

**Über Vernetzungen im Mathematikunterricht
- eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen
in der Sekundarstufe I**

Vom Institut für Mathematik
in der Fakultät für Naturwissenschaften der
Gerhard-Mercator-Universität Duisburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Dr. paed.

genehmigte Dissertation
von
Astrid Brinkmann
aus
Mediasch/Rumänien

Referent: Prof. Dr. Günter Törner
Korreferent: Prof. Dr. Erkki Pehkonen

Tag der mündlichen Prüfung: 9.09.2002

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Günter Törner verdanke ich die interessante und vielschichtige Themenstellung sowie die Förderung und Unterstützung dieser Arbeit und die Einweisung in die Wissenschaft der Mathematikdidaktik. Ihm gilt auch mein aufrichtiger Dank für die Einführung in die Gesellschaft der Mathematikdidaktiker und die vielen bereichernden Kontakte, die sich daraus für mich ergeben haben.

Herrn Prof. Dr. Erkki Pehkonen bin ich sehr dankbar für die Übernahme des Korreferats und seine wissenschaftliche Begleitung meiner Arbeit. Ich habe ihn als einen fantastischen Lehrer kennen gelernt, der es versteht, mit sehr wenigen Worten oder Andeutungen große Denkanstöße zu geben. Ganz besonders danke ich ihm für die intensiven und bereichernden Arbeitsgespräche, die wir an der Universität Turku, Finnland, geführt haben.

Einen wichtigen Beitrag für das Gelingen dieser Arbeit haben Lehrer und Schüler durch ihre Beteiligung an der empirischen Untersuchung geleistet. Ihnen gebührt mein besonderer Dank.

Meiner Familie, insbesondere meinen vier Kindern Corinna, Birgit, Inge und Caroline, danke ich für ihre entgegengebrachte Geduld und ihr Verständnis. Mein innigster Dank gilt meinem Mann, der mir als Gesprächs- und Diskussionspartner stets zur Seite steht, zwar weniger zu Fragen der Didaktik, aber meist doch zu recht vernetzungsreichen Problemstellungen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das Forschungsthema Vernetzung im Mathematikunterricht in der fachdidaktischen Diskussion	9
2.1	Vernetzungen im Mathematikunterricht aus dem Blickwinkel der Mathematikgeschichte in Deutschland	10
2.2	Vernetzungen im Mathematikunterricht – ein international erhobenes Unterrichtsziel.....	18
2.3	Vernetztes Denken und mathematisches Problemlösen – die psychologische Dimension	21
2.4	Vernetzungen im Mathematikunterricht - Stellungnahmen und Erklärungen zu Curricula	24
2.5	TIMSS - Ergebnisse, Erklärungshypothesen und Forderungen.....	27
3	Vernetzungsaspekte beim Mathematiklernen - Begriffliches	33
3.1	Zum Begriff „Vernetzung“ - Strukturelles.....	34
3.2	Beispiel eines Netzwerks: „Der Satz des Pythagoras“	38
3.3	Innermathematische Vernetzungen.....	42
3.3.1	Unterkategorien der fachsystematischen Vernetzung	45
3.3.2	Unterkategorien der anwendungsbezogenen Vernetzung	49
3.4	Vernetzung zwischen mathematischen Knoten und nichtmathematischen Knoten.....	53
3.5	Kategorien der Vernetzungen im Mathematikunterricht – ein Überblick	62
3.6	Vernetzungsaspekte des prozeduralen und des deklarativen Wissens.....	69
4	Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen	72
4.1	Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen – die kognitive Komponente	74
4.1.1	Theorien und Modelle	74
4.1.1.1	Konstruktivismus.....	75
4.1.1.2	Situierte Kognition	76
4.1.1.3	Wissenspsychologische Modelle	77
4.1.1.4	Das „Advance Organizer Model“	78
4.1.1.5	Wissen und Verhaltensregulation – ein integratives Modell.....	79
4.1.1.6	Biologische Modelle.....	79

4.1.1.7	Zusammenfassung	85
4.1.2	Anmerkungen zu den einzelnen Vernetzungskategorien vor dem Hintergrund theoretischer Modelle.....	86
4.1.2.1	Fachsystematische Vernetzungen.....	87
4.1.2.2	Anwendungsbezogene Vernetzungen	89
4.1.2.3	Die Kulturvernetzung	92
4.1.2.4	Die lernpsychologische Vernetzung.....	93
4.1.2.5	Die mnemotechnische Vernetzung.....	94
4.1.2.6	Die Ähnlichkeitsvernetzung	94
4.1.2.7	Die Affektvernetzung	96
4.1.3	Unbewusste Vernetzungen - Intuition.....	98
4.2	Das Modell der Curriculumsrahmen – Instanzen zur Erfassung von Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen.....	101
4.3	Erste Daten zu Vernetzungen in den Curriculumsrahmen.....	110
5	Lineare Gleichungssysteme - fachliches Umfeld für die empirische Untersuchung	113
5.1	Kontexte rund um die linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I: Sichtweisen – Begriffe – Interpretationen.....	114
5.1.1	Der syntaktische Aspekt	116
5.1.2	Der semantische bzw. aussagenlogische Aspekt.....	116
5.1.3	Der mengentheoretische Aspekt.....	117
5.1.4	Der relationale bzw. funktionale Aspekt	118
5.1.5	Der geometrische Aspekt	119
5.1.6	Der Kalkülaspekt	120
5.1.7	Der strukturelle Aspekt.....	121
5.1.8	Der Modellierungsaspekt.....	122
5.2	Vernetzungen rund um die linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I	125
5.2.1	Vernetzungsknoten.....	125
5.2.2	Vernetzungen.....	128
5.2.2.1	Fachsystematische Vernetzungen.....	128
5.2.2.2	Anwendungsbezogene Vernetzungen	138
6	Forschungsfragen und Untersuchungsdesign	143
6.1	Liste der Forschungsfragen.....	144
6.2	Untersuchungsdesign	146
7	Forschungsmethodik	148
7.1	Methodik zur Datenerfassung in den Curriculumsrahmen.....	149

7.1.1 Methodik zur Datenerfassung im Rahmen des intendierten Curriculums	150
7.1.2 Methodik zur Datenerfassung im Rahmen des implementierten Curriculums	153
7.1.3 Methodik zur Datenerfassung im Rahmen des erreichten Curriculums	154
7.2 Die Methode des Concept Mapping	156
7.2.1 Darstellung von Wissensnetzen.....	156
7.2.2 Concept Mapping - Hintergründe und Form der Darstellung	158
7.2.3 Die Technik des Concept Mapping und spezifische methodische Konsequenzen.....	162
7.2.4 Bewertung von Concept Maps	165
7.3 Fehlerquellen.....	168
7.4 Spezifische Methodik der Untersuchung	170
8 Ergebnisse der Untersuchung von Vernetzungen in Curriculumsrahmen.....	180
8.1 Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums	181
8.1.1 Ergebnisse im Rahmen des intendierten Curriculums.....	181
8.1.1.1 Vernetzungen in Lehrplänen	182
8.1.1.2 Vernetzungen in Schulbüchern.....	184
8.1.2 Zusammenfassung der Ergebnisse im Rahmen des intendierten Curriculums	191
8.2 Vernetzungen in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer	200
8.2.1 Ergebnisse in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer.....	200
8.2.2 Zusammenfassung der Ergebnisse in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer	206
8.2.2.1 Vernetzungen im Rahmen des implementierten Curriculums	206
8.2.2.2 Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer.....	210
8.3 Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums	211
8.3.1 Präzisierung des Untersuchungsmaterials	211
8.3.2 Ergebnisse der Schülertests	213
8.3.2.1 Ergebnisse im ersten Untersuchungsschritt	214
8.3.2.2 Ergebnisse im zweiten Untersuchungsschritt	215

8.3.2.3	Ergebnisse im dritten Untersuchungsschritt	218
8.3.2.4	Ergebnisse im vierten Untersuchungsschritt	220
8.3.2.5	Ergebnisse im fünften Untersuchungsschritt	222
8.3.2.6	Ergebnisse im sechsten Untersuchungsschritt	224
8.3.3	Zusammenfassung der Ergebnisse der Schülertests	225
8.4	Positiva und Defizite der Vernetzungsmuster in den drei Curriculumsrahmen.....	232
8.5	Übertragung von Vernetzungen aus einem Curriculumsrahmen in den nächsten.....	234
9	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse.....	240
9.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	241
9.2	Konsequenzen für den Mathematikunterricht.....	245
9.2.1	Forderungen an die Schulbuchgestaltung.....	245
9.2.2	Veränderte Methoden zur Vermittlung von Vernetzungen.....	247
9.2.3	Sensibilisierung der Lehrer.....	250
9.3	Offene Fragen und Ausblick	251
Anhang	253
Anhang A:	Richtlinien und Lehrpläne Mathematik, Gymnasium SI	254
Anhang B:	Richtlinien Mathematik, Gesamtschule	255
Anhang C:	Stoffverteilungsplan für den Jg. 9 Gesamtschule	256
Anhang D:	Schulbuchinhalte zur Thematik der linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I	257
Anhang E:	Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums, die nicht Bestand einer weiteren Untersuchung sind	261
Anhang F:	Concept Maps zu Gleichungssystemen von zwei Geradengleichungen	263
Anhang G:	Befragungskonzept für Lehrerinterviews	265
Anhang H:	Lehrerantworten in den Interviews	266
Anhang I:	Testunterlagen.....	272
Anhang J:	Ergebnisse der Schülertests	279
Anhang K:	Veränderung von Vernetzungen beim Übergang von einem Curriculumsrahmen zum nächsten	305
Quellenverzeichnis	311

Abbildungsverzeichnis

<i>Abbildung 1: Beispiele für Graphen</i>	35
<i>Abbildung 2: Beispiele für Untergraphen G_i zu einem Graph G.....</i>	36
<i>Abbildung 3: Mind Map zum Satz des Pythagoras – Ergebnis einer Befragung.....</i>	41
<i>Abbildung 4: Problemlösungsprozess mittels mathematischer Modelle</i>	54
<i>Abbildung 5: Kategorien der Vernetzungen im Mathematikunterricht</i>	65
<i>Abbildung 6: Vernetzung zum Satz des Pythagoras.....</i>	66
<i>Abbildung 7: Algorithmusvernetzung als zweistufige Zuordnung</i>	91
<i>Abbildung 8: Modell der Curriculumsrahmen.....</i>	103
<i>Abbildung 9: TIMSS-Rahmenkonzeption (in Monograph No.1).....</i>	104
<i>Abbildung 10: TIMSS-Rahmenkonzeption (in Monograph No.2).....</i>	104
<i>Abbildung 11: Verfeinerte Rahmenkonzeption</i>	106
<i>Abbildung 12: Wechselspiel zwischen implementiertem und erreichtem Curriculum</i>	107
<i>Abbildung 13: Übertragung von Vernetzungen von einem Rahmen in den nächsten.....</i>	108
<i>Abbildung 14: Bildliche Darstellung eines winzigen Ausschnitts eines semantischen Netzwerks (entnommen dem Buch „Gödel, Escher, Bach“ von Douglas Hofstadter).....</i>	157
<i>Abbildung 15: Concept Map zur Algebra (entnommen dem Buch „Learning how to learn“ von Novak & Gowin, 1984).....</i>	159
<i>Abbildung 16: Netzwerk im Rahmen des intendierten Curriculums, Gymn. A und B.....</i>	197
<i>Abbildung 17: Netzwerk im Rahmen des intendierten Curriculums, Gesamtschule.....</i>	198
<i>Abbildung 18: Netzwerk im Rahmen des implementierten Curriculums, Gymn. A und B.....</i>	208
<i>Abbildung 19: Vernetzungen im Rahmen des implementierten Curriculums, GE... </i>	209
<i>Abbildung 20: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums A, Jahrgang 8</i>	226
<i>Abbildung 21: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums A, Jahrgang 11</i>	227
<i>Abbildung 22: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums B, Jahrgang 9</i>	228
<i>Abbildung 23: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums B, Jahrgang 10</i>	229
<i>Abbildung 24: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums der Gesamtschule, Jahrgang 10.....</i>	231

<i>Abbildung 25: Globale Charakteristik der Veränderung von Vernetzungen beim Übergang von einem Curriculumsrahmen zum nächsten.....</i>	<i>237</i>
<i>Abbildung 26: Vernetzungen in den Curriculumsrahmen der Gymnasien</i>	<i>239</i>
<i>Abbildung 27: Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums, die nicht Bestand einer weiteren Untersuchung sind.....</i>	<i>261</i>
<i>Abbildung 28: Concept Map zu Gleichungssystemen von zwei Geradengleichungen auf der Grundlage von Buch G.....</i>	<i>263</i>
<i>Abbildung 29: Concept Map zu Gleichungssystemen von zwei Geradengleichungen auf der Grundlage von Buch A und Buch B.....</i>	<i>264</i>
<i>Abbildung 30: Vernetzungen in den Curriculumsrahmen des Gymnasiums A, Jahrgang 8</i>	<i>306</i>
<i>Abbildung 31: Vernetzungen in den Curriculumsrahmen des Gymnasiums A, Jahrgang 11</i>	<i>307</i>
<i>Abbildung 32: Vernetzungen in den Curriculumsrahmen des Gymnasiums B, Jahrgang 9</i>	<i>308</i>
<i>Abbildung 33: Vernetzungen in den Curriculumsrahmen des Gymnasiums B, Jahrgang 10</i>	<i>309</i>
<i>Abbildung 34: Vernetzungen in den Curriculumsrahmen der Gesamtschule, Jahrgang 10</i>	<i>310</i>

Tabellenverzeichnis

<i>Tabelle 1: Übersicht über die an den Tests beteiligten Schulen sowie Klassen/Kurse</i>	146
<i>Tabelle 2: Wesentliche Vernetzungen im 1. Curriculumsrahmen</i>	193
<i>Tabelle 3: Anwendungsbereiche in den Textaufgaben</i>	195
<i>Tabelle 4: Antworten der Lehrer in den Interviews</i>	201
<i>Tabelle 5: Ergebnisse im ersten Untersuchungsschritt am Gymnasium A, Jahrgang 8 (27 Schüler)</i>	279
<i>Tabelle 6: Ergebnisse im ersten Untersuchungsschritt am Gymnasium A, Jahrgang 11 (43 Schüler)</i>	280
<i>Tabelle 7: Ergebnisse im ersten Untersuchungsschritt am Gymnasium B, Jahrgang 9 (23 Schüler)</i>	281
<i>Tabelle 8: Ergebnisse im ersten Untersuchungsschritt am Gymnasium B, Jahrgang 10 (19 Schüler)</i>	281
<i>Tabelle 9: Ergebnisse im ersten Untersuchungsschritt an der Gesamtschule, Jahrgang 10 (24 Schüler)</i>	282
<i>Tabelle 10: Ergebnisse im zweiten Untersuchungsschritt, Gymnasium A</i>	284
<i>Tabelle 11: Ergebnisse im zweiten Untersuchungsschritt, Gymnasium B</i>	285
<i>Tabelle 12: Ergebnisse im zweiten Untersuchungsschritt, Gesamtschule, Jahrgang 10 (24 Schüler)</i>	286
<i>Tabelle 13: Bündelungsaspekte im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 8 (27 Schüler)</i>	287
<i>Tabelle 14: Bündelungsaspekte im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 11 (43 Schüler)</i>	288
<i>Tabelle 15: Bündelungsaspekte im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 9, (23 Schüler)</i>	288
<i>Tabelle 16: Bündelungsaspekte im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 10, (19 Schüler)</i>	289
<i>Tabelle 17: Bündelungsaspekte im dritten Untersuchungsschritt, Gesamtschule, Jahrgang 10, (24 Schüler)</i>	289
<i>Tabelle 18: Ergebnisse im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 8</i>	290
<i>Tabelle 19: Ergebnisse im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 11</i>	291
<i>Tabelle 20: Ergebnisse im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 9</i>	292
<i>Tabelle 21: Ergebnisse im dritten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 10</i>	293

<i>Tabelle 22: Ergebnisse im dritten Untersuchungsschritt, Gesamtschule, Jahrgang 10.....</i>	<i>294</i>
<i>Tabelle 23: Eingetragene Begriffe im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 8 (27 Schüler)</i>	<i>296</i>
<i>Tabelle 24: Eingetragene Begriffe im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 11 (43 Schüler)</i>	<i>296</i>
<i>Tabelle 25: Eingetragene Begriffe im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 9 (23 Schüler)</i>	<i>297</i>
<i>Tabelle 26: Eingetragene Begriffe im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 10 (19 Schüler)</i>	<i>297</i>
<i>Tabelle 27: Eingetragene Begriffe im vierten Untersuchungsschritt, Gesamtschule, Jahrgang 10 (24 Schüler)</i>	<i>298</i>
<i>Tabelle 28: Eingezeichnete Querverbindungen im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 8 (27 Schüler).....</i>	<i>299</i>
<i>Tabelle 29: Eingezeichnete Querverbindungen im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium A, Jahrgang 11 (43 Schüler).....</i>	<i>299</i>
<i>Tabelle 30: Eingezeichnete Querverbindungen im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 9 (23 Schüler).....</i>	<i>300</i>
<i>Tabelle 31: Eingezeichnete Querverbindungen im vierten Untersuchungsschritt, Gymnasium B, Jahrgang 10 (19 Schüler).....</i>	<i>301</i>
<i>Tabelle 32: Ergebnisse der Gymnasialschüler im fünften Untersuchungsschritt....</i>	<i>302</i>
<i>Tabelle 33: Ergebnisse im sechsten Untersuchungsschritt, Gymnasium A.....</i>	<i>303</i>
<i>Tabelle 34: Ergebnisse im sechsten Untersuchungsschritt, Gymnasium B.....</i>	<i>304</i>

Es ist ... schlecht, wie wir zulassen, daß Lehrer die Mathematik unserer Kinder zu schmalen und fragilen Türmen und Ketten formen, statt zu widerstandsfähigen querverbundenen Netzen. Eine Kette kann an jedem Glied zerbrechen, ein Turm kann beim leichtesten Stoß umfallen. Und das ist es, was in einer Mathematikstunde mit dem Geist eines Kindes geschieht, dessen Aufmerksamkeit nur einen Augenblick lang von einer hübsch geformten Wolke am Himmel abgelenkt wird.

Marvin Minsky¹

¹ MINSKY, MARVIN 1990. *Mentopolis*, S. 193. Stuttgart: Klett-Cotta.