 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm, so gilt für die nach Satz 3.3.3 zugeordnete lokale Integralnorm:*

(i) *$\mathcal{L}(\|\cdot\|) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ und das bzgl. $\|\cdot\|_l$ gemäß dem Standardisierungsprinzip 1.1.8 gebildete Funktional i^L setzt das bzgl. $\|\cdot\|$ gebildete Funktional fort.*

(ii) *$f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ genau dann, wenn $(\exists\, g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|g_n - g_m\|' \to 0$ für $n, m \to \infty$ und $(\forall\, 0 \le g \in \mathcal{E}^{fin})$ gilt $\|g \wedge |g_n - f|\| \ \to 0$ $(n \to \infty)$.*

(iii) *$f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ mit $|f| \le g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \Longrightarrow f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$; d.h. es gilt:*

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|) = \mathcal{L}(\|\cdot\|_l) \cap \{f \in \mathbb{R}^Y : (\exists g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|))\, |f| \le g\}.$$

Beweis. (i) Folgt sofort aus Satz 3.3.3 und dem Vergleichsprinzip 1.1.18.
(ii) „$\Longrightarrow$" Zu $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ existieren $g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_l} \underset{Satz\,3.3.3}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft $\|f - g_n\|_l' \to 0\,(n \to \infty)$. Nach Definition von $\|\cdot\|_l$ gilt einerseits

$$(\forall\, 0 \le g \in \mathcal{E}^{fin}) \quad \|g \wedge |f - g_n|\| \le \|f - g_n\|_l' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und andererseits wegen $\mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|} \underset{(1.7)}{\subset} \mathcal{E}^{fin}$

$$\|g_n - g_m\|' \underset{Satz\,3.3.3}{=} \|g_n - g_m\|_l' \le \|g_n - f\|_l' + \|f - g_m\|_l' \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

„$\Longleftarrow$" Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall\, n, m \in \mathbb{N}^{\ge m_0})\ \|g_n - g_m\| \le \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Sei zudem $0 \le g \in \mathcal{E}^{fin}$; dann gibt es nach Voraussetzung ein $m_g \in \mathbb{N}^{\ge m_0}$ mit

$$\|g \wedge |g_{m_g} - f|\| \le \tfrac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}^{\ge m_0}$:

$$\begin{aligned}\|g \wedge |g_n - f|\| &\le \|g \wedge (|g_n - g_{m_g}| + |g_{m_g} - f|)\| \\ &\le \|g \wedge |g_n - g_{m_g}|\| + \|g \wedge |g_{m_g} - f|\| \\ &\underset{(2)}{\le} \|g_n - g_{m_g}\| + \tfrac{\varepsilon}{2} \underset{(1)}{\le} \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $0 \le g \in \mathcal{E}^{fin}$ beliebig war, folgt daraus zuerst $(\forall n \in \mathbb{N}^{\ge m_0})\, \|g_n - f\|_l \le \varepsilon$ und schließlich wegen $\mathcal{E}^{endl}_{\| \|} \underset{\textit{Satz}\,3.3.3}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\| \|_l}$ auch $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$.

(iii) Zu $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|} \underset{\textit{Satz}\,3.3.3}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\| \|_l}$, $n \in \mathbb{N}$, und zu $g \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ gibt es $g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\|f - e_n\|_l' \to 0, \quad \|g_n - g\|' \to 0.$$

Wegen $|f - e_n| \le |e_n| + g \le |e_n| + |g_n| + |g_n - g|$ und $|e_n| + |g_n| \in \mathcal{E}^{endl}_{\| \|} \underset{(1.7)}{\subset} \mathcal{E}^{fin}$ folgt $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ aus

$$\begin{aligned}\|e_n - f\|' &= \|(|e_n| + |g_n| + |g_n - g|) \wedge |e_n - f|\| \\ &\le \|(|e_n| + |g_n|) \wedge |e_n - f|\| + \|g_n - g\| \\ &\le \|e_n - f\|_l' + \|g - g_n\|' \to 0 \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

□

Wie Satz 3.3.3 und Lemma 3.3.4 zeigen, hat die mit $\mathcal{E}^{fin}_+$ gebildete lokale Integralnorm die geforderten Eigenschaften. Daher werden wir die mit $\mathcal{E}^{fin}_+$ gebildete lokale Integralnorm präferieren und im Folgenden, wenn nichts anderes ausdrücklich genannt ist, unter der zugehörigen lokalen Integralnorm, stets die gemäß Satz 3.3.3 gebildete Integralnorm verstehen.

3.3.5 Bemerkung. Bildet man die lokale Integralnorm mit der Menge $\mathcal{E}_+$ anstatt mit der Menge $\mathcal{E}^{fin}_+$, d.h. setzt man

$$\|g\|_{l_1} := \sup\{\|g \wedge h\| : h \in \mathcal{E}_+\}, \ g \in {}^*[0, \infty[^Y,$$

so erhält man die Aussagen des Satzes 3.3.3 und Lemma 3.3.4 auch für die Integralnorm $\|\cdot\|_{l_1}$; nur im Lemma 3.3.4 (ii) benötigt man $(\forall\, 0 \le g \in \mathcal{E})$ anstatt $(\forall\, 0 \le g \in \mathcal{E}^{fin})$. Insgesamt gilt dann: $\mathcal{L}(\|\cdot\|) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_{l_1}) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$.

An dieser Stelle stellt sich die berechtigte Frage, ob die Verwendung der zugehörigen lokalen Integralnorm überhaupt zu einem größeren standardisierten System führt. Eine positive Antwort auf diese Frage liefert Beispiel 3.3.7. Wir betrachten dazu für eine interne Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ die zur Loeb-Integralnorm zugehörige lokale Integralnorm $\|\cdot\|_{L,l}$, kurz *lokale Loeb-Integralnorm.* Dann ist $\|\cdot\|_{L,l}$ eine zu i passende Integralnorm mit $\|\cdot\|_{L,l} \le \|\cdot\|_L$, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt (vgl. Satz 3.3.3).

3.3.6 Bemerkung. Die zugehörige lokale Loeb-Integralnorm stimmt für Funktionen $g \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit endlicher Loeb-Integralnorm $\|g\|_L < \infty$ mit der Loeb-Integralnorm $\|g\|_L$ überein.

Beweis. Ist $g \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $\|g\|_L < \infty$, so existiert nach der Definition der Loeb-Integralnorm ein $e \in \mathcal{E}_+$, $g \leq e$ mit $\|e\|_0 < \infty$. Damit ist $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} \subset \mathcal{E}^{fin}$ und somit gilt $\|g\|_L = \|g\|_{L,l} < \infty$ nach Satz 3.3.1. □

Das nachfolgende Beispiel zeigt nun, dass das System der Loeb-integrierbaren Funktionen echt in dem System $\mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$ der lokal Loeb-integrierbaren Funktionen enthalten ist.

3.3.7 Beispiel ($\mathcal{L}(\|\cdot\|_L) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$). Wir betrachten

$$Y := {}^*\mathbb{R},\ \mathcal{E} := \{k \cdot 1_{\{0\}} : k \in {}^*\mathbb{R}\},\ i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R} \text{ mit } i(k \cdot 1_{\{0\}}) := k.$$

Dann ist $\mathcal{E}$ ein interner Stonescher Vektorverband und i ein internes, positives, ${}^*\mathbb{R}$-lineares Funktional. Betrachtet man $f \in \mathbb{R}^{{}^*\mathbb{R}}$ mit $f = 1_{{}^*\mathbb{R}}$, so ist f lokal Loeb-integrierbar, aber nicht Loeb-integrierbar, d.h. es gilt:

$$f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l}) \backslash \mathcal{L}(\|\cdot\|_L).$$

Beweis. Für jedes $e \in \mathcal{E}$ gilt $e(1) = 0 < 1 = f(1)$. Daher existiert kein $e \in \mathcal{E}$ mit $f \leq e$. Folglich gilt $\|f\|_L = \infty$. Infolgedessen ist $f \notin \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ (vgl. Lemma 1.1.16). Zum Nachweis von $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$ setze $g := 1_{\{0\}}$. Dann ist $g \in \mathcal{E}^{fin} \underset{Bem.\,1.2.4}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0}$. Die Gültigkeit von $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$ folgt nun aus

$$\begin{aligned}\|f-g\|_{L,l} =& \|1_{{}^*\mathbb{R}_-} + 1_{{}^*\mathbb{R}_+}\|_{L,l} = \sup\{\|(1_{{}^*\mathbb{R}_-} + 1_{{}^*\mathbb{R}_+}) \wedge k\|_L : 0 \leq k \in \mathcal{E}^{fin}\}\\ =& \sup\{\|(1_{{}^*\mathbb{R}_-} + 1_{{}^*\mathbb{R}_+}) \wedge (k \cdot 1_{\{0\}})\|_L : 0 \leq k \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}\\ =& \|0\|_L = 0.\end{aligned}$$
□

Erfüllt das mit der vorgegebenen Integralnorm standardisierte System das monotone Konvergenztheorem, so ist es wünschenswert, dass dies auch für das mit der lokalen Integralnorm gebildete standardisierte System gilt. Hinreichend für die Gültigkeit eines monotonen Konvergenztheorems ist die (fast) σ-Stetigkeit der Integralnorm und die Forderung der Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ (vgl. Korollar 2.2.5). Da mit der gegebenen auch die zugehörige lokale Integralnorm eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ ist, tritt an dieser Stelle die Frage auf, ob sich auch die (fast) σ-Stetigkeit der gegebenen Integralnorm auf die zugehörige lokale Integralnorm überträgt. Dies muss allerdings verneint werden. Das nächste Beispiel 3.3.8 zeigt, dass die zugehörige lokale Integralnorm einer $\|\cdot\|_0\,|\mathcal{E}_+$ fortsetzenden, σ-stetigen Integralnorm i. Allg. noch nicht einmal fast σ-stetig ist.

3.3.8 Beispiel. Sei $h \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ fest. Wir betrachten

$$Y := {}^*\mathbb{N},\ \mathcal{E} := \{c \cdot 1_Y : c \in {}^*\mathbb{R}\},\ i : \mathcal{E} \to {}^*\mathbb{R} \text{ mit } i(c \cdot 1_Y) := c \cdot h.$$

Dann ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Integrationsstruktur. Definiert man nun $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ durch

$$\|f\| = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \sup\limits_{y\in Y} {}^\circ f(y) > 0, \\ [(\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ(f(n)\cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ(f(h)\cdot h)], & \text{falls } \sup\limits_{y\in Y} {}^\circ f(y) = 0, \end{cases}$$

für $f \in {}^*[0,\infty[^Y$, so ist $\|\cdot\|$ eine ${}^\circ i|\,\mathcal{E}_+ \underset{Bem. 1.2.4}{=} \|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende, σ-stetige Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$. Die zugehörige lokale Integralnorm ist jedoch nicht einmal fast σ-stetig.

Beweis. Per definitionem ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Integrationsstruktur mit

$$(\forall\, 0 \le e := c \cdot 1_Y \in \mathcal{E}) \quad e \in \mathcal{E}^{fin} \iff (c\cdot h) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R}). \tag{1}$$

<u>${}^\circ i|\,\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm:</u>

A) $\|0\| = 0$ klar.

B) Seien $f, g \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $f \le g$. Ist dann $\sup\limits_{y\in Y} {}^\circ g(y) > 0$, also $\|g\| = \infty$, so gilt $\|f\| \le \|g\|$ sofort. Ansonsten gilt $\sup\limits_{y\in Y} {}^\circ g(y) = 0$. Wegen $0 \le f \le g$ ist dann aber auch $\sup\limits_{y\in Y} {}^\circ f(y) = 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \|f\| &= [(\limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ(f(n)\cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ(f(h)\cdot h)] \\ &\le [(\limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ(g(n)\cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ(g(h)\cdot h)] = \|g\|. \end{aligned}$$

C) Sind $f, g \in {}^*[0,\infty[^Y$, so gilt $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$ sofort, falls $\sup\limits_{y\in Y} {}^\circ f(y) > 0$ oder $\sup\limits_{y\in Y} {}^\circ g(y) > 0$ ist. Ansonsten ist $\sup\limits_{y\in Y} {}^\circ f(y) = 0 = \sup\limits_{y\in Y} {}^\circ g(y)$, also auch $\sup\limits_{y\in Y} {}^\circ (f+g)(y) = 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= [(\limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ((f+g)(n)\cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ((f+g)(h)\cdot h)] \\ &\le [(\limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ(f(n)\cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ(f(h)\cdot h)] + \\ &\quad\ [(\limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ(g(n)\cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ(g(h)\cdot h)] \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Aus A) bis C) folgt, dass $\|\cdot\|$ eine Integralnorm ist. Diese setzt auch ${}^\circ i|\,\mathcal{E}_+$ fort. Ist nämlich $0 \le e := c \cdot 1_Y \in \mathcal{E}$, so gilt mit (1):

a) Ist $e \in \mathcal{E}^{fin}$, d.h. $c \cdot h \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, also insbesondere $c \approx 0$, dann gilt:

$$^\circ i(e) \;=\; {}^\circ(c \cdot h) = [(\limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ(c \cdot 1_Y(n) \cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ(c \cdot 1_Y(h) \cdot h)] \;=\; \|e\|.$$

b) Ist $e \notin \mathcal{E}^{fin}$, d.h. $c \cdot h \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$, so gilt:

$$\begin{aligned} {}^\circ i(e) &= {}^\circ(c \cdot h) = [(\limsup_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} {}^\circ(c \cdot 1_Y(n) \cdot h)) \wedge 1] \vee [{}^\circ(c \cdot 1_Y(h) \cdot h)] \\ &= \infty = \|e\|. \end{aligned}$$

<u>σ-Stetigkeit der Integralnorm:</u> Seien dazu $f_n, f \in [0,\infty[^Y$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \uparrow f$.

α) Ist dann $f \equiv 0$, so gilt $\|f_n\| = 0 = \|f\|$.

β) Ansonsten ist $f \not\equiv 0$, d.h. es gibt ein $y \in Y$ mit $f(y) > 0$. Dann existiert aber auch ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{y\in Y} {}^\circ f_{n_0}(y) > 0$. Daraus folgt $\|f_n\| = \infty = \|f\|$ für $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Damit ist die Integralnorm σ-stetig.

<u>Die zugehörige lokale Integralnorm ist nicht fast σ-stetig:</u> Wir betrachten dazu

$$f_n := 1_{\{1,\ldots,n\}} \uparrow 1_{\mathbb{N}} =: f.$$

Ist $c \cdot 1_Y \in \mathcal{E}^{fin}$, so gilt $c \approx 0$ (siehe (1)). Daher ist

$$\sup_{y\in Y} {}^\circ(f_n \wedge (c \cdot 1_Y))(y) = 0 = \sup_{y\in Y} {}^\circ(f \wedge (c \cdot 1_Y))(y).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \|f_n \wedge (c \cdot 1_Y)\| &= \|c \cdot 1_{\{1,\ldots,n\}}\| \\ &= \underbrace{[(\overline{\lim_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\to\infty}}}\ {}^\circ(c \cdot 1_{\{1,\ldots,n\}}(m) \cdot h)) \wedge 1]}_{=0} \vee \underbrace{[{}^\circ((c \cdot h) \cdot 1_{\{1,\ldots,n\}}(h))]}_{=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $\|f_n\|_l = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt aber:

$$\begin{aligned} \|f \wedge (c \cdot 1_Y)\| &= \|c \cdot 1_{\mathbb{N}}\| \\ &= \underbrace{[(\limsup_{m\in\mathbb{N}, m\to\infty} {}^\circ(c \cdot 1_{\mathbb{N}}(m) \cdot h)) \wedge 1]}_{={}^\circ(c\cdot h)} \vee \underbrace{[{}^\circ(c \cdot 1_{\mathbb{N}}(h) \cdot h)]}_{=0} \\ &= {}^\circ(c \cdot h) \wedge 1. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun $c_1 := \frac{1}{h}$, so ist $(c_1 \cdot h) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ und somit $(c_1 \cdot 1_Y) \in \mathcal{E}^{fin}$ mit $\|f \wedge (c_1 \cdot 1_Y)\| = {}^\circ(c_1 \cdot h) \wedge 1 = 1$. Daraus folgt aber

$$\|f\|_l = 1 \neq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_l = 0.$$

Folglich ist die lokale Integralnorm noch nicht einmal fast σ-stetig. $\square$

Infolgedessen überträgt sich i. Allg. die Eigenschaft der (fast) σ-Stetigkeit einer $\|\cdot\|_0 |\mathcal{E}_+$ fortsetzenden Integralnorm nicht auf die zugehörige lokale Integralnorm. Hinreichend für die Gültigkeit der σ-Stetigkeit einer Integralnorm ist jedoch Bedingung (1.13). Insbesondere ist die Verwendung einer $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzenden Integralnorm, die Bedingung (1.13) erfüllt, hinreichend für die Gültigkeit des monotonen Konvergenztheorems (vgl. Korollar 2.2.5). Daher stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob sich Bedingung (1.13) von der gegebenen Integralnorm auf die zugehörige lokale Integralnorm überträgt. Eine positive Antwort auf diese Frage liefert der nächste Satz.

3.3.9 Satz. *Ist eine Integralnorm $\|\cdot\|$ gegeben, so genügt mit $\|\cdot\|$ auch die zugehörige lokale Integralnorm der Bedingung* (1.13).

Beweis. Seien $f_n, f \in (\mathrm{fin}(^*[0,\infty]))^Y$ mit $f_n \uparrow_S f$ und sei $e \in \mathcal{E}_+^{fin}$. Zu zeigen reicht $\|f \wedge e\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n \wedge e\|$. Wir betrachten dazu die folgende Fallunterscheidung:

A) Ist $y \in Y$, $f(y) \wedge e(y) = f(y)$, so gilt

$$f_n(y) \wedge e(y) = f_n(y) \uparrow_S f(y) = f(y) \wedge e(y) =: h(y).$$

B) Ist $y \in Y$ mit $f(y) \wedge e(y) = e(y)$, so unterscheide man die beiden Fälle:

Ba) Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $(f_{n_0} \wedge e)(y) = e(y)$, so gilt

$$f_n(y) \wedge e(y) \uparrow_S e(y) = f(y) \wedge e(y) =: h(y).$$

Bb) Gilt $f_n(y) \wedge e(y) \neq e(y)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so sind $f_n(y), f(y) \in \mathbb{R}$. Daher gilt

$$f_n(y) \wedge e(y) = f_n(y) \uparrow_S f(y) = {}^\circ e(y) \geq e(y).$$

Wir setzen in diesem Fall $h(y) := f(y) = \lim(f_n(y) \wedge e(y))$.

In allen Fällen, also für jedes $y \in Y$, erhält man nun $h \geq f \wedge e \geq f_n \wedge e$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \wedge e \uparrow_S h$. Aus Bedingung (1.13) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n \wedge e\| = \|h\| \geq \|f \wedge e\| \geq \|f_n \wedge e\|.$$

Damit gilt auch $\|f \wedge e\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n \wedge e\|$. □

Somit übertragen sich die Eigenschaft der Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ und die Gültigkeit der Bedingung (1.13), die die σ-Stetigkeit impliziert, von der Integralnorm auf die zugehörige lokale Integralnorm. Nach Satz 2.2.3 gilt daher das monotone Konvergenztheorem auch für das standardisierte lokale System, wenn eine Integralnorm mit diesen Eigenschaften, wie beispielsweise die Loeb-Integralnorm (vgl. Satz 1.2.14), betrachtet wird. Ausgehend von einer internen Integrationsstruktur liefert eine Verwendung der lokalen Loeb-Integralnorm $\|\cdot\|_{L,l}$ im Satz 1.1.8 folglich eine vollständige reelle Integrationsstruktur (siehe auch Satz 2.1.1), die das System der Loeb-integrierbaren Funktionen umfaßt und das Loeb-Integral fortsetzt.

Kapitel 4

Inhalte und Integrale

In den vorherigen Kapiteln standen die standardisierten Systeme und die darauf erklärten standardisierten Funktionale im Vordergrund des Interesses. In diesem Kapitel sollen nun meßbare und integrierbare Mengen und Inhalte bzw. Maße näher betrachtet werden.

In der Standardwelt gibt es eine enge Verbindung zwischen Inhalten (Maßen) und linearen (σ-stetigen) Integralen. Per Transfer erhält man daher einen engen Zusammenhang von internen Inhaltsräumen und internen (Pseudo-) Integrationsstrukturen. Grundsätzlich ergeben sich somit zwei Möglichkeiten der Bildung von Standardisierungen. Einerseits können wir ausgehend von einem internen Inhaltsraum das Loeb-Maß bilden. Damit erhalten wir auch die dem Loeb-Maß zugeordnete Integrationsstruktur. Andererseits können wir ausgehend von einem internen Inhaltsraum eine interne Stonesche Integrationsstruktur bilden und darauf aufbauend ein standardisiertes System entwickeln. Betrachtet man speziell die Loeb-Integralnorm bzw. das System der Loeb-integrierbaren Funktionen, so ergibt sich die Gleichheit der beiden Zugänge, wie bereits Landers und Rogge [11], Beispiel 5, gezeigt haben.

4.1 Inhalte und Maße

Im Folgenden wird gezeigt, dass man ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ und einer zu i passenden Integralnorm $\|\cdot\|$ zu einem $\mathbb{R}$-wertigen Inhalt gelangen kann. Dies läßt sich mit den Ergebnissen der Standardtheorie leicht erzielen, da sich Inhalte bzw. Maße ausgehend von einem internen, (positiv) linearen Funktional auf einem Vektorverband als einfaches „Nebenprodukt“ aus dem gemäß dem Standardisierungsprinzip konstruierten Räumen reellwertiger Funktionen ergeben. Bildet man nämlich ausgehend von der internen Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ mit einer zu i passenden Integralnorm gemäß Satz 1.1.8, so ist, wie bereits im Satz 1.1.8 gezeigt wurde, das System $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ bzgl. der Integralnorm $\|\cdot\| | [0, \infty[^Y$ (vgl. Bemerkung 1.1.6) abgeschlossen und die Integralnorm $\|\cdot\|$ zu dem reellwertigen Integral i^L passend. Daher gelten die Sätze der Standardintegrationstheorie für die Systeme der integrierbaren und messbaren

Mengen.

Wir definieren nun zunächst ausgehend von einer internen Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, i)$ und einer zu i passenden Integralnorm $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ die Mengen $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &:= \{A \in \mathcal{P}(Y) : 1_A \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)\} \\ &= \text{„System der integrierbaren Mengen“}, \\ \mathcal{M}_1 &:= \{A \in \mathcal{P}(Y) : 1_A \cdot f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \text{ für jedes } f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)\} \\ &= \text{„System der meßbaren Mengen“}, \\ \mathcal{M}_2 &:= \{A \in \mathcal{P}(Y) : (\forall f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|))\ 1_A \wedge f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_1$ ist folglich die Gesamtheit aller Teilmengen über die man jede „integrierbare“ Funktion f integrieren kann. Definiere ferner $\mu : \mathcal{M}_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$\mu(A) := i^L(1_A) \underset{\textit{Satz}\, 1.1.8}{\in} \mathbb{R} \text{ für } A \in \mathcal{M}_0.$$

Ist $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ fest, so definieren wir des Weiteren $\nu_f : \mathcal{M}_1 \to \mathbb{R}$ durch

$$\nu_f(A) := i^L(1_A \cdot f).$$

Damit erhalten wir nun sofort, wie bereits erwähnt, die nachfolgenden Ergebnisse der Standardwelt (vgl. Rogge [24], Satz 2.14, 2.21, 2.22).

4.1.1 Satz. *(i) $\mu : \mathcal{M}_0 \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$–wertiger Inhalt, der sogenannte „abgeleitete Inhalt“, auf dem Ring $\mathcal{M}_0$.*

(ii) $\mathcal{M}_1$ ist eine Algebra und ν_f ist für jedes $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ein $\mathbb{R}$-wertiger Inhalt auf $\mathcal{M}_1$.

(iii) $\mathcal{M}_2$ ist ein Ring mit $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_2$. Ist $\mathcal{E}$ Stonesch, so ist $\mathcal{M}_2$ Algebra mit $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$.

Im nächsten Satz wird die nachfolgende Notation verwendet. Setze

$$\mathcal{M} := \{A \subset Y : A \cap M_0 \in \mathcal{M}_0 \text{ für jedes } M_0 \in \mathcal{M}_0\}$$

und definiere $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$\mu(M) = \begin{cases} i^L(1_M), & \text{falls } M \in \mathcal{M}_0, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt nach Definition von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}_0$:

- $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$,
- $(\forall A \in \mathcal{M})\ A \subset B \in \mathcal{M}_0 \Longrightarrow A \in \mathcal{M}_0$.

4.1.2 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine zu i passende, σ-stetige Integralnorm, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt, so gilt:*

(i) μ *ist ein* $]-\infty, \infty]$*-wertiges Maß auf der* σ*-Algebra* $\mathcal{M}$.
Ist i positiv, so ist μ ein Maß.

(ii) *Ist $\mathcal{E}$ zusätzlich Stonesch, so gilt $\mathcal{L}(\|\cdot\|) = \{f \in \mathcal{L}_1(\mu) : \|f\|' < \infty\}$ und $i^L(f) = \int f\, d\mu$ für $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$.*

(iii) *Ist $\mathcal{E}$ Stonesch und i positiv, so gilt $\mathcal{L}(\|\cdot\|) = \mathcal{L}_1(\mu)$ und $i^L(f) = \int f\, d\mu$ für $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$.*

Zum Beweis von Satz 4.1.2 benötigten wir den folgenden Hilfssatz und das nächste Lemma 4.1.4.

4.1.3 Hilfssatz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine zu i passende, σ-stetige Integralnorm, die auf $\mathcal{E}_+$ halbadditiv ist, so gilt*

$$(\forall\, r \in]0, \infty[, 0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)) \quad \|\tfrac{1}{r} f\| < \infty \implies A := \{y \in Y : f(y) > r\} \in \mathcal{M}_0.$$

Beweis. Es ist $f_n := (n(f-r)^+ \wedge 1) = (n(f-(r \wedge f)) \wedge 1) \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ mit $f_n \uparrow 1_A$ und $f_n \leq \frac{1}{r} f$. Daraus folgt $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| \leq \|\frac{1}{r} f\| < \infty$. Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 2.2.3. □

Das nachfolgende Lemma folgt sofort aus Satz 5.4 in Rogge [24]. Dort wird zudem gefordert, dass die Integralnorm über $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ endlich ist. Dies gilt aber nach Lemma 1.1.16.

4.1.4 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur und $\|\cdot\|$ eine zu i passende, σ-stetige Integralnorm über ${}^*[0, \infty[^Y$, die über $\mathcal{E}_+$ halbadditiv ist, so gilt:*

(i) $\mathcal{M}_0 = \{A \subset Y : 1_A \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)\}$ *ist ein δ-Ring*[1] *und $\mu : \mathcal{M}_0 \to \mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-wertiges Maß.*

(ii) $\mathcal{M}_1$ *ist eine σ-Algebra und ν_f ist ein $\mathbb{R}$-wertiges Maß auf $\mathcal{M}_1$ für jedes $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$.*

Ist $\mathcal{E}$ Stonesch, so gilt auch $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 4.1.2.

Beweis von Satz 4.1.2. (i) Es wird zuerst gezeigt, dass $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist:

a) Es ist $Y \in \mathcal{M}$ nach Definition von $\mathcal{M}$.

b) Ist $A \in \mathcal{M}$, so gilt $(Y \backslash A) \cap M_0 = M_0 \backslash (A \cap M_0) \in \mathcal{M}_0$ für jedes $M_0 \in \mathcal{M}_0$ (vgl. Satz 4.1.1). Somit ist $Y \backslash A \in \mathcal{M}$.

[1] zur Definition siehe Elstrodt [2]

c) Seien $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 4.1.4 (i) folgt dann $(\bigcap_{n=1}^\infty A_n \cap M_0) = \bigcap_{n=1}^\infty (A_n \cap M_0) \in \mathcal{M}_0$ für jedes $M_0 \in \mathcal{M}_0$. Damit ist $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$.

Folglich ist $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra. Es verbleibt der Nachweis, dass μ ein Maß ist. Per definitionem von μ und wegen $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ ist μ eine Abbildung von der σ-Algebra $\mathcal{M}$ in $]-\infty,\infty]$ bzw. in $[0,\infty]$, falls i positiv ist. Wegen $\emptyset \in \mathcal{M}_0$ gilt zudem $\mu(\emptyset) = i^L(1_\emptyset) = 0$. Ist M_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Familie paarweiser disjunkter Ereignisse aus $\mathcal{M}$, so betrachten wir die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $\uplus_{i=1}^\infty M_i \in \mathcal{M}_0$, so ist $M_n \in \mathcal{M}_0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wegen $1_{\uplus_{i=1}^n M_i} \uparrow 1_{\uplus_{i=1}^\infty M_i}$ (für $n \uparrow \infty$) und $\|1_{\uplus_{i=1}^\infty M_i}\| \underset{Lemma\,1.1.16}{<} \infty$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\mu(\uplus_{i=1}^\infty M_i) &= i^L(1_{\uplus_{i=1}^\infty M_i}) \underset{Satz\,2.2.3}{=} \lim_{n\to\infty} i^L(1_{\uplus_{i=1}^n M_i}) \underset{M_i\,disj.}{=} \lim_{n\to\infty} i^L(\sum_{i=1}^n 1_{M_i}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n i^L(1_{M_i}) \underset{M_i \in \mathcal{M}_0}{=} \sum_{i=1}^\infty \mu(M_i).\end{aligned}$$

b) Ist $\uplus_{i=1}^\infty M_i \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_0$, so existiert wegen Lemma 4.1.4 ein $n \in \mathbb{N}$ mit $M_n \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_0$. Daher gilt:

$$\mu(\uplus_{i=1}^\infty M_i) \underset{\uplus_{i=1}^\infty M_i \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_0}{=} \infty \underset{M_n \in \mathcal{M}\backslash\mathcal{M}_0}{=} \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^m \mu(M_i).$$

(ii) „$\subset$“ Sei zuerst $0 \le f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Dann gilt $\|f\| < \infty$ nach Lemma 1.1.16. Zum Nachweis von $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ mit $i^L(f) = \int f d\mu$ betrachten wir die $\mathcal{M}_0$-elementaren Funktionen (vgl. Hilfssatz 4.1.3)

$$f_n := \tfrac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} 1_{\{y\in Y: f(y) > \frac{i}{2^n}\}} = \tfrac{1}{2^n} \max\{i \in \{1,2,\dots,n2^n\} : f > \tfrac{i}{2^n}\}.$$

Damit gilt $0 \le f_n \uparrow f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Ferner ist f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ als $\mathcal{M}$-elementare Funktion mit

$$\int f_n d\mu = \tfrac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} \mu(\underbrace{\{y \in Y : f(y) > \tfrac{i}{2^n}\}}_{\in \mathcal{M}_0}) = \tfrac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} i^L(\{y \in Y : f(y) > \tfrac{i}{2^n}\}) < \infty,$$

insbesondere ein Element von $\mathcal{L}_1(\mu)$. Nach Hilfssatz 4.1.3 und da $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ein Vektorverband ist, ist aber auch $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Mit Satz 2.2.3 folgt daraus

$$\begin{aligned}\infty > i^L(f) &\underset{Satz\,2.2.3}{=} \lim_{n\to\infty} i^L(f_n) = \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} i^L(1_{\{y\in Y: f(y) > \frac{i}{2^n}\}}) \\ &\underset{\{y\in Y: f(y) > \frac{i}{2^n}\} \in \mathcal{M}_0}{=} \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n2^n} \mu(\{y \in Y : f(y) > \tfrac{i}{2^n}\}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu \underset{Satz\,von\,Levi}{=} \int f d\mu.\end{aligned}$$

Daher ist $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ mit $i^L(f) = \int f d\mu$. Ist nun $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ beliebig, so folgt daraus durch Betrachtung von f^+ und f^- auch $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ mit $i^L(f) = \int f d\mu$.
„$\supset$" Sei $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ mit $\|f\|' < \infty$. O.B.d.A. sei $f \geq 0$ (betrachte ansonsten f^+, f^-). Dann existiert eine Folge $\mathcal{M}$-elementarer Funktionen $f_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \uparrow f$ und $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{n_i} 1_{A_{n_i}}$ mit $\alpha_{n_i} \in]0, \infty[$, $A_{n_i} \in \mathcal{M}$, $1 \leq n_i \leq m_n$, paarweise disjunkt. Wegen

$$|\alpha_{n_i}\mu(A_{n_i})| \leq \int |f_n| d\mu \leq \int |f| d\mu \underset{f \in \mathcal{L}_1(\mu)}{<} \infty$$

und nach Definition von f_n und μ, ist $A_{n_i} \in \mathcal{M}_0$ für $1 \leq n_i \leq m_n$. Da $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ein Stonescher Vektorverband ist, gilt damit $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Aus Satz 2.2.3 folgt

$$f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \quad i^L(f) = \lim_{n\to\infty} i^L(f_n).$$

(iii) Sei zunächst $0 \leq f \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Wegen (ii) genügt der Nachweis von $\|f\| < \infty$. Zu f existiert eine Folge $\mathcal{M}$-elementarer Funktionen $f_n \in \mathcal{L}_1(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n \uparrow f$ und $f_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{n_i} 1_{A_{n_i}}$ mit $\alpha_{n_i} \in]0, \infty[$, $A_{n_i} \in \mathcal{M}$, $1 \leq n_i \leq m_n$, paarweise disjunkt. Dann ist $A_{n_i} \in \mathcal{M}_0$ für $1 \leq n_i \leq m_n$ (vgl. (ii)) und somit gilt $\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni f_n \uparrow f$. Wegen der σ-Stetigkeit der Integralnorm und Korollar 1.1.15 erhält man

$$\begin{aligned} \infty \;>\; & \int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{n_i}\mu(A_{n_i}) \underset{A_{n_i}\in\mathcal{M}_0}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_{n_i} i^L(A_{n_i}) \\ = \; & \lim_{n\to\infty} i^L(f_n) \underset{Kor. 1.1.15}{=} \lim_{n\to\infty} \|f_n\| \underset{\sigma-Stetigk.}{=} \|f\|. \end{aligned}$$

Ist $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$, so gilt dann $\|f^+\|, \|f^-\| < \infty$ wegen $0 \leq f^+, f^- \in \mathcal{L}_1(\mu)$. Folglich ist auch $\|f\|' < \infty$. □

Mit Satz 4.1.3 und Lemma 4.1.4 gelingt nun auch der Nachweis der folgenden Eigenschaft der Loeb-Integralnorm.

4.1.5 Lemma. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Pseudo-Integrationsstruktur. Ist dann $Y_0 \subset Y$ mit $\|1_{Y_0}\|_L < \infty$, so existiert ein $Y_0 \subset M_0 \in \mathcal{M}_0$ mit $\|1_{M_0}\|_L = \|1_{Y_0}\|_L$.*

Beweis. Nach Definition von $\|\cdot\|_L$ existiert eine Folge $e_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, mit

$$1_{Y_0} \leq e_n \leq 1, \quad e_n \downarrow, \quad \|1_{Y_0}\|_L = \lim_{n\to\infty} \|e_n\|_0, \quad \|e_n\|_0 < \infty. \tag{1}$$

Nach Lemma 2.2.8 gilt ${}^\circ e_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. Also ist nach Satz 2.2.3 (betrachte $-{}^\circ e_n$ anstatt von ${}^\circ e_n$) auch $\lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ e_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. Setzt man $M_0 := \{\lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ e_n = 1\}$, so ist $Y_0 \subset M_0$. Somit gilt

$$\|\lim_{n\to\infty} {}^\circ e_n\|_L \leq \|{}^\circ e_n\|_L \underset{Lemma\, 2.2.8}{\leq} \|e_n\|_0 \tag{2}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\|1_{Y_0}\|_L \underset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \|e_n\|_0 \underset{(2)}{\geq} \|\lim_{n\to\infty} {}^\circ e_n\|_L \geq \|1_{M_0}\|_L \underset{Y_0\subset M_0}{\geq} \|1_{Y_0}\|_L, \tag{3}$$

also ist $\|1_{M_0}\|_L = \|1_{Y_0}\|_L$. Es verbleibt noch der Nachweis von $M_0 \in \mathcal{M}_0$. Es ist

$$M_0 \underset{(1)}{=} \bigcap_{k=2}^{\infty} \{\lim_{n\to\infty} {}^\circ e_n > 1 - \tfrac{1}{k}\}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{{}^\circ e_n}{1-\frac{1}{k}} = \frac{k}{k-1} \lim\limits_{n\to\infty} {}^\circ e_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ gilt nach Satz 4.1.3

$$A_k := \{\lim_{n\to\infty} {}^\circ e_n > 1 - \tfrac{1}{k}\} \in \mathcal{M}_0.$$

Also ist $M_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}_0$ nach Lemma 4.1.4. □

Unter der Annahme einer zu i passenden Integralnorm $\|\cdot\|$ haben wir bisher auf Basis von $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ u.a. die Eigenschaften der Mengen $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_1$ untersucht. Zu einer zu i passenden Integralnorm läßt sich aber auch die zugehörige lokale Integralnorm $\|\cdot\|_l$ gemäß Satz 3.3.3 bilden. Auf Basis von $\mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ kann man dann aber auch das System der lokal-integrierbaren Mengen $\mathcal{M}_{0,l}$ und das System der lokal meßbaren Mengen $\mathcal{M}_{1,l}$ erzeugen. Damit ergibt sich die Frage, in welcher Beziehung $\mathcal{M}_{0,l}$ bzw. $\mathcal{M}_{1,l}$ und $\mathcal{M}_0$ bzw. $\mathcal{M}_1$ stehen. Eine erste Antwort darauf liefert das nächste Lemma. Lemma 4.1.6 zeigt nämlich, dass das System der lokal-integrierbaren Mengen $\mathcal{M}_{0,l}$ das System der integrierbaren Mengen $\mathcal{M}_0$ enthält, währenddessen das System der meßbaren Mengen $\mathcal{M}_1$ das System der lokal meßbaren Mengen $\mathcal{M}_{1,l}$ umfasst.

4.1.6 Lemma. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Pseudo-Integrationsstruktur, $\|\cdot\|$ eine zu i passende Integralnorm und $\|\cdot\|_l$ die der Integralnorm zugeordnete lokale Integralnorm, so gilt:*

(i) $\mathcal{M}_{1,l} := \{A \in \mathcal{P}(Y) : 1_A \cdot f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ *für jedes* $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)\} \subset \mathcal{M}_1$*;*

(ii) $\mathcal{M}_0 \subset \{A \in \mathcal{P}(Y) : 1_A \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)\} =: \mathcal{M}_{0,l}$ *und* $\mu|\mathcal{M}_{0,l}$ *ist eine Fortsetzung von* $\mu|\mathcal{M}_0$*.*

Beweis. (i) und (ii) folgen sofort aus Lemma 3.3.4. □

An dieser Stelle kommt die Frage auf, ob es Fälle gibt in denen $\mathcal{M}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{M}_{0,l}$ gilt. Das nächste Beispiel liefert eine positive Antwort auf diese Frage.

4.1.7 Beispiel ($\mathcal{M}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathcal{M}_{0,l}$). Wir betrachten das Beispiel 3.3.7. Dann ist $1_{{}^*\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l}) \setminus \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$, folglich gilt ${}^*\mathbb{R} \in \mathcal{M}_{0,l} \setminus \mathcal{M}_0$.

Geht man in der Standardwelt von einer reellen Pseudo-Integrationsstruktur $(\mathcal{F}, j)$ und einer zu j passenden Integralnorm aus und bildet in der dort üblichen Weise die lokale Integralnorm, so entspricht das System der messbaren Mengen $\mathcal{M}_1$ dem System der „lokal-messbaren“ Mengen $\mathcal{M}_{1,l}$ (vgl. Rogge [24]). Daher stellt sich an dieser Stelle die berechtigte Frage, ob i. Allg. auch hier $\mathcal{M}_{1,l} = \mathcal{M}_1$ gilt. Eine Antwort auf diese Frage liefert Satz 4.1.9. Zum Beweis werden wir Lemma 4.1.8 verwenden, welches eine hinreichende Bedingung angibt, unter der $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_{1,l}$ gilt.

4.1.8 Lemma. *Ist* $\|\cdot\|$ *eine zu i passende Integralnorm, für die gilt*

$$f_l \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l) \implies (\exists f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)) \text{ mit } \|f - f_l\|_l' = 0, \tag{4.1}$$

so folgt $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_{1,l}$.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{M}_1$ und $f_l \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$. Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $\|f_l - f\|_l' = 0$. Da $A \in \mathcal{M}_1$ ist, gilt $f_A := 1_A \cdot f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Daraus folgt

$$\|f_l \cdot 1_A - f_A\|_l' = \|f_l \cdot 1_A - f \cdot 1_A\|_l' \leq \|f_l - f\|_l' = 0.$$

Wegen $f_A \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ folgt $f_l \cdot 1_A \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$ (vgl. Satz 1.1.8 (vii)). □

Der nachfolgende Satz zeigt nun, dass jede $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm Bedingung (4.1) erfüllt.

4.1.9 Satz. *Ist* $\|\cdot\|$ *eine Integralnorm, die* $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ *fortsetzt, so gilt:*

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{1,l}.$$

Beweis. Wegen Lemma 4.1.6 genügt der Nachweis von $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_{1,l}$. Aufgrund von Lemma 4.1.8 genügt es dazu Bedingung (4.1) nachzuweisen. Sei also $f_l \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_l)$. O.B.d.A. sei $0 \leq f_l$ (betrachte sonst f_l^+, f_l^-). Nach Satz 1.3.5 existiert dann ein $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ mit

$$\|f_l - e\|_l' = 0. \tag{1}$$

O.B.d.A. sei $0 \leq e$. Wegen $f_l \in [0, \infty[^Y$ gilt

$$|e - {}^\circ e| \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} \leq |f_l - e| \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}. \tag{2}$$

Wir zeigen:

$$f := {}^\circ e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|). \tag{3}$$

Wegen $f_l \in [0, \infty[^Y$ gilt

$$\begin{aligned} |f_l - f| &\underset{(3)}{=} |f_l - {}^\circ e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}| = |f_l - {}^\circ e| \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} + |f_l| \cdot 1_{\{e \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} \\ &\leq (|f_l - e| + |e - {}^\circ e|) \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} + 2|f_l - e| \cdot 1_{\{e \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} \\ &\underset{(2)}{\leq} 2|f_l - e|. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\|f_l - f\|_l' \leq 2\|f_l - e\|_l' \underset{(1)}{=} 0$ mit $f \underset{(3)}{\in} \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Folglich gilt dann (4.1). Es verbleibt daher der Nachweis von (3).

<u>zu (3):</u> Wegen $f_l \in [0, \infty[^Y$ gilt $|f_l - e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}| \leq |f_l - e|$ und somit auch

$$\begin{aligned} \|e \cdot 1_{\{e \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}\|_l' &= \|e - e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}\|_l' \leq \|f_l - e\|_l' + \|e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} - f_l\|_l' \\ &\leq 2 \cdot \|f_l - e\|_l' \underset{(1)}{=} 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Wegen $f_l \in [0,\infty[^Y$ folgt daraus aber

$$\begin{aligned} \|{}^\circ e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} - e\|'_l &\underset{(2)}{\leq} \|(f_l - e) \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}\|'_l + \|e \cdot 1_{\{e \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}\|'_l \\ &\leq \|f_l - e\|'_l + \|e \cdot 1_{\{e \notin \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}}\|'_l \underset{(1),(4)}{=} 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Nach Definition der lokalen Integralnorm gilt daher $\| \, |{}^\circ e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} - e| \wedge g\| = 0$ für jedes $0 \leq g \in \mathcal{E}^{fin}$. Da die gegebene Integralnorm $\|\cdot\|$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ ist, gilt auch $0 \leq e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} \underset{(1.7)}{\subset} \mathcal{E}^{fin}$. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} \|f - e\|' &= \|{}^\circ e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} - e\|' = \| \, |{}^\circ e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} - e| \wedge e\| \\ &\leq \|{}^\circ e \cdot 1_{\{e \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}} - e\|'_l \underset{(5)}{=} 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ und somit (3) bewiesen. □

Damit entspricht das System der messbaren Mengen $\mathcal{M}_1$ dem System der „lokal-messbaren“ Mengen $\mathcal{M}_{1,l}$, wenn wir der Bildung dieser Mengen eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm, wie beispielsweise die Loeb-Integralnorm, zugrunde legen. Wie bereits erörtert wurde, ist die Forderung nach einer solchen Integralnorm sinnvoll (vgl. Kapitel 1).

Im Folgenden soll das untere Loeb-Integral einer internen Stoneschen Integrationsstruktur und die Menge

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}(\underline{i}) = \{A \subset Y : (\forall B \in \mathcal{P}(Y)) \quad \underline{i}(B) = \underline{i}(B \cap A) + \underline{i}(B \backslash A)\} \\ &\text{mit} \ \ \underline{i}(A) := \underline{i}(1_A), \ \overline{i}(A) := \overline{i}(1_A) \text{ für jedes } A \in \mathcal{P}(Y), \end{aligned} \tag{4.2}$$

näher betrachtet werden. Ausgehend von einer internen Stoneschen Integrationsstruktur zeigen Landers und Rogge [11], dass bei Verwendung der Loeb-Integralnorm (vgl. (1.15)) stets $\mathcal{M}_0 \subset \{A \in \mathcal{M}(\underline{i}) : \underline{i}(A) \in \mathbb{R}\}$ gilt. Der nächste Satz 4.1.11 zeigt, dass diese Eigenschaft auch für die Menge der lokal Loeb-integrierbaren Mengen gilt, die im Folgenden mit $\mathcal{M}_{0,L,l}$ bezeichnet wird. Zum Beweis benötigen wir allerdings das nachfolgende Lemma.

4.1.10 Lemma. *Sei $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur. Für $g \in {}^*\mathbb{R}^Y$ gilt dann:*

$$\underline{i}(g) \leq \|g\|'_{L,l}.$$

Beweis. Wegen $\underline{i}(g) \leq \underline{i}(|g|)$ (siehe Lemma 1, [11]) können wir o.B.d.A. $g \geq 0$ voraussetzen. Ist dann $\mathcal{E}^{fin}_+ \ni e \leq g$ (z.B. $e = 0$), so gilt

$$^\circ i(e) \underset{Bem. 1.2.4}{=} \|e\|_0 \underset{Satz\, 1.2.14}{=} \|e\|_L \underset{0 \leq e \leq g}{=} \|g \wedge e\|_L \underset{Satz\, 3.3.3}{\leq} \|g\|_{L,l}.$$

Wegen der Positivität und damit Monotonie von i, folgt daraus $\underline{i}(g) \leq \|g\|_{L,l}$. □

4.1.11 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Integrationsstruktur, so gilt:*

$$\mathcal{M}_{0,L,l} \subset \{M \in \mathcal{M}(\underline{i}) : \underline{i}(M) \in \mathbb{R}\}.$$

Beweis. $\underline{\mathcal{M}_{0,L,l} \subset \mathcal{M}(\underline{i})}$: Sei $A \in \mathcal{M}_{0,L,l}$, also $1_A \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$. Wegen Lemma 1 (iv) in [11] genügt der Nachweis von

$$(\forall B \in \mathcal{P}(Y)) \quad \underline{i}(B) \leq \underline{i}(B \cap A) + \underline{i}(B \backslash A). \tag{1}$$

Wir betrachten dazu die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $\underline{i}(B) < \infty$, so existiert nach Lemma 7 in [11] ein $M_0 \in \mathcal{M}_0 \underset{Lemma\,4.1.6}{\subset} \mathcal{M}_{0,L,l}$ mit

$$M_0 \subset B, \quad i^L(M_0) = \underline{i}(B). \tag{2}$$

Wegen $M_0, A \in \mathcal{M}_{0,L,l}$ sind dann nach Satz 4.1.1 auch $1_{M_0 \cap A}, 1_{M_0 \backslash A} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$ mit $1_{M_0 \cap A}, 1_{M_0 \backslash A} \leq 1_{M_0} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$. Nach Lemma 3.3.4 sind $1_{M_0 \cap A}, 1_{M_0 \backslash A} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ mit

$$i^L(1_{M_0 \cap A}) = \underline{i}(1_{M_0 \cap A}) \in \mathbb{R}, \quad i^L(1_{M_0 \backslash A}) = \underline{i}(1_{M_0 \backslash A}) \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Daher folgt (1) mit Lemma 1 in [11] aus

$$\begin{aligned} \underline{i}(B) &\underset{(2)}{=} i^L(M_0) \underset{M_0, A \in \mathcal{M}_{0,L,l}}{=} i^L(M_0 \cap A) + i^L(M_0 \backslash A) \\ &\underset{(3)}{=} \underline{i}(M_0 \cap A) + \underline{i}(M_0 \backslash A) \underset{(2)}{\leq} \underline{i}(B \cap A) + \underline{i}(B \backslash A). \end{aligned}$$

b) Sei $\underline{i}(B) = \infty$. Da i positiv ist, sind $\underline{i}(B \cap A)$ und $\underline{i}(B \backslash A)$ nicht-negativ. Es genügt daher $\underline{i}(B \backslash A) = \infty$ zum Nachweis von (1) zu zeigen. Sei nun $e \in \mathcal{E}^{fin}$ mit $e \leq 1_B$ beliebig aber fest gewählt. O.B.d.A. sei $e \geq 0$ (i positiv). Dann gilt mit Lemma 1 in [11]

$$\begin{aligned} {}^\circ i(e) &= \underline{i}(e) \underset{Lemma\,1,[11]}{\leq} \overline{i}(e1_A) + \underline{i}(e1_{B \backslash A}) \underset{Lemma\,1.2.15}{=} \|e1_A\|_L + \underline{i}(e1_{B \backslash A}) \\ &\underset{Satz\,3.3.1}{=} \|e1_A\|_{L,l} + \underline{i}(e1_{B \backslash A}) \underset{0 \leq e \leq 1_B}{\leq} \|1_{A \cap B}\|_{L,l} + \underline{i}(1_{B \backslash A}) \\ &\leq \|1_A\|_{L,l} + \underline{i}(1_{B \backslash A}). \end{aligned}$$

Da $e \in \mathcal{E}^{fin}$ mit $e \leq 1_B$ beliebig war, folgt daraus

$$\infty = \underline{i}(B) \leq \|1_A\|_{L,l} + \underline{i}(1_{B \backslash A}).$$

Nach Lemma 1.1.16 ist aber $\|1_A\|_{L,l} < \infty$. Folglich gilt $\underline{i}(1_{B \backslash A}) = \infty$.

Aus a) und b) folgt nun insgesamt (1).

Der Rest der Behauptung folgt wegen der Positivität von i aus

$$(\forall A \in \mathcal{M}_{0,L,l}) \quad 0 \leq \underline{i}(1_A) \underset{Lemma\,4.1.10}{\leq} \|1_A\|_{L,l} \underset{Korollar\,1.1.15}{=} i^L(1_A) \in [0, \infty[. \qquad \square$$

Betrachtet man das untere Loeb-Integral einer internen Stoneschen Integrationsstruktur, so ist $(Y, \mathcal{M}(\underline{i}), \underline{i})$ ein vollständiger Maßraum (vgl. Theorem 4, [11]). Landers und Rogge [11] zeigen, dass das System der bzgl. $\underline{i}|\mathcal{M}(\underline{i})$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen das System der Loeb-integrierbaren Funktionen umfasst. Aufgrunddessen stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob ein solcher Zusammenhang auch zwischen dem System der bzgl. $(Y, \mathcal{M}(\underline{i}), \underline{i})$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen und dem System der lokal Loeb-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$ besteht. Eine positive Antwort auf diese Frage liefert Satz 4.1.13. Zum Beweis von Satz 4.1.13 benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

4.1.12 Hilfssatz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Integrationsstruktur und bildet man die Standardisierung mit der lokalen Loeb-Integralnorm $\|\cdot\|_{L,l}$, so gilt:*

$$(\forall\, 0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l}))\ (\forall\, r \in]0, \infty[) \quad \{f > r\} \in \mathcal{M}_{0,L,l}. \tag{4.3}$$

Beweis. Wegen der Subadditivität und Monotonie der Integralnorm, folgt (4.3) aus Lemma 1.1.16 und Satz 4.1.3. □

4.1.13 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Stonesche Integrationsstruktur, so gilt:*

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l}) \subset \{f \in \mathbb{R}^Y : f \textit{ ist } \underline{i}|\mathcal{M}(\underline{i})\textit{-Lebesgue integrierbar}\}.$$

Für jedes $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$ ist $i^L(f) \geq \int f\, d\underline{i}$.

Beweis. Es genügt den Nachweis für $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_{L,l})$ zu führen. Nach Hilfssatz 4.1.12 und Satz 4.1.11 gilt für $r \in]0, \infty[$

$$\{f > r\} \in \mathcal{M}_{0,L,l} \subset \mathcal{M}(\underline{i}). \tag{1}$$

Da $\mathcal{M}_{0,L,l}$ ein δ-Ring ist (vgl. Lemma 4.1.4), ist folglich f $\mathcal{M}(\underline{i})$-messbar. Wegen (1) existieren $f_n := \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{i,n} 1_{M_{i,n}}$ mit $M_{i,n} \in \mathcal{M}_{0,L,l}$, $\alpha_{i,n} \in \mathbb{R}_+$ und $f_n \uparrow f$. Aus Satz 2.1.1 und den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \ni i^L(f) &\underset{Satz\, 2.1.1}{=} \lim_{n\to\infty} i^L(f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{i,n}\, i^L(1_{M_{i,n}}) \\
&\underset{Korollar\, 1.1.15}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{i,n}\, \|1_{M_{i,n}}\|_{L,l} \underset{Lemma\, 4.1.10}{\geq} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} \alpha_{i,n}\, \underline{i}(1_{M_{i,n}}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int f_n d\underline{i} = \int f d\underline{i} \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Kapitel 5

Interne normierte Räume und topologische Vektorverbände

Loeb und Osswald haben in [20] die Konstruktion des von Loeb [7] angegebenen Loeb-Integrals verallgemeinert und eine Integrationstheorie in topologischen Vektorverbänden entwickelt. Grundlage der Betrachtungen sind zwei interne topologische Vektorverbände B und D. Ausgehend von einem internen Vektorverband $\mathcal{E} \subset B^Y$ und einem internen, positiv linearen Funktional $i : \mathcal{E} \to D$, konstruieren Loeb und Osswald ein Integral auf einem Teilsystem von $\widehat{B}^Y$, welches Werte in $\widehat{D}$, der Nichtstandardhülle des Bildraumes, annimmt und das monotone Konvergenztheorem erfüllt. Sind $B = D = {}^*\mathbb{R}$, so ist $\widehat{B} = \widehat{D} = \mathbb{R}$, und wir erhalten als Spezialfall das bisherige Loeb-Integral und das bisherige System der Loeb-integrierbaren Funktionen.

In diesem Kapitel wird eine Integrationstheorie mittels der Verwendung von geeigneten Integralnormen entwickelt. Dabei wird sich zeigen, dass dieser Ansatz einen Zugang zu dem von Loeb und Osswald konstruierten „standardisierten“ System liefert. Die Vorteile der Integrationstheorie mittels Integralnormen sind dabei die Folgenden: Erstens besteht die Möglichkeit auch dann ein standardisiertes System zu bilden, wenn das interne, lineare Funktional als nicht positiv gegeben ist. Zweitens besteht durch die Verwendung unterschiedlicher Integralnormen die Möglichkeit der Gewinnung verschiedener standardisierter Systeme. Drittens läßt sich die Integrationstheorie mittels Integralnormen so allgemein formulieren, dass die Gewinnung von standardisierten Systemen auch unter anderen, schwächeren, als den von Loeb und Osswald geforderten Bedingungen möglich ist.
Ferner werden wir zum Abschluss dieses Kapitels ein monotones Konvergenztheorem für das standardisierte System herleiten, welches das Konvergenztheorem von Loeb und Osswald verallgemeinert. Zum einen gilt dieser Konvergenzsatz auch ohne die von Loeb und Osswald vorausgesetzte Positivität des gegebenen internen Integrals und zum anderen gilt er allgemein für standardisierte Systeme, welche durch die Verwendung geeigneter Integralnormen gebildet worden sind.

Zunächst wird jedoch die Konstruktion von Loeb und Osswald kurz erläutert.

5.1 Konstruktion von Loeb und Osswald

Zuerst werden einige grundlegende Definitionen und Ergebnisse der Standardtheorie angegeben, die später Anwendung finden. Hierzu sei auf Köthe [9], Kelley, Namioka [8], Peressini [21] und Robertson [23] verwiesen. Wir führen zunächst den Begriff eines topologischen Vektorverbandes bzw. Rieszschen Raumes ein, wie er in der Literatur auch häufig bezeichnet wird (siehe z.B. Luxemburg, Zaanen [10]).

5.1.1 Definition. Ein System $(B, +, \cdot, \mathcal{U}, \leq)$ mit einem $\mathbb{R}$-Vektorraum B, einer Filterbasis $\mathcal{U}$ und einer partiellen Ordnung „$\leq$“, d. h. einer reflexiven, antisymmetrischen, transitiven Relation, heißt *topologischer Vektorverband* [1], wenn gilt:

(i) $(B, \leq)$ ist ein *geordneter Vektorraum*; d.h. es gilt:

$$(\forall\, a, b, c \in B)\, (\forall\, 0 \leq \lambda \in \mathbb{R})\ a \leq b \implies a + c \leq b + c,\ \lambda a \leq \lambda b.$$

(ii) *Verbandseigenschaft*: Für zwei beliebige Elemente $a, b \in B$ existieren Elemente $s, i \in B$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $a \leq s,\ b \leq s;\ i \leq a,\ i \leq b,$

b) $(\forall c, d \in B)\ c \leq a \leq d,\ c \leq b \leq d \Longrightarrow s \leq d;\ c \leq i.$

Ein solches Element s bzw. i ist eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen es mit Supremum (kleinste obere Schranke) von a und b in B, im Zeichen $a \vee b$ $(= \sup(a, b))$, bzw. mit Infimum (größte untere Schranke) von a und b in B, im Zeichen $a \wedge b$ $(= \inf(a, b))$.

(iii) 1) $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$;

2) $(\forall U \in \mathcal{U})\ (\exists V \in \mathcal{U})\ V + V \subset U$;

3) $(\forall U \in \mathcal{U})\ (\forall b \in B)\ (\exists n \in \mathbb{N})\ b \in nU$;

4) $(\forall U \in \mathcal{U})\ (\exists V \in \mathcal{U})\ (\forall \alpha \in [-1, 1])\ \alpha V \subset U$;

Es existiert eine zu $\mathcal{U}$ äquivalente Filterbasis $\mathcal{V}$ (d.h. $\mathcal{V}$ ist eine Filterbasis mit $(\forall U_1 \in \mathcal{U})\ (\exists V_1 \in \mathcal{V})\ V_1 \subset U_1$, $(\forall V_2 \in \mathcal{V})\ (\exists U_2 \in \mathcal{U})\ U_2 \subset V_2$), die (iii)1)-(iii)3) (mit $\mathcal{V}$ anstatt $\mathcal{U}$) erfüllt und die aus *semi-soliden*[2] Mengen besteht; dabei bedeutet letzteres, dass für jedes $V \in \mathcal{V}$ gilt:

5) V ist *absolut ordnungskonvex*, d.h. für jedes $0 \leq v \in V$ gilt:

$$[-v, v] \;:=\; \underbrace{\{b \in B : b \vee (-b) \leq v\}}_{=\{b \in B: -v \leq b \leq v\}} \subset V;$$

[1] zur Definition siehe Loeb, Osswald [20] oder auch Wong, Ng [29], Peressini [21]

[2] vgl. Loeb, Osswald [20], S.6

6) V ist *kreisförmig*, d.h. es gilt:

$$(\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \leq 1) \quad \lambda \cdot V \subset V.$$

5.1.2 Bemerkung. Ist $(B, +, \cdot, \mathcal{U}, \leq)$ ein topologischer Vektorverband, so lässt sich auf B durch die Umgebungen $U(b) = b + U$, $U \in \mathcal{U}$, eine Topologie $\mathcal{T}$ erklären durch

$$\mathcal{T} := \{O \subset B : (\forall\, b \in O)(\exists\, U \in \mathcal{U})\ U(b) = b + U \subset O\}.$$

Die Topologie $\mathcal{T}$ über B ist dann separiert (d.h. sie erfüllt das Hausdorffsche Trennungsaxiom) und ist mit den linearen Operationen verträglich (d.h. die algebraischen Operationen der Addition und Skalarmultiplikation sind stetig). $(B, \mathcal{T})$ ist folglich ein separierter topologischer Vektorraum mit Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$.
Es sei vermerkt, dass umgekehrt ein separierter topologischer Vektorraum stets eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{V}$ besitzt, die Bedingung (iii)1)-(iii)4),(iii)6) von Definition 5.1.1 erfüllt.

Für einen topologischen Vektorverband $(B, +, \cdot, \mathcal{U}, \leq)$ definieren wir die Verbandsoperationen, wie üblich, durch

$$\begin{aligned} a^+ &:= (a \vee 0) \in B, \quad a^- := ((-a) \vee 0) \in B, \\ |a| &:= a \vee (-a) = (a^+ + a^-) \in B. \end{aligned}$$

a^+ bzw. a^- nennt man den *Positivteil* bzw. *Negativteil* von a. $|a|$ bezeichnet man als *Verbandsabsolutbetrag*. Insbesondere gilt

$$(\forall a, b \in B) \quad |a + b| \leq |a| + |b|, \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|, \quad a \vee b = -((-a) \wedge (-b)).$$

Weitere grundlegende Eigenschaften von topologischen Vektorverbänden findet man u. a. in Peressini [21].

5.1.3 Bemerkung. Es sei darauf hingewiesen, dass man üblicherweise[3] für einen topologischen Vektorverband die stärkere Annahme voraussetzt, dass eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{V}$ aus soliden Mengen existiert, da dies die Stetigkeit der Verbandsoperationen sichert. Dabei heißt eine Teilmenge $A \subset B$ solid[4], wenn gilt:

$$(\forall a \in A) \quad \{b \in B : |b| \leq |a|\} \subset A.$$

Jede solide Menge ist also insbesondere semi-solid. Im Folgenden werden wir jedoch der Notation von Loeb und Osswald folgen und anstatt der Forderung nach einer Nullumgebungsbasis aus soliden Mengen lediglich die schwächere Forderung nach einer Nullumgebungsbasis aus semi-soliden Mengen verwenden.

[3] vgl. z.B. Peressini [21]

[4] vgl. Loeb, Osswald [20], S.6

Ausgangspunkt der Integrationstheorie von Loeb und Osswald ist ein interner topologischer Vektorverband, der nicht unbedingt das Sternbild eines Standardraumes sein muss. Sei daher im Folgenden S eine gegebene nicht-leere Menge von Urelementen und $\hat{S} = \bigcup_{n\geq 0} S_n$ die zugehörige Superstruktur über S, die $\mathbb{R}$ und die topologischen Vektorverbände enthält, die im Folgenden betrachtet werden sollen. Wie bereits in den vorangehenden Kapiteln sei auch hier wieder eine Nichtstandardeinbettung vorausgesetzt, die $\hat{S}$-kompakt ist.

5.1.4 Bemerkung. Sei $\mathcal{F} \subset S_n$ für ein $n \geq 1$ und sei

$$\mathcal{F} = \text{ Menge aller topologischen Vektorverbände, die in } S_n \text{ liegen.}$$

Nach dem Transferprinzip ist daher jedes $(B, +, \cdot, \mathcal{U}, \leq) \in {}^*\mathcal{F}$ ein interner topologischer Vektorverband. Konkret gilt also:

(i) $(B, +, \cdot)$ ist interner Vektorraum über ${}^*\mathbb{R}$ (d.h. $(B, +, \cdot)$ ist intern und ein Vektorraum über ${}^*\mathbb{R}$).

(ii) „$\leq$“ ist eine interne, reflexive, transitive, antisymmetrische Relation und macht $(B, \leq)$ zu einem internen geordneten Vektorraum mit Verbandseigenschaft. Insbesondere sind dann $\inf, \sup : B \times B \to B$ interne Abbildungen. Folglich ist auch die Betragsfunktion $|\cdot| : B \to B$ eine interne Abbildung.

(iii) $\mathcal{U}$ ist eine interne Filterbasis mit

1) $\bigcap_{U\in\mathcal{U}} U = \{0\}$
2) $(\forall\, U \in \mathcal{U})\ (\exists\, V \in \mathcal{U})\ V + V \subset U$;
3) $(\forall\, U \in \mathcal{U})\ (\forall\, b \in B)\ (\exists\, n \in {}^*\mathbb{N})\ b \in nU$;
4) $(\forall U \in \mathcal{U})\ (\exists V \in \mathcal{U})\ (\forall \alpha \in {}^*[-1, 1])\ \alpha V \subset U$.

Es existiert eine zu $\mathcal{U}$ äquivalente interne Filterbasis $\mathcal{V}$ (d.h. $\mathcal{V}$ ist eine interne Filterbasis mit $(\forall U_1 \in \mathcal{U})\ (\exists V_1 \in \mathcal{V})\ V_1 \subset U_1$, $(\forall V_2 \in \mathcal{V})\ (\exists U_2 \in \mathcal{U})\ U_2 \subset V_2$), die (iii)1)-(iii)3) (mit $\mathcal{V}$ anstatt mit $\mathcal{U}$) erfüllt und für die gilt:

5) $(\forall\, V \in \mathcal{V})\ (\forall\, 0 \leq v \in \mathcal{V})\ [-v, v] := \{b \in B : |b| \leq v\} \subset V$;
6) $(\forall\, V \in \mathcal{V})\ (\forall\, \lambda \in {}^*[-1, 1])\ \lambda V \subset V$.

Im Folgenden seien nun:

- $(B, +, \cdot, \mathcal{U}, \leq)$ ein interner topologischer Vektorverband über ${}^*\mathbb{R}$ mit einer internen Filterbasis $\mathcal{U}$, die aus internen semi-soliden Mengen besteht (d.h. $\mathcal{U}$ erfüllt die Eigenschaften von Bemerkung 5.1.4(iii)1)-(iii)6));
- $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ eine $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis.

Dabei heißt eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ von externer Kardinalität kleiner als die Kardinalität der Saturation eine $\mathbb{R}$-*Nullumgebungsbasis*[5], wenn gilt:

(i) $(\forall U, V \in \mathcal{U}_0)\ (\exists W \in \mathcal{U}_0)\ W \subset U \cap V$;

(ii) $(\forall U \in \mathcal{U}_0)\ (\exists W \in \mathcal{U}_0)\ W + W \subset U$.

Da $\mathcal{U}$ eine interne Filterbasis ist, umfasst der Durchschnitt zweier Mengen U, V aus $\mathcal{U}$ stets eine Menge $W \in \mathcal{U}$. Insofern ist die Definition einer $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis sinnvoll. Aus Bedingung (ii) folgt auch

$$(\forall U \in \mathcal{U}_0)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists W \in \mathcal{U}_0) \quad n \cdot W \subset U.$$

Da jedes $W \in \mathcal{U}_0$ kreisförmig ist, gilt daher $\alpha W \subset U$ für jedes $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ mit $|\alpha| \leq n$.

Im nächsten Beispiel betrachten wir einen internen normierten Raum. Dazu setzen wir zusätzlich voraus, dass die Superstruktur die normierten Räume enthält, die im Folgenden betrachtet werden. Bezeichne $\mathcal{F} \subset S_n$ für ein $n \geq 1$ die Menge aller normierten Räume, die in S_n liegen. Dann ist jedes $B \in {}^*\mathcal{F}$ intern und nach dem Transferprinzip ist jedes B ein *interner normierter Raum*. Konkret ist B ein interner Vektorraum über ${}^*\mathbb{R}$ (d.h. $(B, +, \cdot)$ ist intern und ein Vektorraum über ${}^*\mathbb{R}$), der mit einer internen Norm $|\cdot|_B$ ausgestattet ist; dabei ist eine *interne Norm* eine interne Funktion $|\cdot|_B : B \to {}^*[0, \infty[$, die die üblichen Normeigenschaften erfüllt (d.h. es gilt $|b|_B = 0 \Leftrightarrow b = 0$, $|b_1 + b_2|_B \leq |b_1|_B + |b_2|_B$, $|\alpha b|_B = |\alpha|\,|b|_B$ für jedes $b, b_1, b_2 \in B$, $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$).

5.1.5 Beispiel.[6] Sei $(B, +, \cdot, |\cdot|_B, \leq)$ ein interner normierter Vektorverband, d.h. $(B, +, \cdot, |\cdot|_B)$ ist ein interner normierter Vektorraum über ${}^*\mathbb{R}$ und $\leq$ ist eine interne, reflexive, transitive, antisymmetrische Relation, die $(B, \leq)$ zu einem internen geordneten Vektorraum mit Verbandseigenschaft macht. Dann ist durch die interne Norm eine interne Filterbasis gegeben durch

$$\mathcal{U} := \{U_\varepsilon(0) : \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+\} \quad \text{mit} \quad U_\varepsilon(0) := \{b \in B : |b|_B < \varepsilon\},$$

die die Bedingungen 5.1.4(iii)1)-4), (iii)6) erfüllt. Es gilt ferner:

$$(\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R})\ U_\varepsilon(0) \text{ semi-solid} \iff (\forall a, b \in B)\ |b| \leq a \Rightarrow |b|_B \leq |a|_B; \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}(\forall \varepsilon \in {}^*\mathbb{R})\ U_\varepsilon(0) \text{ solid} \iff\ & |\cdot|_B \text{ ist eine Riesz-Norm, d.h. es gilt:} \\ & (\forall a, b \in B)\ |b| \leq |a| \Rightarrow |b|_B \leq |a|_B.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Wir nehmen an, dass das System $\mathcal{U}$ aus semi-soliden Mengen besteht. Als externe $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis läßt sich dann die Menge $\mathcal{U}_0 := \{U_{\frac{1}{n}}(0) : n \in \mathbb{N}\}$ wählen.

Auf Basis der $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}_0$ lassen sich nun die beschränkten und infinitesimalen Elemente von B definieren.

[5] vgl. Loeb, Osswald [20]

[6] vgl. Loeb, Osswald [20]

5.1.6 Definition. Ein Element $a \in B$ heißt *($\mathcal{U}_0$)-beschränkt*, wenn gilt:

$$(\forall\, U \in \mathcal{U}_0)\ (\exists\, n \in \mathbb{N}) \quad |a| \in n \cdot U.$$

Ein Element $a \in B$ heißt *($\mathcal{U}_0$)-infinitesimal*, wenn gilt:

$$(\forall\, U \in \mathcal{U}_0) \quad |a| \in U.$$

Sind $a, b \in B$ mit $a - b$ infinitesimal, so schreiben wir auch $a \approx b$. Es bezeichne $\mathcal{U}_0$-Lmd B im Folgenden die Menge der ($\mathcal{U}_0$)-beschränkten Elemente von B.

Mit den obigen Bezeichnungen gilt im Beispiel 5.1.5 für $a \in B$:

$$\begin{aligned} a\,\mathcal{U}_0\text{-beschränkt} \quad &\iff \quad (\exists n \in \mathbb{N}) \,|\, |a|\, |_B \leq n, \\ a\,\mathcal{U}_0\text{-infinitesimal} \quad &\iff \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \,|\, |a|\, |_B \leq \tfrac{1}{n}, \\ \mathcal{U}_0\text{-Lmd } B \quad &= \quad \{a \in B : |\, |a|\, |_B \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir im Spezialfall $B = {}^*\mathbb{R}$ die üblichen Notationen.

Es gilt nun nach Lemma 2.2 in Loeb, Osswald [20]:

5.1.7 Lemma. *Sind $\lambda, \lambda' \in fin({}^*\mathbb{R})$, $a, b, a', b' \in B$ mit $\lambda \approx \lambda'$, $a \approx a'$ und $b \approx b'$, so gilt auch:*

$$a + b \approx a' + b',\ a \wedge b \approx a' \wedge b',\ a \vee b \approx a' \vee b',\ |a| \approx |a'|.$$

Ist $\lambda = \lambda'$ oder $a \in \mathcal{U}_0$-Lmd $B := \{b_1 \in B : b_1$ ist $\mathcal{U}_0$-beschränkt$\}$, so gilt auch $\lambda a \approx \lambda' a'$.

Loeb und Osswald zeigen, dass $\mathcal{U}_0$-Lmd B ein $\mathbb{R}$-Untervektorverband von B ist. Ein solcher ist wie folgt definiert[7]:

5.1.8 Definition. $\emptyset \neq B_0 \subset B$ heißt $\mathbb{R}$-*Untervektorverband von B*, wenn für $a, b \in B_0$, $c \in B$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{gathered} a + b,\ \lambda \cdot a,\ a \vee b,\ a \wedge b \in B_0, \\ a \leq c \leq b \Longrightarrow (\exists\, c_1 \in B_0)\, c_1 \approx c. \end{gathered}$$

Bevor wir nun zur Konstruktion der Nichtstandardhülle kommen, benötigen wir noch die folgende Schreibweise.

5.1.9 Lemma. *Sind $a, b \in B$, so schreibe $a \overset{\sim}{\leq} b$, falls eine der äquivalenten Bedingungen gilt:*

(i) $a \vee b \approx b$;

[7] vgl. Loeb, Osswald [20]

(ii) $a \wedge b \approx a$;

(iii) $(\forall a_1 \in B, a_1 \approx a)\,(\exists b_1 \in B)\, b_1 \approx b,\ a_1 \leq b_1$;

(iv) $(\forall b_1 \in B, b_1 \approx b)\,(\exists a_1 \in B)\, a_1 \approx a,\ a_1 \leq b_1$.

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen folgt aus Lemma 2.3 in [20]. □

5.1.10 Bemerkung. (i) Ist B_0 ein $\mathbb{R}$-Untervektorverband von B, so gilt für $a, b \in B_0$ und $c \in B$

$$a \overset{\sim}{\leq} c \overset{\sim}{\leq} b \implies (\exists c_0 \in B_0, c_1 \in B) \quad a \wedge b \leq c_1 \leq a \vee b,\ c_0 \approx c_1 \approx c.$$

(Man betrachte beispielsweise $c_0 := ((a \wedge b) \vee c) \wedge (a \vee b)$.)
(ii) Im Fall $B = {}^*\mathbb{R}$ ist beispielsweise $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorverband von ${}^*\mathbb{R}$.

Im Folgenden sei nun die zusätzliche Annahme gültig:

- $\emptyset \neq B_0 \subset \mathcal{U}_0$-Lmd B sei $\mathbb{R}$-Untervektorverband von B.

Die Annahme einer internen, semi-soliden (nicht unbedingt soliden) Nullumgebungsbasis gewährleistet i. Allg. nicht die interne Stetigkeit der Verbandsoperationen.[8] Allerdings sind, wie Loeb und Osswald in ihrem Lemma 2.2 zeigen, sowohl die Operationen $\vee, \wedge, |\cdot|, +$ als auch die skalare Multiplikation mit Elementen aus $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ $\mathcal{U}_0$-stetig.

Nachfolgend konstruieren wir nun die Nichtstandardhülle von B, B_0 und $\mathcal{U}_0$. Den Notationen und Definitionen von Loeb, Osswald [20] folgend, setzt man dazu:

$$\begin{aligned}
\overline{b} &:= \{a \in B : a \approx b\} \text{ für } b \in B,\\
\widehat{B_0} &:= \{\overline{b} : b \in B, \overline{b} \cap B_0 \neq \emptyset\},\\
\widehat{V} &:= \{\overline{b} \in \widehat{B_0} : \overline{|b|} \subset V\} \text{ für } V \in \mathcal{U}_0,\\
\widehat{\mathcal{U}_0} &:= \{\widehat{V} : V \in \mathcal{U}_0\}.
\end{aligned}$$

In üblicher Weise werden nun für $\overline{a}, \overline{b} \in \widehat{B_0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, Verknüpfungen definiert durch

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b},\ \alpha \cdot \overline{b} := \overline{\alpha \cdot b} \text{ und } \overline{a} \leq \overline{b}, \text{ falls } a \overset{\sim}{\leq} b \text{ gilt.}$$

Im Fall $B_0 = \mathcal{U}_0$-Lmd B gilt also $\widehat{B_0} = \{\overline{b} : b \in \mathcal{U}_0\text{-Lmd } B\} =: \widehat{B}$.

Nach Theorem 2.5 in Loeb, Osswald [20] gilt:

5.1.11 Satz. *Die sogenannte „$\mathcal{U}_0$-Nichtstandardhülle von B_0“ $(\widehat{B_0}, +, \cdot, \widehat{\mathcal{U}_0}, \leq)$ ist ein topologischer Vektorverband mit $|\overline{b}| = \overline{|b|}$, $\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \vee b}$ und $\overline{a} \wedge \overline{b} = \overline{a \wedge b}$ für $a, b \in B$ mit $\overline{b} \cap B_0 \neq \emptyset$, $\overline{a} \cap B_0 \neq \emptyset$. Ferner besteht $\widehat{\mathcal{U}_0}$ aus soliden Mengen.*

[8] vgl. Peressini [21], S. 104

Ferner zeigen Loeb und Osswald die nachfolgende Äquivalenz von Supremum und Grenzwert von monoton wachsenden Folgen in $\widehat{B_0}$ (vgl. Proposition 2.6, [20]).

5.1.12 Proposition. *Ist $(\overline{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\widehat{B_0}$ und $\overline{a} \in \widehat{B_0}$, so sind äquivalent:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \overline{a}$*;*

(ii) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \overline{a}_n$ *existiert in* $\widehat{B_0}$ *und ist gleich* $\overline{a}$*.*

Auf diesem Komplex aufbauend konstruieren Loeb und Osswald ihre Nichtstandardintegrationstheorie. Dazu werden noch die folgenden Voraussetzungen benötigt:

- $(D, +, \cdot, \mathcal{W}, \leq)$ interner topologischer Vektorverband über ${}^*\mathbb{R}$;
- $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis;
- $\emptyset \neq D_0 \subset \mathcal{W}_0$-Lmd D ein $\mathbb{R}$-Untervektorverband von D;
- $(\widehat{D_0}, +, \cdot, \widehat{\mathcal{W}_0}, \leq)$ $\mathcal{W}_0$-Nichtstandardhülle von D_0;
- $Y \neq \emptyset$ interne Menge;
- $\mathcal{E} \subset B^Y$ interner Vektorverband über ${}^*\mathbb{R}$; (d.h. $\mathcal{E}$ ist ein interner Vektorraum über ${}^*\mathbb{R}$ mit $e_1 \vee e_2, e_1 \wedge e_2 \in \mathcal{E}$ für $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$);
- $i : \mathcal{E} \to D$ interne, positive, ${}^*\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Darauf aufbauend werden nun ähnlich wie im Kapitel 1 definiert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &:= \{h \in B^Y\colon (\forall\, V \in \mathcal{W}_0)\, (\exists\, \phi \in \mathcal{E})\ |h| \leq \phi,\ i(\phi) \in V\} \\
&= \text{„Menge der Nullfunktionen“}, \\
\mathcal{L}_1 &:= \{f \in \widehat{B_0}^{Y}\colon (\exists\, \phi \in \mathcal{E})\, (\exists\, h \in \mathcal{L}_0)\, (\forall\, y \in Y)\ \overline{\phi + h}(y) := \overline{\phi(y) + h(y)} = f(y)\}, \\
\widetilde{\mathcal{L}_0} &:= \{h \in B^Y\colon (\forall\, V \in \mathcal{W}_0)\, (\exists\, 0 \leq \phi \in \mathcal{E})\ |h| \stackrel{\sim}{\leq} \phi,\ i(\phi) \in V\} \\
&= \text{„Menge der schwachen Nullfunktionen“}.
\end{aligned}$$

Ist $f = \overline{\phi + h} \in \mathcal{L}_1$, so heißt $\phi \in \mathcal{E}$ *interner Repräsentant* von f.

Insbesondere ist $0 \in \mathcal{L}_1$. Ist ferner $g \in {B_0}^Y$ und $g \in \mathcal{E}$, so gilt auch $\overline{g} \in \mathcal{L}_1$ (wegen $\overline{g}(y) = \{b \in B : b \approx g(y)\} \ni g(y)$ ist nämlich $\overline{g}(y) \cap B_0 \neq \emptyset$).

Nach Proposition 3.1 in [20] gilt:

5.1.13 Proposition. *$\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ sind Vektorverbände über $\mathbb{R}$. Sind e_1 bzw. e_2 die internen Repräsentanten von f_1 bzw. f_2 aus $\mathcal{L}_1$, so ist $e_1 \wedge e_2$ interner Repräsentant von $f_1 \wedge f_2$ und $e_1 \vee e_2$ interner Repräsentant von $f_1 \vee f_2$. Ferner existiert zu jeder abzählbaren Teilmenge $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{L}_0$ ein $h \in \mathcal{L}_0$ mit $|h_n| \leq h$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Zur Konstruktion eines standardisierten Funktionals benötigt man ferner noch die folgende stärkere Annahme für das Integral i (vgl. Loeb, Osswald [20]):

- i sei $(\mathcal{U}_0,)\mathcal{W}_0$-stetig; d.h. es gelte: $(\forall\, e \in \mathcal{E})\; e \approx 0 \Longrightarrow i(e) \approx 0$.

Die Forderung der $(\mathcal{U}_0), \mathcal{W}_0$-Stetigkeit des Integrals ist zur Konstruktion des standardisierten Systems notwendig. Ist nämlich $f = \overline{\phi + h} \in \mathcal{L}_1$ gegeben, so soll ein Integralwert von f in der Nichtstandardhülle von D unter Verwendung des Wertes $i(\phi)$ konstruiert werden. Dazu benötigt man, dass diese Abbildung wohldefiniert ist; d.h. gilt auch $f = \overline{\psi + j} \in \mathcal{L}_1$, so muss $i(\phi) \approx i(\psi)$ folgen. In diesem Fall ist aber $\phi - \psi = h - j + \varepsilon$, wobei $\varepsilon \approx 0$ punktweise gilt. Somit benötigen wir die Aussage $i(\lambda) \approx 0$, falls $\lambda \in \mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}_0}$ ist. Diese Annahme ist zur Forderung der $\mathcal{W}_0$-Stetigkeit des Integrals äquivalent, wie die nächste Proposition zeigt (vgl. Proposition 3.2, [20]).

5.1.14 Proposition. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *i ist $\mathcal{W}_0$-stetig.*

(ii) *Für jede punktweise $\mathcal{U}_0$-beschränkte Funktion $e \in \mathcal{E}$ ist $i(e)$ $\mathcal{W}_0$-beschränkt.*

(iii) *Sind $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ mit $e_1 \mathrel{\widetilde{\leq}} e_2$, so gilt auch $i(e_1) \mathrel{\widetilde{\leq}} i(e_2)$.*

(iv) *Für jedes $e \in \mathcal{E} \cap \widetilde{\mathcal{L}_0}$ gilt $i(e) \approx 0$.*

Insbesondere ist also unter der Annahme der $\mathcal{W}_0$-Stetigkeit von i für jede (punktweise) $\mathcal{U}_0$-beschränkte Funktion $g \in \mathcal{E}$ auch $i(g) \in \mathcal{W}_0$-Lmd D.

In Proposition 3.3 und 3.4 zeigen Loeb und Osswald [20]:

5.1.15 Proposition. *(i)* *Sind $e \in \mathcal{E}$ und $h \in \mathcal{L}_0$ mit $e + h$ ist punktweise $\mathcal{U}_0$-beschränkt, so ist $i(e)$ $\mathcal{W}_0$-beschränkt.*

(ii) *Zu jedem $g \in \widetilde{\mathcal{L}_0}$ existiert ein $h \in \mathcal{L}_0$ mit $h \approx g$ punktweise. Ist also $f \in \widehat{B_0}^Y$ und sind $\phi \in \mathcal{E}$ und $g \in \widetilde{\mathcal{L}_0}$ mit $\overline{\phi + g}(y) := \overline{\phi(y) + g(y)} = f(y)$ für jedes $y \in Y$, so ist $f \in \mathcal{L}_1$.*

Folglich besitzen die internen Repräsentanten von Funktionen aus $\mathcal{L}_1$ $\mathcal{W}_0$-beschränkte Integrale. Ferner wird die Funktionenklasse $\mathcal{L}_1$ nicht verlassen, wenn $\mathcal{L}_0$ durch die Menge $\widetilde{\mathcal{L}_0}$ ersetzt wird. Zudem ist in Proposition 3.5 in [20] gezeigt worden, dass man, in ähnlicher Weise wie im Satz 1.3.7, Elemente aus $\mathcal{L}_1$ von oben und unten durch Elemente aus $\mathcal{E}$ approximieren kann.

Auf Basis des erläuterten Konstrukts läßt sich nun ein wohldefiniertes, positiv lineares Funktional $i^{\mathcal{L}_1}$ von $\mathcal{L}_1$ in $\widehat{D}$ (dabei bezeichne $\widehat{D}$ die von $\mathcal{W}_0$-Lmd. D gebildete Nichtstandardhülle) definieren durch

$$(\forall f = \overline{\phi + h} \in \mathcal{L}_1 \text{ mit } \phi \in \mathcal{E},\, h \in \mathcal{L}_0) \quad i^{\mathcal{L}_1}(f) := \overline{i(\phi)}.$$

Betrachte dann die Menge der integrierbaren Funktionen

$$\mathcal{L}_1^\circ := \{f \in \mathcal{L}_1 : i^{\mathcal{L}_1}(f) \in \widehat{D}_0\}.$$

Unter Verwendung von Proposition 5.1.12, zeigen Loeb und Osswald [20] das folgende monotone Konvergenztheorem (vgl. Theorem 3.6 in [20]).

5.1.16 Satz (Monotones Konvergenztheorem). *Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}_1^\circ$. Dann gilt:*

(i) *Existiert eine kleinste obere Schranke f der Familie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}_1^\circ$, so existiert auch $\sup i^{\mathcal{L}_1}(f_n)$ in $\widehat{D_0}$ und es gilt $i^{\mathcal{L}_1}(f) = \sup i^{\mathcal{L}_1}(f_n)$.*

(ii) *Gilt punktweise $f := \sup f_n \in \widehat{B_0}^Y$, so ist $f \in \mathcal{L}_1^\circ$ genau dann, wenn $\sup i^{\mathcal{L}_1}(f_n)$ in $\widehat{D_0}$ existiert. In diesem Fall gilt $i^{\mathcal{L}_1}(f) = \sup i^{\mathcal{L}_1}(f_n)$.*

5.2 Standardisierung mittels Integralnormen

Im Folgenden werden unter den Annahmen von Loeb und Osswald standardisierte Systeme auch für interne Systeme $(\mathcal{E}, i)$ konstruiert, bei denen i nicht notwendigerweise als positiv gegeben ist. Dazu wird die Integrationstheorie mittels Integralnormen der vorangehenden Kapitel 1-4 auf allgemeinere Räume abstrahiert.

Zur Bildung von Integralnormen und zur Modellierung der Annahme einer zum Integral i passenden Integralnorm benötigen wir jedoch im Gegensatz zu den Voraussetzungen von Loeb und Osswald [20] die Annahme, dass der Raum D mit einer internen Norm ausgestattet ist. Es wird daher D nicht als interner topologischer Vektorverband, sondern als interner normierter Raum vorausgesetzt (der nicht unbedingt ein Vektorverband sein muss). Ferner werden wir, was die weiteren Voraussetzungen betrifft, zwei unterschiedliche Fälle betrachten. Einerseits soll bei der Entwicklung der standardisierten Systeme an die Konstruktion von Loeb und Osswald angeschlossen werden. Dazu werden wir an die Annahmen der beiden Autoren anknüpfen und $\mathcal{E}$ als internen Vektorverband von Funktionen über Y in den internen topologischen Vektorverband B betrachten. Andererseits läßt sich jedoch auch auf die Verbandsannahme von B verzichten und, ähnlich wie in der Standardwelt eine Fortsetzung konstruiert wird (vgl. [24]), eine Standardisierung entwickeln, indem man den Betrachtungen ein internes Fundamentalsystem $\mathcal{E}$ von Funktionen mit Werten in einem internen normierten Raum B und ein internes Funktional $i : \mathcal{E} \to D$ zu Grunde legt. In diesem Fall kann man beim Standardisierungsprozeß durch Verwendung der gegebenen internen Normen über B und D insbesondere auf Integralnormen über ${}^*[0, \infty[^Y$ zurückgreifen. Wir werden im Folgenden in diesem Kapitel so allgemein vorgehen, dass beide skizzierten Fälle gleichzeitig betrachtet werden.

Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen sind die folgenden Grundannahmen:

- $Y \neq \emptyset$ interne Menge;
- $(D, +, \cdot, |\cdot|_D)$ interner normierter Vektorraum über ${}^*\mathbb{R}$ mit interner Norm $|\cdot|_D$.

Um gelegentlich notwendige, jedoch triviale Fallunterscheidungen zu vermeiden, sei im Folgenden D als nicht-trivial vorausgesetzt, d.h. es gelte $D \neq \{0\}$.

Zur Formulierung des Standardisierungsprinzips wird der Begriff der Nichtstandardhülle verwendet. Es bezeichne für $d \in D$ (siehe auch Wolff in [19])

$$\overline{d} = \{a \in D : a \approx d\} = \{a \in D : |a - d|_D \approx 0\}$$

die Menge aller $a \in D$, die unendlich nahe bei d liegen, bzw. für die $a - d$ infinitesimal ist. Wie üblich bezeichne die Nichtstandardhülle von D mit

$$\begin{aligned} \widehat{D} &:= \widehat{\mathrm{fin}(D)} = \mathrm{fin}(D)/\,\mathrm{ns}(0) \\ &= \{d \in D : |d|_D \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})\}/\{d \in D : |d|_D \approx 0\} \\ &= \{\overline{d} : d \in \mathrm{fin}(D)\} \end{aligned} \tag{5.3}$$

und setze $|\overline{d}|_D := \mathrm{st}(|d|_D)$ für $\overline{d} \in \widehat{D}$. Für $a, d \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$, setzt man ferner

$$\overline{a} + \overline{d} := \overline{a + d}, \quad \alpha \cdot \overline{d} := \overline{\alpha d}. \tag{5.4}$$

Dann ist $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|_D)$ ein (Standard-) Banachraum[9].

5.2.1 Bemerkung. Loeb und Osswald [20] verwenden einen internen topologischen Vektorverband als Zielraum für ihr Integral. Dabei benötigen sie zur Formulierung der Positivität des Integrals i die Annahme einer internen, partiellen Ordnung über D. Auf diese Gegebenheiten angepaßt, verwenden Loeb und Osswald eine Nullumgebungsbasis $\mathcal{W}$ und eine $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ zur Konstruktion ihrer beschränkten und infinitesimalen Elemente, auf deren Basis die Nichtstandardhülle definiert wird. Geben wir uns nun zusätzlich eine interne, partielle Ordnung über D vor, so dass gilt:

> $(D, +, \cdot, |\cdot|_D, \leq)$ ist interner normierter Vektorverband über ${}^*\mathbb{R}$ mit interner Norm $|\cdot|_D$, die (5.1) erfüllt,

so erhält man bedingt durch die gegebene interne Norm die interne Nullumgebungsbasis

$$\mathcal{W} = \{U_\varepsilon(0) : \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}\} \;\text{ mit }\; U_\varepsilon(0) := \{d \in D : |d|_D < \varepsilon\}.$$

Theoretisch ist die Wahl verschiedener $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasen möglich. Wählt man $h \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, so könnte man beispielsweise die Menge $\{U_{\frac{h}{n}}(0) : n \in \mathbb{N}\}$ als $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis betrachten. Da Loeb und Osswald auf Basis der $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis

[9] vgl. Henson, Moore [4] oder Wolff [19]

jedoch die beschränkten und infinitesimalen Elemente definieren, betrachten wir im Folgenden die $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis

$$\mathcal{W}_0 := \{U_{\frac{1}{n}}(0) : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{(vgl. Beispiel 5.1.5).}$$

Wegen $|d|_D \underset{(5.1)}{\leq} |\,|d|\,|_D$ für $d \in D$ und

$$\begin{aligned}
d \in \mathcal{W}_0 - \text{Lmd. } D &\iff d \in D,\ (\forall n \in \mathbb{N})\,(\exists\, m \in \mathbb{N})\ |d| \in m \cdot U_{\frac{1}{n}}(0)\\
&\iff d \in D,\ |\,|d|\,|_D \in \text{fin}({}^*\mathbb{R})\\
&\iff d \in D,\ |d| \in \text{fin}(D),\\
d \in \mathcal{W}_0 - \text{infinitesimal} &\iff d \in D,\ (\forall n \in \mathbb{N})\ |d| \in U_{\frac{1}{n}}(0)\\
&\iff d \in D,\ |\,|d|\,|_D \approx 0\\
&\iff d \in D,\ |d| \in \text{ns}(0),
\end{aligned} \tag{5.5}$$

gilt dann $\mathcal{W}_0 -$Lmd. $D \subset \text{fin}(D)$, $\mathcal{W}_0 -$infinitessimal $\subset \text{ns}(0)$. Dabei gilt „=“, wenn $|d|_D = |\,|d|\,|_D$ für alle $d \in D$ ist, d.h. wenn (5.2) gilt.
Ist neben der internen Norm auch eine interne, partielle Ordnung gegeben, die D zu einem geordneten Vektorraum macht, so ist die Annahme angebracht, dass für $c, d \in D$ mit $c \approx d$ stets auch $|c| \approx |d|$ gilt. Dies läßt sich durch die zusätzliche Voraussetzung $|d|_D = |\,|d|\,|_D$, $d \in D$, an die interne Norm erzielen. Wir modifizieren daher die interne Norm so, dass diese Eigenschaft erfüllt ist. Setzt man nun

$$|d|'_D = |\,|d|\,|_D \text{ für } d \in D,$$

so ist wegen (5.1) auch $|\cdot|'_D$ eine interne Norm über D. Diese erfüllt dann (5.2). Daher ist $(D, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ ein interner normierter Vektorverband mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_0 - \text{Lmd. } D &= \{d \in D : |d|'_D \in \text{fin}({}^*\mathbb{R})\} =: \text{fin}_{|\cdot|'_D}(D),\\
\mathcal{W}_0 - \text{infinitesimal} &= \{d \in D : |d|'_D \approx 0\} =: \text{ns}_{|\cdot|'_D}(0).
\end{aligned}$$

Bildet man für $(D, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ die Nichtstandardhülle, wie oben angegeben, durch

$$\begin{aligned}
\overline{d} &= \{a \in D : |a - d|'_D \approx 0\},\ d \in D,\\
\widehat{D} &:= \widehat{\text{fin}_{|\cdot|'_D}(D)} = \text{fin}_{|\cdot|'_D}(D) / \text{ns}_{|\cdot|'_D}(0)\\
&= \{d \in D : |d|'_D \in \text{fin}({}^*\mathbb{R})\} / \{d \in D : |d|'_D \approx 0\}\\
&= \{\overline{d} : d \in \text{fin}_{|\cdot|'_D}(D)\} = \{\overline{d} : d \in \mathcal{W}_0 - \text{Lmd. } D\}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

und setzt man $|\overline{d}|'_D := \text{st}(|d|'_D)$ für $\overline{d} \in \widehat{D}$, so ist auch

$(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D)$ ein (Standard-) Banachraum[10].

[10]vgl. Henson, Moore [4], Wolff [19], S. 100

Insbesondere stimmen nun $\overline{d}$ (für $d \in D$) und $\widehat{D}$ mit den von Loeb und Osswald [20] angegebenen Nichtstandardhüllen überein (betrachte $D_0 = \mathcal{W}_0$-Lmd. D), deren Konstruktion auf der Topologie beruht, die entsteht, wenn man die internen Umgebungen U durch $\overline{U} = \{d \in D : |d| \in U\}$ ersetzt. Wir betrachten nun die durch die Norm $|\cdot|'_D$ über $\widehat{D}$ gegebene Nullumgebungsbasis

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \{V_{\frac{1}{n}}(0) : n \in \mathbb{N}\} \text{ mit} \\ V_{\frac{1}{n}}(0) &:= \{\overline{d} \in \widehat{D} : |\overline{d}|'_D < \tfrac{1}{n}\} = \{\overline{d} \in \widehat{D} : \mathrm{st}(|d|'_D) = \mathrm{st}(|\,|d|\,|_D) < \tfrac{1}{n}\}. \end{aligned}$$

Für jedes $d \in D$, $n \in \mathbb{N}$, gilt nun

$$\begin{aligned} & \overline{d} \in V_{\frac{1}{n}}(0) \iff \mathrm{st}(|\,|d|\,|_D) < \tfrac{1}{n} \\ \underset{(5.1)}{\iff} \; & (\forall a \in \overline{|d|})\ \mathrm{st}(|\,a\,|_D) \le \mathrm{st}(|\,|a|\,|_D) \le \mathrm{st}(|\,|d|\,|_D) + \underbrace{\mathrm{st}(|\,|a-|d||\,|_D)}_{=0} < \tfrac{1}{n} \\ \underset{(*)}{\iff} \; & |\overline{d}| = \overline{|d|} \subset \{a \in D : |a|_D < \tfrac{1}{n}\} \\ \iff \; & \overline{d} \in \widehat{U_{\frac{1}{n}}(0)} := \{\overline{d} \in \widehat{D} : \overline{|d|} \subset U_{\frac{1}{n}}(0)\}, \end{aligned}$$

dabei ist $\widehat{U_{\frac{1}{n}}(0)}$ die von Loeb und Osswald [20] gebildete Nichtstandardhülle von $U_{\frac{1}{n}}(0)$.

$(*)$: „$\Longrightarrow$" klar. „$\Longleftarrow$" Zu zeigen reicht $\mathrm{st}(|\,|d|\,|_D) < \frac{1}{n}$. Angenommen es wäre $\overline{|d|} \subset \{a \in D : |a|_D < \frac{1}{n}\}$ und $\mathrm{st}(|\,|d|\,|_D) = \frac{1}{n}$. Dann wäre wegen

$$\Big|\frac{\frac{1}{n}|d|}{|\,|d|\,|_D} - |d|\,\Big|'_D = \underbrace{\Big|\frac{\frac{1}{n}}{|\,|d|\,|_D} - 1\Big|}_{\approx 0} \cdot \underbrace{|\,|d|\,|_D}_{\in \mathrm{fin}(^*\mathbb{R})} \approx 0$$

auch $\frac{\frac{1}{n}|d|}{|\,|d|\,|_D} \in \overline{|d|}$ mit $\big|\frac{\frac{1}{n}|d|}{|\,|d|\,|_D}\big|_D = \frac{1}{n}$. Dies liefert den gewünschten Widerspruch.

Daher entspricht $\mathcal{V}$ der von Loeb und Osswald gebildeten Nichtstandardhülle der $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis $\mathcal{W}_0$; d. h. es ist $\mathcal{V} = \widehat{\mathcal{W}_0}$. Somit stimmt die Nullumgebungsbasis von $|\cdot|'_D$ mit der Nullumgebungsbasis $\widehat{\mathcal{W}_0}$ überein (vgl. Satz 5.1.11), also entspricht der Raum $(\widehat{D}, +, \cdot, \mathcal{V})$ dem von Loeb und Osswald konstruiertem topologischen Vektorraum $(\widehat{D}, +, \cdot, \widehat{\mathcal{W}_0})$. Da durch die Nullumgebungsbasis die Topologie über $\widehat{D}$ bereits eindeutig bestimmt ist, stimmen damit die topologischen Räume überein.

Die Konstruktion von $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D)$ ermöglicht nun eine vom Repräsentanten unabhängige Definition einer partiellen Ordnung über $\widehat{D}$ durch

$$(\forall \overline{c}, \overline{d} \in \widehat{D})\ (\overline{c} \le \overline{d} \;\; :\iff \;\; c \,\widetilde{\le}\, d).$$

Damit gilt dann[11]

[11] vgl. Loeb, Osswald

$(\widehat{D}, +, \cdot, \mathcal{V}, |\cdot|'_D, \leq)$ ist ein topologischer normierter Vektorverband, der bzgl. $|\cdot|'_D$ vollständig ist; $|\cdot|'_D$ ist eine Riesz-Norm über $\widehat{D}$.

Beweis. Aufgrund der bisherigen Erläuterungen ist nur die Riesz-Norm Eigenschaft nachzuweisen. Seien dazu $\overline{c}, \overline{d} \in \widehat{D}$ mit $(\overline{|d|} =)|\overline{d}| \leq |\overline{c}|(= \overline{|c|})$. Dann gilt $|d| \widetilde{\leq} |c|$, also ist $|d| \wedge |c| \approx |d|$ und somit auch $|\,|d| \wedge |c||'_D \approx |\,|d|\,|'_D$ gültig. Damit folgt

$$|\overline{d}|'_D = st(|d|'_D) = st(|\,|d|\,|_D) = st(|\,|d| \wedge |c|\,|'_D) \underset{Vor.\,(5.1)}{\leq} st(|\,|c|\,|_D) = |\overline{c}|'_D. \qquad \square$$

Wir werden im Folgenden, wenn nichts anderes ausdrücklich notiert ist, nur von der Voraussetzung ausgehen:

(A) $(D, +, \cdot, |\cdot|_D)$ ist interner normierter Vektorraum über $^*\mathbb{R}$ und die Nichtstandardhülle $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|_D)$ wird gemäß (5.3) gebildet.

Setzen wir jedoch zusätzlich voraus, dass unser gegebenes Integral i positiv ist oder die Annahmen von Loeb und Osswald erfüllt sind, so impliziert dies die Forderung nach einer internen, partiellen Ordnung über D. In diesen Fällen werden wir stattdessen die folgende Annahme (B) voraussetzen:

(B) $(D, +, \cdot, |\cdot|_D, \leq)$ ist interner normierter Vektorverband über $^*\mathbb{R}$ mit interner Norm $|\cdot|_D$, deren ε-Umgebungen $U_\varepsilon(0)$ semi-solid sind (siehe (5.1)). Die Nichtstandardhülle $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ wird dann stets gemäß (5.6) gebildet.[12]

Nachfolgend wird jedoch nur die Annahme (A) vorausgesetzt. Wird die stärkere Voraussetzung (B) den Betrachtungen zugrunde gelegt, so wird darauf stets explizit hingewiesen.

Ferner unterscheiden wir zwischen den beiden folgenden Grundannahmen:

(I)
- $(B, +, \cdot, \mathcal{U}, \leq)$ interner topologischer Vektorverband über $^*\mathbb{R}$ mit $\mathcal{U}$ Nullumgebungsbasis;
- $\mathcal{U}_0$ $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis;
- $\emptyset \neq B_0 \subset \mathcal{U}_0$-Lmd. B $\mathbb{R}$-Untervektorverband von B;
- $\mathcal{E} \subset B^Y$ interner Vektorverband über $^*\mathbb{R}$;
- $i : \mathcal{E} \to D$ interner, $^*\mathbb{R}$-linearer Operator.

(II)
- $(B, +, \cdot, |\cdot|_B)$ interner, $^*\mathbb{R}$-linearer Raum[13] mit interner Norm $|\cdot|_B$;
- $\mathcal{E} \subset B^Y$ internes Fundamentalsystem; d.h. $\mathcal{E}$ ist ein nicht-leeres, internes System mit

$$(\forall \alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R})\,(\forall e, g \in \mathcal{E})\,(\forall b \in B) \quad \alpha e + \beta g,\ (|e|_B \cdot b) \in \mathcal{E};$$

[12] Wie bereits gezeigt wurde, genügt es zur Bildung der Nichtstandardhülle $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ den internen normierten Vektorverband $(D, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ zu betrachten und die Nichtstandardhülle für diesen Raum gemäß (5.3) zu bilden.

[13] zur Definition siehe Loeb, Wolff [19], S.100.

- $i : \mathcal{E} \to D$ interner, ${}^*\mathbb{R}$-linearer Operator.

Dabei ist in (II) die Annahme eines internen Fundamentalsystems das Pendant zum Vektorverband, wenn B als ein solcher nicht gegeben ist. Zur Vermeidung gelegentlich notwendiger, jedoch trivialer Fallunterscheidungen, nehmen wir im Folgenden B als nicht trivial, d.h. $B \neq \{0\}$, an.

Wir betrachten im Folgenden die Fälle (A), (I) und (A), (II) sowie (B), (I). Eine Standardisierung unter Bedingung (I) wird uns zu einer Verallgemeinerung des von Loeb und Osswald angegebenen Standardisierungsprozesses führen. Wir werden zudem auch eine Standardisierung unter Annahme (II) entwickeln. Es sei darauf hingewiesen, dass ähnliche, wenn auch stärkere Voraussetzungen (Vollständigkeit von B), wie in (II), in der Standardwelt zur Integralfortsetzung verwendet werden (vgl. [24]). Zur Konstruktion eines standardisierten Systems werden wir die Nichtstandardhülle von B bilden. Dabei wird wie folgt verfahren. Gilt Annahme (I), so wird man die Nichtstandardhülle in der bereits im Kapitel 5.1 beschriebenen Weise bilden. Unter der Annahme (II) werden wir hingegen die Nichtstandardhülle in analoger Weise konstruieren, wie es bereits für D beschrieben worden ist (vgl. (5.3)). Geht man von der zusätzlichen Voraussetzung der Positivität des Funktionals i aus, so impliziert dies insbesondere die Voraussetzung einer partiellen Ordnung über B und D. Wir werden daher diesen Fall stets unter den Annahmen (B) und (I) betrachten.

Die Standardisierung soll nun wieder, wie bereits in den vorangehenden Kapiteln, unter Zuhilfenahme von Integralnormen gebildet werden. Dazu ist es nötig den Begriff der Integralnorm aus Definition 1.1.5 zu erweitern.

5.2.2 Definition. Sei C ein ${}^*\mathbb{R}$-linearer Vektorverband. $\|\cdot\| : C_+^Y \to [0, \infty]$ heißt *Integralnorm* über C_+^Y, wenn für $f, f_1, f_2 \in C_+^Y$ gilt:

(i) $\|0\| = 0$,

(ii) $f \leq f_1 + f_2 \Longrightarrow \|f\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$.

Gilt zusätzlich

(iii) $(\forall f \in C_+^Y, \forall\, \alpha \in \mathrm{fin}({}^*[0, \infty[))\ \|\alpha f\| = {}^\circ\alpha \|f\|$,

so heißt die Integralnorm *positiv homogen* (über C_+^Y).

Wir betrachten im Folgenden die beiden Fälle:

- Im Fall (I) ist B ein Vektorverband und es ist die Betragsfunktion $|\cdot| : B \to |B|$ gegeben. Wir setzen in diesem Fall

  $$C := B.$$

  Ist eine Integralnorm $\|\cdot\|$ über B_+^Y gegeben, so definiere $\|\cdot\|' : B^Y \to [0, \infty]$ durch

  $$\|f\|' := \|\, |f| \,\| \text{ für } f \in B^Y.$$

- Im Fall (II) ist die Normabbildung $|\cdot|_B : B \to {}^*[0,\infty[$ gegeben. Wir betrachten daher unter Voraussetzung (II)
$$C := {}^*\mathbb{R}.$$
Für eine Integralnorm $\|\cdot\|$ über ${}^*[0,\infty[^Y$ definiere dann $\|\cdot\|' : B^Y \to [0,\infty]$ durch
$$\|f\|' := \|\,|f|_B\,\| \text{ für } f \in B^Y.$$

5.2.3 Bemerkung. (i) Bezeichnet $|\cdot|' : B^Y \to C_+^Y$ die Betragsfunktion im Fall (I) bzw. Norm im Fall (II) und ist $\|\cdot\|$ eine Integralnorm über C_+^Y, so ist in beiden Fällen $\|\cdot\|' : B^Y \to [0,\infty]$ mit
$$\|\cdot\|' = \|\cdot\| \circ |\cdot|'.$$

(ii) $|B|'$ ist ein Raum mit $\alpha \cdot a + b \in |B|'$ für $a, b \in |B|'$, $\alpha \in {}^*[0,\infty[$, denn es gilt:
$$|B|' = \begin{cases} B_+ & \text{unter Annahme (I),} \\ |B|_B \underset{B\neq\{0\}}{=} {}^*[0,\infty[& \text{unter Annahme (II).} \end{cases}$$

(iii) Gilt Fall (I) und ist $\|\cdot\|$ eine Integralnorm über B_+^Y, so läßt sich für festes $b \in B_+$ durch die Festsetzung $\|f\|_b := \|f \cdot b\|$, $f \in {}^*[0,\infty[^Y$, eine Integralnorm über ${}^*[0,\infty[^Y$ konstruieren.

Im nächsten Satz wird das zu Grunde gelegte System $\mathcal{E}$ mittels einer Integralnorm zu einem System $\mathcal{E}(\|\cdot\|)$ fortgesetzt. Auf dieser Menge werden wir dann ein standardisiertes Funktional einführen. In der Standardwelt geht man ähnlich vor, allerdings wird dort ein fortsetzendes Funktional entwickelt. Währenddessen man jedoch in der Standardtheorie zur Konstruktion des fortsetzenden Funktionals die zusätzliche Eigenschaft der Vollständigkeit des Raumes benötigt, kann man in der Nichtstandardwelt auf diese Annahme verzichten. Der Grund liegt darin, dass die Nichtstandardhülle auf dessen Basis das standardisierte Funktional gebildet wird, mit der betrachteten Norm bereits ein vollständiger Raum ist (vgl. Bemerkung 5.2.1). Die Vollständigkeit des Werteraumes $\widehat{D}$ geht im nächsten Satz 5.2.4 ein, weil dort Limites von Cauchy-Folgen verwendet werden.

5.2.4 Satz. *Es gelte Fall (A),(I) oder (A),(II). Es sei $\|\cdot\| : C_+^Y \to [0,\infty]$ eine Integralnorm, die zu i passend ist; d.h. es gelte:*
$$(\forall e \in \mathcal{E}) \quad \mathrm{st}(|i(e)|_D) \leq \|e\|'. \tag{5.7}$$
Bezeichne $\mathcal{E}_{\|\cdot\|}^{endl} := \{e \in \mathcal{E} : \|e\|' < \infty\}$. Setzt man dann
$$\mathcal{E}(\|\cdot\|) \;:=\; \{f \in B^Y : (\exists (e_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_{\|\cdot\|}^{endl})\ \|e_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$$
und $i^L(f) := \lim\limits_{n\to\infty} \overline{(i(e_n))}$ für $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$, so gilt:

(i) *Unter Voraussetzung (I) ist* $\mathcal{E}(\|\cdot\|)$ *ein* $\mathbb{R}$*-linearer Vektorverband.*
Gilt Annahme (II), so ist $\mathcal{E}(\|\cdot\|)$ *ein* $\mathbb{R}$*-Fundamentalsystem, d.h.* $\mathcal{E}(\|\cdot\|)$ *ist nicht-leer und es gilt:*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ f, g \in \mathcal{E}(\|\cdot\|),\ b \in \operatorname{fin}(B))\ \alpha f + \beta g,\ (|f|_B \cdot b) \in \mathcal{E}(\|\cdot\|).$$

(ii) $i^L : \mathcal{E}(\|\cdot\|) \to \widehat{D}$ *ist eine eindeutig definierte* $\mathbb{R}$*–lineare Abbildung.*

(iii) $(\forall f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|))\,(\forall e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})\ \|e_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \|f\|' = \lim\limits_{n\to\infty} \|e_n\|'.$

(iv) $\|\cdot\|'$ *ist zu* i^L *passend, d.h. es gilt:*

$$(\forall f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)) \quad |i^L(f)|_D \le \|f\|'.$$

(v) $\mathcal{E}(\|\cdot\|)$ *ist abgeschlossen bzgl.* $\|\cdot\|$*, d.h. es gilt für* $f \in B^Y$*,* $f_n \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$*,* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\|f_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Longrightarrow f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|),\ i^L(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} i^L(f).$$

Beweis. Wegen $0 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|} \subset \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ ist $\mathcal{E}(\|\cdot\|) \neq \emptyset$. Sei nun $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Zunächst wird gezeigt, dass $i^L(f)$ eindeutig definiert ist.

<u>Existenz:</u> Zu $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|e_n - f\|' \to 0$ $(n \to \infty)$. Wegen $\|e_n\|' < \infty$ und da die Integralnorm zum Integral i passend ist, ist $i(e_n) \in \operatorname{fin}(D)$. Daher existiert $\overline{i(e_n)} \in \widehat{D}$. Da für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} |\overline{i(e_n)} - \overline{i(e_m)}|_D \ &\underset{Def.}{=}\ \operatorname{st}(|i(e_n - e_m)|_D) \underset{(5.7)}{\le} \|e_n - e_m\|' \\ &\le\ \|e_n - f\|' + \|f - e_m\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ist $\overline{i(e_n)}$, $n \in \mathbb{N}$, eine $\widehat{D}$-wertige Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit von $\widehat{D}$ existiert daher auch $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{i(e_n)} \in \widehat{D}$.

<u>Eindeutigkeit:</u> Seien $f, g \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ und seien $e_n, g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}, n \in \mathbb{N}$, mit

$$\|e_n - f\|' \to 0, \quad \|g_n - f\|' \to 0.$$

Nach eben Bewiesenem existieren dann $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{i(g_n)}, \lim\limits_{n\to\infty} \overline{i(e_n)}$ in $\widehat{D}$. Da $\widehat{D}$ Banachraum ist, genügt daher der Nachweis von $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{i(e_n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{i(g_n)}$. Dies ergibt sich aus

$$|\overline{i(g_n)} - \overline{i(e_n)}|_D \underset{Def.}{=} \operatorname{st}(|i(g_n - e_n)|_D) \underset{(5.7)}{\le} \|g_n - e_n\|' \le \|g_n - f\|' + \|f - e_n\|'$$

und der Konvergenz der rechten Seite gegen Null $(n \to \infty)$.

(i), (ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f,\, g \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Dann existieren $e_n, g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}, n \in \mathbb{N}$, mit

$$\|f - e_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \|g - g_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ i^L(f) = \lim_{n\to\infty} \overline{i(e_n)},\ i^L(g) = \lim_{n\to\infty} \overline{i(g_n)}.$$

<u>Linearität:</u> Sowohl unter Annahme (I) als auch unter (II) sind $\alpha e_n,\, e_n + g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha| \leq k$ gewählt. Wegen der Subadditivität der Integralnorm erhält man

$$\|f + g - (e_n + g_n)\|' \leq \|f - e_n\|' + \|g - g_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\|\alpha f - \alpha e_n\|' \leq \|k \cdot (f - e_n)\|' \leq \sum_{i=1}^{k} \|f - e_n\|' = k \cdot \|f - e_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Daher sind per definitionem auch $f + g,\, \alpha f$ Elemente von $\mathcal{E}(\|\cdot\|)$ mit

$$\begin{aligned} i^L(f+g) &= \lim_{n\to\infty} \overline{i(e_n + g_n)} = \lim_{n\to\infty} \overline{i(e_n)} + \lim_{n\to\infty} \overline{i(g_n)} = i^L(f) + i^L(g), \\ i^L(\alpha f) &= \lim_{n\to\infty} \overline{i(\alpha \cdot e_n)} = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \overline{i(e_n)} = \alpha \cdot i^L(f). \end{aligned}$$

<u>Verbandseigenschaft:</u> Unter Annahme (I) sind $e_n \vee g_n,\, e_n \wedge g_n \in \mathcal{E}$. Wegen

$$|e_n \wedge g_n| \leq |e_n| + |g_n|, \quad |e_n \vee g_n| \leq |e_n| + |g_n|$$

ist $\|e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n\|' < \infty$ und somit $e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$. Zum Beweis von $f \overset{\vee}{\wedge} g \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ genügt daher der Nachweis von

$$\|(f \overset{\vee}{\wedge} g) - (e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n)\|' \to 0.$$

Setze dazu $h_n := |f - e_n| + |g - g_n|$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} -h_n &= ((e_n - h_n) \overset{\vee}{\wedge} (g_n - h_n)) - (e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n) \leq f \overset{\vee}{\wedge} g - e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n \\ &\leq ((e_n + h_n) \overset{\vee}{\wedge} (g_n + h_n)) - (e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n) = h_n. \end{aligned}$$

Somit ist $|f \overset{\vee}{\wedge} g - e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n| \leq h_n$. Die Verbandseigenschaft folgt nun aus

$$\|f \overset{\vee}{\wedge} g - e_n \overset{\vee}{\wedge} g_n\|' \leq \|h_n\|' \leq \|f - e_n\|' + \|g - g_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

<u>Fundamentalsystem:</u> Gelte Annahme (II). Sind $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$, $b \in \operatorname{fin}(B)$, dann existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|' \to 0$. Wegen $b \in \operatorname{fin}(B)$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|b|_B \leq k$. Mit f ist auch $(|f|_B \cdot b) \in B^Y$. Und da $\mathcal{E}$ Fundamentalsystem ist, ist auch $(|e_n|_B \cdot b) \in \mathcal{E}$ mit

$$\||e_n|_B \cdot b\|' = \||e_n|_B \cdot |b|_B\| \leq \||e_n|_B \cdot k\| \leq k \cdot \|e_n\|' < \infty.$$

Also gilt $(|e_n|_B \cdot b) \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$. $(|f|_B \cdot b) \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ folgt dann aus

$$\begin{aligned} \|(|f|_B \cdot b) - (|e_n|_B \cdot b)\|' &= \|(|f|_B - |e_n|_B) \cdot b\|' = \|\,|\,|f|_B - |e_n|_B\,| \cdot |b|_B\| \\ &\leq k \cdot \|\,|\,|f|_B - |e_n|_B\,|\,\| \leq k \cdot \|f - e_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(iii) Sei $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ und $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}, n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Aus

$$\begin{aligned} |e_n|' \leq |e_n - f|' + |f|' \quad &\Longrightarrow \quad \|e_n\|' - \|f\|' \leq \|e_n - f\|', \\ |f|' \leq |f - e_n|' + |e_n|' \quad &\Longrightarrow \quad \|f\|' - \|e_n\|' \leq \|f - e_n\|' \end{aligned}$$

erhält man die Gültigkeit von $|\|e_n\| - \|f\|'| \leq \|e_n - f\|' \to 0 \ (n \to \infty)$.
(iv) Es seien $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$, $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|e_n - f\|' \to 0 \ (n \to \infty)$. Dann gilt $i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{i(e_n)}$. Damit erhält man

$$|\,|i^L(f)|_D - |\overline{i(e_n)}|_D| \leq |i^L(f) - \overline{i(e_n)}|_D \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus

$$|i^L(f)|_D = \lim_{n\to\infty} |\overline{i(e_n)}|_D = \lim_{n\to\infty} \operatorname{st}(|i(e_n)|_D) \underset{(5.7)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \|e_n\|' \underset{(iii)}{=} \|f\|'.$$

(v) Zu jedem f_n existiert nach Definition von $\mathcal{E}(\|\cdot\|)$ ein $g_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ mit $\|f_n - g_n\|' \leq \frac{1}{n}$. Infolgedessen gilt

$$\|g_n - f\|' \leq \|g_n - f_n\|' + \|f_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

also ist $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Der Rest der Behauptung folgt aus

$$0 \leq |i^L(f_n) - i^L(f)|_D = |i^L(f_n - f)|_D \underset{(iv)}{\leq} \|f_n - f\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

5.2.5 Lemma. *Seien Annahmen (I) und (B) gültig und sei i positiv. Dann gilt für jede Integralnorm $\|\cdot\| : B^Y_+ \to [0,\infty]$:*

$$\begin{aligned} &\|\cdot\| \textit{ ist bzgl. } |\cdot|_D \textit{ zu } i \textit{ passend } (\textit{d.h.}(\forall e \in \mathcal{E})\ \operatorname{st}(|i(e)|_D) \leq \|e\|') \iff \\ &\|\cdot\| \textit{ ist bzgl. } |\cdot|'_D \textit{ zu } i \textit{ passend } (\textit{d.h.}(\forall e \in \mathcal{E})\ \operatorname{st}(|i(e)|'_D) \leq \|e\|'). \end{aligned}$$

Beweis. Ist $e \in \mathcal{E}$, so ist auch $|e| \in \mathcal{E}$ mit $-|e| \leq e \leq |e|$. Wegen der Positivität und somit Monotonie von i folgt $-i(|e|) \leq i(e) \leq i(|e|)$. Daraus erhält man $|i(e)| \leq i(|e|)$. Wegen Annahme (5.1) folgt daraus

$$st(|i(e)|_D) \underset{(5.1)}{\leq} st(|i(e)|'_D) = st(|\,|i(e)|\,|_D) \underset{(5.1)}{\leq} st(|i(|e|)|_D) \underset{i \text{ positiv}}{=} st(|i(|e|)|'_D). \qquad (1)$$

Da mit $e \in \mathcal{E}$ auch $|e| \in \mathcal{E}$ ist, folgt die Äquivalenz der Aussagen aus (1). $\square$

5.2.6 Korollar. *Es gelten Annahmen (I) und (B) und i sei positiv. Ist dann $\|\cdot\| : B^Y_+ \to [0,\infty]$ eine bzgl. $|\cdot|_D$ zu i passende Integralnorm, so gelten die analogen Aussagen des Satzes 5.2.4 auch für die gemäß (5.6) gebildete Nichtstandardhülle $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ (vgl. Annahme (B)). Insbesondere ist mit i auch i^L positiv.*

Beweis. Nach Lemma 5.2.5 sind die Voraussetzungen des Satzes 5.2.4 für den internen normierten Vektorverband $(D, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ und Annahme (I) erfüllt. Wegen Bemerkung 5.2.1 erhält man damit die Gültigkeit der Aussagen des Satzes 5.2.4 für die Nichtstandardhülle $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ (vgl. Annahme (B)). Es verbleibt die Positivität der Abbildung i^L nachzuweisen. Sei dazu i als zusätzlich positiv vorausgesetzt. Ist dann $0 \leq f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$, so existieren nach dem Beweis von Satz 5.2.4 $0 \leq e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ mit $\|f - e_n\|' \to 0$. Somit gilt $0 \leq i(e_n) \in \mathrm{fin}_{|\cdot|'_D}(D)$. Daher existiert $\overline{i(e_n)} \in \widehat{D}$ mit $\overline{0} = \overline{i(0)} \leq \overline{i(e_n)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $|\,|i^L(f)| - \overline{i(e_n)}| = |\,|i^L(f)| - |\overline{i(e_n)}|\,| \leq |i^L(f) - \overline{i(e_n)}|$. Daraus folgt ($|\cdot|'_D$ ist Riesz-Norm über $\widehat{D}$)

$$|\,|i^L(f)| - \overline{i(e_n)}|'_D = |\,|i^L(f)| - |\overline{i(e_n)}|\,|'_D \leq |i^L(f) - \overline{i(e_n)}|'_D \to 0 \ (n \to \infty).$$

Damit erhält man $|i^L(f)| = \lim_{n\to\infty} \overline{i(e_n)} = i^L(f)$. Also ist $i^L(f) \geq \overline{0}$. □

Auf Basis des soeben konstruierten Systems $(\mathcal{E}(\|\cdot\|), i^L)$ soll nun ein standardisiertes System definiert werden. Dabei soll die Menge der standardisierten Funktionen $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ als eine spezielle Teilmenge der Nichtstandardhüllenwertigen Funktionen $\widehat{B}^Y$ definiert werden. Ferner soll jedem dieser standardisierten Funktionen ein Wert in $\widehat{D}$, der „Integralwert“, eindeutig zugeordnet werden. Dazu benötigt man jedoch eine zusätzliche Bedingung, die sichert, dass die Definition von der speziellen Darstellung der Nichtstandardhüllenwertigen Funktion unabhängig ist. Dies führt zur Forderung einer $\approx$–Integralnorm.

5.2.7 Bemerkung. Ist B das Sternbild eines entsprechenden Raumes der Standardwelt, wie beispielsweise im Fall $B = D = {}^*\mathbb{R}$, so kann zur Formulierung des Standardisierungsprinzips auch auf die Annahme einer Null-Integralnorm verzichtet werden (vgl. Kapitel 1). Hier soll jedoch des Weiteren der allgemeinere Fall betrachtet werden.

5.2.8 Definition. Eine Integralnorm über C^Y_+ heißt $\approx$*–Integralnorm*, wenn gilt:

$$(\forall\, f \in C^Y_+)\ f \approx 0 \quad (\text{d.h. } (\forall y \in Y) f(y) \approx 0) \implies \|f\| = 0. \tag{5.8}$$

5.2.9 Lemma. *Ist $\|\cdot\|$ eine $\approx$–Integralnorm über C^Y_+, so gilt:*

(i) $(\forall f, g \in B^Y)\, f \approx g \Longrightarrow \|f\|' = \|g\|'$;

(ii) Unter Annahme (I) gilt: $(\forall f, g \in B^Y_+)\, f \mathrel{\widetilde{\leq}} g \Longrightarrow \|f\|' \leq \|g\|'$.

Beweis. (i) Aus $f \approx g$ folgt $|f - g|' \approx 0$. Ist nun $\|f\|' = \infty = \|g\|'$, so gilt (i) sofort. Anderenfalls ist $\|f\|' < \infty$ oder $\|g\|' < \infty$ und man erhält (i) aus der Gültigkeit von

$$|\,\|f\|' - \|g\|'| \leq \|f - g\|' = 0.$$

(ii) Nach Lemma 5.1.9 gilt $f \approx f \wedge g$. Da $\|\cdot\|$ eine $\approx$–Integralnorm ist, folgt mit (i)

$$\|f\|' = \|f \wedge g\|' \leq \|g\|'.$$ □

5.2.10 Bemerkung. Im Standardisierungsprozess 5.2.13 (unter den Annahmen (A),(I) oder (A),(II)) bzw. Korollar 5.2.14 (unter den Annahmen (B),(I), i positiv) wird eine zu i passende $\approx$–Integralnorm vorausgesetzt. Diese Forderung impliziert die Gültigkeit von

$$(\forall e \in \mathcal{E})\ e \approx 0 \Longrightarrow i(e) \approx 0. \tag{5.9}$$

Da unter Annahme (I) mit $\mathcal{E} \ni e \approx 0$ auch $\mathcal{E} \ni |e| \approx 0$ gilt, impliziert die Annahme einer zu i passenden $\approx$–Integralnorm bzw. (5.9)

$$(\forall e \in \mathcal{E})\ e \approx 0 \Longrightarrow i(e), i(|e|) \approx 0.$$

Beweis. Es ist nur (5.9) zu zeigen. Ist nun $e \in \mathcal{E}$ mit $e \approx 0$, so bedeutet dies sowohl unter Annahme (I) als auch unter Annahme (II) $|e|' \approx 0$. Also folgt $\mathrm{st}(|i(e)|_D) \leq \|e\|' = 0$. □

Es zeigt sich, dass unter den Annahmen von Loeb, Osswald die von ihnen geforderte $(\mathcal{U}_0,)\mathcal{W}_0$-Stetigkeit der Bedingung (5.9) entspricht:

5.2.11 Lemma. Seien Annahmen (I) und (B) gültig und i positiv. Dann sind äquivalent:

$$\text{Annahme (5.9) gilt} \iff i \text{ ist } \mathcal{U}_0, \mathcal{W}_0\text{–stetig.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Gelte Annahme (5.9). Sei $e \in \mathcal{E}$ und e $\mathcal{U}_0$-infinitesimal. Dann ist $e \approx 0$ und damit auch $\mathcal{E} \ni |e| \approx 0$ (bzgl. $\mathcal{U}_0$). Also gilt $|i(|e|)|_D \approx 0$. Wegen $-i(|e|) \leq i(e) \leq i(|e|)$ gilt $D \ni |i(e)| \leq i(|e|)$ und somit nach (5.1) auch $|\,|i(e)|\,|_D \leq |i(|e|)|_D \approx 0$. Folglich ist $i(e)$ $\mathcal{W}_0$-infinitesimal (vgl. (5.5)).
„$\Leftarrow$“ Sei i $\mathcal{U}_0, \mathcal{W}_0$-stetig. Ist nun $e \in \mathcal{E}$ mit $e \approx 0$, so ist e $\mathcal{U}_0$-infinitesimal und damit auch $i(e)$ $\mathcal{W}_0$-infinitesimal. Nach (5.5) gilt also $|\,|i(e)|\,|_D \approx 0$. Wegen (5.1) ist daher aber auch $|i(e)|_D \approx 0$, d.h. es gilt $i(e) \approx 0$. □

Es wird sich später zeigen, dass die Forderung (5.9) und die Eigenschaft der Forderung der $\approx$–Integralnormeigenschaft für eine $\|\cdot\|_0|\,|\mathcal{E}|'$ fortsetzende Integralnorm äquivalent sind (vgl. Satz 5.3.3).

5.2.12 Bemerkung. Annahme (5.9) und damit auch (5.8) ist allerdings sehr stark:

(i) Betrachtet man nämlich $B = D = {}^*\mathbb{R}$ und ist $1 \in \mathcal{E}$, so impliziert (5.9) die Bedingung $i(1) \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$.

(ii) Ist $B = D = {}^*\mathbb{R}$, so ist nämlich selbst die Bedingung

$$(\forall e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0})\ e \approx 0 \quad \Longrightarrow \quad i(e) \approx 0$$

im einfachen Fall $h \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, $\mathcal{E} := \{k \cdot 1_Y : k \in {}^*\mathbb{R}\}$, $i(k \cdot 1_Y) = k \cdot h$ nicht erfüllt.

Beweis. (i) Sei $1 \in \mathcal{E}$. Angenommen es wäre nun $i(1) \notin \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})$, also $i(1) =: h \notin \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})$, dann wäre $i(\frac{1}{\sqrt{|h|}}) = \frac{1}{\sqrt{|h|}} \cdot i(1) = \frac{h}{\sqrt{|h|}} \notin \operatorname{fin}({}^*\mathbb{R})$ im Widerspruch zu $\frac{1}{\sqrt{|h|}} \approx 0$.
(ii) Da i positiv ist, gilt $\|\frac{1}{h} \cdot 1_Y\|_0 = \operatorname{st}(i(\frac{1}{h} \cdot 1_Y)) = 1 = i(\frac{1}{h} \cdot 1_Y)$, während $\frac{1}{h} \cdot 1_Y \approx 0$ ist. □

Wir kommen nun zur Konstruktion des standardisierten Systems. Dazu werden die Ergebnisse von Satz 5.2.4 verwendet. Um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden, setzen wir dabei im Fall (II):

$$B_0 := \operatorname{fin}(B).$$

5.2.13 Satz (Standardisierungsprinzip). *Ist Fall (A), (I) oder (A),(II) gültig und $\|\cdot\| : C_+^Y \to [0, \infty]$ eine zu i passende $\approx$–Integralnorm, so gilt:*

$$f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|) \implies (\exists e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}, n \in \mathbb{N})(\forall g \in \overline{f}) \quad \|g - e_n\|' \to 0. \tag{5.10}$$

Folglich ist $\overline{f} \subset \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ für jedes $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Setzt man daher

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\|\cdot\|) :=& \{\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y : \overline{f} \cap \mathcal{E}(\|\cdot\|) \neq \emptyset\} \\ =& \{\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y : f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|) \cap B_0^Y\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

und $i^L(\overline{f}) := i^L(f)$ für $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, so gilt:

(i) Unter Voraussetzung (I) ist $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ein $\mathbb{R}$–linearer Vektorverband.
Gilt Annahme (II), so ist $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem, d.h. $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ist nicht-leer und es gilt:

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall \overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|))\,(\forall \overline{b} \in \widehat{B}) \quad \alpha\overline{f} + \beta\overline{g},\ (|\overline{f}|_B \cdot \overline{b}) \in \mathcal{L}(\|\cdot\|).$$

(ii) $i^L : \mathcal{L}(\|\cdot\|) \to \widehat{D}$ ist eine eindeutig definierte $\mathbb{R}$–lineare Abbildung.

(iii) Setzt man für eine Funktion $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$

$$\|\overline{f}\|' := \left\{\begin{array}{ll} \|\,|\overline{f}|\,\| := \|\,|f|\,\| & \text{im Fall (I),} \\ \|\,|\overline{f}|_B\,\| = \|st(|f|_B)\| \underset{Lemma\,5.2.9}{=} \|\,|f|_B\,\| & \text{im Fall (II),} \end{array}\right\} = \|f\|',$$

so ist die Abbildung $\|\cdot\|'$ über $\widehat{B_0}^Y$ wohldefiniert. $\|\cdot\|'$ ist zu i^L passend, d.h. es gilt:

$$(\forall \overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)) \quad |i^L(\overline{f})|_D \leq \|\overline{f}\|'.$$

Unter Annahme (I) ist $\|\cdot\|'$ eine Integralnorm über $\widehat{B_{0+}}^Y$.

(iv) $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ *ist bzgl.* $\|\cdot\|$ *abgeschlossen, d.h. es gilt für* $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$, $\overline{f_n} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\overline{f_n} - \overline{f}\|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies \overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|),\ i^L(\overline{f_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} i^L(\overline{f}).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst (5.10) und (5.11).
zu (5.10): Sei $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Dann existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|' \to 0$ $(n \to \infty)$. Ist $g \in \overline{f}$, so gilt punktweise $f(y) \approx g(y)$ für $y \in Y$. Nach Lemma 2.2 in [20] im Fall (I) und wegen der Gültigkeit von

$$0 \leq \big|\, |f - e_n|_B - |g - e_n|_B \,\big| \leq |(f - e_n) - (g - e_n)|_B = |f - g|_B \approx 0$$

im Fall (II), gilt punktweise $|f - e_n|' \approx |g - e_n|'$. Da $\|\cdot\|$ eine $\approx$–Integralnorm ist, folgt daraus $\|f - e_n\|' = \|g - e_n\|' \to 0$. Damit gilt (5.10).

zu (5.11): „$\supset$“ klar. „$\subset$“ Sei $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$ und $g \in \overline{f} \cap \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Dann existiert ein $h \in B_0^Y$ mit $h \in \overline{f}$. Daher ist $h \in \overline{f} = \overline{g}$ und somit wegen (5.10) auch $h \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. „$\subset$“ folgt nun aus $\overline{h} = \overline{f}$. Damit gilt insgesamt (5.11).

Insbesondere ist wegen (5.10) die Menge $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ und die Abbildung $i^L : \mathcal{L}(\|\cdot\|) \to \widehat{D}$ (siehe auch Satz 5.2.4) wohldefiniert. Somit ist die Darstellung von Elementen $\overline{f}$ aus $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ und deren Funktionswert $i^L(\overline{f})$ vom Repräsentanten unabhängig. Wegen Satz 5.2.4 ist i^L damit eindeutig definiert.

(i), (ii) Wegen $\overline{0} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ gilt $\mathcal{L}(\|\cdot\|) \neq \emptyset$. Seien im Folgenden $\alpha \in \mathbb{R}$, $\overline{f}, \overline{g} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. O.B.d.A. seien $f, g \in B_0^Y \cap \mathcal{E}(\|\cdot\|)$.
Linearität: Wegen Satz 5.2.4 und da B_0 im Fall (I) ein $\mathbb{R}$-Untervektorverband und im Fall (II) $B_0 = \mathrm{fin}(B)$ ist, sind $f + g, \alpha f \in B_0^Y \cap \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Per definitionem sind dann auch $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$, $\overline{\alpha f} = \alpha \overline{f}$ Elemente von $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit

$$\begin{aligned} i^L(\overline{f}) + i^L(\overline{g}) &= i^L(f) + i^L(g) = i^L(f+g) = i^L(\overline{f+g}) = i^L(\overline{f} + \overline{g}), \\ i^L(\alpha\overline{f}) &= i^L(\overline{\alpha f}) = i^L(\alpha f) = \alpha \cdot i^L(f) = \alpha \cdot i^L(\overline{f}). \end{aligned}$$

Verbandseigenschaft: Es gelte Annahme (I). Wegen Satz 5.2.4 und da B_0 ein $\mathbb{R}$-Untervektorverband ist, sind auch $f \overset{\vee}{\wedge} g \in \mathcal{E}(\|\cdot\|) \cap B_0^Y$. Folglich gilt auch $\overline{f \overset{\vee}{\wedge} g} = \overline{f} \overset{\vee}{\wedge} \overline{g} \in \widehat{B_0}^Y$, also sind $\overline{f} \overset{\vee}{\wedge} \overline{g} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$.

Fundamentalsystem: Es gelte Annahme (II). Ist $\overline{b} \in \widehat{B}$, dann gilt $b \in \mathrm{fin}(B)$ und somit folgt $|\overline{f}|_B \cdot b \in \mathrm{fin}(B)^Y = B_0^Y$. Wegen Satz 5.2.4 ist $|f|_B \cdot b \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Und es gilt

$$|f|_B \cdot b - |\overline{f}|_B \cdot b = \underbrace{(|f|_B - \mathrm{st}(|f|_B))}_{\approx 0} \cdot \underbrace{b}_{\in \mathrm{fin}(B)} \approx 0.$$

Da $\|\cdot\|$ eine $\approx$–Integralnorm ist, folgt $\||f|_B \cdot b - |\overline{f}|_B \cdot b\|' = 0$. Nach Satz 5.2.4 ist damit auch $|\overline{f}|_B \cdot b \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Folglich gilt $|\overline{f}|_B \cdot \overline{b} = \overline{|\overline{f}|_B \cdot b} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$.

(iii) Ist $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$, so gilt $\overline{f} = \overline{g}$ für jedes $g \in \overline{f}$. Unter Annahme (I) folgt aus $f \approx g$ auch $|f| \approx |g|$ (vgl. Lemma 2.2, [20]), während unter Annahme (II) $|f|_B \approx |g|_B$ gilt. Aus der Eigenschaft der $\approx$–Integralnorm folgt $\|f\|' = \|g\|'$. Infolgedessen ist $\|\cdot\|' : \widehat{B_0}^Y \to [0, \infty]$ wohldefiniert. $\|\cdot\|'$ ist zu i^L passend, da für $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ gilt:

$$|i^L(\overline{f})|_D = |i^L(f)|_D \underset{Satz\, 5.2.4}{\leq} \|f\|' = \|\overline{f}\|'.$$

Sei Annahme (I) gültig. Dann ist $\widehat{B_0}$ ein Vektorverband (vgl. Theorem 2.5, [20]) mit $0 \in \overline{0} \in \widehat{B_0}^Y$ und $\|\overline{0}\| = \|0\| = 0$. Sind $\overline{f}, \overline{f_1}, \overline{f_2} \in \widehat{B_0}^Y_+$ mit $\overline{0} \leq \overline{f} \leq \overline{f_1} + \overline{f_2}$, so gilt $\overline{0} \leq \overline{f} = |\overline{f}| = \overline{|f|}$. Analog ergibt sich $\overline{0} \leq \overline{f_i} = \overline{|f_i|}$, $i = 1, 2$. Daraus folgt mit Lemma 2.2 in [20]

$$|f| \approx f \mathrel{\tilde{\leq}} f_1 + f_2 \approx |f_1| + |f_2| \in (\overline{|f_1| + |f_2|}).$$

Somit gilt $|f| \approx |f| \wedge (|f_1| + |f_2|)$ nach Lemma 5.1.9. Da eine $\approx$–Integralnorm vorausgesetzt worden war, folgt daraus

$$\begin{aligned} \|\overline{f}\|' &= \|\,|f|\,\| = \|\,|f| \wedge (|f_1| + |f_2|)\| \leq \|\,|f_1| + |f_2|\,\| \\ &\leq \|\,|f_1|\,\| + \|\,|f_2|\,\| = \|\overline{f_1}\|' + \|\overline{f_2}\|'. \end{aligned}$$

Damit sind die Integralnormeigenschaften nachgewiesen.
(iv) Es sei o.B.d.A. $f, f_n \in B_0^Y$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $f_n - f \in B_0^Y$ und es gilt $\|\,|f_n - f|\,\| = \|\,|\overline{f_n} - \overline{f}|\,\|$ im Fall (I) bzw. $\|\,|f_n - f|_B\,\| = \|\,|\overline{f_n} - \overline{f}|_B\,\|$ im Fall (II). Nach Satz 5.2.4 (v) gilt damit $f \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$, also ist insbesondere $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit

$$i^L(\overline{f}) \underset{Def.}{=} i^L(f) \underset{Satz\, 5.2.4}{=} \lim_{n\to\infty} i^L(f_n) \underset{Def.}{=} \lim_{n\to\infty} i^L(\overline{f_n}).$$ □

5.2.14 Korollar. *Gelten Annahmen (I) und (B) und sei i positiv. Ist dann* $\|\cdot\| : B_+^Y \to [0, \infty]$ *eine bzgl.* $|\cdot|_D$ *zu i passende* $\approx$*–Integralnorm, so gelten die analogen Aussagen des Satzes 5.2.13 auch für die gemäß* (5.6) *gebildete Nichtstandardhülle* $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ *(vgl. Annahme (B)). Insbesondere ist mit i auch* i^L *positiv.*

Beweis. Wir gehen analog wie im Beweis von Korollar 5.2.6 vor. Nach Lemma 5.2.5 ist $\|\cdot\| : B_+^Y \to [0, \infty]$ auch eine bzgl. $|\cdot|'_D$ zu i passende $\approx$–Integralnorm. Folglich erfüllt das System $(D, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ zusammen mit Annahme (I) die Voraussetzungen von Satz 5.2.13. Wegen Bemerkung 5.2.1 erhält man damit die Gültigkeit der Aussagen des Satzes 5.2.13 für die Nichtstandardhülle $(\widehat{D}, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$. Wir kommen nun zum Beweis der Positivität von i^L. Ist $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$, so gilt $0 \mathrel{\tilde{\leq}} f$. Aus Lemma 5.1.9 folgt somit $|f| \approx f$. Also ist $\overline{|f|} = \overline{f}$ mit $|f| \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$ nach (5.10). Nach Korollar 5.2.6 gilt daher

$$i^L(\overline{f}) = i^L(\overline{|f|}) = i^L(|f|) \geq 0.$$ □

Im Fall $B = D = \mathbb{R}$ war die Endlichkeit von $\|f\|'$ einer reellwertigen Funktion f eine notwendige Voraussetzung dafür, dass eine Funktion zum standardisierten System gehört (vgl. Lemma 1.1.16). Ein ähnliches Ergebnis liefert Lemma 5.2.15.

5.2.15 Lemma. *Gelten die Voraussetzungen von Satz 5.2.13 bzw. von Korollar 5.2.14, so gilt*

$$(\forall \overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)) \quad \|\overline{f}\|' < \infty.$$

Beweis. Zu $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ existieren $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|f - e_n\|' \to 0$ für jedes $f \in \overline{f}$ gilt (vgl. (5.10),(5.11)). Daraus folgt

$$|\, \|e_m\|' - \|e_n\|'| \leq \|e_m - e_n\|' \leq \|e_m - f\|' + \|e_n - f\|' \to 0 \ (n, m \to \infty).$$

Also ist $\|e_n\|'$, $n \in \mathbb{N}$, eine $\mathbb{R}$-wertige Cauchyfolge. Mit Satz 5.2.4 bzw. Korollar 5.2.6 folgt dann

$$\|\overline{f}\|' = \|f\|' = \lim_{n\to\infty} \|e_n\|' < \infty. \qquad \square$$

Infolgedessen ist die Endlichkeit von $\|\overline{f}\|'$ einer Funktion $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$ eine notwendige Voraussetzung dafür, dass die Funktion zum standardisierten System gehört.

Unmittelbar im Zusammenhang mit der Konstruktion von „Standardisierungen" gemäß Satz 5.2.13 stellt sich die Frage des Zusammenhangs von Systemen, die mittels verschiedener Integralnormen gebildet worden sind. Ein zu Satz 1.1.18 analoges Ergebnis liefert Satz 5.2.16. Daher ist auch hier die Konstruktion möglichst kleiner Integralnormen erstrebenswert.

5.2.16 Satz (Vergleichsprinzip). *Sind $\|\cdot\|_j$, $j = 1, 2$, $\approx$–Integralnormen über C^Y_+, von denen $\|\cdot\|_1$ zu i passend ist und für die $\|h\|'_1 \leq \|h\|'_2$ für jedes $h \in B^Y$ gilt, so ist auch $\|\cdot\|_2$ zu i passend. Für die Standardisierungen gemäß Satz 5.2.13 (im Fall (A),(I) oder (A),(II)) bzw. Korollar 5.2.14 (unter den Annahmen (B),(I), i positiv) gilt dann $\mathcal{L}(\|\cdot\|_2) \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|_1)$ und $i^L_1|_{\mathcal{L}(\|\cdot\|_2)} = i^L_2$, dabei bezeichne i^L_j, $j = 1, 2$, die gemäß dem Standardisierungsprinzip gebildeten Standardisierungen von $(\mathcal{E}, i)$.*

5.3 Entwicklung von Integralnormen

Im Folgenden soll das von Loeb und Osswald gebildete standardisierte System mittels einer geeigneten Integralnorm entwickelt werden. Wir werden dabei ähnlich wie im Abschnitt 1.2 verfahren, wo die Konstruktion des Systems der Loeb-integrierbaren Funktionen und des Loeb-Integrals auf der Entwicklung der Loeb-Integralnorm basierte. Im Kapitel 1 haben wir die Loeb-Integralnorm unter Zuhilfenahme von $\|\cdot\|_0$ definiert, einer kleinsten zu i passenden Integralnorm über $\mathcal{E}_+$. $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ war insbesondere dann von besonderer Bedeutung, wenn das zugrunde gelegte Funktional i als nicht positiv gegeben war. Die Konstruktion der Integralnorm $\|\cdot\|_0$ auf $\mathcal{E}_+$ beruhte dabei im Satz 1.2.3 auf der Gültigkeit der Bedingung

$$(\forall e, e_1, e_2 \in \mathcal{E})\, |e| \leq e_1 + e_2 \Longrightarrow (\exists g_1, g_2 \in \mathcal{E})\, e = g_1 + g_2,\, |g_i| \leq e_i.$$

Im Satz 5.3.3 soll nun Satz 1.2.3 verallgemeinert werden. Dazu bezeichne wieder $|\cdot|'$, wie bereits in Bemerkung 5.2.3 definiert, die Betrags- bzw. Normabbildung, je nachdem ob Annahme (I) oder (II) vorausgesetzt wird. Zur Konstruktion einer kleinsten zu i passenden Integralnorm über der Menge $|\mathcal{E}|' := \{|e|' : e \in \mathcal{E}\}$ benötigen wir die zusätzliche Voraussetzung:

$$(\forall e, e_1, e_2 \in \mathcal{E})\, |e|' \le |e_1|' + |e_2|' \Longrightarrow (\exists g_1, g_2 \in \mathcal{E})\, e = g_1 + g_2,\ |g_i|' \le |e_i|'. \quad (5.12)$$

Ist unter Annahme (I), (B) die Abbildung i positiv, so werden wir (5.12) nicht benötigen. Ansonsten liefert das folgende Lemma unter Annahme (I) eine hinreichende Bedingung für das Erfülltsein von (5.12).

5.3.1 Lemma. *Ist die unter Annahme (I) über B gegebene Ordnung „$\le$" total, so erfüllt $\mathcal{E}$ die Bedingung* (5.12)*.*

Beweis. Seien $h \in \mathcal{E}, f, g \in \mathcal{E}_+$ mit $|h| \le f + g$. Wir setzen

$$h_1 := (h \vee -f) \wedge f, \quad h_2 := h - h_1.$$

Dann sind $h_1, h_2 \in \mathcal{E}$ mit $|h_1| \le f$ und $h_1 + h_2 = h$. Es genügt der Nachweis von $|h_2| \le g$. Da $\mathcal{E}$ Vektorverband ist, sind auch $|h_1|, |h_2| \in \mathcal{E}$. Für $y \in Y$ gilt nun punktweise

$$|h(y)| \le f(y) \Longrightarrow h_1(y) = h(y) \Longrightarrow 0 = |h_2(y)| \le g(y)$$

Ist $y \in Y$ mit $|h(y)| > f(y)$, so gilt

$$\begin{aligned} &\begin{cases} h_1(y) = f(y), & \text{falls } h(y) \ge 0, \\ h_1(y) = -f(y), & \text{falls } h(y) < 0, \end{cases} \\ \Longrightarrow\quad &\begin{cases} h_1(y) = f(y), 0 \le h_2(y) = h(y) - h_1(y) \le g(y), & \text{falls } h(y) \ge 0, \\ h_1(y) = -f(y), 0 \le -h_2(y) = -h(y) + h_1(y) \le g(y), & \text{falls } h(y) < 0, \end{cases} \\ \Longrightarrow\quad & |h_2(y)| \le |g(y)|. \end{aligned}$$

□

Im Folgenden werden wir nun eine Integralnorm $\|\cdot\|_0$ über $|\mathcal{E}|' := \{|e|' : e \in \mathcal{E}\}$ konstruieren. Dazu benötigen wir die im nächsten Lemma 5.3.2 angegebene Eigenschaft (5.13) von $|\mathcal{E}|'$.

5.3.2 Lemma. *Sowohl unter Annahme (I) als auch unter Annahme (II) ist das System $|\mathcal{E}|'$ ein α-SV-System, d.h. es gilt:*

$$(\forall e_1, e_2 \in |\mathcal{E}|')\, (\forall \alpha \in {}^*[0, \infty[)\ e_1 \wedge e_2,\ e_1 \vee e_2,\ e_1 + e_2,\ |e_1 - e_2|,\ \alpha \cdot e_1 \in |\mathcal{E}|'. \quad (5.13)$$

Beweis. Es ist $\mathcal{E}_+ = |\mathcal{E}|'$ im Fall (I). Daher sind in diesem Fall $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_+$. (5.13) folgt dann, da $\mathcal{E}$ Vektorverband ist.
Unter Annahme (II) wähle $b \in B$ mit $|b|_B = 1$ (dies ist wegen der Annahme $\{0\} \underset{\neq}{\subset} B$ möglich). Da $\mathcal{E}$ ein Fundamentalsystem ist, sind auch $e_1 \cdot b, e_2 \cdot b \in \mathcal{E}$. Folglich gilt $(e_1 + e_2) \cdot b$, $(e_1 - e_2) \cdot b$, $\alpha \cdot e_1 \cdot b \in \mathcal{E}$ und daher folgt

$$e_1 + e_2 = |(e_1 + e_2) \cdot b|_B \in |\mathcal{E}|_B, \quad |e_1 - e_2| = |(e_1 - e_2) \cdot b|_B \in |\mathcal{E}|_B,$$
$$\alpha \cdot e_1 = |\alpha \cdot e_1 \cdot b|_B \in |\mathcal{E}|_B.$$

Setzt man $h := |e_1 - e_2| \cdot b = |(e_1 - e_2) \cdot b|_B \cdot b$, so ist $h \in \mathcal{E}$. Somit sind auch

$$\tfrac{1}{2}(e_1 \cdot b + e_2 \cdot b + h),\ \tfrac{1}{2}(e_1 \cdot b + e_2 \cdot b - h) \in \mathcal{E}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} e_1 \vee e_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + |e_1 - e_2|) = |\tfrac{1}{2}(e_1 \cdot b + e_2 \cdot b + h)|_B \in |\mathcal{E}|_B, \\ e_1 \wedge e_2 &= \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - |e_1 - e_2|) = |\tfrac{1}{2}(e_1 \cdot b + e_2 \cdot b - h)|_B \in |\mathcal{E}|_B. \end{aligned} \qquad \square$$

Im nächsten Satz verwenden wir zudem die folgende Schreibweise (vgl. auch Lemma 5.1.9):

Sind $f, g \in {}^*\mathbb{R}^Y$, so schreibe $f \mathrel{\widetilde{\leq}} g$, falls punktweise für jedes $y \in Y$ entweder $f(y) \approx g(y)$ oder $f(y) \leq g(y)$ gilt.

5.3.3 Satz ($\|\cdot\|_0$ über $|\mathcal{E}|'$). *Definiere für $e \in |\mathcal{E}|'$*

$$\|e\|_0 \quad := \quad \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|_D) : g \in \mathcal{E}, |g|' \leq e\}.$$

Ist dann Bedingung (5.12) *(im Fall (A),(I) oder (A),(II)) erfüllt oder sind sowohl Annahmen (I), (B) gültig als auch i positiv, so ist $\|\cdot\|_0$ eine zu i passende, positiv homogene Integralnorm über $|\mathcal{E}|'$ und zwar die kleinste zu i passende Integralnorm über $|\mathcal{E}|'$. Ist Bedingung* (5.12) *(im Fall (A),(I) oder Fall (A),(II)) erfüllt oder es gelten sowohl Annahmen (I),(B) als auch die Annahme, dass i positiv ist, so gilt*

$$i \text{ erfüllt } (5.9) \quad \Longleftrightarrow \quad \|\cdot\|_0 \approx\text{–Integralnorm.} \tag{5.14}$$

Zum Beweis von Satz 5.3.3 benötigen wir das folgende Korollar.

5.3.4 Korollar. *Gilt Annahme (I) und (B) und ist i positiv, so gilt*

$$\begin{aligned} (\forall e \in \mathcal{E}_+) \quad \|e\|_0 &= \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|_D) : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\} = \mathrm{st}(|i(e)|_D) \\ &= \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|'_D) : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\} = \mathrm{st}(|i(e)|'_D). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Beweis. Sei $e \in \mathcal{E}_+$ fest gewählt. Ist dann $g \in \mathcal{E}$ mit $|g| \leq e$, so gilt aufgrund der Positivität und damit auch Monotonie des Integrals i:

$$\begin{aligned} & -i(|g|) \leq i(g), i(-g) \leq i(|g|) \leq i(e) \\ \Longrightarrow \quad & |i(g)| \leq |i(|g|)| \underset{i\ positiv}{=} i(|g|) \leq i(e) \\ \underset{(5.1)}{\Longrightarrow} \quad & |i(g)|_D \leq |i(g)|'_D \leq |i(|g|)|'_D \leq |i(e)|'_D \underset{e \geq 0,\, i\ positiv}{=} |i(e)|_D. \end{aligned}$$

Da $g \in \mathcal{E}$ mit $|g| \leq e$ beliebig war, folgt daraus

$$\begin{aligned} \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|_D) : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\} &= \mathrm{st}(|i(e)|_D) = \mathrm{st}(|i(e)|'_D) \\ &= \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|'_D) : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e\}. \end{aligned} \qquad \square$$

Beweis von Satz 5.3.3. Nach Definition von $\|\cdot\|_0$ gilt $\|\,|0|'\,\|_0 = 0$. Per definitionem gilt ferner $\|f\|_0 \leq \|g\|_0$ für $f, g \in |\mathcal{E}|'$ mit $f \leq g$. Zum Beweis der Integralnormeigenschaft genügt wegen Lemma 5.3.2 der Nachweis von

$$(\forall f, g \in |\mathcal{E}|') \quad \|f + g\|_0 \leq \|f\|_0 + \|g\|_0. \tag{1}$$

zu (1): Gelten Annahmen (I), (B) und ist i positiv, so folgt (1) sofort aus der Darstellung (5.15). Gelte nun Bedingung (5.12). Sei $h \in \mathcal{E}$ mit $|h|' \leq f + g$ (z.B. $h = 0$). Nach (5.12) existieren Funktionen $h_1, h_2 \in \mathcal{E}$ mit $h = h_1 + h_2$ und $|h_1|' \leq f$, $|h_2|' \leq g$. Daraus folgt

$$\mathrm{st}(|i(h)|_D) \leq \mathrm{st}(|i(h_1)|_D) + \mathrm{st}(|i(h_2)|_D) \leq \|f\|_0 + \|g\|_0.$$

Da $h \in \mathcal{E}$ mit $|h|' \leq f + g$ beliebig gewählt worden war, gilt daher (1).

positive Homogenität: Sei $f \in |\mathcal{E}|', 0 \leq \alpha \in \mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$. Nach Lemma 5.3.2 ist dann auch $\alpha f \in |\mathcal{E}|'$. Die positive Homogenität der Integralnorm folgt nun aus

$$\begin{aligned} {}^\circ\alpha\|f_1\|_0 &= {}^\circ\alpha \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|_D) : g \in \mathcal{E}, |g|' \leq f\} \\ &= \sup\{\mathrm{st}(|i(\alpha g)|_D) : g \in \mathcal{E}, |\alpha g|' \leq \alpha f\} \\ &= \sup\{\mathrm{st}(|i(h)|_D) : h \in \mathcal{E}, |h|' \leq \alpha f\} = \|\alpha f\|_0. \end{aligned}$$

Per definitionem ist $\|\cdot\|_0$ zu i passend. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere zu i passende Integralnorm über $|\mathcal{E}|'$. Ist dann $f \in |\mathcal{E}|'$, so gilt $\mathrm{st}(|i(g)|_D) \leq \|\,|g|'\,\| \leq \|f\|$ für jedes $g \in \mathcal{E}$ mit $|g|' \leq f$. Daraus folgt $\|f\|_0 \leq \|f\|$.

zu (5.14): Gelten Annahmen (I),(B) und ist i positiv, so folgt (5.14) sofort aus (5.15). Gilt ansonsten Annahme (II), so ergibt sich die Äquivalenz der Aussagen sofort aus der Definition von $\|\cdot\|_0$. Gelten nun Annahme (I) und (A). Dann ist „$\Leftarrow$“ klar. „$\Rightarrow$“ Ist $e \in \mathcal{E}_+$ mit $e \approx 0$ und $g \in \mathcal{E}$ mit $|g| \leq e$, so gilt per definitionem

$$(\forall U \in \mathcal{U}_0)\ (\forall y \in Y) \quad |g(y)| \leq e(y) \in U.$$

Wegen $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ und da $\mathcal{U}$ aus semi-soliden Mengen besteht, folgt

$$(\forall U \in \mathcal{U}_0)\ (\forall y \in Y) \quad |g(y)| \in U.$$

Daher ist auch $g \approx 0$. Da i $\mathcal{W}_0$-stetig ist, folgt $i(g), i(e) \approx 0$. Somit sind auch $\mathrm{st}(|i(g)|_D), \mathrm{st}(|i(e)|_D) = 0$. Folglich gilt $\|e\|_0 = 0$. □

Unter den Annahmen (I) und (B) ergibt sich für positive Funktionale und Integralnormen, die $st(|i|_D)|\mathcal{E}_+$ fortsetzen, ähnlich wie im Korollar 1.1.15, ein enger Zusammenhang zwischen der Integralnorm und $|i^L|_D$. Wir betrachten dazu das folgende Korollar 5.3.5:

5.3.5 Korollar. *Gelten Annahmen (I) und (B), ist i positiv und $\|\cdot\|$ eine $st(|i|_D)|\mathcal{E}_+$, d.h. $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$, fortsetzende Integralnorm (vgl. (5.15)), so gilt*

$$(\forall \overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+) \quad \|\overline{f}\|' = |i^L(\overline{f})|'_D.$$

Infolgedessen ist daher $|i^L|'_D|\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ nur eine Einschränkung von $\|\cdot\|'|\widehat{B_0}^Y$ auf den Raum $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$.

Beweis. Ist $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$, so ist $|f| \in \overline{f}$. Nach (5.10) gilt daher $|f| \in \mathcal{E}(\|\cdot\|)$. Also existiert eine Folge $0 \le e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|\,|f| - e_n\|' \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (vgl. (5.10)). Die Behauptung folgt nun aus

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}\| \quad &= \quad \|\overline{f}\|' \underset{Korollar\ 5.2.14}{=} \|f\|' \underset{Korollar\ 5.2.6}{=} \lim_{n\to\infty} \|e_n\| \underset{Vor.}{=} \lim_{n\to\infty} st(|i(e_n)|_D) \\
&\underset{e_n\ge 0,\, i\, positiv}{=} \lim_{n\to\infty} st(|i(e_n)|'_D) \underset{Def.}{=} \lim_{n\to\infty} |\overline{i(e_n)}|'_D \underset{Korollar\ 5.2.6}{=} |i^L(f)|'_D \\
&\underset{Korollar\ 5.2.14}{=} |i^L(\overline{f})|'_D.
\end{aligned}$$

□

5.3.6 Korollar. *Gilt Annahme (I) und erfüllt i (5.9), so gilt für $e \in \mathcal{E}$:*

$$\|\,|e|\,\|_0 \quad = \quad \sup\{\mathrm{st}(|i(g)|_D) : g \in \mathcal{E}, |g| \mathrel{\widetilde{\le}} |e|\}. \tag{5.16}$$

Beweis. „$\le$" klar. „$\ge$" Sei $g \in \mathcal{E}$ mit $|g| \mathrel{\widetilde{\le}} |e|$. Unter Annahme (I) gilt dann für die Beschneidung von g mit $|e|$

$$[(g \vee (-|e|)) \wedge |e|] \in \mathcal{E}, \quad |(g \vee (-|e|)) \wedge |e|| \le |e|.$$

Wegen $|g(y)| \mathrel{\widetilde{\le}} |e(y)|$ existiert nach Lemma 5.1.9 ein e'_y mit $|e(y)| \approx e'_y$ und $g(y) \le |g(y)| \le e'_y$. Daher gilt nach Lemma 5.1.7

$$\begin{aligned}
&(g(y) \vee (-|e(y)|)) \wedge |e(y)| \approx (g(y) \vee (-e'_y)) \wedge e'_y = g(y) \\
\Longrightarrow\quad &(g \vee (-|e|)) \wedge |e| \approx g.
\end{aligned}$$

Wegen der Gültigkeit von (5.9) folgt daraus $i((g \vee (-|e|)) \wedge |e|) \approx i(g)$, also gilt

$$\mathrm{st}(|i((g \vee (-|e|)) \wedge |e|) - i(g)|_D) = 0.$$

Daraus folgt $\mathrm{st}(|i(g)|_D) = \mathrm{st}(|i((g \vee (-|e|)) \wedge |e|)|_D) \le \|\,|e|\,\|_0$. □

Da $\|\cdot\|_0$ die kleinste zu i passende Integralnorm über $|\mathcal{E}|'$ ist, ist es sinnvoll, wie Vergleichsprinzip 5.2.16 zeigt, zur Standardisierung gemäß Satz 5.2.13 (unter den Annahmen (A),(I),(5.12) oder (A),(II),(5.12)) bzw. Korollar 5.2.14 (unter den Annahmen (B),(I), i positiv) eine $\|\cdot\|_0||\mathcal{E}|'$ fortsetzende Integralnorm zu verwenden. Da die Annahme einer $\approx$–Integralnorm zur Standardisierung benötigt wird (vgl. Satz 5.2.13), werden wir im Folgenden aufgrund von Satz 5.3.3 die zusätzliche Annahme voraussetzen:

- i erfülle Bedingung (5.9).

In analoger Weise, wie im Kapitel 1.2, wird nun eine $\|\cdot\|_0||\mathcal{E}|'$ fortsetzende Integralnorm konstruiert, die sogenannte Loeb-Integralnorm. Dabei handelt es sich um eine Fortsetzung der Integralnorm $\|\cdot\|_0||\mathcal{E}|'$ auf $(|B|')^Y$.

5.3.7 Satz. *Es gelten Annahmen (A),(I),*(5.12) *oder (A),(II),*(5.12) *oder (B),(I), i positiv. i erfülle Bedingung* (5.9). *Setzt man für $f \in (|B|')^Y$*

$$\|f\|_L \quad := \quad \begin{cases} 0, & \textit{falls } f \approx 0, \\ \inf\{\|g\|_0 : f \leq g,\, g \in |\mathcal{E}|'\}, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

so ist $\|\cdot\|_L$ eine zu i passende, positiv homogene $\approx$–Integralnorm über $(|B|')^Y$, welche die auf $|\mathcal{E}|'$ definierte $\approx$-Integralnorm $\|\cdot\|_0$ fortsetzt. $\|\cdot\|_L$ wird im Folgenden auch als Loeb-Integralnorm bezeichnet.

Beweis. Ist $e \in \mathcal{E}$ mit $e \approx 0$, so gilt $|e| \approx 0$ unter Annahme (I) (vgl. Lemma 5.1.7) und $|e|_B \approx 0$ unter Annahme (II). Da $\|\cdot\|_0$ eine $\approx$–Integralnorm ist, folgt $\|\,|e|'\|_0 = 0$. Also ist $\|\cdot\|_L$ eine Fortsetzung von $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}|'$. Mit $\|\cdot\|_0$ ist damit auch $\|\cdot\|_L$ zu i passend. Es ist $|B|'$ unter Multiplikation mit $\alpha \in {}^*[0, \infty[$ abgeschlossen. Mit $|\mathcal{E}|'$ und $\|\cdot\|_0$ (vgl. Lemma 5.3.2) ist somit auch $\|\cdot\|_L$ positiv homogen.

$\approx$–Integralnorm: Es gilt $\|\,|0|'\,\|_L = 0$. Ferner ist $\|\cdot\|_L$ monoton, da für $f, g \in (|B|')^Y$ mit $f \leq g$ auch $\|f\|_L \leq \|g\|_L$ gilt. Sind $f_1, f_2 \in (|B|')^Y$, so ist auch $f_1 + f_2 \in (|B|')^Y$. Folglich genügt zum Beweis der Integralnormeigenschaften der Nachweis von

$$(\forall f_1, f_2 \in (|B|')^Y)\ \|f_1 + f_2\|_L \leq \|f_1\|_L + \|f_2\|_L. \tag{1}$$

Ist $\|f_1\|_L = \infty$ oder $\|f_2\|_L = \infty$, so gilt (1) sofort. Seien daher $\|f_1\|_L, \|f_2\|_L < \infty$, $\varepsilon \in]0, \infty[$. Nach Definition von $\|\cdot\|_L$ existieren $g_1, g_2 \in |\mathcal{E}|'$ mit

$$f_i \leq g_i, \quad \|g_i\| \leq \|f_i\|_L + \tfrac{\varepsilon}{2},\ i = 1, 2.$$

Nach Lemma 5.3.2 ist auch $g_1 + g_2 \in |\mathcal{E}|'$ mit $f_1 + f_2 \leq g_1 + g_2$. Daher gilt nach Definition von $\|\cdot\|_L$

$$\|f_1 + f_2\|_L \quad \leq \quad \|g_1 + g_2\|_0 \leq \|g_1\|_0 + \|g_2\|_0 \leq \|f_1\|_L + \|f_2\|_L + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon \in]0, \infty[$ beliebig gewählt worden war, gilt (1). Damit ist $\|\cdot\|_L$ eine Integralnorm und somit per definitionem auch eine $\approx$–Integralnorm. □

Das nächste Lemma liefert nun eine alternative Darstellung der Loeb-Integralnorm.

5.3.8 Lemma. *Es gelten die Annahmen (A),(I),*(5.12) *oder (A),(II),*(5.12) *oder (B),(I), i positiv. i erfülle Bedingung* (5.9). *Für $f \in (|B|')^Y$ gilt:*

$$\|f\|_L \quad = \quad \inf\{\|g\|_0 : f \stackrel{\sim}{\leq} g,\, g \in |\mathcal{E}|'\}.$$

$\|\cdot\|_L$ ist die größte $\approx$-Integralnorm über $(|B|')^Y$, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}|'$ fortsetzt.

Beweis. „$\geq$“ klar. „$\leq$“ Ist $f \approx 0$, so ist „$\leq$“ klar. Ansonsten sei $e \in \mathcal{E}$ mit $f \mathrel{\widetilde{\leq}} |e|'$. Also gilt $f \wedge |e|' \approx f$ und somit auch $f - f \wedge |e|' \approx 0$ (im Fall (I) siehe Lemma 5.1.9 und Lemma 5.1.7). Wegen $0 \leq f - f \wedge |e|'$, ist $f - f \wedge |e|' \in (|B|')^Y$. Da $\|\cdot\|_L$ gemäß Satz 5.3.7 eine $\approx$–Integralnorm ist, folgt $\|f - f \wedge |e|'\|_L = 0$. Somit gilt

$$\|f\|_L = \|f \wedge |e|'\|_L \leq \|\,|e|'\,\|_L = \|\,|e|'\,\|_0.$$

Da $e \in \mathcal{E}$ mit $f \mathrel{\widetilde{\leq}} |e|'$ beliebig war, folgt „$\leq$“.
Sei $\|\cdot\|_a$ eine weitere $\approx$–Integralnorm, die $\|\cdot\|_0 | |\mathcal{E}|'$ fortsetzt und sei $f \in (|B|')^Y$. Ist dann $f \mathrel{\widetilde{\leq}} g \in |\mathcal{E}|'$, so gilt $f \wedge g \approx f$ (vgl. Lemma 5.2.9 im Fall (I)) und damit auch

$$\|f\|_a = \|f \wedge g\|_a \leq \|g\|_a = \|g\|.$$

Also gilt $\|f\|_a \leq \|f\|_L$. Somit ist $\|\cdot\|_L$ die größte $\|\cdot\|_0 | |\mathcal{E}|'$ fortsetzende $\approx$–Integralnorm. □

5.3.9 Bemerkung. Gelten Annahmen (I), (B) und ist i positiv, so ist die Konstruktion von $\|\cdot\|_0 | |\mathcal{E}|'$ und damit auch von der Loeb-Integralnorm $\|\cdot\|_L$ unabhängig davon, ob in D die Norm $|\cdot|_D$ oder $|\cdot|'_D$ verwendet wird (vgl. Korollar 5.3.4, Satz 5.3.7).

5.4 Verallgemeinerung von Loebs und Osswalds Zugang

In [20] entwickeln Loeb und Osswald, wie bereits im Abschnitt 5.1 beschrieben, ausgehend von einer internen Integrationsstruktur ein standardisiertes System in der Nichtstandardhülle von topologischen Vektorverbänden. Die Konstruktion beruht dabei auf der Positivität und damit auch Monotonie des zugrunde gelegten Funktionals i. Verzichtet man nun auf die Forderung der Positivität des Integrals, so bietet sich dieser Ansatz in derselben Weise wegen der fehlenden Monotonie des Integrals nicht mehr an. In diesem Kapitel wird Loebs und Osswalds Methode der Konstruktion eines standardisierten Systems integrierbarer Funktionen mittels einer Menge von schwachen Nullfunktionen auf interne Pseudo-Integrationsstrukturen und die Verwendung von bestimmten $\approx$–Integralnormen verallgemeinert. Dazu wird im Folgenden zunächst eine Menge von schwachen Nullfunktionen $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ unter Zuhilfenahme einer $\|\cdot\|_0 | |\mathcal{E}|'$ fortsetzenden $\approx$–Integralnorm konstruiert. Diese Entwicklung ist dabei, wie auch im Kapitel 1.3, unabhängig von der Positivität des Integrals i. Im Spezialfall der Loeb-Integralnorm und eines positiven Integrals wird sich unter den Annahmen von Loeb und Osswald die Gleichheit der von den beiden Autoren konstruierten Menge der schwachen Nullfunktionen mit der hier angegebenen Menge $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ ergeben. Gleiches gilt auch für das System der integrierbaren Funktionen, das wir unter Zuhilfenahme der Menge der schwachen Nullfunktionen definieren werden.

Im Folgenden sei in diesem Kapitel 5.4,

- $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\,|\mathcal{E}|'$ fortsetzende $\approx$–Integralnorm über $(|B|')^Y$.

5.4.1 Definition. Setze unter Annahme (A)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\|\cdot\|} &:= \{g \in B^Y : \ \|g\|' = 0\} \\ &= \text{„System der schwachen Nullfunktionen“}, \\ \mathcal{L}_{\|\cdot\|} &:= \{\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y : \overline{f} = \overline{e+g}, e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}, g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}\}. \end{aligned}$$

Für $\overline{f} = \overline{e+g} \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ setze $i^{\mathcal{L}}(\overline{f}) := \overline{i(e)}$. Dann ist $i^{\mathcal{L}} : \mathcal{L}_{\|\cdot\|} \to \widehat{D}$ wohldefiniert.

Beweis. Angenommen es ist $\overline{f} \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ und es sind $e_1, e_2 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $g_1, g_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit $\overline{f} = \overline{e_1+g_1} = \overline{e_2+g_2}$. Dann gilt $e_1+g_1 \approx e_2+g_2$ und somit $|e_1+g_1-(e_2+g_2)|' \approx 0$. Daraus folgt

$$|\|e_1-e_2\|' - \|g_1-g_2\|'| \leq \|e_1+g_1-(e_2+g_2)\|' = 0,$$

da $\|\cdot\|$ eine $\approx$–Integralnorm ist. Folglich gilt

$$\mathrm{st}(|i(e_1-e_2)|_D) \leq \|e_1-e_2\|' = \|g_1-g_2\|' \leq \|g_1\|' + \|g_2\|' = 0.$$

Infolgedessen gilt $i(e_1) \approx i(e_2)$, also ist auch $\overline{i(e_1)} = \overline{i(e_2)}$. □

5.4.2 Bemerkung. Setzt man anstatt der Bedingung (A) die Annahme (B) voraus und gilt ferner Annahme (I) und ist i positiv, so ist infolgedessen auch $i^{\mathcal{L}} : \mathcal{L}_{\|\cdot\|} \to \widehat{D}$ wohldefiniert (vgl. Bemerkung 5.2.1, Korollar 5.3.4).

5.4.3 Lemma. Sind $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$, $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit $\overline{f} = \overline{e+g}$, so gilt

$$\|\overline{f}\|' = \|e+g\|' = \|e\|_0'.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus

$$\|e\|_0' = \|e\|_0' - \|g\|' \leq \|e+g\|' \leq \|e\|_0' + \|g\|' = \|e\|_0'.$$ □

5.4.4 Lemma. *Ist $f \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ und $g \approx f$, so folgt $g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Insbesondere ist daher $\overline{g} \subset \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ für jedes $g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$.*

Beweis. Aus $g \approx f$ folgt $|f-g|' \approx 0$. Da $\|\cdot\|$ eine $\approx$–Integralnorm ist, gilt daher

$$|\|f\|' - \|g\|'| \leq \|f-g\|' = 0$$

und somit $\|g\|' = \|f\|' = 0$. □

Im Falle der Loeb-Integralnorm gilt dann (vgl. Lemma 5.3.8)

$$\mathcal{N}_{\|\cdot\|_L} = \{g \in B^Y : (\forall \varepsilon \in]0,\infty[)(\exists e \in |\mathcal{E}|')\ |g|' \mathrel{\widetilde{\leq}} e,\ \|e\|_0 < \varepsilon\}.$$

Das nächste Lemma zeigt, dass unter den Annahmen (I), (B) und der Gültigkeit der Annahmen von Loeb und Osswald, die von den beiden Autoren konstruierten Mengen $\widetilde{\mathcal{L}_0}$, $\mathcal{L}_1$ (zur Definition siehe Paragraph 5.1) mit den für die Loeb-Integralnorm angegebenen Mengen $\mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}$, $\mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ übereinstimmen. Somit liefert die obige Konstruktion eine Verallgemeinerung des von den beiden Autoren angegebenen Ansatzes auf interne, lineare Funktionale i, die nicht unbedingt positiv sein müssen, und auf $\|\cdot\|_0| \, |\mathcal{E}|'$ fortsetzende $\approx$–Integralnormen.

5.4.5 Lemma. *Gelten zusätzlich zu den Annahmen (I) und (B), die Annahmen von Loeb, Osswald in [20], S. 1-18, (insbesondere ist dann das Integral i positiv) und verwendet man zur Standardisierung die Loeb-Integralnorm, so stimmen die Mengen $\mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}$ bzw. $\mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ mit den entsprechenden von Loeb und Osswald [20] konstruierten Mengen $\widetilde{\mathcal{L}_0}$, $\mathcal{L}_1$ überein.*

Beweis. Wir betrachten die Nullumgebungsbasis $\mathcal{W} = \{U_\varepsilon(0) : \varepsilon \in {}^*\mathbb{R}_+\}$ und die $\mathbb{R}$-Nullumgebungsbasis $\mathcal{W}_0 = \{U_{\frac{1}{n}}(0) : n \in \mathbb{N}\}$. Die Gleichheit der Menge der schwachen Nullfunktionen mit der von Loeb und Osswald definierten Menge $\widetilde{\mathcal{L}_0}$ ergibt sich dann für $g \in B^Y$ aus

$$\begin{aligned} & g \in \widetilde{\mathcal{L}_0} = \{h \in B^Y : (\forall V \in \mathcal{W}_0)\,(\exists e \in \mathcal{E})\ |h| \mathrel{\widetilde{\leq}} e,\ i(e) \in V\} \\ \iff\ & (\forall \varepsilon \in]0,\infty[)\ (\exists e \in \mathcal{E}, |g| \mathrel{\widetilde{\leq}} e) \quad \|e\|_0 \underset{Korollar\,5.3.4}{=} \mathrm{st}(|i(e)|_D) < \varepsilon \\ \iff\ & g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}. \end{aligned}$$

Nach Proposition 5.1.15 wird die Menge $\mathcal{L}_1$ nicht verlassen, wenn die Menge $\mathcal{L}_0$ durch die Menge $\widetilde{\mathcal{L}_0}$ ersetzt wird. Per definitionem ist daher $\mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ eine Teilmenge der von Loeb und Osswald konstruierten Menge $\mathcal{L}_1$. Sei nun im Sinne von Loeb und Osswald $\overline{f} \in \mathcal{L}_1$; dann ist $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$ und es existieren $g \in \widetilde{\mathcal{L}_0}$, $e \in \mathcal{E}$ mit $\overline{f} = \overline{e+g}$. Nach dem eben Bewiesenem genügt nun der Nachweis von $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$. Mit $\overline{f} \in \mathcal{L}_1$ ist nach Proposition 5.1.13 auch $|\overline{f}| \in \mathcal{L}_1$ mit $|\overline{f}| = \overline{|f|} = \overline{|e|+k}$ für ein geeignetes $k \in \mathcal{L}_0 \subset \widetilde{\mathcal{L}_0}$ (vgl. auch Beweis von Proposition 3.1 in [20]). Nach Proposition 5.1.14 und Proposition 5.1.15 gilt (vgl. auch Bemerkung 5.2.1)

$$i^{\mathcal{L}_1}(\overline{f}) = \overline{i(e)},\ i^{\mathcal{L}_1}(|\overline{f}|) = i^{\mathcal{L}_1}(\overline{|f|}) = \overline{i(|e|)} \text{ mit } i(|e|), i(e) \in \mathrm{fin}(D).$$

Nach Korollar 5.3.4 ist damit $\|e\|_0' = \mathrm{st}(|i(|e|)|_D) < \infty$. Folglich gilt $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$ und daher ist $\overline{f} \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ im obigen Sinne. □

Das nächste Lemma zeigt Eigenschaften der Menge der schwachen Nullfunktionen. Das Resultat wird insbesondere im Beweis von Satz 5.4.7 eine Rolle spielen.

5.4.6 Lemma. *$\mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ ist ein $\mathbb{R}$-linearer Raum. Unter Annahme (I) ist zudem $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ ein $\mathbb{R}$-linearer Vektorverband. Unter Annahme (II) gilt:*

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\,(\forall g_1, g_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|})\,(\forall b \in \mathrm{fin}(B)) \quad \alpha g_1 + \beta g_2,\ (|g_1|_B \cdot b) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}.$$

Beweis. Zuerst wird die $\mathbb{R}$-Linearität von $\mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ gezeigt. Seien dazu $g_1, g_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Man wähle $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha| \leq n_1$, $|\beta| \leq n_2$. Aus der Gültigkeit von $|\alpha g_1 + \beta g_2|' \leq |\alpha g_1|' + |\beta g_2|'$ folgt dann

$$\begin{aligned}\|\alpha g_1 + \beta g_2\|' &\leq \|\alpha g_1\|' + \|\beta g_2\|' \leq \|n_1 \cdot g_1\|' + \|n_2 \cdot g_2\|' \\ &\leq n_1\|g_1\|' + n_2\|g_2\|' = 0,\end{aligned}$$

also ist auch $\alpha g_1 + \beta g_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Gilt Annahme (I), so ist per definitionem mit g auch $|g| \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Ist Annahme (II) gültig und $g_1 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$, $b \in \mathrm{fin}(B)$, so gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $|b|_B \leq n$

$$\||g_1|_B \cdot b\|' = \||g_1|_B \cdot |b|_B\| \leq n \cdot \|g_1\|' = 0. \qquad \square$$

Wie der nächste Satz 5.4.7 zeigt, ist $\mathcal{L}_{\|\cdot\|}$ ein $\mathbb{R}$-linearer Vektorverband bzw. ein $\mathbb{R}$-Fundamentalsystem. Im Satz 5.4.7 wird nämlich die Gleichheit der standardisierten Systeme $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ und $(\mathcal{L}_{\|\cdot\|}, i^{\mathcal{L}})$ nachgewiesen. Folglich liefert Definition 5.4.1 eine andere Konstruktionsmöglichkeit des standardisierten Systems von Satz 5.2.13, wenn den Betrachtungen eine $\|\cdot\|_0||\mathcal{E}|'$ fortsetzende $\approx$–Integralnorm zugrunde gelegt wird.

5.4.7 Satz. *Es gelten Annahmen (A), (I) oder (A), (II) und es sei $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\,|\mathcal{E}|'$ fortsetzende $\approx$–Integralnorm über $(|B|')^Y$. Für die standardisierten Systeme gilt dann:*

$$(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L) = (\mathcal{L}_{\|\cdot\|}, i^{\mathcal{L}}).$$

Beweis. „$\supset$“ Sei $\overline{f} \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$. Dann ist $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$ und es existieren $e \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $g \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit $\overline{f} = \overline{e+g}$. Folglich gilt $f \approx (e+g)$ und somit auch $|f-(e+g)|' \approx 0$. Da eine $\approx$–Integralnorm gegeben ist, folgt $\|f-(e+g)\|' = 0$. Also gilt insbesondere $\|f-e\|' = \|g\|' = 0$. Wegen (5.10) folgt daraus $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$.
„$\subset$“ Sei $\overline{f} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Dann existiert eine Folge $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f-e_n\|' \to 0$ $(n \to \infty)$ (vgl. (5.10)). Nach Theorem 8.5, II, in Hurd, Loeb [7] existiert eine interne Erweiterung $e_n \in \mathcal{E}$, $n \in {}^*\mathbb{N}$. Es gilt nun: $(\forall m \in \mathbb{N})$ $(\exists N(m) \in \mathbb{N})$ $(\forall n \in \mathbb{N}^{\geq N(m)})$

$$\|e_{N(m)} - e_n\|_0' \leq \|f - e_{N(m)}\|' + \|f-e_n\|' \leq \tfrac{1}{3m}.$$

Betrachtet man für $m \in \mathbb{N}$ die Menge $A_m := \{n \in {}^*\mathbb{N} : \phi[n,m] \text{ gilt}\}$ mit

$$\phi[n,m] : \sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g|' \leq |e_n - e_{N(m)}|'\} < \tfrac{2}{3m},$$

so ist $\phi[n,m]$ eine interne Formel und A_m ist nach dem Prinzip der internen Definition intern. Nach dem Permanenzprinzip existiert für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $h(m) \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ mit $\{N(m), \ldots, h(m)\} \subset A_m$. Dann ist

$$\mathcal{D} := \{A_m : m \in \mathbb{N}\}$$

ein System mit nicht-leeren, endlichen Durchschnitten, welches aus höchstens $\widehat{S}$-vielen internen Mengen besteht. Da eine $\widehat{S}$–kompakte Nichtstandard-Einbettung vorausgesetzt worden ist, existiert ein $h \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m$. Damit erhält man

$$\mathrm{st}(|i(g)|_D) \leq \mathrm{st}(\sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g|' \leq |e_h - e_{N(m)}|'\})$$

für jedes $g \in \mathcal{E}$ mit $|g|' \leq |e_h - e_{N(m)}|'$. Folglich gilt

$$\|e_h - e_{N(m)}\|_0' \leq \mathrm{st}(\sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g|' \leq |e_h - e_{N(m)}|'\}) \leq \tfrac{2}{3m}.$$

Daraus folgt

$$(\forall m \in \mathbb{N}) \qquad \|f - e_h\|' \leq \|f - e_{N(m)}\|' + \|e_{N(m)} - e_h\|_0' \leq \tfrac{1}{m},$$

d.h. es ist $(f - e_h) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Wegen $\|e_h\|_0' \leq (\frac{2}{3} + \|e_{N(1)}\|_0') < \infty$ ist damit auch $e_h \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$. Wegen $\overline{f} \in \widehat{B_0}^Y$ folgt hieraus $\overline{f} \in \mathcal{L}_{\|\cdot\|}$. □

Damit führen die in Satz 5.2.13 und in Definition 5.4.1 eingeführten Standardisierungen für eine $\|\cdot\|_0| \, |\mathcal{E}|'$-fortsetzende $\approx$–Integralnorm über $(|B|')^Y$ zu demselben Ergebnis.

5.4.8 Korollar. *Insbesondere ergibt sich damit unter den Annahmen (I),(B) und i positiv die Gleichheit der standardisierten Systeme* $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L) = (\mathcal{L}_{\|\cdot\|}, i^{\mathcal{L}})$.

Beweis. Wir legen der Bildung der Standardisierung das System $(D, +, \cdot, |\cdot|_D', \leq)$ zugrunde (vgl. Bemerkung 5.2.1). Nach Korollar 5.3.4 sind dann die Voraussetzungen zur Bildung des standardisierten Systems gemäß Satz 5.2.13 (vgl. Korollar 5.2.14) und gemäß Definition 5.4.1 erfüllt. Die entsprechenden standardisierten Systeme sind aber nach Satz 5.4.7 gleich. □

Infolgedessen entspricht unter den Annahmen von Loeb und Osswald das von den beiden Autoren gebildete standardisierte System dem mit der Loeb-Integralnorm gebildetem System $\mathcal{L}_{\|\cdot\|_L}$ und dem standardisierten System $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$, d.h. es gilt:

$$\mathcal{L}(\|\cdot\|_L) = \mathcal{L}_{\|\cdot\|_L} = \mathcal{L}_1. \tag{5.17}$$

Folglich liefert die Verwendung der Loeb-Integralnorm im Satz 5.2.13 dasselbe standardisierte System, wie Definition 5.4.1, also auch wie das von Loeb, Osswald [20] eingeführte standardisierte System. Beispiel 1.3.6 zeigt, dass man selbst im Fall $B = {}^*\mathbb{R} = D$ nicht auf die Annahme einer $\|\cdot\|_0| \, |\mathcal{E}|'$ fortsetzenden Integralnorm verzichten kann.

5.5 Konvergenzsätze

Wir werden im Folgenden ein Konvergenztheorem unter Annahme (I) herleiten, welches den wichtigen Satz von der monotonen Konvergenz von Loeb und Osswald verallgemeinert. Zur Gültigkeit von Konvergenzsätzen für das standardisierte System $(\mathcal{L}(\|\cdot\|), i^L)$ unter Annahme (II) sei auf die Standardtheorie (siehe z.B. Rogge [24]) verwiesen, da ja unter Annahme (II) bedingt durch die internen Normen $|\cdot|_B$, $|\cdot|_D$ in B und D Integralnormen über ${}^*[0,\infty[^Y$ betrachtet werden.

5.5.1 Lemma. *Es gelte Annahme (I) und es sei $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$-fortsetzende $\approx$–Integralnorm. Sind dann $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ und $e_1, e_2 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$, $h_1, h_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit $f_i = \overline{e_i + h_i}$, $i = 1, 2$, so existieren $k_1, k_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit*

$$f_1 \wedge f_2 = \overline{(e_1 \wedge e_2) + k_1},\ f_1 \vee f_2 = \overline{(e_1 \vee e_2) + k_2} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} f_1 \wedge f_2 &= \overline{\underbrace{e_1 \wedge e_2}_{\in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}} + \underbrace{[((e_1+h_1) \wedge (e_2+h_2)) - (e_1 \wedge e_2)]}_{=:k_1}}, \\ f_1 \vee f_2 &= \overline{\underbrace{e_1 \vee e_2}_{\in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}} + \underbrace{[((e_1+h_1) \vee (e_2+h_2)) - (e_1 \vee e_2)]}_{=:k_2}}. \end{aligned}$$

Es genügt $k_1, k_2 \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ zu zeigen. Mit $p := |h_1| + |h_2| \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ folgt dies aus

$$\begin{aligned} \underbrace{[((e_1-p) \wedge (e_2-p)) - (e_1 \wedge e_2)]}_{=-p} &\le k_1 \le \underbrace{[((e_1+p) \wedge (e_2+p)) - (e_1 \wedge e_2)]}_{=p}, \\ \underbrace{[((e_1-p) \vee (e_2-p)) - (e_1 \vee e_2)]}_{=-p} &\le k_2 \le \underbrace{[((e_1+p) \vee (e_2+p)) - (e_1 \vee e_2)]}_{=p}. \end{aligned}$$ □

Zum Beweis des nächsten Konvergenztheorems benötigen wir eine zusätzliche Eigenschaft an die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende $\approx$–Integralnorm:

$$(\forall \{h_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{N}_{\|\cdot\|})\ (\exists h \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|})\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad |h_n| \le h. \tag{5.18}$$

In Lemma 5.5.2 wird gezeigt, dass die Loeb-Integralnorm die Eigenschaft (5.18) erfüllt.

5.5.2 Lemma. *Betrachte unter Annahme (I) die Loeb-Integralnorm. Dann existiert zu jeder abzählbaren Menge $\{h_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}$ ein $h \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}$ mit $|h_n| \le h$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Wegen Lemma 5.5.1 seien o.B.d.A. $0 \le h_n \le h_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Wie betrachten die folgende Fallunterscheidung:

a) Sei $h_n \approx 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei zunächst $y \in Y$ fest. Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$, $U \in \mathcal{U}_0$ die interne Menge

$$A_{U,n} := \{b \in B : |h_n(y)| \le b, |b| \in U\}.$$

Dann ist $A_{U,n}$, für $U \in \mathcal{U}_0, n \in \mathbb{N}$, ein System interner Mengen mit nicht-leeren, endlichen Durchschnitten, welches aus höchstens $\widehat{S}$-vielen Mengen besteht. Nach Saturation existiert dann ein

$$h(y) \in \bigcap_{u \in \mathcal{U}_0, n \in \mathbb{N}} A_{U,n}.$$

Also gilt $|h_n(y)| \le h(y)$, $h(y) \approx 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $y \in Y$. Daraus folgt $\|h\|_L = \|h\|'_L = 0$. Daher ist $h \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|_L}$.

b) Ist nun $h_{n_0}(y_0) \not\approx 0$ für ein $y_0 \in Y$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so gilt $h_n(y_0) \not\approx 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$. Sei daher o.B.d.A. $h_n(y_0) \not\approx 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Definition der Loeb-Integralnorm gilt (vgl. Satz 5.3.7)

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,(\forall m \in \mathbb{N})\,(\exists g_{n,m} \in \mathcal{E}) \quad h_n \le g_{n,m},\ \|g_{n,m}\|_0 \le \tfrac{1}{2m}.$$

Seien o.B.d.A. $g_{n,m} \le g_{n+1,m}$. Betrachtet man

$$A_{n,m} := \{e \in \mathcal{E} : g_{n,m} \le e, \sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g| \le e\} \le \tfrac{1}{m}\},$$

dann ist $\{A_{n,m} :\ n \in \mathbb{N}\}$ ein System interner Mengen mit nicht-leeren, endlichen Durchschnitten. Nach Saturation existiert daher ein $g_m \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{n,m}$. Sei $y \in Y$ fest gewählt. Setzt man

$$B_{n,m} := \{b \in B : h_n(y) \le b \le g_m(y)\},$$

so ist auch $\{B_{n,m} :\ n, m \in \mathbb{N}\}$ ein System interner Mengen mit nicht-leeren, endlichen Durchschnitten. Nach Saturation existiert folglich ein

$$h(y) \in \bigcap_{n,m \in \mathbb{N}} B_{n,m}.$$

Da $y \in Y$ beliebig war, ist daher $h : Y \to B$ mit $h_n \le h \le g_m$ für jedes $n, m \in \mathbb{N}$. Infolgedessen gilt $\|h\|_L = 0$. □

An dieser Stelle stellt sich die Frage, ob nicht jede $\|\cdot\|_0|\,\mathcal{E}_+$ fortsetzende $\approx$–Integralnorm Bedingung (5.18) erfüllt. Dies ist aber nicht der Fall, wie das nächste Beispiel zeigt.

5.5.3 Beispiel. Wie betrachten den Fall $B = D = {}^*\mathbb{R}$ und setzen

$$Y := {}^*\mathbb{N}, \quad \mathcal{E} := \{k \cdot 1_{^*\mathbb{N}} : k \in {}^*\mathbb{R}\}, \quad i(k \cdot 1_{^*\mathbb{N}}) := k.$$

Dann ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne Integrationsstruktur. Setzt man für $g \in {}^*[0,\infty[^Y$

$$\|g\| := \limsup_{n\in\mathbb{N},n\to\infty} \operatorname{st}(g(n)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \operatorname{Tr}(g) \text{ endlich,} \\ \limsup\limits_{n\in\mathbb{N},n\to\infty} \operatorname{st}(g(n)), & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty[$ eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzende $\approx$–Integralnorm. Bedingung (5.18) ist jedoch nicht erfüllt und auch nicht das monotone Konvergenztheorem (2.2).

Beweis. $\|0\| = 0$ klar. Seien $g, g_1, g_2 \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $g \le g_1 + g_2$. Wir betrachten die folgende Fallunterscheidung:

a) Ist $\operatorname{Tr}(g)$ endlich, so gilt sofort $\|g\| \le \|g_1\| + \|g_2\|$.

b) Ist $\operatorname{Tr}(g)$ unendlich, so ist $\operatorname{Tr}(g_i)$ unendlich für mindestens ein $i = 1, 2$. Sei o.B.d.A. $\operatorname{Tr}(g_1)$ unendlich. Dann gilt (sowohl wenn $\operatorname{Tr}(g_2)$ endlich ist als auch wenn $\operatorname{Tr}(g_2)$ unendlich ist)

$$\|g\| = \limsup_{n\in\mathbb{N},n\to\infty} g(n) \le \limsup_{n\in\mathbb{N},n\to\infty} (g_1(n) + g_2(n)) \le \|g_1\| + \|g_2\|.$$

Folglich erfüllt $\|\cdot\| : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty[$ die Eigenschaften einer Integralnorm. Also ist $\|\cdot\|$ per definitionem eine $\approx$–Integralnorm, die $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$ fortsetzt. Wir zeigen nun, dass Bedingung (5.18) und (2.2) nicht erfüllt ist. Betrachtet man

$$h_n := 1_{\{1,\ldots,n\}},\ n \in \mathbb{N},$$

so ist $h_n \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Angenommen es gäbe ein $h \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit $|h_n| \le h$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann wäre $1_{\mathbb{N}} \le h$ und somit $\|h\| \ge \limsup_{n\in\mathbb{N},n\to\infty} 1_{\mathbb{N}}(n) = 1 \ne 0$. Ferner ist $\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni h_n \uparrow 1_{\mathbb{N}} =: h$ mit $i(h_n) = 0$ und $\|h\| = 1$. Wegen $\|h - 1_{{}^*\mathbb{N}}\|' = \|1_{{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}}\| = 0$ ist $h \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ mit $i^L(h) = 1 > \lim\limits_{n\to\infty} i^L(h_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} i^L(h_n) = 0$. $\square$

Der nachfolgende Satz liefert ein „monotones Konvergenztheorem“ für eine $\|\cdot\|_0|\mathcal{E}_+$-fortsetzende $\approx$–Integralnorm, die Bedingung (5.18) erfüllt. Der Konvergenzsatz gilt also für eine ganze Klasse von Integralnormen (speziell auch für die Loeb-Integralnorm) und ist insbesondere auch ohne die Annahme der Positivität des Funktionals i gültig.

5.5.4 Satz. *Es gelten Annahmen (I), (A) und es sei $\|\cdot\|$ eine $\|\cdot\|_0|\,\mathcal{E}_+$-fortsetzende $\approx$–Integralnorm, die Bedingung* (5.18) *erfüllt. Ferner sei f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$. Es existiere punktweise eine kleinste obere Schranke $f := \sup f_n \in \widehat{B_0}^Y$.*

(i) Ist dann $f = \sup f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, so existiert auch $\lim i^L(f_n)$ in $\widehat{D}$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n) = i^L(f)$.

(ii) Ferner gilt:

$$f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \iff \begin{cases} \lim i^L(f_n) \text{ existiert in } \widehat{D}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m>n} \|f_m - f_n\| = 0, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' < \infty. \end{cases}$$

In diesem Fall gilt $\lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n) = i^L(f)$.

Beweis. O.B.d.A. seien $f_n \geq 0$ (ansonsten betrachte die Folge $f_n - f_1$). Wegen $f_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ gilt nach Satz 5.4.7 und Definition 5.4.1 für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(\exists e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|})\ (\exists h_n \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}) \quad f_n = \overline{e_n + h_n}.$$

O.B.d.A. seien $0 \leq e_n \leq e_{n+1}$ (siehe Lemma 5.5.1). Nach Bedingung (5.18) existiert ein $h \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit $|h_n| \leq h$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(i), (ii) „$\Longrightarrow$“ Wir zeigen der Reihe nach:

$$i^L(f) = \lim_{n\to\infty} i^L(f_n); \tag{1}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' < \infty; \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} \|f_m - f_n\| = 0. \tag{3}$$

Zu $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ existiert ein $e_0 \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ und ein $j \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit

$$f = \overline{e_0 + j}$$

(vgl. Satz 5.4.7 und Definition 5.4.1). O.B.d.A. seien $0 \leq e_n \leq e_{n+1} \leq e_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Lemma 5.5.1). Setze nun e_n, $n \in \mathbb{N}$, intern fort zu $e : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}$ (vgl. Hurd, Loeb [7]). Nach dem Permanenzprinzip existiert ein $\omega \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \leq \omega$, gilt:

$$0 \leq e_n \leq e_{n+1} \leq \ldots \leq e_{\omega-1} \leq e_w \leq e_0.$$

Setzt man $e_n := e_\omega$ für $n \in {}^*\mathbb{N}^{>\omega}$, so ist wieder $e : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}$ intern mit

$$0 \leq e_n \leq e_{n+1} \leq e_\omega \leq e_0 \text{ für jedes } n \in {}^*\mathbb{N}. \tag{4}$$

Sei $n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Dann ist $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|}$ mit

$$\mathcal{N}_{\|\cdot\|} \ni (j \wedge 0) \leq (j + (e_0 - e_n)) \wedge h \leq h \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}.$$

Also ist $k := h \wedge (e_0 - e_n + j) \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ mit

$$e_n + k \leq e_n + (e_0 - e_n + j) = e_0 + j.$$

Außerdem gilt für jedes $l \in \mathbb{N}$ wegen $f_l \leq f$

$$e_l + h_l \leq e_n + h, \quad e_l + h_l \mathrel{\tilde{\leq}} e_n + (e_0 - e_n + j).$$

Daraus folgt $e_l + h_l \mathrel{\tilde{\leq}} e_n + k \leq e_0 + j$. Da B_0 ein $\mathbb{R}$-Untervektorverband von B ist, gilt mit Bemerkung 5.1.10

$$\overline{e_n + k} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|).$$

Da f die kleinste obere Schranke von f_n in $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ ist, folgt

$$e_0 + j \mathrel{\tilde{\leq}} e_n + k$$

und somit gilt $0 \leq e_0 - e_n \mathrel{\tilde{\leq}} k - j \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$. Folglich ist

$$\|e_0 - e_n\|_0 = 0 \text{ für jedes } n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \tag{5}$$

gültig. Hieraus erhält man

$$\|e_n - e_m\|_0' \leq \|e_0 - e_m\|_0 + \|e_0 - e_m\|_0 = 0 \text{ für jedes } m, n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}. \tag{6}$$

Sei nun $l \in \mathbb{N}$ fest. Wegen (5) und (6) gelten dann die Aussagen

$$\sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e_0 - e_n\} \leq \tfrac{1}{l}, \tag{7}$$
$$(\forall m \in {}^*\mathbb{N}, n < m) \ \sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g| \leq |e_m - e_n|\} \leq \tfrac{1}{l} \tag{8}$$

für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$. Daher gibt es nach dem Permanenzprinzip ein $n(l) \in \mathbb{N}$, so dass die Aussagen (7),(8) für alle $n(l) \leq n \in {}^*\mathbb{N}$ gelten. Also gilt für jedes $n \in {}^*\mathbb{N}^{\geq n(l)}$:

$$\|e_0 - e_n\|_0 \leq \tfrac{1}{l}, \tag{9}$$
$$(\forall m \in {}^*\mathbb{N}, n < m) \quad \|e_m - e_n\|_0' \leq \tfrac{1}{l}. \tag{10}$$

Wir kommen nun zum Nachweis von (1). Aus (9) folgt $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}, n\to\infty} \|e_0 - e_n\|_0 = 0$. Wegen Satz 5.2.13 (iii) erhält man daraus für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|i^L(f) - i^L(f_n)|_D &\leq \|f - f_n\| = \|e_0 + j - e_n - h_n\|' \\
&\leq \|e_0 - e_n\|_0 + \underbrace{\|j - h_n\|'}_{\leq \|j\|' + \|h_n\|' = 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;
\end{aligned}$$

damit gilt $i^L(f) = \lim\limits_{n\to\infty} i^L(f_n)$ in $\widehat{D}$, d.h. (1) ist gültig.
(2) folgt, da wegen $f_n \leq f$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Lemma 5.2.15 ($f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$) folgt:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|' \leq \|f\|' < \infty.$$

(3) gilt nun, da aus (10) mit Lemma 5.4.6 und Lemma 5.4.3 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} \|f_m - f_n\| \underset{Lemma.\,5.4.3}{=} \lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} \|e_m - e_n\|_0 = 0.$$

(ii) „$\Longleftarrow$“ Wir setzen $e : \mathbb{N} \to \mathcal{E}$ mit $e(n) = e_n$ intern fort zu $e : {}^*\mathbb{N} \to \mathcal{E}$. Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m>n} \|f_m - f_n\| = 0$ folgt mit Lemma 5.4.6 und Lemma 5.4.3 auch

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m>n} \|e_m - e_n\|_0 = 0.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Dann existiert ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in {}^*\mathbb{N},\, m > n \geq n_k) \quad \sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e_m - e_n\} \leq \tfrac{1}{k}.$$

Nach dem Permanenzprinzip existiert ein $m_k \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ mit

$$(\forall m, n \in {}^*\mathbb{N},\, m_k \geq m > n \geq n_k) \quad \sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e_m - e_n\} \leq \tfrac{1}{k}. \tag{11}$$

Setzt man nun für $k \in \mathbb{N}$

$$B_k := \{n \in {}^*\mathbb{N} : n_k + k \leq n \leq m_k\},$$

so ist B_k, $k \in \mathbb{N}$, ein System mit nicht-leeren endlichen Durchschnitten, welches aus internen Mengen besteht. Nach Saturation existiert dann ein

$$\omega_1 \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k.$$

Setzt man ferner $a := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| \in [0, \infty[$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$(\|e_n\|_0 \vee a) - a = 0.$$

Wir betrachten für jedes $m \in \mathbb{N}$ die interne Menge

$$A_m := \{n \in {}^*\mathbb{N} : m \leq n \leq \omega_1,\, e_m \leq e_n,\, \sup\{|i(g)|_D : g \in \mathcal{E}, |g| \leq e_n\} \leq a + \tfrac{1}{m}\}.$$

Dann ist A_m, $m \in \mathbb{N}$, ein System mit nicht-leeren endlichen Durchschnitten, welches aus höchstens $\widehat{S}$-vielen endlichen Mengen besteht. Nach Saturation existiert daher ein

$$\omega \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m.$$

Insbesondere gilt $\|e_n\|_0 \leq \|e_\omega\|_0 \leq a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit ist wegen

$$a = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|e_n + h_n\|' \underset{Lemma\,5.4.3}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|e_n\|_0$$

auch $\|e_\omega\|_0 = a$ gültig. Infolgedessen ist daher $e_\omega \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0}$. Seien nun punktweise $p(y), j(y) \in B$ für jedes $y \in Y$ mit

$$\overline{p(y)} = f(y), \quad e_\omega(y) + j(y) = p(y).$$

Zum Nachweis von $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ genügt es $j \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ zu zeigen. Da f Supremum von f_n ist und wegen $e_n \leq e_\omega$, $|h_n| \leq h$, gilt

$$e_n + h_n \widetilde{\leq} p \widetilde{\leq} e_\omega + h$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} j = p - e_\omega &\widetilde{\leq} e_\omega + h - e_\omega = h, \\ -j = e_\omega - p &\widetilde{\leq} e_\omega - e_n - h_n \leq e_\omega - e_n + h. \end{aligned}$$

Somit gilt $|j| \widetilde{\leq} e_\omega - e_n + h$ und damit ist

$$\|j\|' \leq \|e_\omega - e_n\|_0 + \|h\| \leq \|e_\omega - e_n\|_0$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gültig. Wegen ${}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N} \ni \omega \leq \omega_1$ folgt daraus

$$\|j\|' \leq \|e_\omega - e_{n_k}\|_0 \underset{(11)}{\leq} \frac{1}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Folglich ist $j \in \mathcal{N}_{\|\cdot\|}$ und somit $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$. □

5.5.5 Korollar. *Gelten Annahmen (I) und (B) und ist i positiv, so gilt ebenfalls Satz 5.5.4.*

Beweis. Die Behauptung folgt sofort mit Korollar 5.3.4 aus Satz 5.5.4, da das standardisierte System auf Basis des Systems $(D, +, \cdot, |\cdot|'_D, \leq)$ gebildet wird (vgl. auch Bemerkung 5.2.1). □

5.5.6 Bemerkung. Insbesondere ist die Verwendung der Loeb-Integralnorm im Theorem 5.5.4 möglich (vgl. Satz 5.3.7, Lemma 5.5.2). Satz 5.5.4 bzw. Korollar 5.5.5 ist somit eine Verallgemeinerung des von Loeb und Osswald angegebenen Konvergenztheorems 5.1.16.

Beweis. Es gelten Annahmen (I) und (B) und es sei i positiv. Wegen der Monotonie von i und Proposition 5.1.12 genügt es zum Beweis, dass Satz 5.5.4 eine Verallgemeinerung von Satz 5.1.16 ist, zu zeigen:

Ist f_n, $n \in \mathbb{N}$, eine monoton wachsende Folge in $\mathcal{L}(\|\cdot\|_L)$ und gilt punktweise $f := \sup f_n \in \widehat{B_0}^Y$, so gilt auch:

$$c := \lim_{n\to\infty} i^L(f_n) \text{ existiert in } \widehat{D} \Longrightarrow \begin{cases} \limsup\limits_{\substack{m,n\in\mathbb{N},\\ m>n,\, n\to\infty}} \|f_m - f_n\|_L = 0, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|'_L < \infty. \end{cases} \quad (1)$$

Da die Loeb-Integralnorm eine Fortsetzung von $st(|i|_D)$ ist (vgl. Satz 5.3.3, Satz 5.3.7 und (5.15)) und wegen $(f_m - f_n) \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ für jedes $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt mit Korollar 5.3.5

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_{m>n}\|f_m - f_n\|_L &\underset{Korollar\,5.3.5}{=} \lim_{n\to\infty}\sup_{m>n}|i^L(f_m - f_n)|_D \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sup_{m>n}(|i^L(f_m) - c|_D + |c - i^L(f_n)|_D) \\ &\underset{Vor.}{=} 0.\end{aligned}$$

Da $f_n - f_1 \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt aus $0 \leq i^L(f_n - f_1) = i^L(f_n) - i^L(f_1) \leq c - i^L(f_1)$ auch

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|i^L(f_n) - i^L(f_1)|_D \underset{(5.1)}{\leq} |c - i^L(f_1)|_D \leq |c|_D + |i^L(f_1)|_D.$$

Damit erhält man nun:

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|'_L &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n - f_1\|'_L + \|f_1\|'_L \underset{Korollar\,5.3.5}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}}|i^L(f_n - f_1)|'_D + \|f_1\|'_L \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}}|i^L(f_n) - i^L(f_1)|'_D + \|f_1\|'_L \leq |c|'_D + |i^L(f_1)|'_D + \|f_1\|'_L \\ &\underset{Lemma\,5.2.15}{<} \infty.\end{aligned}$$

□

Anhang A

A.1 Ergänzungen

Beweis von Satz 2.2.3 für fast starke Integralnormen. (i) Es genügt die Existenz einer Teilfolge $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| \sum_{l=n_k+1}^{n_{k+1}} |f_l| \| < \infty. \tag{1}$$

nachzuweisen. Für $n \geq n_k + 1$ gilt

$$|f - \sum_{l=1}^{n-1} f_l| \leq \sum_{l=n}^{\infty} |f_l| \leq \sum_{l=n_k+1}^{\infty} |f_l| = \sum_{m=k}^{\infty} (\sum_{l=n_m+1}^{n_{m+1}} |f_l|). \tag{2}$$

Ferner gilt $\||f - \sum_{l=1}^{n-1} f_l|\|' < \infty$, weil $\|f\|' < \infty$ nach Voraussetzung ist und $\|f_l\|' < \infty$ wegen $f_l \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$ gilt (siehe Lemma 1.1.16). Da $\|\cdot\|$ eine fast starke Integralnorm ist, folgt daher aus (2)

$$\||f - \overbrace{\sum_{l=1}^{n-1} f_l}^{\in \mathcal{L}(\|\cdot\|)} |\|' \leq \sum_{m=k}^{\infty} \| \sum_{l=n_m+1}^{n_{m+1}} |f_l| \| \xrightarrow[k \to \infty]{(1)} 0. \tag{3}$$

Wegen der Abgeschlossenheitseigenschaft von $\mathcal{L}(\|\cdot\|)$ (vgl. Satz 1.1.8) folgt daraus

$$f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|) \text{ mit } i^L(f) = \lim_{n \to \infty} i^L(\sum_{l=1}^{n-1} f_l) = \sum_{l=1}^{\infty} i^L(f_l).$$

Es verbleibt damit der Nachweis von (1).

<u>zu (1)</u>: Es wird gezeigt, dass gilt:

$$\| \sum_{k=n+1}^{m} |f_k| \| \to 0 \quad \text{für } m > n \to \infty. \tag{4}$$

Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in]0,\infty[$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass gilt

$$(\forall n \geq n(\varepsilon))\ (\forall m \in \mathbb{N}, m > n) \quad \| \sum_{k=n+1}^{m} |f_k| \| \leq \varepsilon.$$

Man wähle nun $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\| \sum_{k=n_1+1}^{m} |f_k| \| \leq \frac{1}{2}$ für $m > n_1$. Wir gehen induktiv weiter vor und wählen $n_{\nu+1} \in \mathbb{N}$ mit $n_1 < n_2 < \ldots < n_\nu < n_{\nu+1}$ und $\| \sum_{k=n_{\nu+1}+1}^{m} |f_k| \| \leq \frac{1}{2^{\nu+1}}$ für $m > n_{\nu+1}$. Damit erhält man $\| \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} |f_k| \| \leq \frac{1}{2^\nu}$. Infolgedessen gilt auch (siehe Lemma 1.1.16)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \| \sum_{k=n_\nu+1}^{n_{\nu+1}} |f_k| \| < \infty.$$

<u>zu (4):</u> Indirekt: Angenommen (4) wäre nicht gültig. Dann würde gelten:

$$(\exists \varepsilon \in]0,\infty[)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \mathbb{N} \ni m_n > n) \quad \| \sum_{k=n+1}^{m_n} |f_k| \| \geq \varepsilon.$$

Daher würden Indizes $\tilde{n}_1 < \tilde{m}_1 < \tilde{n}_2 < \tilde{m}_2 < \ldots$ existieren mit

$$0 \leq g_k := \sum_{l=\tilde{n}_k+1}^{\tilde{m}_k} |f_l| \in \mathcal{L}(\|\cdot\|), \ \|g_k\| \geq \varepsilon. \tag{5}$$

Also wäre

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{m} g_k \| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{n+m_n} |f_k| \| < \infty.$$

Da $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{E}_+$ und somit auf $\mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ halbadditiv ist (vgl. Satz 2.2.2) würde daraus $\|g_k\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ folgen, was im Widerspruch zu (5) steht. Damit ist (4) und somit insgesamt (i) bewiesen.
(ii) Setzt man $g_n := f_n - f_{n+1}$, so ist $g_n \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ mit

$$f_n = \sum_{l=n}^{\infty} g_l, \quad f_1 = \sum_{l=1}^{\infty} g_l, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{n} g_k \| \leq \|f_1\| \underset{Lemma\,1.1.16}{<} \infty.$$

Nach (i) (betrachte dazu $f_n := g_n$, $f := f_1 = \sum_{l=1}^{\infty} g_l$ in (i)) folgt daraus

$$\|f_n\|' = \| \sum_{l=n}^{\infty} g_l \|' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(iii) Setzt man $f_1' := f_1$ und $f_n' := f_n - f_{n-1} \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, so sind $f_n' \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k'$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ und

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{n} |f_k'| \| &\leq \|f_1\|' + \sup_{n\in\mathbb{N}} \| \sum_{k=2}^{n} f_k' \| \leq \|f_1\|' + \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - f_1\| \\ &\leq \|f_1\|' + \|f - f_1\| \leq 2\|f_1\|' + \|f\|' \underset{Vor.,Lemma 1.1.16}{<} \infty. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus (i) (man betrachte dazu $f_n := f'_n$ in (i)).
(iv) Setze $\mathcal{M}_i := \{|f_n - f_m| : n, m \geq i\}, i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\emptyset \neq \mathcal{M}_i \subset \mathcal{L}(\|\cdot\|)_+$ abzählbar und $\mathcal{M}_i \downarrow$ mit $g \leq 2\phi$ für jedes $g \in \mathcal{M}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Nun gilt

$$\sup\{g(y) : g \in \mathcal{M}_i\} \downarrow 0 \ (i \to \infty) \tag{6}$$

für jedes $y \in Y$. Es wird gezeigt, dass daraus folgt:

$$\sup_{n,m \geq i} \|f_n - f_m\|' = \sup\{\|g\| : g \in \mathcal{M}_i\} \leq \|\sup\{g : g \in \mathcal{M}_i\}\| \to 0 \ (i \to \infty). \tag{7}$$

Aus $f_n \to f \ (n \to \infty)$ und $|f_m - f_l| \leq \sup\{g : g \in \mathcal{M}_l\}$ für jedes $\mathbb{N} \ni m \geq l$ folgt

$$|f - f_l| = \lim_{m \to \infty} |f_m - f_l| \leq \sup\{g : g \in \mathcal{M}_l\} \leq 2\phi \in \mathbb{R}^Y.$$

Daraus erhält man mit (7) die Gültigkeit von

$$\|f - f_l\|' \leq \|\sup\{g : g \in \mathcal{M}_l\}\| \to 0 \ (l \to \infty),$$

woraus die Behauptung folgt. Es verbleibt der Nachweis von (7).
zu (7): Es wird gezeigt, dass gilt:

$$\sup\{g : g \in \mathcal{M}_i\} \in \mathcal{L}(\|\cdot\|). \tag{8}$$

Dann gilt $\mathcal{L}(\|\cdot\|) \ni \sup\{g : g \in \mathcal{M}_i\} \downarrow 0 \ (i \to \infty)$ nach (6). Daraus folgt nach (ii)

$$\sup\{\|g\| : g \in \mathcal{M}_i\} \leq \|\sup\{g : g \in \mathcal{M}_i\}\| \downarrow 0 \quad (i \to \infty).$$

Also gilt (7), wenn wir (8) nachgewiesen haben.
zu (8): Sei $i \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Setzt man für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} g_l \ :=\ & (|f_i - f_{i+1}| \vee \ldots \vee |f_i - f_{i+l}|) \vee (|f_{i+1} - f_{i+2}| \vee \ldots \vee |f_{i+1} - f_{i+l}|) \vee \ldots \\ & \vee |f_{i+l-1} - f_{i+l}|, \end{aligned}$$

so ist $g_l \in \mathcal{L}(\|\cdot\|)$, $l \in \mathbb{N}$, mit $0 \leq g_l \uparrow$. Es gilt für jedes $y \in Y$

$$0 \leq \sup\{g(y) : g \in \mathcal{M}_i\} = g_1(y) + \sum_{k=2}^{\infty}(g_k(y) - g_{k-1}(y)) \leq 2\phi \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_1 + \sum_{k=2}^{n}(g_k - g_{k-1})\| \leq \|g_1 + \sum_{k=2}^{\infty}(g_k - g_{k-1})\| \leq \|2\phi\| \underset{Lemma\,1.1.16}{<} \infty. \tag{10}$$

(8) folgt nun aus (9), (10) und (i) (betrachte dazu $f_1 := g_1$, $f_k := g_k - g_{k-1}$ für $k \geq 2$ in (i)). $\square$

Interne τ-stetige Pseudo- und interne Bourbaki-Integrationsstrukturen

Wir kommen nun zum Beweis der Sätze des Kapitels 3.2.

Beweis von Lemma 3.2.2. Setzt man $\Psi := g - (g \wedge \Phi) := \{g - (g \wedge \varphi) : \varphi \in \Phi\}$, so ist

$$\Psi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern mit } \Psi \downarrow, \inf_{\psi \in \Psi} \psi = 0.$$

Also folgt aus der τ-Stetigkeit von $i|\mathcal{E}$, dass $\inf_{\varphi \in \Phi} i(g - g \wedge \varphi) = 0$ gilt. Daraus folgt $i(g) = \sup_{\varphi \in \Phi} i(g \wedge \varphi) \leq \sup_{\varphi \in \Phi} i(\varphi)$. □

Beweis von Lemma 3.2.4. (i) Nach dem Prinzip der internen Definition ist $\mathcal{E}_+ \supset (g - \Phi) := \{g - \varphi : \varphi \in \Phi\} \downarrow$ intern mit $\inf_{\varphi \in \Phi}(g - \varphi) = 0$. Damit folgt aus der Eigenschaft eines Bourbaki-Integrals $0 = \inf_{\varphi \in \Phi} i(g - \varphi)$. Also gilt (i).
(ii) folgt analog. □

Beweis von Lemma 3.2.5. Wir setzen zunächst

$$g_i := \inf_{\varphi \in \Phi} i(\varphi), \; g_s := \sup_{\varphi \in \Phi} i(\varphi), \; h_i := \inf_{\vartheta \in \Theta} i(\vartheta), \; h_s := \sup_{\vartheta \in \Theta} i(\vartheta).$$

(i) Es ist $\varphi \leq g \leq h \leq \vartheta$ für jedes $\varphi \in \Phi$, $\vartheta \in \Theta$. Also gilt $i(\varphi) \leq \inf_{\vartheta \in \Theta} i(\vartheta)$ für jedes $\varphi \in \Phi$. Daraus folgt $g_s \leq h_i$.
(ii) Ist $h_s = \infty$, so gilt (ii) sofort. Sei daher $h_s < \infty$. Für jedes fest gewählte $\varphi \in \Phi$ ist $((\varphi - \vartheta)^+)_{\vartheta \in \Theta} \subset \mathcal{E}_+$ intern mit $(\varphi - \vartheta)^+ \downarrow$ und

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} (\varphi - \vartheta)^+ \;\;=\;\; (\inf_{\vartheta \in \Theta} (\varphi - \vartheta))^+ = (\varphi - h)^+ = 0.$$

Somit folgt aus der Eigenschaft eines Bourbaki-Integrals

$$0 = \inf_{\vartheta \in \Theta} i((\varphi - \vartheta)^+) \geq \inf_{\vartheta \in \Theta} i(\varphi - \vartheta) = i(\varphi) - \sup_{\vartheta \in \Theta} i(\vartheta).$$

Da $\varphi \in \Phi$ beliebig war, gilt daher $\sup_{\vartheta \in \Theta} i(\vartheta) \geq \sup_{\varphi \in \Phi} i(\varphi)$.
(iii) Folgt aus (ii) durch Betrachtung von $-\Theta = \{-\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, $-\Phi := \{-\varphi : \varphi \in \Phi\}$, $-g$, $-h$ und der Linearität von i.
(iv) Ist $g_i = -\infty$ oder $h_s = \infty$, so folgt die Behauptung sofort. Seien daher im Folgenden $g_i > -\infty, h_s < \infty$. Also sind $g_i, h_s \in {}^*\mathbb{R}$. Es ist $(\varphi - \vartheta)^+_{\varphi \in \Phi, \vartheta \in \Theta} \subset \mathcal{E}_+$ intern mit $(\varphi - \vartheta)^+ \downarrow$ und mit

$$\inf_{\varphi \in \Phi, \vartheta \in \Theta} (\varphi - \vartheta)^+ \;\;=\;\; (\inf_{\varphi \in \Phi} \varphi + \inf_{\vartheta \in \Theta} (-\vartheta))^+ = 0.$$

Da i Bourbaki-Integral ist, folgt

$$0 = \inf_{\varphi\in\Phi,\vartheta\in\Theta} i(\varphi-\vartheta)^+ \geq \inf_{\varphi\in\Phi,\vartheta\in\Theta} i(\varphi-\vartheta).$$

Folglich gilt $\sup_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta) \geq \inf_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)$. $\square$

Beweis von Lemma 3.2.7. (i) Wegen $e \in \mathcal{E}^{\Uparrow} \cap \mathcal{E}^{\Downarrow}$ gilt nach Lemma 3.2.5 ${}^\circ i(h_1) \leq {}^\circ i(e) \leq {}^\circ i(h_2)$ für $h_1 \in \mathcal{E}^{\Downarrow}$, $h_2 \in \mathcal{E}^{\Uparrow}$ mit $h_1 \leq e \leq h_2$. Daraus folgt (i).
(ii) Ist $\widehat{i}(g) = \infty$ oder $\underset{\frown}{i}(g) = -\infty$, so folgt die Behauptung sofort. Seien daher im Folgenden $\widehat{i}(g) < \infty$, $\underset{\frown}{i}(g) > -\infty$. Sind $h_1 \in \mathcal{E}^{\Downarrow}$, $h_2 \in \mathcal{E}^{\Uparrow}$ mit $h_1 \leq g \leq h_2$, so gilt $i(h_1) \leq i(h_2)$ nach Lemma 3.2.5. Daraus folgt dann zunächst ${}^\circ i(h_1) \leq \widehat{i}(g)$. Da $h_1 \in \mathcal{E}^{\Downarrow}$ mit $h_1 \leq g$ beliebig war, gilt damit (ii).
(iii), (iv) ergeben sich sofort aus der Definition von $\widehat{i}$ bzw. $\underset{\frown}{i}$. $\square$

Beweis von Satz 3.2.8. Sei $g \in {}^*[0,\infty[^Y$. Wir zeigen zuerst:

$$\|g\|_B = \inf\{{}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern mit } \Phi\uparrow,\ g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi\}, \tag{1}$$

$$\|g\|_B = \widehat{i}(g). \tag{2}$$

<u>zu (1):</u> „$\geq$“ klar.
„$\leq$“ Sei $\emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+$ intern mit $\Phi\uparrow$, $g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi$. Existiert dann ein $\varphi_1 \in \Phi$ mit $\varphi_1 \notin \mathcal{E}^{fin}$, so gilt ${}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)) = \infty$. Ansonsten ist $\Phi \subset \mathcal{E}^{fin}$. Somit gilt „$\leq$“ und daher (1).

<u>zu (2):</u> „$\geq$“ klar.
„$\leq$“ Ist nun $\emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}^{fin}$ intern mit $\Phi\uparrow$ und $g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi$, so ist auch $\phi^+ := \{\varphi^+ : \varphi \in \Phi\} \subset \mathcal{E}^{fin}_+$ intern mit $\Phi^+\uparrow$ und $g \leq \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi^+ = \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi$. Mit Lemma 3.2.5 folgt daraus ${}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi)) = {}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i(\varphi^+))$. Damit gilt „$\leq$“ und somit insgesamt (2).

<u>${}^\circ i|\mathcal{E}_+$ fortsetzende Integralnorm:</u> Es ist $\|\cdot\|_B : {}^*[0,\infty[^Y \to [0,\infty]$ mit $\|0\|_B = 0$ (betrachte $\Phi = \{0\}$). Seien $g, g_1, g_2 \in {}^*[0,\infty[^Y$ mit $g \leq g_1 + g_2$ gegeben. Ist dann $\|g_i\|_B = \infty$ für $i = 1$ oder $i = 2$, so gilt $\|g\|_B \leq \|g_1\|_B + \|g_2\|_B$ sofort. Seien daher $\|g_1\|_B, \|g_2\|_B < \infty$. Ist dann $\varepsilon \in]0,\infty[$, so existieren $\emptyset \neq \Phi_j \subset \mathcal{E}^{fin}_+$ intern mit

$$0 \leq \Phi_j\uparrow, \quad g_j \leq \sup_{\varphi\in\Phi_j}\varphi, \quad {}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi_j} i(\varphi)) \leq \|g_j\|_B + \tfrac{\varepsilon}{2},\ j = 1,2. \tag{3}$$

Dann ist $\emptyset \neq\subset \Phi_1 + \Phi_2 = \{\varphi_1 + \varphi_2 : \varphi \in \Phi_j, j = 1,2\} \subset \mathcal{E}^{fin}_+$ intern mit $\Phi_1 + \Phi_2\uparrow$ und $g \leq g_1 + g_2 \leq \sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\varphi_2\in\Phi_2}(\varphi_1 + \varphi_2)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|g\|_B &\leq {}^\circ(\sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\varphi_2\in\Phi_2} i(\varphi_1+\varphi_2)) \leq {}^\circ(\sup_{\varphi_1\in\Phi_1} i(\varphi_1)) + {}^\circ(\sup_{\varphi_2\in\Phi_2} i(\varphi_2)) \\ &\underset{(3)}{\leq} \|g_1\|_B + \|g_2\|_B + \varepsilon.\end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in]0,\infty[$ beliebig war, gilt damit $\|g\|_B \leq \|g_1\|_B + \|g_2\|_B$. Also ist $\|\cdot\|_B$ eine Integralnorm. Nach (3.8) und Lemma 3.2.5 ist $\|\cdot\|_B$ eine Fortsetzung von ${}^\circ i|\mathcal{E}_+$. Es verbleibt der Nachweis von (1.13).

zu (1.13): Seien $g_n, g \in (\text{fin}({}^*[0,\infty[))^Y$, $n \in \mathbb{N}$, mit $g_n \uparrow_S g$. Wegen der Monotonie der Integralnorm reicht es zu zeigen:

$$(\forall \varepsilon \in]0,\infty[) \quad \|g\|_B \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_B + \varepsilon. \tag{4}$$

Sei o.B.d.A. $\alpha := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|g_n\|_B < \infty$. Ist dann $\varepsilon \in]0,\infty[$, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\emptyset \neq \Phi_n \subset \mathcal{E}_+^{fin}$ intern mit $\Phi_n \uparrow$, $\sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} \varphi \geq g_n$ und mit

$$^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi_n} i(\varphi)) \leq \|g_n\|_B + \tfrac{\varepsilon}{2^n} \leq \alpha + \varepsilon. \tag{5}$$

Also ist auch $\Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_n = \{\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n : \varphi_j \in \Phi_j, j = 1,\ldots,n\} \subset \mathcal{E}_+^{fin}$ intern mit $\Phi_1 \vee \ldots \vee \Phi_n \uparrow$ und $g_1 \vee \ldots \vee g_n = g_n \leq \sup\limits_{\varphi_1\in\Phi_1,\ldots,\varphi_n\in\Phi_n} (\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n)$. Es wird gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\ldots,\varphi_n\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n)) \leq \|g_n\|_B + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{2^i}. \tag{6}$$

Setzt man dann für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n \;:=\; \{\Theta \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern} : \Theta \uparrow, (\forall \varphi_1 \in \Phi_1,\ldots,\varphi_n \in \Phi_n)(\exists \vartheta \in \Theta)\\ \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n \leq \vartheta, \sup_{\vartheta\in\Theta} i(\vartheta) \leq \alpha + \varepsilon\},\end{aligned}$$

so ist $\emptyset \neq \mathcal{H}_n \downarrow$ und $\mathcal{H}_n$ ist nach dem Prinzip der internen Definition intern. Nach Saturation existiert daher ein $\Theta \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}_n$. Damit gilt für jedes $\delta \in]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} & g \leq (1+\delta)(\sup_{\vartheta\in\Theta} \vartheta) \\ \Longrightarrow\; & \|g\|_B \underset{(3.8)}{\leq} (1+\delta) \sup_{\vartheta\in\Theta} {}^\circ i(\vartheta) \leq (1+\delta)(\alpha+\varepsilon). \end{aligned}$$

Mit $\delta \to 0$ folgt daraus (4). Es verbleibt noch der Nachweis von (6).

zu (6): Der Beweis wird per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ geführt. Für $n = 1$ gilt (6) sofort nach (5). Sei (6) bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ gültig. Für $\varphi_1 \in \Phi_1,\ldots,\varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}$ sind dann $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n+1}$, $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$, $(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \varphi_{n+1}$, $\varphi_{n+1} \in \mathcal{E}_+^{fin}$. Es gilt nun:

$$\begin{aligned} & \sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\ldots,\varphi_{n+1}\in\Phi_{n+1}} i(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n+1}) + \sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\ldots,\varphi_{n+1}\in\Phi_{n+1}} i((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \varphi_{n+1}) \\ \underset{(*)}{=}\; & \sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\ldots,\varphi_{n+1}\in\Phi_{n+1}} i((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n+1}) + ((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \varphi_{n+1})) \\ =\; & \sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\ldots,\varphi_{n+1}\in\Phi_{n+1}} i((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) + \varphi_{n+1}) \\ =\; & \sup_{\varphi_1\in\Phi_1,\ldots,\varphi_n\in\Phi_n} i(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) + \sup_{\varphi_{n+1}\in\Phi_{n+1}} i(\varphi_{n+1}). \end{aligned} \tag{7}$$

zu $(*)$: „$\geq$“ klar
„$\leq$“ Ist $\varepsilon \in {}^*]0,\infty[$, so existieren $\widetilde{\varphi_1}, \widehat{\varphi_1} \in \Phi_1, \ldots, \widetilde{\varphi_{n+1}}, \widehat{\varphi_{n+1}} \in \Phi_{n+1}$ mit

$$\begin{aligned} i(\widetilde{\varphi_1} \vee \ldots \vee \widetilde{\varphi_{n+1}}) &\geq \sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} i(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n+1}) - \tfrac{\varepsilon}{2}, \\ i((\widehat{\varphi_1} \vee \ldots \vee \widehat{\varphi_n}) \wedge \widehat{\varphi_{n+1}}) &\geq \sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} i((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \varphi_{n+1}) - \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Dann existieren $\overline{\varphi_i} \in \Phi_i$ mit $\widetilde{\varphi}_i, \widehat{\varphi}_i \leq \overline{\varphi_i}$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} &\sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} i(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n+1}) + \sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} i((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \varphi_{n+1}) - \varepsilon \leq \\ &\quad i((\overline{\varphi_1} \vee \ldots \vee \overline{\varphi_{n+1}}) + ((\overline{\varphi_1} \vee \ldots \vee \overline{\varphi_n}) \wedge \overline{\varphi_{n+1}})) \leq \\ &\sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} i((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n+1}) + ((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \varphi_{n+1})). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in {}^*]0,\infty[$ beliebig war, folgt „$\leq$“ und damit insgesamt $(*)$.

Aus (7) folgt mit Satz 1.2.5 (man beachte, dass die Standardteile in der unteren Gleichung bildbar sind, da die entsprechenden Suprema in $\mathrm{fin}({}^*\mathbb{R})$ nach (5) existieren und nach unten durch 0 beschränkt sind)

$$\begin{aligned} &\sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} {}^\circ i(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_{n+1}) \\ &\underset{(7)}{=} \sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} {}^\circ i(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) + \sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} {}^\circ i(\varphi_{n+1}) \\ &- \sup_{\varphi_1 \in \Phi_1, \ldots, \varphi_{n+1} \in \Phi_{n+1}} {}^\circ i((\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \varphi_{n+1}) \\ &\underset{I.V., (5)}{\leq} \|g_n\|_B + \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon}{2^i} + \|g_{n+1}\|_B + \tfrac{\varepsilon}{2^{n+1}} - \|g_n\|_B = \|g_{n+1}\|_B + \sum_{i=1}^{n+1} \tfrac{\varepsilon}{2^i}. \end{aligned}$$ □

Beweis von Satz 3.2.9. „$\Longleftarrow$“ Sei $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_B)$, d.h. es ist $f \in \mathbb{R}^Y$ und es existiert eine Folge $e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0} \underset{Bem.\,1.2.4}{=} \mathcal{E}^{fin}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|'_B \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wir setzen o.B.d.A. $\|f - e_n\|'_B < \infty$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ voraus. Nach Definition von $\|\cdot\|_B$ existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein internes $\mathcal{E}^{fin} \supset \Phi_n$ mit $0 \leq \Phi_n \uparrow$ und $|e_n - f| \leq \sup_{\varphi \in \Phi_n} \varphi$ und

$$0 \leq \sup_{\varphi \in \Phi_n} {}^\circ i(\varphi) \leq \|f - e_n\|'_B + \tfrac{1}{n}. \tag{1}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}^{fin} \supset \{e_n - \varphi : \varphi \in \Phi_n\} \text{ intern mit } e_n - \Phi_n \downarrow \text{ und } \inf_{\varphi \in \Phi_n} (e_n - \varphi) \leq f, \\ &\mathcal{E}^{fin} \supset \{e_n + \varphi : \varphi \in \Phi_n\} \text{ intern mit } (e_n + \Phi_n) \uparrow \text{ und } f \leq \sup_{\varphi \in \Phi_n} (e_n + \varphi). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.1.8 konvergiert ${}^\circ i(e_n)$ gegen $i^L(f) \in \mathbb{R}$ und nach (1) gilt $\sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi) \to 0$ $(n \to \infty)$. Daraus folgt:

$$\begin{array}{rcl} i^L(f) & = & \lim\limits_{n\to\infty}({}^\circ i(e_n) - \sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi)) \underset{e_n\in\mathcal{E}^{fin}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(\inf\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(e_n-\varphi)) \\ & \leq & \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\inf\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(e_n-\varphi)) \leq \underset{\frown}{i}(f) \\ & \underset{Lemma\ 3.2.7}{\leq} & \widehat{i}(f) \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}}(\sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi+e_n)) \\ & \leq & \lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi+e_n)) \underset{e_n\in\mathcal{E}^{fin}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi) + {}^\circ i(e_n)) \\ & = & i^L(f) \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Somit ist $f \in \mathcal{L}_B(i)$ und der angegebene Zusatz gilt.
„$\Longrightarrow$" Sei $f \in \mathcal{L}_B(i)$. Dann ist $f \in \mathbb{R}^Y$ mit $\underset{\frown}{i}(f) = \widehat{i}(f) \in \mathbb{R}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren interne $\mathcal{E}^{fin} \supset \Phi_n \uparrow$, $\mathcal{E}^{fin} \supset \Theta_n \downarrow$ mit (vgl. Satz 1.2.5)

$$\begin{array}{l} \inf\limits_{\vartheta\in\Theta_n} \vartheta \leq f \leq \sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} \varphi,\ \sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi),\ \inf\limits_{\vartheta\in\Theta_n} {}^\circ i(\vartheta) \in \mathbb{R}, \\ \sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi) - \inf\limits_{\vartheta\in\Theta_n} {}^\circ i(\vartheta) \leq \frac{1}{n}. \end{array} \tag{2}$$

Wähle $\varphi_n \in \Phi_n$ mit ${}^\circ i(\varphi_n) + \frac{1}{n} \geq \sup\limits_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi)$. Dann ist einerseits $\mathcal{E}^{fin} \supset \{(\varphi - \varphi_n) : \varphi \in \Phi_n\} \uparrow$ intern mit $(f-\varphi_n)^+ \leq \sup\limits_{\varphi\in\Phi_n}(\varphi - \varphi_n)$. Also gilt

$$\|(f-\varphi_n)^+\|_B \leq \sup_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi-\varphi_n) \leq \tfrac{1}{n}. \tag{3}$$

Andererseits ist $\mathcal{E}^{fin} \supset \{(\varphi - \vartheta) : \varphi \in \Phi_n, \vartheta \in \Theta_n\}$ intern mit $\{(\varphi-\vartheta) : \varphi \in \Phi_n, \vartheta \in \Theta_n\} \uparrow$ und mit $(f-\varphi_n)^- = (\varphi_n - f)^+ \leq \sup\limits_{\varphi\in\Phi_n,\vartheta\in\Theta_n}(\varphi-\vartheta)$. Daraus folgt nach (3.8):

$$\|(f-\varphi_n)^-\|_B \leq \sup_{\varphi\in\Phi_n,\vartheta\in\Theta_n} {}^\circ i(\varphi-\vartheta) = \sup_{\varphi\in\Phi_n} {}^\circ i(\varphi) - \inf_{\vartheta\in\Theta_n} {}^\circ i(\vartheta) \underset{(2)}{\leq} \tfrac{1}{n}. \tag{4}$$

Insgesamt erhält man damit

$$\|f-\varphi_n\|'_B \leq \|(f-\varphi_n)^+\|_B + \|(f-\varphi_n)^-\|_B \underset{(3),(4)}{\leq} \tfrac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wegen $\varphi_n \in \mathcal{E}^{fin} \underset{Bem.\,1.2.4}{=} \mathcal{E}^{endl}_{\|\,\|_0}$ folgt daraus $f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_B)$. □

Beweis von Satz 3.2.10. Da $(\mathcal{E}, |i|)$ eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur ist (vgl. Satz 3.2.3), folgt die Behauptung aus Satz 3.2.8. □

Zum Beweis von Satz 3.2.11 benötigen wir Satz A.1.1 und Korollar A.1.2.

A.1.1 Satz. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, τ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, so gilt:*

$$\|g\|'_B = \|g\|'_{B(i_+)} + \|g\|'_{B(i_-)}, \; g \in {}^*\mathbb{R}^Y; \tag{A.1}$$

hierbei bezeichne $\|\cdot\|_{B(i_+)}$ bzw. $\|\cdot\|_{B(i_-)}$ die mit dem entsprechenden internen, positiven, linearen, τ-stetigen Funktional i_+ bzw. i_- über $\mathcal{E}$ gebildete Bourbaki-Integralnorm

$$\|g\|_{B(j)} \;=\; \inf\{\sup_{\varphi\in\Phi} {}^\circ j(\varphi) : \emptyset \neq \Phi \subset \mathcal{E}_+ \textit{ intern mit } \Phi\uparrow, g \leq \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi\}, \; j = i_+, i_-.$$

Beweis. „$\geq$“ Für jedes $\Phi \subset \mathcal{E}_+$ intern, $\Phi\uparrow$ mit $\sup\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi \geq |g|$ gilt:

$$\sup_{\varphi\in\Phi} |i|(\varphi) = \sup_{\varphi\in\Phi}(i_+(\varphi) + i_-(\varphi))) = \sup_{\varphi\in\Phi} i_+(\varphi) + \sup_{\varphi\in\Phi} i_-(\varphi). \tag{1}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\|g\|'_B &= \inf\{{}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi}(i_+ + i_-)(\varphi)) : \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern, } \Phi\uparrow \text{ mit } \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi \geq |g|\} \\ &\underset{(1)}{=} \inf\{{}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i_+(\varphi)) + {}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i_-(\varphi)) : \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern, } \Phi\uparrow, \sup_{\varphi\in\Phi}\varphi \geq |g|\} \\ &\geq \|g\|'_{B(i_+)} + \|g\|'_{B(i_-)}.\end{aligned}$$

„$\leq$“ Seien $\Phi, \Theta \subset \mathcal{E}_+$ intern mit $\Phi, \Theta \uparrow$ und $\sup\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi, \sup\limits_{\vartheta\in\Theta} \vartheta \geq |g|$. Dann ist auch $\Psi := \{\varphi \wedge \vartheta : \varphi \in \Phi, \vartheta \in \Theta\} \subset \mathcal{E}_+$ intern mit $\Psi\uparrow$ und $\sup\limits_{\psi\in\Psi} \psi \geq |g|$. Damit gilt

$$\begin{aligned}&\sup_{\psi\in\Psi} i_+(\psi) \leq \sup_{\varphi\in\Phi} i_+(\varphi), \quad \sup_{\psi\in\Psi} i_-(\psi) \leq \sup_{\vartheta\in\Theta} i_-(\vartheta), \qquad (2)\\ \Longrightarrow \quad &\|g\|'_B \leq {}^\circ(\sup_{\psi\in\Psi} |i|(\psi)) \underset{(2)}{\leq} {}^\circ(\sup_{\varphi\in\Phi} i_+(\varphi)) + {}^\circ(\sup_{\vartheta\in\Theta} i_-(\vartheta)).\end{aligned}$$

Daraus folgt $\|g\|'_B \leq \|g\|'_{B(i_+)} + \|g\|'_{B(i_-)}$. Insgesamt gilt also (A.1). □

A.1.2 Korollar. *Ist $(\mathcal{E}, i)$ eine interne, τ-stetige Pseudo-Integrationsstruktur, so gilt für $f \in [0, \infty[^Y$:*

$$\widehat{|i|}(f) = \widehat{i_+}(f) + \widehat{i_-}(f), \quad \underset{\frown}{|i|}(f) = \underset{\frown}{i_+}(f) + \underset{\frown}{i_-}(f). \tag{A.2}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst:

Für eine interne Bourbaki-Integrationsstruktur $(\mathcal{E}, j)$ gilt:

$$\begin{aligned}\underset{\frown}{j}\,(f) &= \sup\{{}^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} j(\varphi)) : \Phi \subset \mathcal{E} \text{ intern mit } \Phi\downarrow, \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f\} && (1)\\ &= \sup\{{}^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} j(\varphi)) : \Phi \subset \mathcal{E}_+ \text{ intern mit } \Phi\downarrow, \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f\}, \; f \in [0, \infty[^Y. && (2)\end{aligned}$$

zu (2): „$\geq$“ klar.
„$\leq$“ Ist $\Phi \subset \mathcal{E}$ intern mit $\Phi \downarrow$ und $\inf\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f$, so ist wegen $f \geq 0$ auch $\Phi^+ := \{\varphi^+ : \varphi \in \Phi\} \subset \mathcal{E}_+$ intern mit $\Phi^+ \downarrow$, $\inf\limits_{\varphi^+\in\Phi^+} \varphi^+ \leq f$ und $^\circ(\inf\limits_{\varphi\in\Phi} j(\varphi)) \leq {}^\circ(\inf\limits_{\varphi^+\in\Phi^+} j(\varphi^+))$. Daraus folgt „$\leq$“.
zu (1): „$\leq$“ klar (denn $0 \in \mathcal{E}^{fin}$).
„$\geq$“ Seien $\mathcal{E} \supset \Phi$ intern mit $\Phi \downarrow$ und $\inf\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f$. O.B.d.A. sei $\Phi \geq 0$ (betrachte ansonsten $\Phi^+ := \{\varphi^+ : \varphi \in \Phi\}$). Wir betrachten nun die folgende Fallunterscheidung:

a) Angenommen es ist $\inf\limits_{\varphi\in\Phi} j(\varphi) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})$, dann existiert ein $\varphi_0 \in \Phi$ mit $j(\varphi_0) \in \text{fin}(^*\mathbb{R})$, also ist $\varphi_0 \in \mathcal{E}^{fin}$. Da j positiv und somit auch monoton ist, gilt $\underset{\frown}{j}\,(f) \geq {}^\circ(\inf\limits_{\varphi\in\Phi} j(\varphi))$.

b) Ist $\alpha := \inf\limits_{\varphi\in\Phi} j(\varphi) \notin \text{fin}(^*\mathbb{R})$, so existiert ein $\varphi_0 \in \Phi$ mit $\frac{j(\varphi_0)}{\alpha} \in \text{fin}(^*\mathbb{R})$. Wir betrachten nun $\Psi := \{\varphi \in \Phi : \varphi \leq \varphi_0\}$. Ist dann $k \in \mathbb{N}$ fest, so ist $\mathcal{E}^{fin} \supset \frac{\Psi}{\alpha} \cdot k \downarrow$ intern mit $\inf\limits_{\psi\in\Psi} \psi \leq f$. Daher gilt $k = {}^\circ(\inf\limits_{\psi\in\Psi} j(\frac{\psi}{\alpha} \cdot k)) \leq \underset{\frown}{j}\,(f)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, also folgt $\underset{\frown}{j}\,(f) = \infty = {}^\circ(\inf\limits_{\vartheta\in\Theta} j(\vartheta))$.

Aus a) und b) folgt „$\geq$“ und damit insgesamt (1). Wir kommen nun zum Nachweis von (A.2).

zu (A.2): Die erste Aussage folgt mit Satz 3.2.10 und Satz 3.2.8 sofort aus Satz A.1.1. Es verbleibt zu zeigen:

$$\underset{\frown}{|i|}(f) = \underset{\frown}{i_+}(f) + \underset{\frown}{i_-}(f). \tag{3}$$

zu (3): „$\leq$“ folgt dann aus

$$\begin{aligned}
\underset{\frown}{|i|}(f) &\underset{(2)}{=} \sup\{^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} |i|(\varphi)) : \mathcal{E}_+ \supset \Phi \text{ intern mit } \Phi \downarrow, \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f\} \\
&= \sup\{^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} (i_+ + i_-)(\varphi)) : \mathcal{E}_+ \supset \Phi \text{ intern mit } \Phi \downarrow, \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f\} \\
&= \sup\{^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} i_+(\varphi)) + {}^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} i_-(\varphi)) : \mathcal{E}_+ \supset \Phi \text{ intern, } \Phi \downarrow, \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f\} \\
&\underset{(2)}{\leq} \underset{\frown}{i_+}(f) + \underset{\frown}{i_-}(f).
\end{aligned}$$

„$\geq$“ Seien $\mathcal{E}_+ \supset \Phi, \Theta$ intern mit $\Phi, \Theta \downarrow$ und $\inf\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi \leq f$, $\inf\limits_{\vartheta\in\Theta} \vartheta \leq f$. Man setze $\Psi := \Phi \vee \Theta = \{\varphi \vee \vartheta : \varphi \in \Phi, \vartheta \in \Theta\}$. Dann ist $\mathcal{E}_+ \supset \Psi$ intern mit $\Psi \downarrow$ und $\inf\limits_{\psi\in\Psi} \psi \leq f$. Zudem gilt

$$^\circ(\inf_{\psi\in\Psi} i_+(\psi)) \geq {}^\circ(\inf_{\vartheta\in\Theta} i_+(\vartheta)), {}^\circ(\inf_{\psi\in\Psi} i_-(\psi)) \geq {}^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} i_-(\varphi)).$$

Also ist auch $\underset{\frown}{|i|}(f) \geq {}^\circ(\inf_{\vartheta\in\Theta} i_+(\vartheta)) + {}^\circ(\inf_{\varphi\in\Phi} i_-(\varphi))$ gültig. Daraus folgt

$$\underset{\frown}{|i|}(f) \geq \underset{\frown}{i_+}(f) + \underset{\frown}{i_-}(f).$$

Somit gilt die zweite Aussage, womit (A.2) insgesamt bewiesen ist. $\square$

Beweis von Satz 3.2.11. Sei o.B.d.A. $f \in [0,\infty[^Y$ (ansonsten betrachte f^+ und f^-). (3.10) folgt aus

$$\begin{aligned}
& f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_B) \underset{(3.9)}{\iff} f \in \mathcal{L}_B(|i|) \iff \widehat{|i|}(f) = \underset{\frown}{|i|}(f) \in \mathbb{R} \\
\underset{(\mathrm{A.2})}{\iff} \; & \underbrace{\widehat{i_+}(f) - \underset{\frown}{i_+}(f)}_{\underset{Lemma\,3.2.7}{\geq} 0} = \underbrace{\underset{\frown}{i_-}(f) - \widehat{i_-}(f)}_{\underset{Lemma\,3.2.7}{\leq} 0} \in \mathbb{R},\; \widehat{i_+}(f), \underset{\frown}{i_+}(f), \underset{\frown}{i_-}(f), \widehat{i_-}(f) \in \mathbb{R} \\
\iff \; & \widehat{i_+}(f) = \underset{\frown}{i_+}(f) \in \mathbb{R}, \quad \underset{\frown}{i_-}(f) = \widehat{i_-}(f) \in \mathbb{R} \\
\iff \; & f \in \mathcal{L}_B(i_+) \cap \mathcal{L}_B(i_-).
\end{aligned}$$

Sei nun $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_B)$. Wegen (A.2) gilt dann auch

$$(|i|)^L(f) \underset{Satz\,3.2.9}{=} \widehat{|i|}(f) \underset{(\mathrm{A.2})}{=} \widehat{i_+}(f) + \widehat{i_-}(f) \underset{Satz\,3.2.9}{=} (i_+)^L(f) + (i_-)^L(f).$$

Es verbleibt der Nachweis von

$$i^L(f) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f).$$

Zu $0 \leq f \in \mathcal{L}(\|\cdot\|_B) = \mathcal{L}_B(|i|)$ existieren $0 \leq e_n \in \mathcal{E}^{endl}_{\|\cdot\|_0} \underset{(1.16)}{=} \mathcal{E}^{fin}(|i|) \underset{(1.16)}{=} \mathcal{E}^{fin}(i_+) \cap \mathcal{E}^{fin}(i_-)$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\|f - e_n\|'_B \to 0$. Nach Satz A.1.1 gilt dann aber auch

$$\|f - e_n\|'_{B(i_+)} \to 0, \quad \|f - e_n\|'_{B(i_-)} \to 0.$$

Damit erhalten wir

$$i^L(f) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i(e_n) = \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_+(e_n) - \lim_{n\to\infty} {}^\circ i_-(e_n) = (i_+)^L(f) - (i_-)^L(f). \qquad \square$$

Literaturverzeichnis

[1] Cutland, N.: *Nonstandard Analysis and its Applications*, London Mathematical Society Student Texts 10, Cambridge University Press, 1988.

[2] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1999.

[3] Floret, K.: *Maß- und Integrationstheorie*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[4] Henson, C. W., Moore, L.: *Nonstandard Analysis and the theory of Banach spaces*, in *Nonstandard Analysis - Recent Developments*, Lecture Notes Mathematics 983, 1982, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, S. 27-112.

[5] Hoffmann, D., Schäfke, F. W.: *Integrale*, Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich; BI-Wiss.-Verl., 1992.

[6] Hoffmann, D.: *Integralerweiterung durch Integralnormen mit Werten in prägeordneten Halbgruppen*, J. reine angew. Math. 295, 1977, S. 187-201.

[7] Hurd, A. E., Loeb, P. A.: *An introduction to nonstandard real analysis*, Academic Press, 1985.

[8] Kelley, J. L., Namioka, I.: *Linear Topological Spaces*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 2. Auflage, 1963.

[9] Köthe, G.: *Topologische Lineare Räume*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1966.

[10] Luxemburg, W. A. J., Zaanen, A. C.: *Riesz Spaces*, North Holland, Amsterdam, 1971.

[11] Landers, D., Rogge, L. (2001): *Lower and upper Loeb–integrals*, zur Veröffentlichung eingereicht.

[12] Landers, D., Rogge, L.: *Nichtstandard Analysis*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1994.

[13] Landers, D., Rogge, L.: *Inner and outer Banach-valued Loeb-measures*, Math. Nachr. 149 (1990), S. 223-229.

[14] Landers, D., Rogge, L.: *Universal Loeb-measurability of sets and of the standard part map with applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 304 (1987), Nr. 1, S. 229-243.

[15] Loeb, P. A.: *Conversion from nonstandard to standard measure spaces and applications in probability theory*, Trans. Amer. Math. Soc. 211 (1975), S. 113-122.

[16] Loeb, P. A.: *Weak limits of measures and the standard part map*, Proc. Amer. Math. Soc. 77 (1979), S. 128-135.

[17] Loeb, P. A.: *A functional approach to nonstandard measure theory*, Amer. Math. Soc. Contemporary Math. 26 (1984), S. 251-261.

[18] Loeb, P. A.: *A nonstandard functional approach to Fubini´s theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), S. 343-346.

[19] Loeb, P. A., Wolff, M.: *Nonstandard Analysis for the Working Mathematican*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.

[20] Loeb, P. A., Osswald, H.: *Nonstandard integration theory in topological vector lattices*, Monatsh. Math. 124 (1997), Nr. 1, S. 53–82.

[21] Peressini, A. L.: *Ordered topological spaces*, Harper & Row, New York, 1976.

[22] Pfeffer: *Integrals and Measures*, New York and Basel, Marcel Dekker Inc., 1977.

[23] Robertson, A. P., Robertson, W.: *Topological vector spaces*, Cambridge University Press, 2. Auflage, 1973.

[24] Rogge, L.: *Integrationstheorie*, Vorlesungsskriptum, Gerhard-Mercator Universität Duisburg, 1986.

[25] Schäfke, F. W.: *Integrationstheorie und quasinormierte Gruppen*, J. reine Angew. Math. 253, 1972, S. 117-137.

[26] Schäfke, F. W.: *Integrationstheorie I*, J. reine Angew. Math. 244, 1970, S. 154-176.

[27] Schäfke, F. W.: *Integrationstheorie II*, J. reine Angew. Math. 248, 1971, S. 147-171.

[28] Schäfke, F. W.: *Integrationstheorie*, Mathematisches Institut, Universität Köln, 1968.

[29] Wong, Y. C., Ng, K. F.: *Partially Ordered Topological Vector Spaces*, Clarendon Press, Oxford, 1973.

[30] Wiechert, W.: *Beiträge zur Integrationstheorie*, Dissertation, Köln, 1969.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\overline{\mathbb{R}}$	$= \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$\mathbb{R}_+$	Menge der nicht-negativen, reellen Zahlen
S	Menge von Urelementen mit $\overline{\mathbb{R}} \subset S$
$^* : \widehat{S} \to \widehat{^*S}$	polysaturierte Nichtstandardeinbettung
$^*\mathbb{N}$	Menge der hypernatürlichen Zahlen
$^*\mathbb{N}_0$	$= {^*\mathbb{N}} \cup \{0\}$
$^*\mathbb{R}$	Menge der hyperreellen Zahlen
$^*\mathbb{R}_+$	Menge der nicht-negativen, hyperreellen Zahlen
$\mathrm{fin}(^*\mathbb{R})$	Menge der finiten, hyperreellen Zahlen
$\lvert x\rvert$	Betrag der hyperreellen Zahl $x \in {^*\mathbb{R}}$
$^\circ x$, $\mathrm{st}(x)$	Standardteil von $x \in {^*\mathbb{R}}$, falls $x \in \mathrm{fin}(^*\mathbb{R})$; ist $x \in {^*\overline{\mathbb{R}}} \setminus \mathrm{fin}(^*\mathbb{R})$ negativ (positiv) unendlich, so setze $^\circ x := st(x) := -\infty$ (∞)
$\lvert A\rvert$, $\mathrm{card}(A)$	Kardinalzahl einer Menge A
Y	nicht-leere, interne Menge
$\mathbb{R}^Y$	$\mathbb{R}$–linearer Raum aller Abbildungen von Y in $\mathbb{R}$
$^*\mathbb{R}^Y$	$^*\mathbb{R}$–linearer Raum aller Abbildungen von Y in $^*\mathbb{R}$
$\mathcal{E} \subset {^*\mathbb{R}^Y}$	interner (Stonescher) Vektorverband
$i : \mathcal{E} \to {^*\mathbb{R}}$	interne, (positiv) $^*\mathbb{R}$–lineare Abbildung
$(\mathcal{E}, i)$	interne (Stonesche) (Pseudo-) Integrationsstruktur
$\mathcal{E}_+$	$= \{e \in \mathcal{E} : e \geq 0\}$
$f \leq g$	für $f, g \in {^*\mathbb{R}^Y}$ gilt punktweise $f(y) \leq g(y)$

$f \vee g$	$= \max(f, g)$ punktweise für $f, g \in {}^*\mathbb{R}^Y$
$f \wedge g$	$= \min(f, g)$ punktweise für $f, g \in {}^*\mathbb{R}^Y$
f^+	$= \max(f, 0)$ punktweise für $f \in {}^*\mathbb{R}^Y$
f^-	$= \max(-f, 0)$ punktweise für $f \in {}^*\mathbb{R}^Y$
$\mathrm{Tr}(f)$	der Träger $\{y \in Y : f(y) \neq 0\}$ einer Funktion $f \in {}^*\mathbb{R}^Y$
$\mathrm{Pol}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	System aller reellen Polynome über $\mathbb{R}$
$\\|\cdot\\|$	Integralnorm
$\\|\cdot\\|_L$	Loeb-Integralnorm
$\\|\cdot\\|_D$	Daniell-Integralnorm
$\\|\cdot\\|_B$	Bourbaki-Integralnorm
$\\|\cdot\\|_l$	die der Integralnorm $\\|\cdot\\|$ zugeordnete lokale Integralnorm