Krümmungsabschätzungen für stabile Extremalen parametrischer Funktionale

Von der Fakultät für Naturwissenschaften
der Universität Duisburg-Essen
(Campus Duisburg)

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

genehmigte Dissertation von

Sven Winklmann
aus Oberhausen

Referent:	Prof. Dr. U. Dierkes
Korreferent:	Prof. Dr. Dr. h.c. mult. S. Hildebrandt

Tag der mündlichen Prüfung: 03.03.2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einleitung

Ist u eine auf der Kreisscheibe $B_R(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < R\}$ definierte Lösung der Minimalflächengleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0,$$

so lassen sich die Hauptkrümmungen des Graphen nach einem grundlegenden Resultat von Heinz [H] abschätzen durch

$$\left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2\right)(x_0) \leq \frac{C}{R^2}$$

mit einer universellen Konstanten $C > 0$. Läßt man hierin $R \to \infty$, so erhält man den berühmten Satz von Bernstein [B], nämlich daß jede auf dem ganzen $\mathbb{R}^2$ definierte Lösung der Minimalflächengleichung eine affin-lineare Funktion sein muß.

Seitdem ist die Frage nach einem Bernsteinsatz immer wieder aus unterschiedlichen Blickwinkeln betrachtet worden und die Krümmungsabschätzung in verschiedene Richtungen verallgemeinert worden, siehe etwa [DHKW, pp. 86] und die dort zitierten Referenzen.

Ein für Minimalflächen in höheren Dimensionen wichtiges Ergebnis ist die integrale Krümmungsabschätzung von Schoen, Simon und Yau [SSY]. Um diese etwas genauer zu beschreiben, betrachten wir eine zunächst beliebige reguläre Hyperfläche

$$X : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dann gilt für den Betrag der zweiten Fundamentalform die von Simons gefundene Identität

$$\frac{1}{2}\Delta|S|^2 = |\nabla S|^2 + \nabla_i\nabla_j Hh^{ij} + H\mathrm{tr}(S^3) - |S|^4.$$

Eine wichtige Beobachtung von Schoen, Simon und Yau ist nun, daß man hieraus für Minimalflächen unter Ausnutzung der Symmetrie in der Codazzi-Gleichung die Ungleichung

$$\frac{1}{2}\Delta|S|^2 \geq \left(1 + \frac{2}{n}\right)|\nabla|S||^2 - |S|^4 \tag{1.1}$$

gewinnen kann. Nimmt man nun zusätzlich an, daß X stabil ist, so hat man als weitere Ungleichung die Stabilitätsungleichung zur Verfügung:

$$\int_M |S|^2\varphi^2\,d\mu \leq \int_M |\nabla\varphi|^2\,d\mu \tag{1.2}$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Testet man darin nun mit Potenzen von $|S|$, so lassen sich die resultierenden Terme mit der Simons Ungleichung verarbeiten und man gelangt zu der integralen Krümmungsabschätzung

$$\int_M |S|^p\varphi^p\,d\mu \leq C(n,p)\int_M |\nabla\varphi|^p\,d\mu \tag{1.3}$$

für $p \in (4, 4+\sqrt{8/n})$ und beliebiges nichtnegatives $\varphi \in C_c^\infty(M)$.

Diese kann als integrales Analogon zur Heinzschen Krümmungsabschätzung angesehen werden. Speziell für $2 \leq n \leq 5$ ergeben sich hieraus Bernsteinsätze.

1.2 Hauptergebnisse und Überblick über die Arbeit

Betrachte nun das parametrische Funktional

$$\mathcal{F}(X) := \int_M F(N)\,d\mu$$

mit einem nur von der Normalen abhängigen Integranden

$$F : S^n \to \mathbb{R},$$

den wir uns durch

$$F(tz) = tF(z) \quad \text{für alle } t > 0$$

1-homogen auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ fortgesetzt denken. Ferner wollen wir stets fordern, daß F *elliptisch* ist, d.h. für jedes $z \in S^n$ sei

$$F_{zz}(z) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) \right)_{\alpha,\beta=1,\dots,n+1} : z^\perp \to z^\perp$$

ein positiv definiter Endomorphimus, oder anders ausgedrückt, es sei

$$\lambda(F) := \inf_{z \in S^n, V \in z^\perp \setminus \{0\}} \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta}{|V|^2} > 0.$$

Für den Spezialfall, daß $F(z) = A(z) = |z|$ der Flächenintegrand ist, geht $\mathcal{F}$ in das Flächenfunktional

$$\mathcal{A}(X) = \int_M d\mu$$

über.

Ein Hauptanliegen dieser Arbeit ist es, die integrale Krümmungsabschätzung von Schoen, Simon und Yau auf stabile Extremalen parametrischer Funktionale, die nahe am Flächenfunktional liegen, zu verallgemeinern. Genauer sei

$$\|G\|_{C^k} := \sup_{z \in S^n} \left(\sum_{|I| \le k} \left| \frac{\partial^{|I|} G}{\partial z^I}(z) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Wir werden zeigen:

Theorem 1.1 *Es sei $n \geq 2$ und $p \in (4, 4 + \sqrt{8/n})$. Dann gibt es eine Konstante $\delta(n,p) > 0$, so daß gilt: Ist F ein elliptischer Integrand mit $\|F - A\|_{C^4} < \delta$ und ist X eine stabile Extremale von*

$$\mathcal{F}(X) = \int_M F(N)\, d\mu,$$

so gilt

$$\int_M |S|^p \varphi^p \, d\mu \le C(n,p,F) \int_M |\nabla \varphi|^p \, d\mu \tag{1.4}$$

für alle nichtnegativen Testfunktionen $\varphi \in C_c^\infty(M)$.

In Kapitel 2 treffen wir hierzu die benötigten geometrischen Vorbereitungen. Nach einer Beobachtung von Räwer [R] und Clarenz [C] lassen sich die Extremalen von $\mathcal{F}$ geometrisch als Flächen verschwindender F-mittlerer Krümmung charakterisieren. Dabei ist $H_F = \mathrm{tr}(S_F)$ die Spur der sogenannten

F-Weingartenabbildung, die geometrisch die Rolle der Weingartenabbildung einnimmt. Indem wir nun eine Idee von Sauvigny [S] aus der Theorie zweidimensionaler Flächen aufgreifen und zusätzlich eine gewichtete Metrik g_F mit der Eigenschaft

$$g_F(S_F(v), w) = g(S(v), w) \quad \text{für alle } v, w \in TM$$

einführen, sind wir in der Lage S_F in einem gewissen Sinne auch analytisch wie S zu behandeln. Insbesondere werden wir sehen, daß die Krümmungsabschätzung (1.4) zu einer Abschätzung der Form

$$\int_M |S_F|_F^p \varphi^p \, d\mu_F \leq C(n, p, F) \int_M |\bar{\nabla}\varphi|_F^p \, d\mu_F \tag{1.5}$$

äquivalent ist, in der sich alle Größen konsequent auf die Riemannsche Metrik g_F beziehen. (An dieser Stelle sei vor Verwechselungen mit den in [R] und [C] verwendeten Bezeichnungen gewarnt.) Ferner werden wir für S_F eine verallgemeinerte Codazzi-Gleichung erhalten, welche grob gesprochen die wesentlichen Symmetrien bis auf Zusatzterme niedriger Ordnung erhält und diese Zusatzterme lassen sich in Abhängigkeit des Abstandes $\|F - A\|_{C^4}$ kontrollieren. Damit sind wir in der Lage eine der Abschätzung von Schoen, Simon und Yau entsprechende Abschätzung von $|\bar{\nabla} S_F|_F$ nach unten zu gewinnen und zusammen mit einer allgemeinen Identität für $\Delta_F |S_F|_F^2$ führt dies schließlich zu einer verallgemeinerten Simons Ungleichung der Form

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_F |S_F|_F^2 \;\; &\geq \;\; \left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) |\bar{\nabla}|S_F|_F|_F^2 \\ &\qquad - \left(\frac{1}{\lambda(F)} + C(\eta, \theta)\varepsilon(F)\right) |S_F|_F^4. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dabei sind $\theta > 0$ und $\eta \in (0, 1]$ frei wählbare Parameter und $\varepsilon(F)$ eine nur von F abhängige, nichtnegative Konstante, die für $\|F - A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert.

In Kapitel 3 beweisen wir dann die Krümmungsabschätzung in ihrer gewichteten Formulierung, indem wir in der unserer Situation angepaßten Stabilitätsungleichung

$$\int_M |S_F|_F^2 \varphi^2 \, d\mu_F \leq C(F) \int_M |\bar{\nabla}\varphi|_F^2 \, d\mu_F \tag{1.7}$$

mit Potenzen von $|S_F|_F$ testen und die verallgemeinerte Simons Ungleichung ins Spiel bringen. Dabei ergibt sich dann auch die Kleinheitsbedingung an $\|F - A\|_{C^4}$ aus der Forderung, daß die Größen $C(F)$, $\lambda(F)$ und $\varepsilon(F)$ in

Abhängigkeit von n und p hinreichend nahe an ihren klassischen Werten, also 1 bzw. 0, sein müssen. (Insbesondere lassen sich prinzipiell konkrete Abschätzungen von $\delta(n,p)$ nach unten machen, wenn man die Abschätzungen, die in Kapitel 2 zu $\varepsilon(F)$ führen, numerisch nachhält.) Als Anwendung erhalten wir einen Bernsteinsatz für stabile F-Minimalflächen der Dimension $2 \leq n \leq 5$. Abschließend gehen wir auf das zugehörige Graphenproblem ein.

Im letzten Kapitel kommen wir schließlich auf die Heinzsche Krümmungsabschätzung zurück und zeigen, daß sich aus der integralen Krümmungsabschätzung für $2 \leq n \leq 5$ punktweise Krümmungsabschätzungen der Form

$$\sup_{\mathcal{B}_{\theta R}(x_0)} |S|^2 \leq \frac{C(n,F,K,\theta)}{R^2}$$

ergeben. Dabei ist $\mathcal{B}_R(x_0) \subset\subset M$ wahlweise ein geodätischer oder euklidischer Ball mit $\mu(\mathcal{B}_R(x_0)) \leq KR^n$. Für den klassischen Minimalflächenfall haben Schoen, Simon und Yau hierfür eine Beweisskizze angegeben. Der in der hier vorliegenden Arbeit geführte Beweis orientiert sich jedoch an der Arbeit [D2] von Dierkes: Zunächst leiten wir mit Hilfe der Sobolev Ungleichung, der verallgemeinerten Simons Ungleichung, sowie der integralen Krümmungsabschätzung eine L_p-Abschätzung für $|S_F|_F$ her. Anschließend iterieren wir diese mit der Moserschen Iterationstechnik zu einer sup-Abschätzung, wobei wir wieder konsequent mit den gewichteten Größen arbeiten werden.

Für den Spezialfall zweidimensionaler Flächen ergeben sich eine Reihe von Überschneidungen unserer Ergebnisse mit Bernsteinsätzen und Krümmungsabschätzungen von Räwer [R], Clarenz [C], Sauvigny [S], Fröhlich [F] und White [W]. Wir nutzen die Bemerkungen und Ausblicke zu den Kapiteln 3 und 4 um einige dieser Resultate genauer einzuordnen. Ferner sei darauf hingewiesen, daß Simon [Si3] mit Methoden der geometrischen Maßtheorie punktweise Krümmungsabschätzungen für *Minima* parametrischer Funktionale nahe des Flächenfunktionals bis $n \leq 6$ gezeigt hat. In diesem Zusammenhang bleibt also einmal mehr die Frage offen, ob und wie sich die Methode von Schoen, Simon und Yau auf den verbleibenden Fall $n = 6$ ausdehnen läßt.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um mich bei Herrn Dierkes an dieser Stelle ganz herzlich für die Betreuung dieser Arbeit zu bedanken. Zahlreiche Diskussionen, insbesondere über die Bedeutung von Simons Ungleichungen, haben maßgeblich zum Entstehen der Arbeit beigetragen. Ganz besonders möchte ich mich auch bei meiner Freundin Miriam für ihre Unterstützung und viel Verständnis bedanken.

Kapitel 2

Geometrie in der Nähe des Flächenfunktionals

2.1 Differentialgeometrische Grundlagen

Im folgenden wollen wir unter einer *regulären Hyperfläche* im $\mathbb{R}^{n+1}$ immer eine glatte Immersion

$$X : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

einer n-dimensionalen, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ohne Rand in den euklidischen $\mathbb{R}^{n+1}$ verstehen. Glatt bedeute dabei, daß X von der Klasse C^∞ sei. Wie üblich bezeichnen wir mit g die induzierte Metrik, also

$$g(v, w) := \langle dX(v), dX(w) \rangle \quad \text{für alle } v, w \in TM,$$

mit μ das zugehörige Maß und mit

$$N : M \to S^n$$

die zu X gehörige Gaußabbildung. Da unsere Flächen durchaus Selbstdurchdringungen haben dürfen, arbeiten wir konsequent auf der Parametermannigfaltigkeit M. Durch Differentiation der Gaußabbildung gelangt man zur Weingartenabbildung

$$S := -dX^{-1} \circ dN,$$

welche das lokale Krümmungsverhalten der Fläche beschreibt. Die zweite Fundamentalform bezeichnen wir mit II:

$$II(v, w) := g(Sv, w) = g(v, Sw) \quad \text{für alle } v, w \in TM.$$

Soweit sind alle Größen koordinatenfrei gegeben. Bei den umfangreichen Rechnungen in den nächsten Abschnitten werden wir jedoch meistens in lokalen Koordinaten rechnen. Daher stellen wir an dieser Stelle kurz die wichtigsten Identitäten für den Umgang mit Hyperflächen im Ricci-Kalkül zusammen: Zunächst haben wir in Koordinaten die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten:

$$\partial_{ij}X = \Gamma_{ij}^k \partial_k X + h_{ij} N \tag{2.1}$$

und

$$\partial_i N = -g^{kl} h_{li} \partial_k X.$$

Hierbei sind $h_{ij} = II(\partial_i, \partial_j)$ die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform und Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole des zu g gehörigen Levi-Civita-Zusammenhangs ∇, d.h. es gilt

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Letzteres entspricht der Tatsache, daß sich die kovariante Ableitung $\nabla_v w$ für zwei Vektorfelder v und w gerade als tangentialer Anteil der üblichen Richtungsableitung im $\mathbb{R}^{n+1}$ ergibt, also

$$dX_x(\nabla_v w) = [v(dX(w))(x)]^\top,$$

wobei

$$(\cdot)^\top : \mathbb{R}^{n+1} \to dX_x(T_x M)$$

die Orthogonalprojektion auf $dX_x(T_x M)$ bezeichne. In lokalen Koordinaten hat man $v = v^i \partial_i$, $w = w^i \partial_i$ und damit

$$\nabla_v w = v^i \nabla_i w^k \partial_k$$

mit der im Ricci-Kalkül üblichen Abkürzung

$$\nabla_i w^k = \partial_i w^k + \Gamma_{ij}^k w^j.$$

Ist T ein $(0, s)$-Tensor, so ist die kovariante Ableitung ∇T erklärt durch

$$(\nabla T)(v, w_1, \dots, w_n) := \nabla_v(T(w_1, \dots, w_n)) - \sum_{k=1}^n T(w_1, \dots, \nabla_v w_k, \dots, w_n)$$

für $v, w_1, \dots, w_n \in TM$. In Koordinaten hat man

$$T = T_{j_1 \dots j_s} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

und somit

$$\nabla T = \nabla_k T_{j_1 \dots j_s} dx^k \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

mit

$$\nabla_k T_{j_1\ldots j_s} = \partial_k T_{j_1\ldots j_s} - \Gamma^l_{kj_1} T_{lj_2\ldots j_s} - \ldots - \Gamma^l_{kj_s} T_{j_1\ldots j_{s-1}l}. \tag{2.2}$$

Für einen $(1, s)$-Tensor ergibt sich analog

$$\nabla_k T^i_{j_1\ldots j_s} = \partial_k T^i_{j_1\ldots j_s} - \Gamma^l_{kj_1} T^i_{lj_2\ldots j_s} - \ldots - \Gamma^l_{kj_s} T^i_{j_1\ldots j_{s-1}l} + \Gamma^i_{kl} T^l_{j_1\ldots j_s}. \tag{2.3}$$

Mit R bezeichnen wir den Riemannschen Krümmungstensor. Koordinatenfrei setzen wir

$$R(u, v)w := \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w$$

für $u, v, w \in TM$ und in lokalen Koordinaten schreiben wir

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k =: R^l_{ijk}\partial_l. \tag{2.4}$$

Für die Koeffizienten ergibt sich dann

$$R^l_{ijk} = \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{mi} - \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{mj}. \tag{2.5}$$

Leider ist sowohl das Vorzeichen von R, als auch die Systematik bei der Stellung der Indizes in der Literatur nicht einheitlich. Unsere Notation orientiert sich koordinatenfrei an dem Buch von Kühnel [K]. In Koordinaten wird dort jedoch eine von (2.4) abweichende Stellung der Indizes verwendet.

Formal tritt der Krümmungstensor immer dann auf, wenn Ableitungen miteinander vertauscht werden. Den geometrischen Zusammenhang zwischen Krümmungstensor und Krümmung der Fläche stellt die Gauß-Gleichung her:

$$g(R(u, v)w, z) = II(u, z)II(v, w) - II(u, w)II(v, z)$$

für alle $u, v, w, z \in TM$. In Koordinaten ist dies die Gleichung

$$R^l_{ijk} = g^{lm}(h_{im}h_{jk} - h_{ik}h_{jm}). \tag{2.6}$$

Die Gauß-Gleichung erhält man, indem man die Integrabilitätsbedingungen von (2.1) bildet und tangentiale Komponenten vergleicht. Durch Vergleich der normalen Anteile ergibt sich die Codazzi-Gleichung:

$$\partial_i h_{jk} - \partial_j h_{ki} + \Gamma^l_{jk} h_{li} - \Gamma^l_{ik} h_{jl} = 0.$$

In tensorieller Notation ist dies einfach die Gleichung

$$\nabla_i h_{jk} = \nabla_j h_{ki}. \tag{2.7}$$

2.2 Parametrische Funktionale

Betrachte nun das parametrische Funktional

$$\mathcal{F}(X) := \int_M F(N)\, d\mu$$

mit einem elliptischen Integranden $F : S^n \to \mathbb{R}$, den wir uns wieder 1-homogen auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ fortgesetzt denken. F induziert ein *Gewicht* A_F auf der Parametermannigfaltigkeit M vermöge

$$A_F := dX^{-1} \circ F_{zz}(N) \circ dX.$$

Offenbar ist A_F symmetrisch und positiv definit und es gilt

$$\begin{aligned} g(A_F(v), v) &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(N) dX^\alpha(v) dX^\beta(v) \\ &\geq \lambda(F)|v|^2 \end{aligned}$$

für alle $v \in TM$, sowie

$$g(A_F(v), v) \leq \Lambda(F)|v|^2,$$

wobei

$$\Lambda(F) := \sup_{z \in S^n, V \in z^\perp \setminus \{0\}} \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta}{|V|^2}.$$

Für die Eigenwerte von A_F haben wir also die uniformen Schranken

$$0 < \lambda(F) \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \Lambda(F) < \infty.$$

Die mit A_F gewichtete Weingartenabbildung

$$S_F := A_F \circ S$$

heißt *F-Weingartenabbildung* und

$$H_F := \operatorname{tr}(S_F)$$

ist die sogenannte *F-mittlere Krümmung.* Motiviert werden diese Größen durch die erste Variationsformel für $\mathcal{F}$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(X, \varphi) &:= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(X + \varepsilon \varphi N) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= -\int_M H_F \varphi \, d\mu \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$ und dies impliziert: X ist genau dann eine Extremale von $\mathcal{F}$, wenn $H_F = 0$ auf ganz M ist, also wenn X eine sogenannte *F-Minimalfläche* ist.

Für den Spezialfall, daß $F(z) = A(z) = |z|$ der Flächenintegrand ist, hat man

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|z|} - \frac{z_\alpha z_\beta}{|z|^3} \quad \text{für alle } z \neq 0$$

und damit $A_F = \mathrm{id}$. Die gewichteten Krümmungsgrößen S_F und H_F gehen also wie zu erwarten in die entsprechenden klassischen Größen über.

Soweit finden sich diese Begriffe in [C]. Für analytische Rechnungen mit den gewichteten Krümmungsgrößen auf der Mannigfaltigkeit wird es sich als zweckmäßig erweisen zusätzlich noch eine *gewichtete Metrik* g_F einzuführen:

$$g_F(v,w) := g(A_F^{-1}(v), w) \quad \text{für } v, w \in TM. \tag{2.8}$$

Diese Definition ist zunächst nicht so transparent wie die bisherigen. Beachte jedoch, daß g_F gerade so definiert ist, daß

$$g_F(S_F(v), w) = g(Sv, w) \tag{2.9}$$

für alle $v, w \in TM$. D.h. die gewichtete zweite Fundamentalform, also die der F-Weingartenabbildung unter g_F zugeordnete Bilinearform, stimmt mit der klassischen zweiten Fundamentalform überein. Diese Tatsache wird sich im folgenden als Schlüssel bei unseren Rechnungen erweisen, da sie es uns erlaubt S_F nicht nur geometrisch sondern auch analytisch wie S zu behandeln. Um dies noch etwas durchsichtiger zu formulieren, führen wir lokale Koordinaten ein. Wir wollen die Vereinbarung treffen, daß wir die Koeffizienten von g_F der Übersicht halber lediglich mit einem Querstrich kennzeichnen. Für die Koeffizienten von S und S_F erhält man dann aus (2.9)

$$S\partial_i = g^{kl} h_{li} \partial_k$$

und

$$S_F \partial_i = \bar{g}^{kl} h_{li} \partial_k. \tag{2.10}$$

D.h. S und S_F werden gewissermaßen durch dieselbe Größe beschrieben, nämlich h_{ij}. Die F-Abhängigkeit dagegen steckt vollständig in der Metrik.

2.3 Gewichtete Metriken

Wir werden nun systematisch die Geometrie einer Hyperfläche bezüglich der beiden Metriken g und g_F miteinander vergleichen. Dabei sind wir speziell daran interessiert, wie sich gewichtete Größen und Gleichungen strukturell von entsprechenden euklidischen Größen und Gleichungen unterscheiden.

Als Vorbereitung beweisen wir ein elementares Lemma:

Lemma 2.1 *Es gilt*
$$\lambda(F) \to 1$$
und
$$\Lambda(F) \to 1$$
für $\|F - A\|_{C^2} \to 0$.

Beweis: Schreibe $F = A + G$ mit $G := F - A$. Für beliebige $z \in S^n$ und $V \in z^\perp$ gilt dann
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta &= \frac{\partial^2 A}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta + \frac{\partial^2 G}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta \\ &= |V|^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta. \end{aligned}$$
Nun hat man die Abschätzung
$$\left| \frac{\partial^2 G}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta \right| \leq \|G\|_{C^2} |V|^2.$$
Also gilt
$$(1 - \|G\|_{C^2})|V|^2 \leq \frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z) V^\alpha V^\beta \leq (1 + \|G\|_{C^2})|V|^2$$
und damit
$$1 - \|G\|_{C^2} \leq \lambda(F) \leq \Lambda(F) \leq 1 + \|G\|_{C^2}.$$
Dies liefert die Behauptung. □

Als erstes werden wir nun die induzierten Bündelmetriken miteinander vergleichen: g und g_F definieren Metriken auf allen Tensorbündeln. Ist $T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$ ein (r,s)-Tensor, so ist
$$|T|^2 = g_{i_1 k_1} \cdots g_{i_r k_r} g^{j_1 l_1} \cdots g^{j_s l_s} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} T^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s} \tag{2.11}$$
und
$$|T|^2_F = \bar{g}_{i_1 k_1} \cdots \bar{g}_{i_r k_r} \bar{g}^{j_1 l_1} \cdots \bar{g}^{j_s l_s} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} T^{k_1 \ldots k_r}_{l_1 \ldots l_s}. \tag{2.12}$$
Das folgende Lemma zeigt, daß diese Metriken alle äquivalent sind:

Lemma 2.2 *Es gilt*

$$c(r,s,F)|T|^2 \le |T|_F^2 \le C(r,s,F)|T|^2 \tag{2.13}$$

mit positiven Konstanten $c(r,s,F)$ *und* $C(r,s,F)$*, die für* $\|F-A\|_{C^2} \to 0$ *gegen* 1 *konvergieren.*

Beweis: Es sei $x \in M$ und $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis, kurz ONB, von T_xM bezüglich g mit

$$A_F e_i = \alpha_i e_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Führt man Koordinaten ein mit $\partial_i = e_i$ in x, so gilt dort $g_{ij} = \delta_{ij}$ und $\bar{g}_{ij} = \frac{1}{\alpha_i}\delta_{ij}$. Hieraus folgt

$$|T|^2 = \sum (T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s})^2$$

und somit

$$\begin{aligned} |T|_F^2 &= \sum \frac{\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_s}}{\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}} (T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s})^2 \\ &\le \frac{\Lambda(F)^s}{\lambda(F)^r} \sum (T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s})^2 \\ &= \frac{\Lambda(F)^s}{\lambda(F)^r} |T|^2. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$|T|_F^2 \ge \frac{\lambda(F)^s}{\Lambda(F)^r} |T|^2.$$

Also haben wir die gewünschten Abschätzungen mit $c := \frac{\lambda(F)^s}{\Lambda(F)^r}$ und $C := \frac{\Lambda(F)^s}{\lambda(F)^r}$, und mit dem vorangehenden Lemma folgt die Behauptung. □

Da die gewichtete zweite Fundamentalform mit der klassischen übereinstimmt, haben wir einerseits

$$|h_{ij}|^2 = g^{ik} g^{jl} h_{ij} h_{kl} = |S|^2$$

und andererseits

$$|h_{ij}|_F^2 = \bar{g}^{ik} \bar{g}^{jl} h_{ij} h_{kl} = |S_F|_F^2.$$

Indem man das Lemma auf $T = h_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ anwendet, erhält man also die wichtige Abschätzung

$$c(F)|S|^2 \le |S_F|_F^2 \le C(F)|S|^2 \tag{2.14}$$

mit positiven Konstanten $c(F)$ und $C(F)$, die für $\|F - A\|_{C^2} \to 0$ gegen 1 konvergieren.

Betrachte als nächstes eine differenzierbare Funktion φ auf M. Wir bezeichnen den Gradienten bezüglich g bzw. g_F mit $\nabla\varphi$ bzw. $\bar{\nabla}\varphi$. Indem man das Lemma auf das Differential $T = \partial_i\varphi\, dx^i$ anwendet, ergibt sich auch hier eine entsprechende Abschätzung:

$$c(F)|\nabla\varphi|^2 \leq |\bar{\nabla}\varphi|_F^2 \leq C(F)|\nabla\varphi|^2. \tag{2.15}$$

Die zu g und g_F gehörigen Volumenelemente lassen sich ebenfalls vergleichen:

Lemma 2.3 *Es gilt*

$$c(F)\, d\mu \leq d\mu_F \leq C(F)\, d\mu \tag{2.16}$$

mit positiven Konstanten $c(F)$ und $C(F)$, die für $\|F - A\|_{C^2} \to 0$ gegen 1 konvergieren.

Beweis: Es seien A_i^k (wie auch im folgenden immer) die Koeffizienten von A_F, so daß $A_F\partial_i = A_i^k\partial_k$. Dann ist $g_{ij} = A_i^k\bar{g}_{kj}$ und folglich besteht zwischen $d\mu$ und $d\mu_F$ die Beziehung

$$\begin{aligned} d\mu &= \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \ldots dx^n \\ &= \sqrt{\det(A_F)}\sqrt{\det(\bar{g}_{ij})}\, dx^1 \ldots dx^n \\ &= \sqrt{\det(A_F)}\, d\mu_F. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\lambda(F)^{n/2} \leq \sqrt{\det(A_F)} \leq \Lambda(F)^{n/2}$$

und damit

$$\frac{1}{\Lambda(F)^{n/2}}\, d\mu \leq d\mu_F \leq \frac{1}{\lambda(F)^{n/2}}\, d\mu.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Insbesondere gilt für jede nichtnegative meßbare Funktion f die Abschätzung

$$c(F)\int_M f\, d\mu \leq \int_M f\, d\mu_F \leq C(F)\int_M f\, d\mu.$$

Kombiniert man dies mit den beiden Abschätzungen (2.14) und (2.15), so ergibt sich folgende in Hinblick auf die integrale Krümmungsabschätzung grundlegende Beobachtung:

Bemerkung 2.4 Die Krümmungsabschätzung aus Theorem 1.1 ist äquivalent zu einer Abschätzung der Form:

$$\int_M |S_F|_F^p \varphi^p \, d\mu_F \leq C(n,p,F) \int_M |\bar{\nabla}\varphi|_F^p \, d\mu_F \tag{2.17}$$

für alle nichtnegativen $\varphi \in C_c^\infty(M)$.

Es bezeichne nun allgemeiner $\bar{\nabla}$ den zu g_F gehörigen Levi–Civita-Zusammenhang auf M. Wir untersuchen als nächstes, wie sich die Ableitungen eines Tensors bezüglich $\bar{\nabla}$ mit denen bezüglich ∇ vergleichen lassen. Betrachte dazu einen allgemeinen $(1,s)$-Tensor T. Dann ergibt sich für die Koeffizienten von $\bar{\nabla}T$

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_k T^i_{j_1\ldots j_s} &= \partial_k T^i_{j_1\ldots j_s} - \bar{\Gamma}^l_{kj_1} T^i_{lj_2\ldots j_s} - \ldots - \bar{\Gamma}^l_{kj_s} T^i_{j_1\ldots j_{s-1}l} + \bar{\Gamma}^i_{kl} T^l_{j_1\ldots j_s} \\
&= \nabla_k T^i_{j_1\ldots j_s} - (\bar{\Gamma}^l_{kj_1} - \Gamma^l_{kj_1}) T^i_{lj_2\ldots j_s} - \ldots \\
&\quad -(\bar{\Gamma}^l_{kj_s} - \Gamma^l_{kj_s}) T^i_{j_1\ldots j_{s-1}l} + (\bar{\Gamma}^i_{kl} - \Gamma^i_{kl}) T^l_{j_1\ldots j_s}.
\end{aligned}$$

Die Differenz $E := \bar{\nabla} - \nabla$ der Zusammenhänge ist ein $(1,2)$-Tensor, den wir im folgenden als *Exzeß* bezeichnen wollen. In lokalen Koordinaten haben wir

$$E^k_{ij} = \bar{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}.$$

Obige Rechnung liefert also folgende Rechenregel:

Lemma 2.5 *Ist T ein $(1,s)$-Tensor, so berechnen sich die Koeffizienten der kovarianten Ableitung $\bar{\nabla}T$ wie folgt:*

$$\bar{\nabla}_k T^i_{j_1\ldots j_s} = \nabla_k T^i_{j_1\ldots j_s} - E^l_{kj_1} T^i_{lj_2\ldots j_s} - \ldots - E^l_{kj_s} T^i_{j_1\ldots j_{s-1}l} + E^i_{kl} T^l_{j_1\ldots j_s}. \tag{2.18}$$

Eine entsprechende Formel ist natürlich auch für $(0,s)$-Tensoren gültig, es entfällt einfach der letzte Summand. Insbesondere sieht man, daß die ersten Ableitungen von T bezüglich g_F mit den Ableitungen bezüglich g bis auf Zusatzterme erster Ordnung in E übereinstimmen.

Nun sind wir in der Lage eine verallgemeinerte Codazzi-Gleichung für S_F herzuleiten:

Lemma 2.6 *Für die gewichtete zweite Fundamentalform gilt*

$$\bar{\nabla}_i h_{jk} = \bar{\nabla}_j h_{ki} + C_{jki}, \tag{2.19}$$

wobei der $(0,3)$*-Tensor* C *definiert ist durch*

$$C_{jki} := E^l_{jk} h_{li} - E^l_{ik} h_{lj}. \tag{2.20}$$

Beweis: Nach obiger Rechenregel ist

$$\bar\nabla_i h_{jk} = \nabla_i h_{jk} - E^l_{ij} h_{lk} - E^l_{ik} h_{jl}.$$

Zyklisches Vertauschen der Indizes liefert

$$\bar\nabla_j h_{ki} = \nabla_j h_{ki} - E^l_{jk} h_{li} - E^l_{ji} h_{kl}.$$

Subtrahiert man nun die zweite Gleichung von der ersten, so ergibt sich die Behauptung, da nach der klassischen Codazzi-Gleichung

$$\nabla_i h_{jk} = \nabla_j h_{ki}$$

ist und E^k_{ij} in den unteren beiden Indizes symmetrisch ist. □

Als letztes leiten wir eine Gleichung für den Krümmungstensor her:

Lemma 2.7 *Für den gewichteten Krümmungstensor gilt*

$$\bar R^l_{ijk} = R^l_{ijk} + D^l_{ijk}, \tag{2.21}$$

wobei der $(1,3)$*-Tensor* D *definiert ist durch*

$$D^l_{ijk} = E^m_{ik} E^l_{mj} - E^m_{jk} E^l_{mi} + \bar\nabla_i E^l_{jk} - \bar\nabla_j E^l_{ik}. \tag{2.22}$$

Beweis: Sei $x \in M$ beliebig. Führt man bezüglich g Normalkoordinaten um x ein, so ist $E^k_{ij} = \bar\Gamma^k_{ij}$ in x und folglich gilt dort

$$\begin{aligned}
\bar R^l_{ijk} &= \partial_i \bar\Gamma^l_{jk} - \partial_j \bar\Gamma^l_{ik} + \bar\Gamma^m_{jk}\bar\Gamma^l_{mi} - \bar\Gamma^m_{ik}\bar\Gamma^l_{mj} \\
&= \partial_i(\Gamma^l_{jk} + E^l_{jk}) - \partial_j(\Gamma^l_{ik} + E^l_{ik}) + E^m_{jk} E^l_{mi} - E^m_{ik} E^l_{mj} \\
&= \partial_i \Gamma^l_{jk} - \partial_j \Gamma^l_{ik} + \nabla_i E^l_{jk} - \nabla_j E^l_{ik} + E^m_{jk} E^l_{mi} - E^m_{ik} E^l_{mj}.
\end{aligned}$$

Nun ist nach obiger Rechenregel

$$\begin{aligned}
\bar\nabla_i E^l_{jk} - \bar\nabla_j E^l_{ik} &= \nabla_i E^l_{jk} - E^m_{ij} E^l_{mk} - E^m_{ik} E^l_{jm} + E^l_{im} E^m_{jk} \\
&\quad - \nabla_j E^l_{ik} + E^m_{ji} E^l_{mk} + E^m_{jk} E^l_{im} - E^l_{jm} E^m_{ik} \\
&= \nabla_i E^l_{jk} - \nabla_j E^l_{ik} - 2E^m_{ik} E^l_{jm} + 2E^m_{jk} E^l_{im}.
\end{aligned}$$

Also gilt im Punkt x

$$\bar{R}^l_{ijk} = R^l_{ijk} + \bar{\nabla}_i E^l_{jk} - \bar{\nabla}_j E^l_{ik} + E^m_{ik} E^l_{mj} - E^m_{jk} E^l_{mi}$$

und dies ist bereits die gewünschte Gleichung für den Krümmungstensor in einem speziellen Koordinatensystem. Da beide Seiten dieser Identität jedoch tensoriellen Charakter haben, gilt sie automatisch auch in jedem anderen Koordinatensystem. □

Aus der klassischen Gauß-Gleichung erhalten wir unmittelbar das folgende

Korollar 2.8 *Es gilt eine verallgemeinerte Gauß-Gleichung:*

$$\bar{R}^l_{ijk} = g^{lm}(h_{im} h_{jk} - h_{ik} h_{jm}) + D^l_{ijk}. \tag{2.23}$$

2.4 Abschätzungen für den Exzeß

Wir werden jetzt Abschätzungen für den Exzeß herleiten, um die Störterme in der verallgemeinerten Codazzi-Gleichung und der verallgemeinerten Gauß-Gleichung zu kontrollieren.

Wir beginnen mit Abschätzungen für das Gewicht A_F und die Inverse $B_F = A_F^{-1}$.

Lemma 2.9 *Für A_F und B_F gelten die Abschätzungen*

$$|A_F| \leq C(F) \tag{2.24}$$

und

$$|B_F| \leq C(F) \tag{2.25}$$

mit einer positiven Konstanten $C(F)$, die für $\|F - A\|_{C^2} \to 0$ gegen $\sqrt{n}$ konvergiert.

Beweis: Es sei $e_1, \ldots, e_n$ eine ONB bezüglich g mit $A_F e_i = \alpha_i e_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann ist

$$|A_F|^2 = \sum_i \alpha_i^2 \leq n\Lambda(F)^2,$$

also

$$|A_F| \leq \sqrt{n}\Lambda(F)$$

und dies zeigt die erste Abschätzung.

Da $B_F e_i = \frac{1}{\alpha_i} e_i$ ergibt sich analog

$$|B_F| \leq \frac{\sqrt{n}}{\lambda(F)}$$

und hieraus folgt die zweite Abschätzung. □

Als nächstes wollen wir ∇A_F abschätzen. Hierzu gehen wir etwas anders vor. Es bezeichne

$$A_{ij} := g(A_F \partial_i, \partial_j)$$

die Koeffizienten der A_F unter g zugeordneten Bilinearform. Dann ist $A_{ij} = A_i^l g_{lj}$ und damit

$$\nabla_k A_{ij} = \nabla_k A_i^l g_{lj},$$

also

$$|\nabla A_F| = |\nabla_k A_{ij}|. \tag{2.26}$$

Sei nun $F = A + G$ mit $G := F - A$, wobei A (in etwas doppeldeutiger Notation) den Flächenintegranden bezeichne. Dann ist $A_F = \mathrm{id} + A_G$ und somit

$$A_{ij} = g_{ij} + \partial_{\alpha\beta} G(N) \partial_i X^\alpha \partial_j X^\beta.$$

In Normalkoordinaten bezüglich g folgt hieraus

$$\begin{aligned}
\nabla_k A_{ij} &= \partial_k A_{ij} \\
&= \partial_{\alpha\beta\gamma} G(N) \partial_k N^\gamma \partial_i X^\alpha \partial_j X^\beta + \partial_{\alpha\beta} G(N) h_{ik} N^\alpha \partial_j X^\beta \\
&\quad + \partial_{\alpha\beta} G(N) \partial_i X^\alpha h_{jk} N^\beta \\
&= -g^{rs} h_{sk} \partial_{\alpha\beta\gamma} G(N) \partial_i X^\alpha \partial_j X^\beta \partial_r X^\gamma,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, daß aufgrund der Homogenität von G gilt:

$$\partial_{\alpha\beta} G(N) N^\beta = 0 \quad \text{für alle } \alpha = 1, \ldots, n+1.$$

Also haben wir

$$\nabla_k A_{ij} = -g^{rs} h_{sk} \partial_{\alpha\beta\gamma} G(N) \partial_i X^\alpha \partial_j X^\beta \partial_r X^\gamma.$$

Beachte, daß diese Identität zunächst nur in dem Punkt gültig ist um den wir die Normalkoordinaten gewählt haben. Da auf beiden Seiten jedoch die

Koeffizienten eines Tensors stehen, gilt sie automatisch auch in jedem anderen Koordinatensystem und in jedem Punkt. Es folgt die Abschätzung:

$$|\nabla A_F| \leq C(n)\|G\|_{C^3}|S|.$$

Analog behandeln wir $\nabla\nabla A_F$ und erhalten

$$\begin{aligned}\nabla_l\nabla_k A_{ij} &= -g^{rs}\nabla_l h_{sk}\partial_{\alpha\beta\gamma}G(N)\partial_i X^\alpha\partial_j X^\beta\partial_r X^\gamma \\ &\quad +g^{rs}h_{sk}g^{pq}h_{ql}\partial_{\alpha\beta\gamma\delta}G(N)\partial_i X^\alpha\partial_j X^\beta\partial_r X^\gamma\partial_p X^\delta \\ &\quad -g^{rs}h_{sk}\partial_{\alpha\beta\gamma}G(N)(h_{il}N^\alpha\partial_j X^\beta\partial_r X^\gamma+\partial_i X^\alpha h_{jl}N^\beta\partial_r X^\gamma \\ &\quad +\partial_i X^\alpha\partial_j X^\beta h_{rl}N^\gamma).\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}|\nabla\nabla A_F| &\leq C(n)(\|G\|_{C^3}|\nabla S|+\|G\|_{C^4}|S|^2+\|G\|_{C^3}|S|^2) \\ &\leq C(n)\|G\|_{C^4}(|S|^2+|\nabla S|).\end{aligned}$$

Fassen wir dies wie folgt zusammen:

Lemma 2.10 *Die Ableitungen von A_F lassen sich abschätzen durch*

$$|\nabla A_F| \leq \varepsilon(F)|S| \tag{2.27}$$

und

$$|\nabla\nabla A_F| \leq \varepsilon(F)(|S|^2+|\nabla S|) \tag{2.28}$$

mit einer nichtnegativen Konstanten $\varepsilon(F)$, die für $\|F-A\|_{C^4}\to 0$ gegen 0 konvergiert.

Nun kommen wir zu Abschätzungen für die Ableitungen von B_F. Wegen $B_F A_F = \mathrm{id}$ ist $B^i_j A^j_s = \delta^i_s$ und damit

$$\nabla_k B^i_j = -B^i_r\nabla_k A^r_s B^s_j$$

und

$$\nabla_l\nabla_k B^i_j = -\nabla_l B^i_r\nabla_k A^r_s B^s_j - B^i_r\nabla_l\nabla_k A^r_s B^s_j - B^i_r\nabla_k A^r_s\nabla_l B^s_j,$$

wobei B^i_j die Koeffizienten von B_F bezeichne. Nach (2.25) und (2.27) ergibt sich daraus die Abschätzung

$$|\nabla B_F| \leq C(n)|B_F||\nabla A_F||B_F| \leq \varepsilon(F)|S|,$$

wobei $\varepsilon(F)$ (wie auch im folgenden) eine nichtnegative Konstante bezeichne, die für $\|F-A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert. Weiter erhält man mit (2.28)

$$\begin{aligned} |\nabla\nabla B_F| &\leq C(n)(|\nabla B_F||\nabla A_F||B_F| + |B_F||\nabla\nabla A_F||B_F|) \\ &\leq \varepsilon(F)(|S|^2 + |\nabla S|). \end{aligned}$$

Fassen wir auch dies kurz zusammen:

Lemma 2.11 *Für die Ableitungen von $B_F = A_F^{-1}$ gilt*

$$|\nabla B_F| \leq \varepsilon(F)|S| \tag{2.29}$$

und

$$|\nabla\nabla B_F| \leq \varepsilon(F)(|S|^2 + |\nabla S|) \tag{2.30}$$

mit einer nichtnegativen Konstanten $\varepsilon(F)$, die für $\|F-A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert.

Jetzt können wir Abschätzungen für den Exzeß herleiten. In Normalkoordinaten bezüglich g berechnet man:

$$\begin{aligned} E_{ij}^k &= \bar{\Gamma}_{ij}^k \\ &= \frac{1}{2}\bar{g}^{km}(\partial_i\bar{g}_{jm} + \partial_j\bar{g}_{mi} - \partial_m\bar{g}_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}g^{kr}A_r^m(\partial_i(B_j^s g_{sm}) + \partial_j(B_m^s g_{si}) - \partial_m(B_i^s g_{sj})) \\ &= \frac{1}{2}g^{kr}A_r^m(\nabla_i B_j^s g_{sm} + \nabla_j B_m^s g_{si} - \nabla_m B_i^s g_{sj}), \end{aligned}$$

wobei wir die Identitäten $\bar{g}_{ij} = B_i^k g_{kj}$ und $\bar{g}^{ij} = g^{ik}A_k^j$ ausgenutzt haben, und da auf beiden Seiten Tensoren stehen gilt die Identität

$$E_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kr}A_r^m(\nabla_i B_j^s g_{sm} + \nabla_j B_m^s g_{si} - \nabla_m B_i^s g_{sj})$$

in beliebigen Koordinaten. Obige Abschätzungen liefern nun

$$|E| \leq C(n)|A_F||\nabla B_F| \leq \varepsilon(F)|S|. \tag{2.31}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \nabla_l E_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{kr}\nabla_l A_r^m(\nabla_i B_j^s g_{sm} + \nabla_j B_m^s g_{si} - \nabla_m B_i^s g_{sj}) \\ &\quad + \frac{1}{2}g^{kr}A_r^m(\nabla_l\nabla_i B_j^s g_{sm} + \nabla_l\nabla_j B_m^s g_{si} - \nabla_l\nabla_m B_i^s g_{sj}) \end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
|\nabla E| &\leq C(n)(|\nabla A_F||\nabla B_F| + |A_F||\nabla\nabla B_F| \\
&\leq \varepsilon(F)(|S|^2 + |\nabla S|). \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Da wir später konsequent bezüglich der gewichteten Metrik rechnen wollen, müssen wir die letzten beiden Abschätzungen noch auf g_F beziehen. Zunächst erhält man mit der Äquivalenz der Metriken aus (2.13) und aufgrund von

$$|S| \leq C(F)|S_F|_F$$

die Abschätzung

$$|E|_F \leq \varepsilon(F)|S_F|_F. \qquad (2.33)$$

Mit der Rechenregel (2.18) für kovariante Ableitungen bezüglich g_F ergibt sich ferner

$$\bar{\nabla}_l E^k_{ij} = \nabla_l E^k_{ij} - E^m_{li}E^k_{mj} - E^m_{lj}E^k_{im} + E^k_{lm}E^m_{ij},$$

so daß

$$
\begin{aligned}
|\bar{\nabla} E|_F &\leq C(F)|\nabla_l E^k_{ij} - E^m_{li}E^k_{mj} - E^m_{lj}E^k_{im} + E^k_{lm}E^m_{ij}| \\
&\leq C(F)(|\nabla E| + 3|E|^2) \\
&\leq \varepsilon(F)(|S|^2 + |\nabla S|). \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

Beachte nun noch, daß

$$
\begin{aligned}
|\nabla S| &= |\nabla_k h_{ij}| \\
&= |\bar{\nabla}_k h_{ij} + E^m_{ki}h_{mj} + E^m_{kj}h_{im}| \\
&\leq |\bar{\nabla}_k h_{ij}| + 2|E||S| \\
&\leq C(F)|\bar{\nabla} S_F|_F + \varepsilon(F)|S_F|^2_F,
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, daß

$$|\bar{\nabla}_k h_{ij}|_F = |\bar{\nabla} S_F|_F.$$

Also haben wir

$$(|S|^2 + |\nabla S|) \leq C(F)(|S_F|^2_F + |\bar{\nabla} S_F|_F),$$

wobei $C(F)$ für $\|F - A\|_{C^4} \to 0$ gegen 1 konvergiert. Setzen wir dies in (2.34) ein, so haben wir gezeigt:

Proposition 2.12 *Für den Exzeß gelten die Abschätzungen*

$$|E|_F \leq \varepsilon(F)|S_F|_F \tag{2.35}$$

und

$$|\bar{\nabla}E|_F \leq \varepsilon(F)(|S_F|_F^2 + |\bar{\nabla}S_F|_F) \tag{2.36}$$

mit einer nichtnegativen Konstanten $\varepsilon(F)$, die für $\|F - A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert.

Als unmittelbare Folgerung erhält man:

Korollar 2.13 *Für die Störterme in der verallgemeinerten Codazzi-Gleichung und der verallgemeinerten Gauß-Gleichung gelten die Abschätzungen*

$$|C|_F \leq \varepsilon(F)|S_F|_F^2 \tag{2.37}$$

und

$$|D|_F \leq \varepsilon(F)(|S_F|_F^2 + |\bar{\nabla}S_F|_F) \tag{2.38}$$

mit einer nichtnegativen Konstanten $\varepsilon(F)$, die für $\|F - A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert.

Für spätere Zwecke notieren wir noch folgendes

Korollar 2.14 *Es gilt*

$$|\bar{\nabla}C|_F \leq \varepsilon(F)|S_F|_F(|S_F|_F^2 + |\bar{\nabla}S_F|_F) \tag{2.39}$$

mit einer nichtnegativen Konstanten $\varepsilon(F)$, die für $\|F - A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert.

Beweis: Nach Definition von C ist

$$\bar{\nabla}_l C_{jki} = \bar{\nabla}_l E_{jk}^m h_{mi} + E_{jk}^m \bar{\nabla}_l h_{mi} - \bar{\nabla}_l E_{ik}^m h_{mj} - E_{ik}^m \bar{\nabla}_l h_{mj}$$

und daher

$$|\bar{\nabla}C|_F \leq C(n)(|\bar{\nabla}E|_F|S_F|_F + |E|_F|\bar{\nabla}S_F|_F).$$

Die Behauptung folgt nun aus den Abschätzungen für den Exzeß. □

2.5 Ungleichung vom Schoen-Simon-Yau Typ

Die für jede reguläre Hyperfläche gültige Abschätzung

$$|\nabla S|^2 \geq |\nabla |S||^2$$

läßt sich nach Schoen, Simon und Yau [SSY] für Minimalflächen verbessern zu

$$|\nabla S|^2 \geq \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\nabla |S||^2.$$

Ziel dieses Abschnittes ist es, für F-Minimalflächen eine analoge Abschätzung von $|\bar{\nabla} S_F|_F$ nach unten zu gewinnen.

Proposition 2.15 *Ist X eine F-Minimalfläche, so hat man die folgende Abschätzung:*

$$|\bar{\nabla} S_F|_F^2 \geq \frac{1}{1+\theta} \left(1 + \frac{2}{n}\right) |\bar{\nabla} |S_F|_F|_F^2 - C(\theta)\varepsilon(F)|S_F|_F^4 \tag{2.40}$$

für alle $\theta > 0$. Dabei ist $\varepsilon(F)$ eine nichtnegative Konstante, die für $\|F - A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert.

Beweis: Der Übersicht halber wollen wir im Beweis das F an den Betragstrichen weglassen. Da wir konsequent bezüglich g_F rechnen, führt dies zu keinen Mißverständnissen.

Es ist

$$|S_F|^2 = \sum_{i,j,r,s} h_{ij} h_{rs} \bar{g}^{ir} \bar{g}^{js}.$$

Sei nun x ein Punkt in dem $|S_F| > 0$ ist. Führe um x Normalkoordinaten bezüglich g_F ein, die S_F diagonalisieren, d.h. in x sei $\bar{g}_{ij} = \delta_{ij}$, $\bar{\Gamma}_{ij}^k = 0$ und $h_{ij} = \bar{\kappa}_i \delta_{ij}$ mit gewissen $\bar{\kappa}_1, \ldots, \bar{\kappa}_n$. Dann gilt dort

$$\bar{\nabla}_k |S_F| = \frac{1}{|S_F|} \sum_i \bar{\nabla}_k h_{ii} h_{ii}$$

und mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\bar{\nabla} |S_F||^2 &= \frac{1}{|S_F|^2} \sum_k \left(\sum_i \bar{\nabla}_k h_{ii} h_{ii} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i,k} (\bar{\nabla}_k h_{ii})^2. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}|\bar\nabla S_F|^2 - |\bar\nabla |S_F||^2 &\geq \sum_{i,j,k}(\bar\nabla_k h_{ij})^2 - \sum_{i,k}(\bar\nabla_k h_{ii})^2 \\ &= \sum_{i,j,k\,:\,i\neq j}(\bar\nabla_k h_{ij})^2. \end{aligned}\tag{2.42}$$

Wir wollen hierin die rechte Seite weiter abschätzen. Da $H_F = 0$, also $\sum_{i,j}\bar g^{ij}h_{ij} = 0$, ist zunächst

$$\sum_i \bar\nabla_k h_{ii} = 0$$

in x, so daß nach (2.41) gilt

$$\begin{aligned}|\bar\nabla |S_F||^2 &\leq \sum_{k\neq i}(\bar\nabla_k h_{ii})^2 + \sum_k(\bar\nabla_k h_{kk})^2 \\ &= \sum_{k\neq i}(\bar\nabla_k h_{ii})^2 + \sum_k\left(\sum_{i\neq k}\bar\nabla_k h_{ii}\right)^2 \\ &\leq \sum_{k\neq i}(\bar\nabla_k h_{ii})^2 + (n-1)\sum_{k\neq i}(\bar\nabla_k h_{ii})^2 \\ &= n\sum_{k\neq i}(\bar\nabla_k h_{ii})^2,\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{n}|\bar\nabla |S_F||^2 \leq \sum_{k\neq i}(\bar\nabla_k h_{ii})^2. \tag{2.43}$$

Um (2.42) und (2.43) miteinander in Beziehung zu setzen, bringen wir jetzt analog zur Vorgehensweise in [SSY] die verallgemeinerte Codazzi-Gleichung (2.19) ins Spiel:

$$\begin{aligned}2\sum_{i\neq k}(\bar\nabla_i h_{kk})^2 &= 2\sum_{i\neq k}(\bar\nabla_k h_{ki} + C_{kki})^2 \\ &= \sum_{i\neq k}(\bar\nabla_k h_{ki})^2 + \sum_{i\neq k}(\bar\nabla_k h_{ik})^2 \\ &\quad +4\sum_{i\neq k}\bar\nabla_k h_{ki}C_{kki} + 2\sum_{i\neq k}(C_{kki})^2.\end{aligned}$$

Beachte nun, daß

$$\sum_{i\neq k}(\bar\nabla_k h_{ki})^2 + \sum_{i\neq k}(\bar\nabla_k h_{ik})^2 \leq \sum_{i,j,k\,:\,i\neq j}(\bar\nabla_k h_{ij})^2.$$

Ferner liefert die Youngsche Ungleichung:

$$4\sum_{i\neq k}\bar{\nabla}_k h_{ki} C_{kki} \leq \theta|\bar{\nabla} S_F|^2 + \frac{4}{\theta}|C|^2$$

für alle $\theta > 0$. Also hat man

$$2\sum_{i\neq k}(\bar{\nabla}_i h_{kk})^2 \leq \sum_{i,j,k\,:\,i\neq j}(\bar{\nabla}_k h_{ij})^2 + \theta|\bar{\nabla} S_F|^2 + (2+\frac{4}{\theta})|C|^2.$$

Kombinieren wir hiermit nun (2.42) und (2.43), so ergibt sich

$$|\bar{\nabla} S_F|^2 - |\bar{\nabla}|S_F||^2 \geq \frac{2}{n}|\bar{\nabla}|S_F||^2 - \theta|\bar{\nabla} S_F|^2 - (2+\frac{4}{\theta})|C|^2$$

und mit der Abschätzung (2.37) für $|C|$ erhält man

$$|\bar{\nabla} S_F|^2 \geq \frac{1}{1+\theta}\left(1+\frac{2}{n}\right)|\bar{\nabla}|S_F||^2 - \frac{1}{1+\theta}\left(2+\frac{4}{\theta}\right)\varepsilon(F)|S_F|^4.$$

Also haben wir die gewünschte Abschätzung überall dort, wo $|S_F| > 0$ ist. Da $|S_F|$ nach Anhang A.1 jedoch schwach differenzierbar ist und die schwache Ableitung in allen Punkten in denen $|S_F| = 0$ ist verschwindet, gilt die Abschätzung sogar auf ganz M. $\square$

2.6 Verallgemeinerte Simons Ungleichung

Wir kommen nun zum Hauptergebnis dieses Kapitels. Zunächst leiten wir aus der verallgemeinerten Codazzi-Gleichung und der verallgemeinerten Gauß-Gleichung eine Identität für $\Delta_F|S_F|_F^2$ her. Dabei bezeichnet Δ_F den Laplace-Beltrami Operator zur Metrik g_F. Zusammen mit der Schoen-Simon-Yau Ungleichung liefert dies eine verallgemeinerte Simons Ungleichung.

Nach der verallgemeinerten Codazzi-Gleichung (2.19) haben wir zunächst

$$\bar{\nabla}_l h_{ij} = \bar{\nabla}_i h_{jl} + C_{ijl}$$

und damit

$$\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}_l h_{ij} = \bar{\nabla}_k\bar{\nabla}_i h_{jl} + \bar{\nabla}_k C_{ijl}.$$

Vertauscht man hierin die Reihenfolge der Ableitungen, so ergibt sich nach Definition des Krümmungstensors

$$\bar{\nabla}_k\bar{\nabla}_l h_{ij} = \bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_k h_{jl} - \bar{R}^s_{kij}h_{sl} - \bar{R}^s_{kil}h_{js} + \bar{\nabla}_k C_{ijl}.$$

Also gilt

$$\bar\nabla_k\bar\nabla_l h_{ij} = \bar\nabla_i\bar\nabla_j h_{lk} - \bar R^s_{kij}h_{sl} - \bar R^s_{kil}h_{js} + \bar\nabla_i C_{jlk} + \bar\nabla_k C_{ijl}.$$

Wir ziehen nun die verallgemeinerte Gauß-Gleichung (2.23) heran. Diese liefert:

$$\bar\nabla_k\bar\nabla_l h_{ij} = \bar\nabla_i\bar\nabla_j h_{lk} - g^{st}(h_{kt}h_{ij} - h_{kj}h_{it})h_{sl} - g^{st}(h_{kt}h_{il} - h_{kl}h_{it})h_{js} + T_{ijkl},$$

wobei der Rest T gegeben ist durch

$$T_{ijkl} := \bar\nabla_i C_{jlk} + \bar\nabla_k C_{ijl} - D^s_{kij}h_{sl} - D^s_{kil}h_{js}.$$

Verjüngt man dies mit $\bar g^{kl}$, so folgt

$$\Delta_F h_{ij} = \bar\nabla_i\bar\nabla_j H_F + H_F h_{it}g^{ts}h_{sj} - (g^{st}h_{tk}\bar g^{kl}h_{ls})h_{ij} + \sigma_{ij} + \bar g^{kl}T_{ijkl}$$

mit

$$\sigma_{ij} := h_{it}g^{ts}h_{sl}\bar g^{lk}h_{kj} - h_{js}g^{st}h_{tk}\bar g^{kl}h_{li}.$$

Beachte nun, daß σ alterniert, d.h. es gilt $\sigma_{ji} = -\sigma_{ij}$. Indem man also i und j vertauscht und den Mittelwert der resultierenden Gleichungen bildet, erhalten wir weiter

$$\Delta_F h_{ij} = \bar\nabla_i\bar\nabla_j H_F + H_F(h_{it}g^{ts}h_{sj}) - (g^{st}h_{tk}\bar g^{kl}h_{ls})h_{ij} + \frac{1}{2}\bar g^{kl}(T_{ijkl} + T_{jikl}).$$

Diese Gleichung stellt eine Verallgemeinerung der klassischen Simons-Identität dar. Für $|S_F|^2_F = h_{ij}h_{kl}\bar g^{ik}\bar g^{jl} = h_{ij}h^{ij}$ ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}\Delta_F|S_F|^2_F &= \bar\nabla^k\bar\nabla_k|S_F|^2_F\\ &= 2\Delta_F h_{ij}h^{ij} + 2\bar\nabla_k h_{ij}\bar\nabla^k h^{ij}\\ &= 2|\bar\nabla S_F|^2_F + 2\bar\nabla_i\bar\nabla_j H_F h^{ij} + 2H_F h_{it}g^{ts}h_{sj}h^{ij}\\ &\quad -2(g^{st}h_{tk}\bar g^{kl}h_{ls})|S_F|^2_F + 2\bar g^{kl}T_{ijkl}h^{ij}.\end{aligned}$$

Benutzt man nun noch, daß $g^{st} = B^s_r\bar g^{rt}$, so können wir also folgendes Zwischenergebnis festhalten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta_F|S_F|^2_F &= |\bar\nabla S_F|^2_F + \bar\nabla_i\bar\nabla_j H_F h^{ij} + H_F\mathrm{tr}(B_F S_F^3)\\ &\quad -\mathrm{tr}(B_F S_F^2)|S_F|^2_F + \bar g^{kl}T_{ijkl}h^{ij}.\end{aligned}$$

Speziell für F-Minimalflächen hat man die Identität:

$$\frac{1}{2}\Delta_F|S_F|^2_F = |\bar\nabla S_F|^2_F - \mathrm{tr}(B_F S_F^2)|S_F|^2_F + \bar g^{kl}T_{ijkl}h^{ij}. \tag{2.44}$$

Nun gilt

$$\operatorname{tr}(B_F S_F^2) \leq \frac{1}{\lambda(F)} |S_F|_F^2,$$

ist nämlich $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ eine ONB bezüglich g_F mit $A_F \bar{e}_i = \alpha_i \bar{e}_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(B_F S_F^2) &= \sum_i g_F(B_F S_F^2 \bar{e}_i, \bar{e}_i) \\
&= \sum_i \frac{1}{\alpha_i} g_F(S_F^2 \bar{e}_i, \bar{e}_i) \\
&\leq \frac{1}{\lambda(F)} \sum_i g_F(S_F^2 \bar{e}_i, \bar{e}_i) \\
&= \frac{1}{\lambda(F)} \operatorname{tr}(S_F^2) \\
&= \frac{1}{\lambda(F)} |S_F|_F^2.
\end{aligned}$$

Ferner liefern die Abschätzungen für $\bar{\nabla} C$ und D aus (2.39) und (2.38), daß

$$\begin{aligned}
|\bar{g}^{kl} T_{ijkl} h^{ij}| &\leq C(n)(|\bar{\nabla} C|_F |S_F|_F + |D|_F |S_F|_F^2) \\
&\leq \varepsilon(F) |S_F|_F^4 + \varepsilon(F) |\bar{\nabla} S_F|_F |S_F|_F^2
\end{aligned}$$

und nach der Youngschen Ungleichung ist

$$\varepsilon(F) |S_F|_F^2 |\bar{\nabla} S_F|_F \leq \eta |\bar{\nabla} S_F|_F^2 + \frac{\varepsilon(F)^2}{4\eta} |S_F|_F^4$$

für alle $\eta > 0$. Aus (2.44) ergibt sich also die Abschätzung:

$$\frac{1}{2} \Delta_F |S_F|_F^2 \geq (1 - \eta) |\bar{\nabla} S_F|_F^2 - \left(\frac{1}{\lambda(F)} + C(\eta) \varepsilon(F) \right) |S_F|_F^4$$

für alle $\eta > 0$. Ziehen wir nun noch unsere Ungleichung vom Schoen-Simon-Yau Typ heran, so haben wir also bewiesen:

Proposition 2.16 *Ist X eine F-Minimalfläche, so hat man die folgende Abschätzung:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta_F |S_F|_F^2 \geq{} & \left(\frac{1 - \eta}{1 + \theta} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) |\bar{\nabla} |S_F|_F|_F^2 \\
& - \left(\frac{1}{\lambda(F)} + C(\eta, \theta) \varepsilon(F) \right) |S_F|_F^4 \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

für alle $\theta > 0$ und alle $\eta \in (0, 1]$. Dabei ist $\varepsilon(F)$ eine nichtnegative Konstante, die für $\|F - A\|_{C^4} \to 0$ gegen 0 konvergiert.

Kapitel 3

Integrale Krümmungsabschätzungen und Sätze vom Bernsteintyp

3.1 Eine Stabilitätsungleichung

Die zweite Variation

$$\delta^2\mathcal{F}(X,\varphi) := \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\mathcal{F}(X+\varepsilon\varphi N)\bigg|_{\varepsilon=0}$$

ist für parametrische Funktionale von Räwer [R] und Clarenz [C] ausgerechnet worden. Speziell für Extremalen von $\mathcal{F}$ ergibt sich:

$$\delta^2\mathcal{F}(X,\varphi) = \int_M \big(g(A_F\nabla\varphi,\nabla\varphi) - \mathrm{tr}(A_F S^2)\varphi^2\big)\, d\mu.$$

Für *stabile* Extremalen, d.h. für den Fall, daß $\delta^2\mathcal{F}(X,\varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$, liefert dies die Ungleichung

$$\int_M \mathrm{tr}(A_F S^2)\varphi^2\, d\mu \leq \int_M g(A_F\nabla\varphi,\nabla\varphi)\, d\mu$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$.

Wir wollen hieraus eine unserer Situation angepaßte Stabilitätsungleichung herleiten. Beachte zunächst: Zwischen $\nabla\varphi$ und $\bar\nabla\varphi$ besteht wegen

$$g(\nabla\varphi, v) = d\varphi(v) = g_F(\bar\nabla\varphi, v) \quad \text{für alle } v \in TM$$

die Beziehung

$$\bar\nabla\varphi = A_F\nabla\varphi.$$

Folglich ist der Integrand auf der rechten Seite nichts anderes als

$$g(A_F\nabla\varphi, \nabla\varphi) = |\bar{\nabla}\varphi|_F^2.$$

Ferner haben wir die Abschätzung

$$|S_F|_F^2 \leq \Lambda(F)\mathrm{tr}(A_F S^2).$$

Ist nämlich $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ eine ONB bezüglich g_F mit $A_F\bar{e}_i = \alpha_i\bar{e}_i$, so sieht man ähnlich wie im letzten Abschnitt, daß

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A_F S^2) &= \mathrm{tr}(SA_F S) \\
&= \mathrm{tr}(A_F^{-1}S_F^2) \\
&= \sum_i g_F(A_F^{-1}S_F^2\bar{e}_i, \bar{e}_i) \\
&= \sum_i \frac{1}{\alpha_i} g_F(S_F^2\bar{e}_i, \bar{e}_i) \\
&\geq \frac{1}{\Lambda(F)}\mathrm{tr}(S_F^2) \\
&= \frac{1}{\Lambda(F)}|S_F|_F^2.
\end{aligned}$$

Ziehen wir nun noch die Äquivalenz der Volumenelemente $d\mu$ und $d\mu_F$ aus (2.16) heran, so erhalten wir folgende Stabilitätsungleichung:

Proposition 3.1 *Es sei X eine stabile Extremale von $\mathcal{F}$, d.h. es gelte $\delta\mathcal{F}(X, \varphi) = 0$ und $\delta^2\mathcal{F}(X, \varphi) \geq 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$. Dann gilt*

$$\int_M |S_F|_F^2 \varphi^2 \, d\mu_F \leq C(F) \int_M |\bar{\nabla}\varphi|_F^2 \, d\mu_F \tag{3.1}$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(M)$ mit einer Konstanten $C(F)$, die für $\|F - A\|_{C^2} \to 0$ gegen 1 konvergiert.

3.2 Beweis der Krümmungsabschätzung

Nun kommen wir zum *Beweis von Theorem 1.1:* Es sei also F ein zunächst beliebiger elliptischer Integrand, $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine stabile Extremale des zugehörigen parametrischen Funktionals $\mathcal{F}$ und $p \in (4, 4 + \sqrt{8/n})$. Unser Ziel ist es, eine Abschätzung der Form

$$\int_M |S_F|_F^p \varphi^p \, d\mu_F \leq C(n, p, F) \int_M |\bar{\nabla}\varphi|_F^p \, d\mu_F$$

für alle nichtnegativen $\varphi \in C_c^\infty(M)$ zu beweisen, da diese nach Bemerkung 2.4 zur klassischen Krümmungsabschätzung äquivalent ist. Im Verlauf der Rechnungen wird sich dabei eine Kleinheitsbedingung an $\|F - A\|_{C^4}$ ergeben. Der Übersicht halber lassen wir im folgenden das F an den Betragstrichen wieder weg.

Ausgangspunkt ist die Stabilitätsungleichung:

$$\int_M |S_F|^2 \varphi^2 \, d\mu_F \le C_1(F) \int_M |\bar\nabla \varphi|^2 \, d\mu_F.$$

Hierin möchten wir mit $\varphi = |S_F|^{q+1}\xi$ testen, wobei $\xi \in C_c^\infty(M)$ eine nichtnegative Testfunktion sei und $q > 0$ zunächst beliebig gewählt werden darf. Da diese Funktion jedoch im Allgemeinen nicht glatt ist, setzen wir zunächst $\varphi := |S_F|_\sigma^{q+1}\xi$, wobei $|S_F|_\sigma := \sqrt{|S_F|^2 + \sigma^2}$, und lassen anschließend $\sigma \to 0$ streben. Wegen

$$\bar\nabla \varphi = (q+1)|S_F|_\sigma^q \bar\nabla |S_F|_\sigma \xi + |S_F|_\sigma^{q+1} \bar\nabla \xi$$

und

$$\begin{aligned} |\bar\nabla \varphi|^2 &= (q+1)^2 |S_F|_\sigma^{2q} |\bar\nabla |S_F|_\sigma|^2 \xi^2 + 2(q+1)|S_F|_\sigma^{2q+1} \xi \bar\nabla |S_F|_\sigma \bar\nabla \xi \\ &\quad + |S_F|_\sigma^{2q+2} |\bar\nabla \xi|^2 \end{aligned}$$

ergibt sich auf diese Weise

$$\begin{aligned} \int_M |S_F|^2 |S_F|_\sigma^{2q+2} \xi^2 \, d\mu_F &\le C_1(F)(q+1)^2 \int_M |S_F|_\sigma^{2q} |\bar\nabla |S_F|_\sigma|^2 \xi^2 \, d\mu_F \\ &\quad + 2C_1(F)(q+1) \int_M |S_F|_\sigma^{2q+1} \xi \bar\nabla |S_F|_\sigma \bar\nabla \xi \, d\mu_F \\ &\quad + C_1(F) \int_M |S_F|_\sigma^{2q+2} |\bar\nabla \xi|^2 \end{aligned}$$

und mit $\sigma \to 0$ folgt aus Lemma A.1 und dem Satz von der majorisierten Konvergenz, daß

$$\begin{aligned} \int_M |S_F|^{2q+4} \xi^2 \, d\mu_F &\le C_1(F)(q+1)^2 \int_M |S_F|^{2q} |\bar\nabla |S_F||^2 \xi^2 \, d\mu_F \\ &\quad + 2C_1(F)(q+1) \int_M |S_F|^{2q+1} \xi \bar\nabla |S_F| \bar\nabla \xi \, d\mu_F \\ &\quad + C_1(F) \int_M |S_F|^{2q+2} |\bar\nabla \xi|^2 \, d\mu_F. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wir wollen nun das erste Integral auf der rechten Seite wie folgt abschätzen:

$$\int_M |S_F|^{2q} |\bar\nabla |S_F||^2 \xi^2 \, d\mu_F \le C(n,q,F) \int_M |S_F|^{2q+2} |\bar\nabla \xi|^2 \, d\mu_F.$$

Multipliziere dazu die verallgemeinerte Simons Ungleichung (2.45) mit $|S_F|^{2q}\xi^2$ und integriere über M. Dies ergibt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M \Delta_F|S_F|^2|S_F|^{2q}\xi^2\,d\mu_F \quad &\geq \quad \left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\int_M |\bar\nabla|S_F||^2|S_F|^{2q}\xi^2\,d\mu_F \\ &\quad -\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)\int_M |S_F|^{2q+4}\xi^2\,d\mu_F.\end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_M \Delta_F|S_F|_\sigma^2|S_F|_\sigma^{2q}\xi^2\,d\mu_F \quad &= \quad -2q\int_M |S_F|_\sigma^{2q}|\bar\nabla|S_F|_\sigma|^2\xi^2\,d\mu_F \\ &\quad -2\int_M |S_F|_\sigma^{2q+1}\xi\bar\nabla\xi\bar\nabla|S_F|_\sigma\,d\mu_F.\end{aligned}$$

Beachte, daß $\Delta_F|S_F|_\sigma^2 = \Delta_F|S_F|^2$. Indem wir also $\sigma \to 0$ gehen lassen, erhalten wir

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\int_M |S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2\,d\mu_F \\ &\leq \quad -2q\int_M |S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2\,d\mu_F - 2\int_M |S_F|^{2q+1}\xi\bar\nabla\xi\bar\nabla|S_F|\,d\mu_F \\ &\qquad +\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)\int_M |S_F|^{2q+4}\xi^2\,d\mu_F.\end{aligned}$$

Zusammen mit (3.2) ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)+2q-C_1(F)(q+1)^2\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)\right\}\times \\ &\int_M |S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2\,d\mu_F \\ &\quad\leq \quad \left\{2C_1(F)(q+1)\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)-2\right\}\int_M |S_F|^{2q+1}\xi\bar\nabla\xi\bar\nabla|S_F|\,d\mu_F \\ &\qquad +C_1(F)\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)\int_M |S_F|^{2q+2}|\bar\nabla\xi|^2\,d\mu_F.\end{aligned}$$

Ab jetzt nehmen wir an, daß $p = 4+2q$ ist und damit insbesondere $q \in (0,\sqrt{2/n})$. Dann können wir $\eta(n,q) > 0$ und $\theta(n,q) > 0$ so klein wählen, daß

$$\left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)+2q-(q+1)^2 > 0.$$

Weiter finden wir, da $C_1(F) \to 1$, $\lambda(F) \to 1$ und $\varepsilon(F) \to 0$ für $\|F-A\|_{C^4} \to 0$, eine Konstante $\delta(n,q) > 0$, so daß für $\|F-A\|_{C^4} < \delta$ gilt:

$$\left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) + 2q - C_1(F)(q+1)^2\left(\frac{1}{\lambda(F)} + C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right) > 0.$$

Folglich hat man für solche F eine Abschätzung der Form

$$\begin{aligned}\int_M |S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2\,d\mu_F &\le C_2(n,q,F)\int_M |S_F|^{2q+1}\xi|\bar\nabla\xi||\bar\nabla|S_F||\,d\mu_F \\ &\quad +C_3(n,q,F)\int_M |S_F|^{2q+2}|\bar\nabla\xi|^2\,d\mu_F.\end{aligned}$$

Benutzt man nun noch, daß nach der Youngschen Ungleichung gilt

$$C_2|S_F|^{2q+1}\xi|\bar\nabla\xi||\bar\nabla|S_F|| \le \frac{1}{2}|S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2 + \frac{C_2^2}{2}|S_F|^{2q+2}|\bar\nabla\xi|^2,$$

so erhalten wir das gewünschte Zwischenergebnis

$$\int_M |S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2\,d\mu_F \le C_4(n,q,F)\int_M |S_F|^{2q+2}|\bar\nabla\xi|^2\,d\mu_F. \tag{3.3}$$

Beachte nun, daß sich das zweite Integral auf der rechten Seite von (3.2) mit der Abschätzung

$$2|S_F|^{2q+1}\xi\bar\nabla|S_F|\bar\nabla\xi \le |S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2 + |S_F|^{2q+2}|\bar\nabla\xi|^2$$

auf die beiden anderen Integrale verteilen läßt. Zusammen mit (3.3) ergibt sich also

$$\begin{aligned}\int_M |S_F|^{2q+4}\xi^2\,d\mu_F &\le C_5(n,q,F)\int_M |S_F|^{2q}|\bar\nabla|S_F||^2\xi^2\,d\mu_F \\ &\quad +C_6(n,q,F)\int_M |S_F|^{2q+2}|\bar\nabla\xi|^2\,d\mu_F \\ &\le C_7(n,q,F)\int_M |S_F|^{2q+2}|\bar\nabla\xi|^2\,d\mu_F.\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir nur noch den Exponenten von ξ anpassen. Ersetze dazu ξ durch ζ^{q+2}, wobei $\zeta \in C_c^\infty(M)$ eine beliebige nichtnegative Testfunktion sei. Dann ist

$$\bar\nabla\xi = (q+2)\zeta^{q+1}\bar\nabla\zeta$$

und

$$|\bar\nabla\xi|^2 = (q+2)^2\zeta^{2q+2}|\bar\nabla\zeta|^2$$

und obige Abschätzung wird zu

$$\int_M |S_F|^{2q+4}\zeta^{2q+4}\,d\mu_F \le C_7(n,q,F)(q+2)^2 \int_M |S_F|^{2q+2}\zeta^{2q+2}|\bar\nabla\zeta|^2\,d\mu_F.$$

Nun benötigen wir folgende Interpolationsungleichung:

$$ab \le \gamma a^s + \gamma^{-\frac{1}{s-1}} b^{\frac{s}{s-1}}$$

für alle $a, b \ge 0$, $\gamma > 0$ und $s > 1$, siehe [GT, p. 145]. Setzt man hierin $a = |S_F|^{2q+2}\zeta^{2q+2}$, $b = C_7(q+2)^2|\bar\nabla\zeta|^2$, $\gamma = \frac{1}{2}$ und $s = \frac{q+2}{q+1}$, so ergibt sich

$$C_7(q+2)^2|S_F|^{2q+2}\zeta^{2q+2}|\bar\nabla\zeta|^2 \le \frac{1}{2}|S_F|^{2q+4}\zeta^{2q+4} + C_8(n,q,F)|\bar\nabla\zeta|^{2q+4}$$

und somit

$$\int_M |S_F|^{2q+4}\zeta^{2q+4}\,d\mu_F \le 2C_8(n,q,F)\int_M |\bar\nabla\zeta|^{2q+4}\,d\mu_F.$$

Damit ist Theorem 1.1 vollständig bewiesen. □

3.3 Ein Bernsteinsatz für Hyperflächen

Als Anwendung der Krümmungsabschätzung wollen wir einen Bernsteinsatz für stabile Extremalen parametrischer Funktionale nahe des Flächenfunktionals beweisen. Im folgenden sei $2 \le n \le 5$ vorausgesetzt, damit $n < 4 + \sqrt{8/n}$ ist. Definiere

$$\delta_\star(n) := \sup\left\{\delta(n,p) : 4 < p < 4 + \sqrt{\frac{8}{n}},\ p > n\right\}$$

mit $\delta(n,p)$ aus Theorem 1.1.

Korollar 3.2 *Es sei $2 \le n \le 5$, F ein elliptischer Integrand mit $\|F - A\|_{C^4} < \delta_\star(n)$ und X eine vollständige, stabile Extremale von*

$$\mathcal{F}(X) = \int_M F(N)\,d\mu,$$

die der Wachstumsbedingung

$$\mu(B_R(x_0)) \le KR^n \quad \textit{für alle } R > 0$$

genüge. Dabei sei $x_0 \in M$ ein fester Punkt und $B_R(x_0) := \{x \in M : d(x,x_0) < R\}$ bezeichne den offenen Ball mit Mittelpunkt x_0 und Radius $R > 0$. Dann ist $X(M)$ eine Hyperebene.

Beweis: Nach Definition von $\delta_\star$ gibt es eine Zahl $p \in (4, 4 + \sqrt{8/n})$ mit $p > n$, so daß $\|F - A\|_{C^4} < \delta(n,p)$. Sei nun $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ eine monoton fallende Funktion mit $\Phi(y) = 1$ für $y \leq 0$, $\Phi(y) = 0$ für $y \geq 1$ und $|\Phi'(y)| \leq 2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Für $R > 0$ setze

$$\varphi_R(x) := \Phi\left(\frac{d(x, x_0) - R}{R}\right), \quad x \in M.$$

Dann ist φ_R eine Lipschitzfunktion mit $\varphi_R = 1$ in $B_R(x_0)$, $\varphi = 0$ in $M \setminus B_{2R}(x_0)$ und es gilt

$$|\nabla \varphi_R| \leq \frac{2}{R}$$

μ-fast überall auf M. Indem wir φ_R wie in Lemma A.2 beschrieben durch glatte Funktionen approximieren, erhalten wir aus Theorem 1.1 die Abschätzung

$$\int_M |S|^p \varphi_R^p \, d\mu \leq C(n,p,F) \int_M |\nabla \varphi_R|^p \, d\mu$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |S|^p \, d\mu &\leq C(n,p,F) \int_{B_{2R}(x_0)} |\nabla \varphi_R|^p \, d\mu \\ &\leq C(n,p,F) K R^{n-p}. \end{aligned}$$

Mit $R \to \infty$ konvergiert die rechte Seite gegen 0. Also ist $|S| = 0$ auf M und hieraus folgt leicht, daß $X(M)$ eine Hyperebene ist. $\square$

3.4 Nichtparametrische F-Minimalflächen

In diesem Abschnitt betrachten wir nichtparametrische Flächen

$$X(x) = (x, u(x)), \quad x \in \Omega,$$

mit Höhenfunktion $u \in C^\infty(\Omega)$. Definiere das zu $\mathcal{F}$ gehörige nichtparametrische Funktional $\mathfrak{F}$ durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(u) &:= \mathcal{F}(X) \\ &= \int_\Omega F\left(\frac{-Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) \sqrt{1+|Du|^2} \, dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der Homogenität von F ist dann

$$\mathfrak{F}(u) = \int_\Omega f(Du) \; dx$$

mit

$$f(p) := F(-p, 1), \quad p \in \mathbb{R}^n.$$

Sei nun

$$X_\varepsilon(x) := (x, u_\varepsilon(x))$$

mit

$$u_\varepsilon := u + \varepsilon\varphi, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

eine Variation in e_{n+1}-Richtung. Dann ergibt sich aus der Variationsformel für $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{F}(u_\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} &= \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}(X_\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= -\int_\Omega H_F \varphi \langle e_{n+1}, N\rangle \, d\mu \\
&= -\int_\Omega H_F \varphi \, dx,
\end{aligned}$$

da $\langle e_{n+1}, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ und $d\mu = \sqrt{1+|Du|^2}\, dx$, also

$$\delta\mathfrak{F}(u, \varphi) = -\int_\Omega H_F \varphi \, dx.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung des nichtparametrischen Funktionals lautet also wie zu erwarten $H_F = 0$. Andererseits können wir die erste Variation auch direkt ausrechnen und dies ergibt:

$$\begin{aligned}
\delta\mathfrak{F}(u, \varphi) &= \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial p_i}(Du)\partial_i\varphi \, dx \\
&= -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}(Du)\right)\varphi \, dx.
\end{aligned}$$

Vergleicht man nun die beiden verschiedenen Darstellungen, so ergibt sich mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, daß die F-mittlere Krümmung einer nichtparametrischen Fläche durch den Ausdruck

$$H_F = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}(Du)\right) \tag{3.4}$$

gegeben ist. Im klassischen Fall, also für $f(p) = \sqrt{1+|p|^2}$, ist dies nichts anderes als die bekannte Identität

$$H = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right),$$

weshalb wir die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}(Du)\right) = 0 \tag{3.5}$$

im folgenden auch als F-*Minimalflächengleichung* bezeichnen wollen.

Natürlich läßt sich (3.4) auch direkt aus der Definition von $H_F = \mathrm{tr}(S_F)$ herleiten. Die Rechnung ist jedoch etwas mühsamer.

In Hinblick auf einen Bernsteinsatz benötigen wir nun Strukturbedingungen der F-Minimalflächengleichung.

Lemma 3.3 *Es gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(p)\xi_i\xi_j \geq \lambda(F)\frac{|\xi|^2}{(1+|p|^2)^{3/2}} \tag{3.6}$$

für alle p, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Da F_{zz} homogen vom Grad -1 ist, gilt für alle $p \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(p) = \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}(-p,1) = \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j}(z)$$

mit

$$z = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+|p|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\right).$$

Sei nun $\xi \in \mathbb{R}^n$. Dann ergibt sich mit $V := (\xi, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(p)\xi_i\xi_j &= \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\frac{\partial^2 F}{\partial z^\alpha \partial z^\beta}(z)V^\alpha V^\beta \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\langle F_{zz}(z)V^\top, V^\top\rangle \\
&\geq \frac{\lambda(F)}{\sqrt{1+|p|^2}}|V^\top|^2 \\
&= \frac{\lambda(F)}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(|V|^2 - \langle V, z\rangle^2\right) \\
&= \frac{\lambda(F)}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(|\xi|^2 - \frac{\langle \xi, p\rangle^2}{1+|p|^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

und mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt die Behauptung. □

Als unmittelbare Folgerung notieren wir die folgende Abschätzung, die im klassischen Fall, also für $f(p) = \sqrt{1+|p|^2}$, scharf ist:

Lemma 3.4 *Für alle $p \in \mathbb{R}^n$ ist*

$$p\left(\frac{\partial f}{\partial p}(p) - \frac{\partial f}{\partial p}(0)\right) \geq \lambda(F)\frac{|p|^2}{\sqrt{1+|p|^2}}. \tag{3.8}$$

Beweis: Durch Integration von (3.6) erhält man

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{\partial f}{\partial p}(p) - \frac{\partial f}{\partial p}(0)\right) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial p}(tp)p\,dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(tp)p_i p_j\,dt \\
&\geq \lambda(F)\int_0^1 \frac{|p|^2}{(1+|tp|^2)^{3/2}}\,dt \\
&= \lambda(F)\frac{|p|^2}{\sqrt{1+|p|^2}},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$\int \frac{ds}{(1+s^2)^{3/2}} = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$$

benutzt haben. □

Lemma 3.5 *Es gilt*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial p}(p)\right| \leq \sup_{z\in S^n}\left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial F}{\partial z^i}(z)\right|^2\right)^{1/2} =: C_1(F) \tag{3.9}$$

für alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Da F_z homogen vom Grad 0 ist, gilt

$$\frac{\partial f}{\partial p_i}(p) = -\frac{\partial F}{\partial z_i}(-p,1) = -\frac{\partial F}{\partial z_i}(z),$$

wobei wieder

$$z = \left(\frac{-p}{\sqrt{1+|p|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\right)$$

ist. Hieraus folgt die Behauptung. □

Damit sind wir nun in der Lage das Flächenwachstum nichtparametrischer F-Minimalflächen zu kontrollieren.

Proposition 3.6 *Es sei $X(x) = (x, u(x))$, $x \in \Omega$, eine nichtparametrische F-Minimalfläche und $B_{3R}(x_0) \subset \Omega$. Setze*

$$\mathcal{M}_r(x_0) := \{x \in \Omega : |X(x) - X(x_0)| < r\}.$$

Dann hat man die Abschätzung

$$\mu(\mathcal{M}_r(x_0)) \leq C(n, F) r^n$$

für alle $r \in [0, R]$.

Beweis: Die Abschätzung gilt bereits unter schwächeren Strukturbedingungen an die Gleichung, siehe [Si5, pp. 349]. Der Vollständigkeit halber wollen wir dennoch eine unserer Situation angepaßte Variante des Arguments vorführen.

Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß $x_0 = 0$ und $u(x_0) = 0$ ist. Da die F-Minimalflächengleichung Divergenzform hat und den Strukturbedingungen (3.8) und (3.9) genügt, können wir den üblichen Abschneidetrick (siehe [GT, p. 404]) anwenden, d.h. wir testen die Gleichung wie im klassischen Minimalflächenfall mit $\varphi = \eta u_r$, wobei $\eta \in C_c^\infty(\Omega)$ eine nichtnegative Funktion mit $\eta = 1$ in $B_r(0)$, $\eta = 0$ in $\Omega \setminus B_{2r}(0)$ und $|D\eta| \leq \frac{2}{r}$ ist und u_r definiert wird durch

$$u_r := \begin{cases} r & , \text{ wo } u \geq r \\ u & , \text{ wo } -r < u < r \\ -r & , \text{ wo } u \leq -r. \end{cases}$$

Dann ist

$$D\varphi = D\eta u_r + \eta Du \chi_{\{|u|<r\}}$$

fast überall und folglich gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{3R}(0)} \left(\frac{\partial f}{\partial p}(Du) - \frac{\partial f}{\partial p}(0) \right) D\varphi \, dx \\ &= \int_{\{|u|<r\}} \eta Du \left(\frac{\partial f}{\partial p}(Du) - \frac{\partial f}{\partial p}(0) \right) dx \\ &\quad + \int_{B_{3R}(0)} D\eta u_r \left(\frac{\partial f}{\partial p}(Du) - \frac{\partial f}{\partial p}(0) \right) dx. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zusammen mit (3.8) und (3.9):

$$\lambda(F) \int_{B_r \cap \{|u|<r\}} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \, dx$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_{B_r\cap\{|u|<r\}} Du\left(\frac{\partial f}{\partial p}(Du)-\frac{\partial f}{\partial p}(0)\right)dx\\
&\le \int_{\{|u|<r\}} \eta Du\left(\frac{\partial f}{\partial p}(Du)-\frac{\partial f}{\partial p}(0)\right)dx\\
&= -\int_{B_{3R}(0)} D\eta u_r\left(\frac{\partial f}{\partial p}(Du)-\frac{\partial f}{\partial p}(0)\right)dx\\
&\le \frac{2}{r}r2C_1(F)|B_{2r}|,
\end{aligned}
$$

also

$$\int_{B_r\cap\{|u|<r\}} \frac{|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}}\,dx \le \frac{C_1(F)}{\lambda(F)}2^{n+2}|B_1|r^n.$$

Mit der elementaren Ungleichung $\sqrt{1+|Du|^2}\le 1+\frac{|Du|^2}{\sqrt{1+|Du|^2}}$ folgt nun, daß

$$\int_{B_r\cap\{|u|<r\}} \sqrt{1+|Du|^2}\,dx \le C(n,F)r^n$$

und hieraus ergibt sich die Behauptung, da $\mathcal{M}_r(x_0)\subset B_r\cap\{|u|<r\}$. $\square$

Sei nun $u\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine ganze Lösung der F-Minimalflächengleichung und $X(x)=(x,u(x))$, $x\in\mathbb{R}^n$, der zugehörige F-minimale Graph. Dann haben wir für alle $R>0$ die Abschätzung

$$\mu(\mathcal{M}_R(x_0))\le C(n,F)R^n. \tag{3.10}$$

Ferner beobachten wir, daß X stabil ist. Da die zweite Variation des parametrischen Funktionals $\mathcal{F}$ nämlich nur vom Normalanteil der Variation abhängt, siehe [CM, Corollary 4.2], besteht für beliebiges $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und mit der Abkürzung $\psi:=\varphi\sqrt{1+|Du|^2}$ die Beziehung

$$
\begin{aligned}
\delta^2\mathcal{F}(X,\varphi N) &= \delta^2\mathcal{F}(X,\psi e_{n+1})\\
&= \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\mathcal{F}(X+\varepsilon\psi e_{n+1})\Big|_{\varepsilon=0}\\
&= \frac{d^2}{d\varepsilon^2}\mathfrak{F}(u+\varepsilon\psi)\Big|_{\varepsilon=0}\\
&= \delta^2\mathfrak{F}(u,\psi)
\end{aligned}
$$

und nach (3.6) gilt

$$\delta^2\mathfrak{F}(u,\psi)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2 f}{\partial p_i\partial p_j}(Du)\partial_i\psi\partial_j\psi\,dx\ge 0.$$

Mit Hilfe der integralen Krümmungsabschätzung erhalten wir daher folgenden Bernsteinsatz:

Korollar 3.7 *Es sei $2 \leq n \leq 5$ und F ein elliptischer Integrand mit $\|F - A\|_{C^4} < \delta_\star(n)$. Ist dann $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine ganze Lösung der F-Minimalflächengleichung, so ist u affin-linear.*

Beweis: Sei wieder $p \in (4, 4 + \sqrt{8/n})$ mit $p > n$ derart, daß $\|F - A\|_{C^4} < \delta(n,p)$. Definiere die Abschneidefunktion φ_R durch

$$\varphi_R(x) := \Phi\left(\frac{|X(x) - X(x_0)| - R}{R}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $\varphi_R = 1$ in $\mathcal{M}_R(x_0)$, $\varphi = 0$ in $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}_{2R}(x_0)$ und es gilt $|\nabla \varphi_R| \leq \frac{2}{R}$ μ-fast überall in $\mathbb{R}^n$. Indem man in der integralen Krümmungsabschätzung mit φ_R testet und beachtet, daß wir das Wachstum von $\mathcal{M}_R(x_0)$ gemäß (3.10) kontrollieren können, erhält man wie im Beweis des vorherigen Bernsteinsatzes, daß

$$\int_{\mathcal{M}_R(x_0)} |S|^p \, d\mu \leq C(n,p,F) R^{n-p} \to 0$$

für $R \to \infty$. Also ist $|S| = 0$ auf $\mathbb{R}^n$ und damit N, also auch Du konstant. $\square$

3.5 Bemerkungen und Ausblicke

Eine geometrische Bedingung zur Kontrolle des Flächenwachstums

Für zweidimensionale Flächen hat Sauvigny [S, Lemma 6] mit Hilfe von Gauß-Bonnet eine Abschätzung bewiesen, um das Flächenwachstum geodätischer Kreisscheiben zu kontrollieren:

Es sei $X : M^2 \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $B_R(x_0) \subset M$ eine normale geodätische Kreisscheibe und für die Gaußkrümmung von X gelte

$$K \leq K_0 \quad \textit{in } B_R(x_0)$$

mit einer Konstanten $K_0 \in [0, \infty)$. Dann gilt

$$\mu(B_R(x_0)) \leq \left(\pi + \frac{1}{2}\int_{B_R(x_0)} (K_0 - K) \, d\mu\right) R^2.$$

Wie Sauvigny können wir hiermit einen Bernsteinsatz formulieren:

Korollar 3.8 *Es sei F ein elliptischer Integrand mit $\|F - A\|_{C^4} < \delta_\star(2)$. Ist $X : M^2 \to \mathbb{R}^3$ eine vollständige, einfach zusammenhängende, stabile F-Minimalfläche mit endlicher Totalkrümmung, also*

$$\int_M |K| \, d\mu < \infty,$$

so ist $X(M)$ eine Ebene.

Beweis: Man sieht leicht, daß zweidimensionale F-Minimalflächen nichtpositive Gaußkrümmung haben: Wegen $\mathrm{tr}(S_F) = 0$ ist nämlich $\det(A_F)\det(S) = \det(S_F) \leq 0$ und somit $K = \det(S) \leq 0$. Da M als einfach zusammenhängend angenommen wurde, folgt aus dem Satz von Hadamard, siehe zum Beispiel [doC, Chapter 7], daß die Exponentialabbildung

$$exp_{x_0} : T_{x_0}M \to M$$

ein globaler Diffeomorphismus ist. Wir können also Sauvignys Lemma für alle $R > 0$ anwenden und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu(B_R(x_0)) &\leq \left(\pi + \frac{1}{2}\int_{B_R(x_0)} (-K)\, d\mu\right) R^2 \\ &\leq \left(\pi + \frac{1}{2}\int_M |K|\, d\mu\right) R^2. \end{aligned}$$

Aus Korollar 3.2 folgt nun die Behauptung. $\square$

Eine interessante Frage ist, ob sich in höheren Dimensionen ähnliche geometrische Bedingungen angeben lassen, die eine Kontrolle des Flächenwachstums und damit ein Bernsteinresultat garantieren.

Zweidimensionale Techniken

Speziell für zweidimensionale Flächen lassen sich genauere Aussagen treffen, wenn man von vorneherein mit typisch zweidimensionalen Techniken arbeitet. So kann man nach einem Ergebnis von Räwer [R, Satz 5.4] bei endlicher Totalkrümmung der Fläche auf die Kleinheitsbedingung an $\|F - A\|_{C^4}$ verzichten und im Allgemeinen hat man immerhin das folgende Resultat, vergleiche [R, Satz 5.5]:

Ist $X : M^2 \to \mathbb{R}^3$ eine vollständige, stabile F-Minimalfläche zu einem elliptischen Integranden mit

$$\frac{\lambda(F)}{\Lambda(F)} \geq \frac{1}{2},$$

so ist $X(M)$ eine Ebene.

Zum Beweis verwendet Räwer in beiden Fällen die Methode von Fischer-Colbrie und Schoen [FCS], indem er die Stabilitätsungleichung als Abschätzung für den ersten Eigenwert eines gewissen elliptischen Operators auf der Fläche interpretiert. Eine Verallgemeinerung des Arguments auf Flächen konstanter F-mittlerer Krümmung findet sich bei Clarenz [C, Kapitel 6].

Gleichungen vom Minimalflächentyp

Schreibt man die F-Minimalflächengleichung in der Form

$$a^{ij}(Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

mit

$$a^{ij}(p) = \sqrt{1+|p|^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}(p), \quad p \in \mathbb{R}^n,$$

so sieht man, daß die Koeffizienten der Strukturbedingung

$$\lambda(F)\left(|\xi|^2 - \frac{\langle \xi, p\rangle^2}{1+|p|^2}\right) \leq a^{ij}(p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(F)\left(|\xi|^2 - \frac{\langle \xi, p\rangle^2}{1+|p|^2}\right)$$

für alle p, $\xi \in \mathbb{R}^n$ genügen. Die F-Minimalflächengleichung ist also eine Gleichung vom *Minimalflächentyp*. Allgemein führt die nichtparametrische Euler-Lagrange-Gleichung des parametrischen Funktionals

$$\mathcal{F}(X) = \int_M F(X, N)\, d\mu$$

auf eine Gleichung vom *mittleren Krümmungstyp*. Diese Gleichungen sind für $n = 2$ ausführlich von Simon [Si1, Si2] untersucht worden (siehe auch [GT, Chapter 16]). Eine wesentliche Beobachtung ist, daß die Gaußabbildung des Graphen einer Lösung stets eine quasikonforme Abbildung ist und man daher eine allgemeine Hölderabschätzung für quasikonforme Abbildungen zwischen Flächen im $\mathbb{R}^3$ heranziehen kann. Insbesondere ergibt sich auf diese Weise, daß für die zweidimensionale F-Minimalflächengleichung ein Bernsteinsatz ohne Kleinheitsbedingung an $\|F - A\|_{C^4}$ gilt, [Si1, Theorem 4]. Für eine quantitative Version dieses Ergebnisses siehe auch Jenkins [Je, Theorem 3].

Eine weitere eng mit der F-Minimalflächengleichung verwandte Klasse von Gleichungen bilden die Gleichungen vom *Variationstyp*. Auch hier hat man für $n = 2$ immer einen Bernsteinsatz, [Si5, Theorem 3].

Kapitel 4

Punktweise Krümmungsabschätzungen

4.1 Resultat

Wir kommen jetzt zu punktweisen Krümmungsabschätzungen. Um dabei simultan mit geodätischen als auch euklidischen Bällen arbeiten zu können, führen wir ähnlich wie in [SSY] die folgende Sprechweise ein: Ist

$$X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$$

eine reguläre Hyperfläche und

$$r : M \to \mathbb{R}$$

eine Lipschitzfunktion mit $r(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in M$ und $|\nabla r(x)| \leq 1$ für μ-fast alle $x \in M$, so bezeichnen wir r als *abstrakte Distanzfunktion* und definieren für $R > 0$

$$\mathcal{B}_R(x_0) := \{x \in M : r(x) < R\}.$$

Speziell für $r(x) = d(x, x_0)$ erhalten wir so aus dem folgenden Theorem Krümmungsabschätzungen auf den üblichen geodätischen Bällen $B_R(x_0)$ und für $r(x) = |X(x) - X(x_0)|$ Abschätzungen auf den induzierten euklidischen Bällen. Letzteres ist speziell für Graphen interessant.

Wir erinnern noch einmal daran, daß

$$\delta_\star(n) := \sup \left\{ \delta(n,p) : 4 < p < 4 + \sqrt{\frac{8}{n}}, p > n \right\}$$

für $2 \leq n \leq 5$.

Theorem 4.1 *Es sei $2 \leq n \leq 5$, F ein elliptischer Integrand mit $\|F - A\|_{C^4} < \delta_\star(n)$ und X eine stabile Extremale von*

$$\mathcal{F}(X) = \int_M F(N)\, d\mu.$$

Ist dann $\mathcal{B}_R(x_0) \subset\subset M$ mit $\mu(\mathcal{B}_R(x_0)) \leq KR^n$, so gilt

$$\sup_{\mathcal{B}_{\theta R}(x_0)} |S|^2 \leq \frac{C(n, F, K, \theta)}{R^2}$$

für alle $\theta \in (0, 1)$.

Bemerkung 4.2 Im Spezialfall, daß X vollständig ist und der Wachstumsbedingung $\mu(B_R(x_0)) \leq KR^n$ für alle $R > 0$ genügt, erhält man mit $r(x) = d(x, x_0)$ die Abschätzung

$$\sup_{B_{\frac{R}{2}}(x_0)} |S|^2 \leq \frac{C(n, F, K)}{R^2}.$$

Lassen wir hierin $R \to \infty$, so folgt, daß $X(M)$ eine Hyperebene ist. Wir erhalten also wieder Korollar 3.2.

Ist dagegen $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung der F-Minimalflächengleichung, so können wir die Krümmungsabschätzung mit $r(x) = |X(x) - X(x_0)|$ auf den Graphen anwenden. Zusammen mit Proposition 3.6 ergibt dies:

$$\sup_{\mathcal{M}_{\frac{R}{2}}(x_0)} |S|^2 \leq \frac{C(n, F)}{R^2}$$

Mit $R \to \infty$ folgt hieraus, daß u affin-linear ist. Also haben wir auch für Korollar 3.7 einen alternativen Beweis.

In den nächsten beiden Abschnitten werden wir die Krümmungsabschätzung beweisen. Dazu leiten wir zunächst mit Hilfe der Sobolev Ungleichung, der verallgemeinerten Simons Ungleichung, sowie der integralen Krümmungsabschätzung eine L_p-Abschätzung für $|S_F|_F$ her, wobei wir wieder konsequent mit den gewichteten Größen arbeiten werden. Die sup-Abschätzung ergibt sich dann mit einer Moser-Iteration.

Ein einfaches Skalierungsargument zeigt, daß wir uns hierbei auf den Fall $R = 1$ beschränken können: Genügt nämlich X den Voraussetzungen von Theorem 4.1, so betrachte

$$\tilde{X} : M \to \mathbb{R}^{n+1},\ \tilde{X} := \frac{1}{R} X.$$

Dann ist $\tilde{X}$ ebenfalls eine stabile Extremale von $\mathcal{F}$, da für beliebiges $\tilde{\varphi} \in C_c^\infty(M)$ gilt:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{F}(\tilde{X},\tilde{\varphi}) &= \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{F}(\tilde{X}+\varepsilon\tilde{\varphi}\tilde{N})\Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{R^n}\delta\mathcal{F}(X,R\tilde{\varphi}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\delta^2\mathcal{F}(\tilde{X},\tilde{\varphi}) = \frac{1}{R^n}\delta^2\mathcal{F}(X,R\tilde{\varphi}) \geq 0.$$

Bezeichnet nun r die abstrakte Distanzfunktion von X, so definiert

$$\tilde{r} : M \to \mathbb{R},\ \tilde{r} := \frac{1}{R}r$$

eine abstrakte Distanzfunktion für $\tilde{X}$ und für die zugehörigen Bälle gilt

$$\tilde{\mathcal{B}}_\theta(x_0) := \{x \in M : \tilde{r}(x) < \theta\} = \mathcal{B}_{\theta R}(x_0)$$

für alle $\theta > 0$. Insbesondere ist $\tilde{\mathcal{B}}_1(x_0) \subset\subset M$ und da das Maß mit $\frac{1}{R^n}$ skaliert gilt:

$$\tilde{\mu}(\tilde{\mathcal{B}}_1(x_0)) = \frac{1}{R^n}\mu(\mathcal{B}_R(x_0)) \leq K.$$

Beachte ferner, daß die Hauptkrümmungen mit R skalieren, so daß

$$|\tilde{S}|^2_{\tilde{g}} = R^2|S|^2_g.$$

Haben wir nun die Krümmungsabschätzung für $R = 1$ bewiesen, so gilt

$$\sup_{\tilde{\mathcal{B}}_\theta(x_0)} |\tilde{S}|^2_{\tilde{g}} \leq C(n,F,K,\theta)$$

für alle $\theta \in (0,1)$ und hieraus folgt

$$\sup_{\mathcal{B}_{\theta R}(x_0)} |S|^2_g = \sup_{\tilde{\mathcal{B}}_\theta(x_0)} \frac{|\tilde{S}|^2_{\tilde{g}}}{R^2} \leq \frac{C(n,F,K,\theta)}{R^2}$$

mit derselben Konstanten C. Also gilt die Krümmungsabschätzung auch für beliebiges $R > 0$.

4.2 L_p-Abschätzung

Hier und im nächsten Abschnitt wollen wir annehmen, daß F ein elliptischer Integrand mit $\|F - A\|_{C^4} < \delta_\star(n)$ ist, X eine stabile F-Minimalfläche und $\mathcal{B}_1(x_0) \subset\subset M$ mit $\mu(\mathcal{B}_1(x_0)) \leq K$. Wir zeigen:

Proposition 4.3 *Es sei $f := |S_F|_F^p$, $p > 1$ und es sei $\eta \in C_c^\infty(M)$ eine nichtnegative Testfunktion mit supp$(\eta) \subset \mathcal{B}_\tau(x_0)$, $0 < \tau < 1$. Dann gilt*

$$\left(\int_M (f\eta)^{2q}\, d\mu_F\right)^{1/q} \leq Cp^\alpha \int_M f^2\eta^2\, d\mu_F + C\int_M f^2|\bar{\nabla}\eta|_F^2\, d\mu_F, \quad (4.1)$$

wobei

$$q = \begin{cases} \frac{n}{n-2} & , \text{ für } n \geq 3 \\ 2 & , \text{ für } n = 2. \end{cases}$$

Dabei ist $C = C(n, F, K, \tau)$ und es gilt $\alpha = \alpha(n, F) > 1$.

Der Rest dieses Abschnittes ist dem *Beweis* gewidmet: Ausgangspunkt ist folgende unserer Situation angepaßte Version der Sobolev Ungleichung:

Lemma 4.4 *Es sei F ein elliptischer Integrand, $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine reguläre Hyperfläche und $h \in C_c^1(M)$. Ist $1 \leq p < n$, so gilt*

$$\left(\int_M |h|^{\frac{np}{n-p}}\, d\mu_F\right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C(n,p,F)\left(\int_M (|h|^p|S_F|_F^p + |\bar{\nabla}h|_F^p)\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis: Im klassischen Kontext haben wir die Sobolev Ungleichung von Michael und Simon:

$$\left(\int_M |h|^{\frac{np}{n-p}}\, d\mu\right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C(n,p)\left(\int_M (|h|^p|H|^p + |\nabla h|^p)\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.2)$$

Für $p = 1$ findet sich ein Beweis in [MS] bzw. [Si4]. Der allgemeine Fall $1 < p < n$ läßt sich darauf wie im euklidischen Fall zurückführen: Wende einfach die Sobolev Ungleichung anstelle von h auf eine geeignete Regularisierung von $|h|^\gamma$ mit $\gamma := \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$ an und benutze die Höldersche Ungleichung. Dann ergibt sich:

$$\left(\int_M |h|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, d\mu\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n)\int_M (|h|^\gamma|H| + \gamma|h|^{\gamma-1}|\nabla h|)\, d\mu$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C(n)\left(\int_M |h|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_M |h|^p|H|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad +C(n)\gamma\left(\int_M |h|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_M |\nabla h|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Da $\frac{\gamma n}{n-1}=\frac{np}{n-p}$ und $\frac{(\gamma-1)p}{p-1}=\frac{np}{n-p}$ folgt

$$
\left(\int_M |h|^{\frac{np}{n-p}}\,d\mu\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n,p)\left(\int_M |h|^{\frac{np}{n-p}}\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_M (|h|^p|H|^p+|\nabla h|^p)\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Hieraus ergibt sich (4.2).

Die gewichtete Sobolev Ungleichung folgt nun aus der elementaren Ungleichung

$$
|H|^2 \leq n|S|^2 \leq nC(F)|S_F|_F^2,
$$

sowie den Äquivalenzen zwischen $|\nabla h|$ und $|\bar{\nabla} h|_F$ bzw. $d\mu$ und $d\mu_F$. □

Setze nun in der Sobolev Ungleichung $h := f\eta$. Da f nach der Kettenregel für Sobolevfunktionen in $W^{1,\infty}_{loc}(M)$ liegt und sich nach Lemma A.1 zum Beispiel durch $f_\sigma := |S_F|^p_\sigma$, $\sigma > 0$, approximieren läßt, macht dies keine Schwierigkeiten. Für $n \geq 3$ ergibt sich

$$
\left(\int_M (f\eta)^{\frac{2n}{n-2}}\,d\mu_F\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C(n,F)\int_M (|\bar{\nabla} f|^2\eta^2+f^2|\bar{\nabla}\eta|^2+f^2\eta^2|S_F|^2)\,d\mu_F.
$$

Für $n=2$ dagegen haben wir zunächst für alle $r\in(1,2)$

$$
\left(\int_M (f\eta)^{\frac{2r}{2-r}}\,d\mu_F\right)^{\frac{2-r}{2r}} \leq C(n,r,F)\left(\int_M (|\bar{\nabla}(f\eta)|^r+f^r\eta^r|S_F|^r)\,d\mu_F\right)^{\frac{1}{r}}.
$$

Da $\operatorname{supp}(\eta)\subset\mathcal{B}_1(x_0)$ und $\mu_F(\mathcal{B}_1(x_0))\leq C(F)K$ erhalten wir mit der Hölderschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\int_M (|\bar{\nabla}(f\eta)|^r+f^r\eta^r|S_F|^r)\,d\mu_F &\leq C(r,F,K)\left(\int_M |\bar{\nabla}(f\eta)|^2\,d\mu_F\right)^{\frac{r}{2}}\\
&\quad +C(r,F,K)\left(\int_M f^2\eta^2|S_F|^2\,d\mu_F\right)^{\frac{r}{2}}
\end{aligned}
$$

und somit

$$
\left(\int_M (f\eta)^{\frac{2r}{2-r}}\,d\mu_F\right)^{\frac{2-r}{r}} \leq C(n,r,F,K)\int_M (|\bar{\nabla} f|^2\eta^2+f^2|\bar{\nabla}\eta|^2+f^2\eta^2|S_F|^2)\,d\mu_F.
$$

Für spätere Zwecke erweist es sich als zweckmäßig $r = \frac{4}{3}$ zu wählen, damit $\frac{r}{2-r} = 2$ ist. Wir können dann folgendes Ergebnis festhalten:

$$\left(\int_M (f\eta)^{2q}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_1(n,F,K) \int_M (|\bar{\nabla} f|^2\eta^2 + f^2|\bar{\nabla}\eta|^2 + f^2\eta^2|S_F|^2)\, d\mu_F \tag{4.3}$$

mit

$$q = \begin{cases} \frac{n}{n-2} & , \quad \text{für } n \geq 3 \\ 2 & , \quad \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Wir verarbeiten nun das erste Integral mit der verallgemeinerten Simons Ungleichung:

Lemma 4.5 *Es gilt*

$$\int_M |\bar{\nabla} f|_F^2 \eta^2\, d\mu_F \leq C_2(n,F)p \int_M f^2\eta^2|S_F|_F^2\, d\mu_F + 4\int_M f^2|\bar{\nabla}\eta|_F^2\, d\mu_F. \tag{4.4}$$

Beweis: Der Einfachheit halber arbeiten wir zunächst mit der regularisierten Funktion $f_\sigma := |S_F|_\sigma^p$ mit $\sigma > 0$. Dann berechnet man

$$\bar{\nabla}_j f_\sigma = p|S_F|_\sigma^{p-1}\bar{\nabla}_j|S_F|_\sigma,$$

$$\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j f_\sigma = p(p-1)|S_F|_\sigma^{p-2}\bar{\nabla}_i|S_F|_\sigma\bar{\nabla}_j|S_F|_\sigma + p|S_F|_\sigma^{p-1}\bar{\nabla}_i\bar{\nabla}_j|S_F|_\sigma$$

und damit

$$\begin{aligned} \Delta_F f_\sigma &= \bar{\nabla}^i\bar{\nabla}_i f_\sigma \\ &= p(p-1)|S_F|_\sigma^{p-2}|\bar{\nabla}|S_F|_\sigma|^2 + p|S_F|_\sigma^{p-1}\Delta_F|S_F|_\sigma. \end{aligned}$$

Da $\Delta_F|S_F|_\sigma^2 = \Delta_F|S_F|^2$, folgt aus der verallgemeinerten Simons Ungleichung, daß

$$\begin{aligned} |S_F|_\sigma\Delta_F|S_F|_\sigma + |\bar{\nabla}|S_F|_\sigma|^2 &= \frac{1}{2}\Delta_F|S_F|_\sigma^2 \\ &\geq \left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)|\bar{\nabla}|S_F||^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{\lambda(F)} + C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)|S_F|^4 \end{aligned}$$

für alle $\eta \in (0,1]$ und $\theta > 0$. Mit $|\bar{\nabla}|S_F|_\sigma| \leq |\bar{\nabla}|S_F||$ und $|S_F|_\sigma \geq |S_F|$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned}|S_F|_\sigma \Delta_F |S_F|_\sigma \quad &\geq \quad \left(\left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)-1\right)|\bar{\nabla}|S_F|_\sigma|^2 \\ &\quad -\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)|S_F|^2|S_F|_\sigma^2.\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\begin{aligned}\Delta_F f_\sigma \quad &\geq \quad p(p-1)|S_F|_\sigma^{p-2}|\bar{\nabla}|S_F|_\sigma|^2 \\ &\quad +p\left(\left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)-1\right)|S_F|_\sigma^{p-2}|\bar{\nabla}|S_F|_\sigma|^2 \\ &\quad -p\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)|S_F|^2 f_\sigma.\end{aligned}$$

Wähle nun $\eta(n)$ und $\theta(n)$ so klein, daß

$$\left(\frac{1-\eta}{1+\theta}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)-1 \geq 0.$$

Dann folgt

$$\Delta_F f_\sigma \geq -p\left(\frac{1}{\lambda(F)}+C(\eta,\theta)\varepsilon(F)\right)|S_F|^2 f_\sigma,$$

also

$$\Delta_F f_\sigma \geq -C_3(n,F)p|S_F|^2 f_\sigma.$$

Multipliziert man dies nun mit $f_\sigma \eta^2$ und integriert über M, so erhält man

$$-\int_M \Delta_F f_\sigma f_\sigma \eta^2 \, d\mu_F \leq C_3 p \int_M f_\sigma^2 \eta^2 |S_F|^2 \, d\mu_F$$

und mit partieller Integration folgt:

$$\int_M |\bar{\nabla} f_\sigma|^2 \eta^2 \, d\mu_F + 2\int_M f_\sigma \eta \bar{\nabla} f_\sigma \bar{\nabla}\eta \, d\mu_F \leq C_3 p \int_M f_\sigma^2 \eta^2 |S_F|^2 \, d\mu_F.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_M |\bar{\nabla} f_\sigma|^2 \eta^2 \, d\mu_F \quad &\leq \quad C_3 p \int_M f_\sigma^2 \eta^2 |S_F|^2 \, d\mu_F \\ &\quad +2\int_M f_\sigma \eta |\bar{\nabla} f_\sigma||\bar{\nabla}\eta| \, d\mu_F.\end{aligned}$$

Benutzt man nun noch, daß $2f_\sigma\eta|\bar{\nabla}f_\sigma||\bar{\nabla}\eta| \leq \frac{1}{2}|\bar{\nabla}f_\sigma|^2\eta^2+2f_\sigma^2|\bar{\nabla}\eta|^2$, so ergibt sich

$$\int_M |\bar{\nabla}f_\sigma|^2\eta^2\, d\mu_F \leq 2C_3 p\int_M f_\sigma^2\eta^2|S_F|^2\, d\mu_F + 4\int_M f_\sigma^2|\bar{\nabla}\eta|^2\, d\mu_F.$$

Läßt man nun $\sigma \to 0$, so folgt die Behauptung. $\square$

Damit haben wir folgendes Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned}\left(\int_M (f\eta)^{2q}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}} \quad &\leq \quad C_4(n,F,K)p\int_M f^2\eta^2|S_F|^2\, d\mu_F \\ &\quad +C_5(n,F,K)\int_M f^2|\bar{\nabla}\eta|^2\, d\mu_F. \qquad (4.5)\end{aligned}$$

Das erste Integral wird nun mit Hilfe der integralen Krümmungsabschätzung verarbeitet:

Lemma 4.6 *Es gilt*

$$\int_M f^2\eta^2|S_F|_F^2\, d\mu_F \leq C_6\gamma\left(\int_M (f\eta)^{2q} d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}} + \gamma^{-\frac{1}{s-1}}\int_M f^2\eta^2\, d\mu_F \qquad (4.6)$$

für alle $\gamma > 0$. *Dabei ist* $C_6 = C_6(n,F,K,\tau)$ *und* $s = s(n,F) > 1$.

Beweis: Wir benötigen wieder die Interpolationsungleichung

$$ab \leq \gamma a^s + \gamma^{-\frac{1}{s-1}} b^{\frac{s}{s-1}}$$

für alle $a,b \geq 0$, $\gamma > 0$ und $s > 1$, siehe [GT, p. 145]. Setzt man darin $a = |S_F|^2$ und $b = 1$, so ergibt sich

$$\int_M f^2\eta^2|S_F|^2\, d\mu_F \leq \gamma\int_M f^2\eta^2|S_F|^{2s}\, d\mu_F + \gamma^{-\frac{1}{s-1}}\int_M f^2\eta^2\, d\mu_F$$

für beliebiges $\gamma > 0$ und $s > 1$. Wende nun die Höldersche Ungleichung mit $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ an und beachte, daß $\mathrm{supp}(\eta) \subset \mathcal{B}_\tau(x_0)$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_M f^2\eta^2|S_F|^2\, d\mu_F \quad &\leq \quad \gamma\left(\int_M (f\eta)^{2q}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathcal{B}_\tau(x_0)} |S_F|^{2sq'}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\quad +\gamma^{-\frac{1}{s-1}}\int_M f^2\eta^2\, d\mu_F.\end{aligned}$$

Wir legen jetzt s durch die Bedingungen fest, daß

$$2sq' \in \left(4, 4 + \sqrt{\frac{8}{n}}\right) \tag{4.7}$$

und

$$\|F - A\|_{C^4} < \delta(n, 2sq'). \tag{4.8}$$

Beachte hierzu: Falls $n \geq 3$, so ist $q' = \frac{n}{2}$ und damit $2sq' = ns$. Nach Definition von $\delta_\star(n)$ gibt es ein nur von F abhängiges $t \in (4, 4 + \sqrt{8/n})$ mit $t > n$, so daß $\|F - A\|_{C^4} < \delta(n, t)$. Wählen wir also $s := \frac{t}{n}$, so sind die Bedingungen erfüllt. Ist dagegen $n = 2$, so haben wir $q' = 2$ und damit $2sq' = 4s$. Nach Definition von $\delta_\star(2)$ gibt es diesmal ein $t(F) \in (4, 6)$ mit $\|F - A\|_{C^4} < \delta(2, t)$ und mit $s = \frac{t}{4}$ sind die Bedingungen auch in diesem Fall erfüllt. Also gibt es in jedem Fall eine derartige Konstante $s = s(n, F) > 1$.

Definiere nun die Abschneidefunktion φ durch

$$\varphi(x) := \Phi\left(\frac{r(x) - \tau}{1 - \tau}\right), \quad x \in M,$$

wobei wieder $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ eine monoton fallende Funktion sei mit $\Phi(y) = 1$ für $y \leq 0$, $\Phi(y) = 0$ für $y \geq 1$ und $|\Phi'(y)| \leq 2$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Dann ist $\varphi = 1$ in $\mathcal{B}_\tau(x_0)$, $\varphi = 0$ in $M \setminus \mathcal{B}_1(x_0)$ und es gilt

$$\begin{aligned} |\bar{\nabla}\varphi|_F &\leq C(F)|\nabla\varphi| \\ &\leq \frac{2C(F)}{1 - \tau} \end{aligned}$$

μ_F-fast überall. Beachte außerdem, daß φ kompakten Träger hat, da wir $\mathcal{B}_1(x_0) \subset\subset M$ angenommen haben. Also können wir φ in der integralen Krümmungsabschätzung einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathcal{B}_\tau(x_0)} |S_F|^{2sq'}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q'}} &\leq \left(\int_M |S_F|^{2sq'} \varphi^{2sq'}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \left(C(n, F, 2sq') \int_{\mathcal{B}_1(x_0)} |\bar{\nabla}\varphi|^{2sq'}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq C(n, F, 2sq')^{\frac{1}{q'}} (C(F)K)^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{2C(F)}{1 - \tau}\right)^{2s}, \end{aligned}$$

also

$$\left(\int_{\mathcal{B}_\tau(x_0)} |S_F|^{2sq'}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q'}} \leq C_6(n, F, K, \tau).$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Es folgt

$$\begin{aligned}\left(\int_M (f\eta)^{2q}\,d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}} &\le C_7(n,F,K,\tau)p\gamma\left(\int_M (f\eta)^{2q}\,d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\quad +C_4p\gamma^{-\frac{1}{s-1}}\int_M f^2\eta^2\,d\mu_F + C_5\int_M f^2|\bar\nabla\eta|^2\,d\mu_F.\end{aligned}$$

Wähle nun $\gamma := \frac{1}{2C_7p}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\int_M (f\eta)^{2q}\,d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}} &\le 2C_4p^{1+\frac{1}{s-1}}(2C_7)^{\frac{1}{s-1}}\int_M f^2\eta^2\,d\mu_F + 2C_5\int_M f^2|\bar\nabla\eta|^2\,d\mu_F.\\ &\le Cp^\alpha\int_M f^2\eta^2\,d\mu_F + C\int_M f^2|\bar\nabla\eta|^2\,d\mu_F\end{aligned}$$

mit $\alpha = \alpha(n,F) := \frac{s}{s-1} > 1$ und einer Konstanten $C = C(n,F,K,\tau)$. Damit ist die L_p-Abschätzung vollständig bewiesen. □

4.3 Moser-Iteration

Wir machen die gleichen Voraussetzungen wie zu Beginn des letzten Abschnittes. Unsere Ziel ist es, aus der L_p-Abschätzung (4.1) mittels Moser-Iteration (siehe zum Beispiel [J, Kapitel 11]) folgende sup-Abschätzung zu gewinnen:

Proposition 4.7 *Es gilt*

$$\sup_{\mathcal{B}_\theta(x_0)} |S_F|_F^2 \le C(n,F,K,\theta) \tag{4.9}$$

für alle $\theta \in (0,1)$.

Beweis: Als erstes setzen wir in die L_p-Abschätzung für η konkrete Abschneidefunktionen ein. Sei dazu $\tilde\theta := \frac{1+\theta}{2}$, $\tau := \frac{1+\tilde\theta}{2}$ und es seien ρ' und ρ Radien mit

$$\theta < \rho' < \rho \le \tilde\theta < \tau < 1$$

und

$$\rho' \ge \rho - \frac{1}{2}(\rho-\theta).$$

Konstruiere η durch

$$\eta(x) := \Phi\left(\frac{r(x)-\rho'}{\rho-\rho'}\right), \quad x \in M.$$

Dann ist $\eta = 1$ auf $\mathcal{B}_{\rho'}(x_0)$, $\eta = 0$ auf $M \setminus \mathcal{B}_\rho(x_0)$ und es gilt

$$|\bar{\nabla}\eta|_F \leq \frac{2C(F)}{\rho-\rho'}$$

μ_F-fast überall auf M. Setzt man η in die L_p-Abschätzung (4.1) ein, so erhält man

$$\left(\int_{\mathcal{B}_{\rho'}(x_0)} f^{2q}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_1 p^\alpha \int_{\mathcal{B}_\rho(x_0)} f^2\, d\mu_F + C_1\left(\frac{2C(F)}{\rho-\rho'}\right)^2 \int_{\mathcal{B}_\rho(x_0)} f^2\, d\mu_F$$

mit einer Konstanten $C_1 = C_1(n, F, K, \tau)$. Da $p > 1$ und $\frac{\tilde{\theta}-\theta}{2(\rho-\rho')} \geq 1$ folgt hieraus

$$\left(\int_{\mathcal{B}_{\rho'}(x_0)} f^{2q}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C_2(n, F, K, \theta)}{(\rho-\rho')^2} p^\alpha \int_{\mathcal{B}_\rho(x_0)} f^2\, d\mu_F$$

mit $C_2 = \frac{C_1(\tilde{\theta}-\theta)^2}{4} + 4C_1 C(F)^2$. Setze nun $u := |S_F|_F^2$. Dann ist $f^2 = |S_F|_F^{2p} = u^p$ und $f^{2q} = u^{qp}$, also

$$\left(\int_{\mathcal{B}_{\rho'}(x_0)} u^{qp}\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{qp}} \leq C_2^{\frac{1}{p}} p^{\frac{\alpha}{p}} (\rho-\rho')^{-\frac{2}{p}} \left(\int_{\mathcal{B}_\rho(x_0)} u^p\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mit der Abkürzung

$$I(r,t) := \left(\int_{\mathcal{B}_r(x_0)} u^t\, d\mu_F\right)^{\frac{1}{t}}$$

haben wir also

$$I(\rho', qp) \leq C_2^{\frac{1}{p}} p^{\frac{\alpha}{p}} (\rho-\rho')^{-\frac{2}{p}} I(\rho, p), \tag{4.10}$$

sofern nur $p > 1$ ist und ρ', ρ wie oben gewählt sind. Wir können also die höhere L_{qp}-Norm durch die niedrigere L_p-Norm kontrollieren.

Dies werden wir nun iterieren. Setze dazu

$$\rho_k := \theta + 2^{-k}(\tilde{\theta}-\theta),$$

$$\rho'_k := \rho_{k+1} = \rho_k - \frac{1}{2}(\rho_k - \theta),$$

sowie

$$p_0 > 1$$

und

$$p_k := q^k p_0$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
I(\rho_{k+1}, p_{k+1}) &= I(\rho_k', qp_k) \\
&\leq C_2^{\frac{1}{p_k}} p_k^{\frac{\alpha}{p_k}} (\rho_k - \rho_k')^{-\frac{2}{p_k}} I(\rho_k, p_k) \\
&= C_2^{\frac{1}{p_k}} p_0^{\frac{\alpha}{p_k}} q^{\frac{\alpha k}{p_k}} 4^{\frac{k+1}{p_k}} (\tilde{\theta} - \theta)^{-\frac{2}{p_k}} I(\rho_k, p_k) \\
&\leq C_3^{\frac{k+1}{p_k}} p_0^{\frac{\alpha}{p_k}} I(\rho_k, p_k)
\end{aligned}$$

mit $C_3 = C_3(n, F, K, \theta) := \max(4C_2(\tilde{\theta} - \theta)^{-2}, 4q^\alpha)$. Hieraus folgt

$$I(\rho_{k+1}, p_{k+1}) \leq C_3^{\sum_{j=0}^k \frac{j+1}{p_j}} p_0^{\sum_{j=0}^k \frac{\alpha}{p_j}} I(\rho_0, p_0).$$

Nun ist $\sum_{j=0}^\infty \frac{\alpha}{p_j} = \frac{\alpha q}{p_0(q-1)}$ und $\sum_{j=0}^\infty \frac{j+1}{p_j} = \frac{q^2}{p_0(q-1)^2}$. Also haben wir die Abschätzung

$$I(\rho_{k+1}, p_{k+1}) \leq C_4^{\frac{q^2}{p_0(q-1)^2}} p_0^{\frac{\alpha q}{p_0(q-1)}} I(\rho_0, p_0) \tag{4.11}$$

mit $C_4 = C_4(n, F, K, \theta) := \max(C_3, 1)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Wir benötigen nun das folgende einfache

Lemma 4.8 *Es gilt*

$$\sup_{\mathcal{B}_\theta(x_0)} u \leq \liminf_{k \to \infty} I(\rho_k, p_k).$$

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Menge $A_\varepsilon \subset \mathcal{B}_\theta(x_0)$ mit positivem μ_F-Maß, so daß

$$u \geq \sup_{\mathcal{B}_\theta(x_0)} u - \varepsilon$$

in A_ε. Daher gilt

$$\begin{aligned}
I(\rho_k, p_k) &= \left(\int_{\mathcal{B}_{\rho_k}(x_0)} u^{p_k} \, d\mu_F \right)^{\frac{1}{p_k}} \\
&\geq \left(\int_{A_\varepsilon} u^{p_k} \, d\mu_F \right)^{\frac{1}{p_k}} \\
&\geq (\sup_{\mathcal{B}_\theta(x_0)} u - \varepsilon)(\mu_F(A_\varepsilon))^{\frac{1}{p_k}},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung im Fall, daß $\sup_{\mathcal{B}_\theta(x_0)} u - \varepsilon < 0$ ist, trivialerweise erfüllt ist. Da $p_k \to \infty$ für $k \to \infty$, folgt

$$\liminf_{k\to\infty} I(\rho_k, p_k) \geq \sup_{B_\theta(x_0)} u - \varepsilon$$

und mit $\varepsilon \to 0$ ergibt sich die Behauptung. $\square$

Wenden wir das Lemma auf (4.11) an, so ergibt sich die sup-Abschätzung

$$\begin{aligned}\sup_{B_\theta(x_0)} u &\leq C_4^{\frac{q^2}{p_0(q-1)^2}} p_0^{\frac{\alpha q}{p_0(q-1)}} I(\rho_0, p_0) \\ &= C_4^{\frac{q^2}{p_0(q-1)^2}} p_0^{\frac{\alpha q}{p_0(q-1)}} \left(\int_{\mathcal{B}_{\tilde{\theta}}(x_0)} u^{p_0} \, d\mu_F \right)^{\frac{1}{p_0}}.\end{aligned}$$

Darin ist $p_0 > 1$ beliebig. Indem man mit p_0 potenziert und anschließend $p_0 \to 1$ läßt, erhalten wir also

$$\sup_{\mathcal{B}_\theta(x_0)} |S_F|_F^2 \leq C_5(n, F, K, \theta) \int_{\mathcal{B}_{\tilde{\theta}}(x_0)} |S_F|_F^2 \, d\mu_F$$

mit $C_5 := C_4^{\frac{q^2}{(q-1)^2}}$.

Ziehen wir nun noch die Stabilitätsungleichung heran, so ergibt sich mit der mittlerweile bekannten Abschneidetechnik, daß

$$\int_{\mathcal{B}_{\tilde{\theta}}(x_0)} |S_F|_F^2 \, d\mu_F \leq C(F, K, \tilde{\theta}).$$

Also gilt

$$\sup_{\mathcal{B}_\theta(x_0)} |S_F|_F^2 \leq C_6(n, F, K, \theta)$$

und genau dies wollten wir zeigen. $\square$

Da $|S_F|_F$ und $|S|$ äquivalent sind, folgt hieraus nun die punktweise Krümmungsabschätzung für den Spezialfall $R = 1$. Da wir bereits bemerkt haben, daß die Krümmungsabschätzung richtig skaliert, haben wir sie dann auch für alle $R > 0$. Damit ist Theorem 4.1 vollständig bewiesen. $\square$

4.4 Bemerkungen und Ausblicke

Krümmungsabschätzungen für G-Minimalflächen

Wenn man zu jedem $(y,z) \in \mathbb{R}^3 \times S^2$ einen positiv definiten Endomorphismus

$$\omega(y,z) : T_z S^2 \to T_z S^2$$

vorgibt, so kann man losgelöst von parametrischen Funktionalen solche Flächen $X : M^2 \to \mathbb{R}^3$ betrachten, deren gewichtete mittlere Krümmung

$$H_\omega := \mathrm{tr}(A_\omega \circ S)$$

verschwindet. Dabei sei $A_\omega := dX^{-1} \circ \omega(X,N) \circ dX$ das induzierte Gewicht. Mit

$$\omega = G^{-1}, \quad G = G(y,z) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ eine } \textit{Gewichtsmatrix},$$

führt dieser Zugang zu der von Sauvigny [S] eingeführten Klasse der G-Minimalflächen. Für diese Flächen hat Sauvigny Krümmungsabschätzungen vom Heinzschen Typ bewiesen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die Einführung globaler konformer Parameter bezüglich der gewichteten Metrik

$$g_\omega(v,w) := g(A_\omega^{-1}(v), w), \quad v, w \in TM.$$

In seiner Dissertation [F] hat Fröhlich zusätzlich einen verallgemeinerten Stabilitätsbegriff in Form einer gewichteten Stabilitätsungleichung eingeführt und Krümmungsabschätzungen für in diesem Sinne stabile G-Minimalflächen gezeigt. Diese liefern unter anderem eine quantitative Version des Bernsteinsatzes von Räwer, vergleiche [F, Abschnitt 4.2.1].

Krümmungsabschätzungen für Minima parametrischer Funktionale

Für Minima parametrischer Funktionale hat Simon [Si3] mit Methoden der geometrischen Maßtheorie Krümmungsabschätzungen unter einer Regularitätsforderung an das Funktional bewiesen. Für den Fall, daß $\|F - A\|_{C^3}$ hinreichend klein ist, ergeben sich hieraus Krümmungsabschätzungen für Minima bis $n \leq 6$ und für Graphen bis $n \leq 7$. Ferner zeigt sich, daß für die F-Minimalflächengleichung für $n = 3$ ein Bernsteinsatz ohne Kleinheitsbedingung gilt, [Si3, Corollary 1].

Krümmungsabschätzungen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Ist $X : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ eine reguläre Hyperfläche in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit $(\tilde{M}, \gamma)$ und $\tilde{B}_R$ ein normaler geodätischer Ball mit $X(M) \subset \tilde{B}_R$, so kann man X über die Exponentialabbildung auch als Hyperfläche im euklidischen $\mathbb{R}^{n+1}$ auffassen. Unter dieser Identifikation transformiert sich das Riemannsche Flächenfunktional in das spezielle parametrische Funktional

$$\int_M d\tilde{\mu} = \int_M F(X, N)\, d\mu$$

mit

$$F(y, z) := \sqrt{\det\left(\gamma_{\alpha\beta}(y)\right) \gamma^{\alpha\beta}(y) z_\alpha z_\beta} \quad \text{für alle } (y, z) \in B_R \times \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

In [SS] haben Schoen und Simon mit Methoden der geometrischen Maßtheorie Krümmungsabschätzungen für stabile Extremalen derartiger Funktionale bis $n \leq 6$ gezeigt und so lokale Krümmungsabschätzungen für stabile Minimalflächen in Riemannschen Mannigfaltigkeiten erhalten.

Eine Klasse von singulären Variationsproblemen

Die Euler-Lagrange-Gleichung des im Zusammenhang mit *schweren Flächen* auftretenden singulären Integrals

$$\mathfrak{E}_\alpha(u) = \int u^\alpha \sqrt{1 + |Du|^2}\, dx, \quad \alpha > 0,\ u > 0,$$

also die Gleichung

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}\right) = \frac{\alpha}{u\sqrt{1 + |Du|^2}}, \tag{4.12}$$

ist von Dierkes [D1, D2] auf ihre Bernsteineigenschaft untersucht worden.

In [D1] betrachtet Dierkes zunächst stabile Extremalen des zugehörigen singulären parametrischen Funktionals

$$\mathcal{E}_\alpha(X) := \int_M |X_{n+1}|^\alpha\, d\mu$$

und beweist die integrale Krümmungsabschätzung

$$\int_M |X_{n+1}|^\alpha Q^p \varphi^p\, d\mu \leq C(n, \alpha, p) \int_M |X_{n+1}|^\alpha |\nabla\varphi|^p\, d\mu$$

für nichtnegative $\varphi \in C_c^\infty(M)$ und $p \in (4, 4+\sqrt{\frac{8}{n+\alpha}})$, wobei

$$Q := \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}H^2 + \sqrt{\alpha}|S|^2\right)^{1/2}.$$

Das entscheidende Hilfsmittel ist dabei eine auf das Problem zugeschnittene Simons Ungleichung, die im wesentlichen die Gestalt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|X_{n+1}|^\alpha \Delta Q^2 \quad \geq \quad & \left(1+\frac{2}{n+\alpha}\right)|X_{n+1}|^\alpha|\nabla Q|^2 \\ & -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}|X_{n+1}|^\alpha Q^4 - Q\nabla Q\nabla|X_{n+1}|^\alpha\end{aligned}$$

hat. Mit Hilfe einer geeigneten Abschätzung für das Flächenwachstum ergibt sich so für $n+\alpha < 4+\sqrt{\frac{8}{n+\alpha}}$ ein Bernsteinsatz für positive, stabile, ganze Lösungen von (4.12). In [D2] werden schließlich punktweise Krümmungsabschätzungen mit einer Moser-Iteration bewiesen. Wegen der Singularität des Integranden benötigt man hierzu eine neuartige Sobolev Ungleichung.

Anhang A

Approximationsargumente

A.1 Schwache Differenzierbarkeit von $|S_F|_F$

Lemma A.1 *Es sei T_{ij} ein symmetrischer, differenzierbarer $(0,2)$-Tensor auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Dann ist $|T| \in W^{1,\infty}_{loc}(M)$ und die schwache Ableitung berechnet sich wie folgt:*

$$\nabla_k|T| = \begin{cases} \frac{\nabla_k T_{ij} T^{ij}}{|T|} & \text{, falls } |T| > 0 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Ferner gilt: Die regularisierte Funktion

$$|T|_\sigma := \sqrt{|T|^2 + \sigma^2}, \quad \sigma > 0$$

ist glatt und konvergiert gleichmäßig gegen $|T|$. Weiter gilt $\nabla|T|_\sigma \to \nabla|T|$ punktweise, sowie $|\nabla|T|_\sigma| \leq |\nabla|T||$.

Beweis: Es sei $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M und $\Omega \subset\subset U'$. Für beliebiges $\eta \in C^\infty_c(\Omega)$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_\Omega \partial_k \eta (|T|_\sigma \circ \varphi^{-1})\, dx &= -\int_\Omega \eta \partial_k (|T|_\sigma \circ \varphi^{-1})\, dx \\ &= -\int_\Omega \eta \left(\frac{\sum_{i,j} \nabla_k T_{ij} T^{ij}}{\sqrt{|T|^2 + \sigma^2}} \circ \varphi^{-1} \right) dx \\ &= -\int_{\Omega_+} \eta \left(\frac{\sum_{i,j} \nabla_k T_{ij} T^{ij}}{\sqrt{|T|^2 + \sigma^2}} \circ \varphi^{-1} \right) dx, \end{aligned}$$

wobei wir $\Omega_+ := \Omega \cap \{|T| \circ \varphi^{-1} > 0\}$ gesetzt haben. Nun gilt

$$\frac{\sum_{i,j} \nabla_k T_{ij} T^{ij}}{\sqrt{|T|^2 + \sigma^2}} \circ \varphi^{-1} \to \frac{\sum_{i,j} \nabla_k T_{ij} T^{ij}}{|T|} \circ \varphi^{-1}$$

punktweise in Ω_+. Ferner gibt es eine positive Konstante C, so daß für alle $x \in \Omega$ und alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{k,l} g^{kl}(x)\xi_k\xi_l \geq C \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2$$

und hieraus erhält man die Abschätzung

$$\left| \frac{\sum_{i,j} \nabla_k T_{ij} T^{ij}}{\sqrt{|T|^2+\sigma^2}} \circ \varphi^{-1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{C}} \left(\frac{|\nabla T||T|}{\sqrt{|T|^2+\sigma^2}} \right) \circ \varphi^{-1} \leq \frac{1}{\sqrt{C}} |\nabla T| \circ \varphi^{-1}$$

in Ω. Mit $\sigma \to 0$ folgt daher aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz, daß

$$\int_\Omega \partial_k \eta (|T| \circ \varphi^{-1})\, dx = - \int_{\Omega_+} \eta \left(\frac{\sum_{i,j} \nabla_k T_{ij} T^{ij}}{|T|} \circ \varphi^{-1} \right) dx.$$

Also ist $|T| \circ \varphi^{-1} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und die schwache Ableitung berechnet sich wie folgt:

$$\partial_k(|T| \circ \varphi^{-1}) = \begin{cases} \frac{\sum_{i,j} \nabla_k T_{ij} T^{ij}}{|T|} \circ \varphi^{-1} & \text{, falls } |T| \circ \varphi^{-1} > 0 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung. Die restlichen Aussagen sind einfache Folgerungen. □

A.2 Lipschitz-Funktionen

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, d die intrinsische Metrik und $f \in C^{0,1}_{loc}(M)$ eine bezüglich d lokal Lipschitzstetige Funktion. Ist $\varphi : U \to U' \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, so gibt es zu jedem $\Omega \subset\subset U'$ eine Konstante $C > 0$, so daß

$$d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)) \leq C|x-y| \quad \text{für alle } x, y \in \Omega.$$

Also ist $f \circ \varphi^{-1}$ ebenfalls lokal Lipschitz (bezüglich der euklidischen Metrik). Nach dem Satz von Rademacher, siehe zum Beispiel [E, Chapter 5], ist $f \circ \varphi^{-1}$ daher fast überall in U' klassisch differenzierbar und folglich kann man für μ-fast alle Punkte $x \in U$ das Differential df_x erklären durch

$$df_x := \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\varphi(x)} d\varphi^i.$$

Die Kettenregel zeigt, daß dies nicht von der Wahl der verwendeten Karte abhängt. Analog fassen wir den Gradienten ∇f auf.

Die in dieser Arbeit typischerweise vorkommenden Beispiele sind die Distanzfunktion selbst, also

$$f(x) = d(x, x_0)$$

und die euklidische Distanzfunktion einer regulären Hyperfläche $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, also

$$f(x) = |X(x) - X(x_0)|.$$

Beachte, daß in beiden Fällen die Lipschitzkonstante 1 ist und damit insbesondere

$$|\nabla f| \leq 1$$

μ-fast überall.

Lemma A.2 *Es sei $f \in C^{0,1}(M)$ eine nichtnegative Lipschitzfunktion mit kompaktem Träger. Ferner sei V eine offene Menge mit $V \subset\subset M$ und supp$(f) \subset V$. Dann gibt es eine Folge nichtnegativer Funktionen $f_j \in C_c^\infty(V)$, so daß für alle $p \in [1, \infty)$ gilt:*

$$\int_M (|f_j - f|^p + |\nabla f_j - \nabla f|^p)\, d\mu \to 0$$

für $j \to \infty$.

Beweis: Dies ist ein Standardargument: Als erstes lokalisiert man f mit Hilfe einer Zerlegung der Eins und approximiert anschließend in lokalen Koordinaten durch Faltung. Der Vollständigkeit halber skizzieren wir die technischen Details.

Es sei $(\varphi_\alpha, U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Atlas von V und $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß die Kartengebiete euklidischen Bällen um 0 entsprechen, sagen wir $\varphi_\alpha(U_\alpha) = B_3(0)$, und daß $\text{supp}(\eta_\alpha) \subset \varphi_\alpha^{-1}(B_1(0)) =: W_\alpha$. Da $\text{supp}(f)$ kompakt und die Zerlegung lokal endlich ist, findet man eine endliche Teilmenge $A' \subset A$, so daß $\eta_\alpha = 0$ in $\text{supp}(f)$ für alle $\alpha \in A \setminus A'$. Hieraus ergibt sich die Darstellung

$$f = \sum_{\alpha \in A'} f_\alpha$$

mit $f_\alpha := \eta_\alpha f$. Insbesondere gilt $\text{supp}(f_\alpha) \subset W_\alpha$.

Für $\alpha \in A'$ setze nun

$$g_\alpha(x) := \begin{cases} f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x) & \text{, für } x \in B_1(0) \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g_\alpha \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(g_\alpha) \subset B_1(0)$. Nun liegt jede $C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ Funktion in $W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, siehe zum Beispiel [E, Chapter 5], und damit auch in $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty)$. Also ist $g_\alpha \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und wir können mit Hilfe der üblichen mollifier approximieren. Genauer sei

$$g_{\alpha,j} := k_{\frac{1}{j}} * g_\alpha,$$

also

$$g_{\alpha,j}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} k_{\frac{1}{j}}(x-y) g_\alpha(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $g_{\alpha,j} \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$, $g_{\alpha,j} \geq 0$ und es gilt

$$g_{\alpha,j} \to g_\alpha \quad \text{in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

für $j \to \infty$. Beachte nun, daß $\operatorname{supp}(g_{\alpha,j}) \subset B_2(0)$. Ferner gibt es positive Konstanten C und K, so daß

$$\sqrt{g^{kl}_\alpha(x)\xi_k\xi_l} \leq C \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p} \qquad \text{für alle } x \in B_2(0), \xi \in \mathbb{R}^n$$

und

$$\sqrt{\det(g^\alpha_{kl})} \leq K \quad \text{in } B_2(0).$$

Setzt man daher $f_{\alpha,j} := g_{\alpha,j} \circ \varphi_\alpha$, so ist $f_{\alpha,j} \in C^\infty_c(V)$, $f_{\alpha,j} \geq 0$ und es gilt mit der Abkürzung $V_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}(B_2(0))$:

$$\begin{aligned}
& \int_M (|f_{\alpha,j} - f_\alpha|^p + |\nabla f_{\alpha,j} - \nabla f_\alpha|^p)\, d\mu \\
= & \int_{V_\alpha} (|f_{\alpha,j} - f_\alpha|^p + |\nabla f_{\alpha,j} - \nabla f_\alpha|^p)\, d\mu \\
\leq & \ K \max\{1, C^p\} \int_{B_2(0)} \left(|g_{\alpha,j} - g_\alpha|^p + \sum_{k=1}^n |\partial_k g_{\alpha,j} - \partial_k g_\alpha|^p \right) dx \\
\leq & \ K \max\{1, C^p\} \|g_{\alpha,j} - g_\alpha\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Also haben wir

$$f_{\alpha,j} \to f_\alpha \quad \text{in } W^{1,p}(M)$$

für $j \to \infty$.

Setze nun

$$f_j := \sum_{\alpha \in A'} f_{\alpha,j}.$$

Dann ist $f_j \in C^\infty_c(V)$, $f_j \geq 0$ und es gilt $f_j \to f$ in $W^{1,p}(M)$. □

Literaturverzeichnis

[B] S. Bernstein: Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Math. Z. **26**, 551-558 (1927)

[C] U. Clarenz: Sätze über Extremalen parametrischer Funktionale. Bonner Math. Schriften **322** (1999)

[CM] U. Clarenz, H. von der Mosel: On surfaces of prescribed F-mean curvature. Preprint

[D1] U. Dierkes: A Bernstein result for energy minimizing hypersurfaces. Calc. Var. Partial Differential Equations **1**, 37-54 (1993)

[D2] U. Dierkes: Curvature estimates for minimal hypersurfaces in singular spaces, Inventiones mathematicae **122**, 453-473 (1995)

[DHKW] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab: Minimal Surfaces I. Grundlehren der math. Wissenschaften **295**, Springer 1992

[doC] M. do Carmo: Riemannian Geometry. Birkhäuser 1992

[E] L. C. Evans: Partial Differential Equations. AMS 1998

[FCS] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen: The Structure of Complete Stable Minimal Surfaces in 3-manifolds of Non-Negative Scalar Curvature. Comm. Pure Appl. Math. **33**, 199-211 (1980)

[F] S. Fröhlich: Krümmungsabschätzungen für μ-stabile G-Minimalflächen. Dissertation, Cottbus (2001)

[GT] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: Elliptic partial differential equations of second order. Grundlehren der math. Wissenschaften **224**, Springer 1977. Second edition 1983

[H] E. Heinz: Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II, 51-56 (1952)

[Je] H. B. Jenkins: On two-dimensional variational problems in parametric form. Arch. Rat. Mech. Anal. **8**, 181-206 (1961)

[J] J. Jost: Partielle Differentialgleichungen. Springer 1998

[K] W. Kühnel: Differentialgeometrie. Vieweg 1999

[MS] J. H. Michael, L. Simon: Sobolev and Mean-Value Inequalities on Generalized Submanifolds of $\mathbb{R}^n$. Comm. Pure Appl. Math. **26**, 361-379 (1973)

[R] K. Räwer: Stabile Extremalen parametrischer Doppelintegrale in $\mathbb{R}^3$. Dissertation, Bonn (1993)

[S] F. Sauvigny: Curvature Estimates for Immersions of Minimal Surface Type via Uniformization and Theorems of Bernstein Type. Manuscripta Math. **67**, 67-97 (1990)

[SSY] R. Schoen, L. Simon, S.T. Yau: Curvature estimates for minimal hypersurfaces. Acta Math. **134**, 275-288 (1975)

[SS] R. Schoen, L. Simon: Regularity of stable minimal hypersurfaces. Comm. Pure Appl. Math. **34**, 741-797 (1981)

[Si1] L. Simon: Equations of mean curvature type in 2 independent variables. Pacific Journal of Mathematics **69**, No. 1, 245-268 (1977)

[Si2] L. Simon: A Hölder estimate for quasiconformal mappings between surfaces in Euclidean space, with application to graphs having quasiconformal Gauss map. Acta Math. **139**, 19-51 (1977)

[Si3] L. Simon: On some extensions of Bernstein's theorem. Math. Z. **154**, 265-273 (1977)

[Si4] L. Simon: Lectures on geometric measure theory. Proc. Centre Math. Analysis, Australian National University, Canberra, Vol. **3**, 1983

[Si5] L. Simon: Asymptotics for exterior solutions of quasilinear elliptic equations. In: Geometry from the Pacific Rim. Proceedings of the Pacific Rim Geometry Conference held at Singapore Dec. 1994. Ed. Berrick, Loo, Wang. Walter de Gruyter Berlin, New York 1997

[W] B. White: Existence of smooth embedded surfaces of prescribed genus that minimize parametric even elliptic functionals on 3-manifolds. J. Diff. Geom. **33**, 413-443 (1991)