

8 Ergebnisse der Untersuchung von Vernetzungen in Curriculumsrahmen

Im Folgenden wird die Untersuchung zu Vernetzungen in Curriculumsrahmen rund um den Themenkomplex der linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I vorgestellt. Als Vernetzungen werden hierbei entsprechend der Eingrenzungen durch die Forschungsfragen (Kapitel 6) nur fachsystematische Vernetzungen und Modellvernetzungen berücksichtigt.

Die Abschnitte 8.1, 8.2 und 8.3 behandeln die Untersuchungen in den drei Curriculumsrahmen. Da die endgültige Ausarbeitung des Untersuchungsmaterials für den Rahmen des erreichten Curriculums erst auf der Grundlage der Ergebnisse in den Rahmen des intendierten Curriculums und des implementierten Curriculums erfolgen kann (vgl. Kapitel 7.4), wird im Abschnitt 8.3.1 die noch ausstehende Präzisierung des Untersuchungsmaterials gegeben.

Unter den Ergebnissen im Rahmen des erreichten Curriculums wird auch der Einfluss des Parameters Zeit seit Vermittlung der Lerninhalte bis zur Durchführung der Schülertests erörtert.

Positiva und Defizite der Vernetzungsmuster in den drei Curriculumsrahmen werden zusammenfassend unter Abschnitt 8.4 herausgestellt.

Auf der Grundlage der Untersuchungsergebnisse in den drei Rahmen wird schließlich analysiert, welche Veränderungen die erhobenen Vernetzungen beim Übergang von einem Curriculumsrahmen zum nächsten erfahren haben (Abschnitt 8.5).

8.1 Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums

Die Untersuchungsergebnisse im Rahmen des intendierten Curriculums werden im Abschnitt 8.1.1 ausführlich dargestellt und im Abschnitt 8.1.2 zusammengefasst.

8.1.1 Ergebnisse im Rahmen des intendierten Curriculums

Um Vernetzungen rund um lineare Gleichungssysteme im intendierten Curriculum aufzunehmen, wurden zunächst die Richtlinien des Landes Nordrhein-Westfalen für die Sekundarstufe I des Gymnasiums und für die Gesamtschule, sowie der schulinterne Stoffverteilungsplan der an der Untersuchung beteiligten Gesamtschule durchgesehen (8.1.1.1).

Weiterhin wurden die Abhandlungen des betrachteten Themenkomplexes in den Schulbüchern, die im Unterricht der getesteten Lerngruppen eingesetzt worden waren, untersucht (8.1.1.2).

Weiterführende Literatur oder Arbeitsblätter, die über den in den benutzten Schulbüchern dargestellten Stoff hinausgehen, wurden von den betroffenen Lehrern nicht verwendet.

8.1.1.1 Vernetzungen in Lehrplänen

In den *Richtlinien und Lehrplänen* des Landes Nordrhein-Westfalen für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I am *Gymnasium* werden lineare Gleichungssysteme unter den Themen für die Jahrgangsstufen 7/8 aufgeführt (Anhang A).

Zu Gleichungssystemen von zwei Gleichungen in zwei Variablen werden folgende Bemerkungen im Hinblick auf Vernetzungen angeführt (Richtlinien und Lehrpläne Mathematik Gymnasium Sekundarstufe I, 1993, S. 48):

Graphische Lösungsverfahren ermöglichen eine Verzahnung von Algebra und Geometrie. Auch Fragen nach der Existenz und der Anzahl der Lösungen werden geometrisch interpretiert. Bei den Text- und Sachaufgaben sollten beide Gleichungen wirklich notwendig (nicht zu trivial) sein.

Als allgemeine Bemerkung bzgl. Gleichungen findet man ferner (Richtlinien und Lehrpläne Mathematik Gymnasium Sekundarstufe I, 1993, S. 47):

Gleichungen ... werden bei der Behandlung von im allgemeinen umgangssprachlich formulierten Anwendungsaufgaben als Modelle für reale Situationen aufgestellt. Die mittels eines Kalküls gewonnene Lösung muß in bezug auf die Ausgangssituation interpretiert und bewertet werden. ... Anwendungsbezug und Bedeutung eines Kalküls sollten immer deutlich werden.

Im Zusammenhang mit dem Thema der linearen Gleichungssysteme werden also in den Richtlinien für das Gymnasium explizit, aber knapp Modellvernetzungen zwischen Geometrie und Algebra angesprochen: Bei graphischen Lösungsverfahren werden Geradengleichungen durch Geraden repräsentiert (vgl. Abschnitt 5.2.2.2, Vernetzung AV1a) und (algebraische) Lösungen eines linearen Gleichungssystems durch Schnittpunkte von Geraden (Abschnitt 5.2.2.2, Teil der Vernetzung AV2). Die geometrische Interpretation der Fragen nach der Existenz und der Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems von zwei Gleichungen in zwei Variablen führt zu einer Modellierung der Anzahl der Lösungen durch die jeweilige Lagebeziehung zweier Geraden (Abschnitt 5.2.2.2, Teil der Vernetzungen AV3a, AV3b bzw. AV3c).

Ferner werden Modellvernetzungen von außermathematischen Anwendungen mit Gleichungen gefordert: Gleichungen dienen als Modelle für reale Situationen; um Gleichungen zu realen Situationen zu formulieren sind Modellvernetzungen erforderlich, ebenso um die mittels eines Kalküls gewonnene Lösung in Bezug auf die Ausgangssituation zu interpretieren (Abschnitt 5.2.2.2, Vernetzung AV7).

Die Unterteilung linearer Gleichungssysteme entsprechend der Anzahl vorkommender Gleichungen und Variablen zeigt eine fachsystematische Vernetzung auf (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV2).

Unter den verbindlichen Lerninhalten (siehe Anhang A) werden rechnerische sowie graphische Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen aufgeführt, als Ergänzung wird der Gauß-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme von drei Gleichungen in drei Variablen angegeben. Dadurch wird u.a. die Eigenschaft der Existenz von Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme deutlich (Merkmalsvernetzung; vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV18) und die Existenz von Lösungsmengen zu linearen Gleichungssystemen (Zugehörigkeitsrelation; vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV22), ferner werden mehrere Unterbegriffe zu Lösungsverfahren angeführt (Oberbegriff-Unterbegriff-Relation; vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV17).

In den *Richtlinien Mathematik für die Gesamtschule* findet man das Thema der linearen Gleichungssysteme bei den Unterrichtsgegenständen für die Jahrgangsstufen 9/10 (Anhang B).

Vernetzungen zum betrachteten Thema zwischen Geometrie und Algebra (zeichnerische und rechnerische Lösungsverfahren, graphische Interpretation von rechnerisch bestimmten Lösungsmengen) sowie Vernetzungen mit Anwendungen über Sachprobleme werden hier, wie auch in den Richtlinien für das Gymnasium, angesprochen, jedoch weniger deutlich (Richtlinien Mathematik, Gesamtschule, 1980, Grundanforderungen zu linearen Gleichungssystemen, S. 50-51):

- a) Zeichnerisch die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in zwei Variablen bestimmen.
- b) Rechnerisch die Lösungsmenge eines Gleichungssystems mit Hilfe eines Lösungsverfahrens bestimmen und die Anzahl der Lösungen an den Graphen anschaulich erklären.
- c) Einfache Sachprobleme in lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen überführen und zeichnerisch oder rechnerisch lösen.

Die Aufteilung linearer Gleichungssysteme gemäß der Anzahl der vorkommenden Variablen liefert fachsystematische Vernetzungen (vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV2).

Die angeführten Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme (siehe Anhang B) liefern, wie bereits zu den Richtlinien für das Gymnasium ausgeführt, verschiedene fachsystematische Vernetzungen.

Im *Stoffverteilungsplan der Gesamtschule*, an der die Untersuchungen durchgeführt wurden, ist die Abhandlung der Thematik der linearen

Gleichungssysteme im Jahrgang 9 vorgesehen. Aufgeführt wird lediglich eine Themenfolge zur Unterrichtsreihe der linearen Gleichungssysteme (Anhang C); Vorgaben bzgl. Vernetzungen werden nicht gemacht. Alle angegebenen Inhalte sind auch in den Richtlinien für die Gesamtschule enthalten, geben also keine neuen Aspekte.

Im Vergleich zu dem Aspektreichtum, die eine Behandlung der Thematik linearer Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I bieten kann (vgl. Abschnitt 5.1), und der Vielzahl sich daraus ergebender Vernetzungen (Abschnitt 5.2.2) lassen sich in den Lehrplänen nur wenige Vernetzungen aufspüren.

8.1.1.2 Vernetzungen in Schulbüchern

In den drei an der Untersuchung beteiligten Schulen wird mit jeweils unterschiedlichen *Schulbüchern* gearbeitet. Am *Gymnasium A* wird die Buchreihe „Mathematik“ vom Verlag Cornelsen (LAUTER, 1994) im Unterricht eingesetzt. Die Thematik der linearen Gleichungssysteme wird im Band des 8. Schuljahres dargestellt. Am *Gymnasium B* wird mit der „Lambacher Schweizer“ Buchreihe vom Klett Verlag (SCHMID & WEIDIG, 1995) gearbeitet. Lineare Gleichungssysteme werden ebenfalls im Buch des 8. Jahrgangs behandelt. An der *Gesamtschule* wird nach der Buchreihe „Zahlen und Größen“ vom Verlag Cornelsen (KOULLEN, AITS & AITS, 1994) unterrichtet. Die Thematik der linearen Gleichungssysteme wird im Band für den Erweiterungskurs des 9. Schuljahrs behandelt. Diese drei Schulbücher werden im Folgenden mit *Buch A*, *Buch B* bzw. *Buch G* bezeichnet.

Im Anhang D werden für diese Bücher die Themenfolgen rund um lineare Gleichungssysteme und damit die Inhalte und wesentliche als Vernetzungsknoten in Frage kommenden Konzepte angegeben.

Im Folgenden werden nun, ausgehend von diesen Konzepten, die untersuchungsrelevanten Vernetzungen, die in den Lehrbüchern aufgezeigt oder durch Aufgaben angesprochen sind, herausgestellt und den einzelnen Vernetzungskategorien zugeordnet.

Vernetzungen im Buch A:

Gleichungssysteme werden im Buch A als Konjunktion von wenigstens zwei Gleichungen eingeführt. (Gleichungen sind damit ein Teil der Gleichungssysteme: fachsystematische Vernetzung gemäß der Relation „ist ein Teil von“; vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV1.) Lineare Gleichungen werden als Aussageformen betrachtet (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV3), lineare Gleichungssysteme als konjunktive Aussageformen (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzungen FV3, FV4). Unter dem aussagenlogischen Aspekt wird mittels einer Wahrheitstafel hergeleitet, dass die Lösungsmenge einer konjunktiven Aussageform die Schnittmenge der Lösungsmengen der verknüpften Aussageformen ist, und dies wird wiederum auf Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen als Schnittmenge der Lösungsmengen der verknüpften linearen Gleichungen übertragen (vgl. Anhang E). Die Lösungsmengen von Gleichungssystemen bzw. von Aussageformen sind über die Zugehörigkeitsrelation mit diesen verbunden (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV22); an die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems bzw. einer konjunktiven Aussageform wird über die Merkmalsvernetzung ihre Eigenschaft angebunden, die Schnittmenge der Lösungen der einzelnen Gleichungen/Aussageformen zu sein (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV20).

Im Zuge der Klassifikation linearer Gleichungssysteme werden fachsystematische Vernetzungen herausgearbeitet. Es erfolgt

- die Einteilung gemäß der Zahl der Gleichungen und der Variablen (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV2);
- die Einteilung linearer Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen in erfüllbare (allgemeingültige und nicht allgemeingültige) und unerfüllbare Gleichungssysteme (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV5);
- die Einteilung linearer Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen in Gleichungssysteme aus zwei Geradengleichungen und Sonderfälle, bei denen wenigstens eine der beiden Gleichungen keine Geradengleichung ist (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV6);
- die Einteilung von Sonderfällen linearer Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen, bei denen wenigstens eine der beiden

Gleichungen keine Geradengleichung ist, in erfüllbare aber nicht allgemeingültige, allgemeingültige und unerfüllbare Gleichungssysteme (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV11);

- die Einteilung von Gleichungssystemen aus zwei Geradengleichungen in erfüllbare und eindeutig lösbare, erfüllbare und nicht eindeutig lösbare aber auch nicht allgemeingültige, und unerfüllbare Gleichungssysteme (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV9);
- entsprechend, die Einteilung von Gleichungssystemen aus zwei Geradengleichungen gemäß der Anzahl der Lösungen (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV8);
- die Einteilung lösbarer linearer Gleichungssysteme von drei Gleichungen in drei Variablen in eindeutig lösbare und nicht eindeutig lösbare, d.h. in lineare Gleichungssysteme mit genau einer bzw. unendlich vielen Lösungen (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV7).

Die graphische Repräsentation linearer Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen liefert verschiedene Lagebeziehungen¹ von Geraden (fachsystematische Vernetzung aufgrund einer Fallunterscheidung; vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV13) sowie die Betrachtung der Schnittpunkte dieser Geraden (Merkmalsvernetzung; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV21) mit ihrer unterschiedlichen Anzahl (fachsystematische Vernetzung durch Fallunterscheidung; vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV12).

Für lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden sowohl geometrische als auch algebraische Lösungsverfahren (Gleichsetzungs-, Einsetzungs- und Additionsverfahren) angegeben, für Gleichungssysteme mit drei Variablen das Additionsverfahren. Somit werden verschiedene Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme vorgestellt (Oberbegriff-Unterbegriff-Relation; vgl. Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV17); die Existenz von Lösungsverfahren kennzeichnet eine Eigenschaft von linearen Gleichungssystemen (Merkmalsvernetzung; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV18). Durch Lösungsverfahren gewonnene Lösungen/Lösungsmengen zu linearen Gleichungssystemen gehören zu den jeweiligen Gleichungssystemen (Zugehörigkeitsrelation; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV22).

¹ Das Konzept „Lagebeziehung“ wird dabei nicht genannt.

Es werden vielfältige Verbindungen zwischen algebraischen Ausdrücken und ihrer geometrischen Interpretation aufgezeigt (Modellvernetzungen): Für Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen werden die (algebraischen) Gleichungen zeichnerisch repräsentiert (Abschnitt 5.2.2.2, Vernetzungen AV1a, AV1b), die algebraisch gewonnenen und formulierten Lösungen werden geometrisch als Schnittpunkte von Geraden repräsentiert (Abschnitt 5.2.2.2, Teil der Vernetzung AV2) und die Anzahl der Lösungen erfährt ihre geometrische Repräsentation in unterschiedlichen Lagebeziehungen von Geraden entsprechend unterschiedlicher Anzahl der Schnittpunkte der Geraden (Abschnitt 5.2.2.2, Teil der Vernetzung AV3).

Der Zusammenhang zwischen der algebraischen Struktur¹ nicht eindeutig lösbarer Gleichungssysteme aus zwei Geradengleichungen, der Anzahl ihrer Lösungen und der Lagebeziehung der Geraden wird kurz erläutert; anhand von Aufgaben wird das Verständnis hiervon gefordert und gefördert (Modellvernetzung; Abschnitt 5.2.2.2, Vernetzungen AV3a, AV3b).

Insgesamt fällt auf, dass in dem Lehrbuch neu eingeführte Begriffe jeweils präzise definiert werden und da, wo Sonderfälle auftreten, diese deutlich hervorgehoben und charakterisiert werden, wobei sowohl fachsystematische Vernetzungen als auch Modellvernetzungen klar zum Vorschein treten.

Durch Anwendungsaufgaben wird deutlich, dass lineare Gleichungssysteme ein Modell für mathematische Probleme (Zahlenrätsel, Geometrieaufgaben) oder reale Situationen (Aufgaben aus dem Alltag (u.a. Mischungsaufgaben), Aufgaben aus dem Geschäftsleben, physikalische Probleme zum Hebelgesetz, zum Wärmeaustausch sowie Bewegungsaufgaben) darstellen. Das Übersetzen der Aufgabentexte in lineare Gleichungssysteme erfordert Modellvernetzungen, ebenso die Interpretation rechnerisch gewonnener Lösungen auf der Originalebene (vgl. Abschnitt 5.2.2.2, Vernetzung AV7).

Ein Vergleich der aufgezeigten Vernetzungen aus Buch A mit den Ausführungen in Kapitel 5 zeigt, dass die Abhandlung linearer Gleichungssysteme im Buch A dem Aspektreichtum und der entsprechenden Vernetzungsvielfalt der Thematik gerecht wird.

¹ Das Konzept „algebraische Struktur“ wird dabei nicht genannt.

Vernetzungen im Buch B:

Die Ausführungen zu linearen Gleichungssystemen im Buch B sind bei weitem nicht so ausführlich wie die im Buch A. Im Vergleich zum letzteren wird auf viel Formalismus verzichtet.

Fachsystematische Vernetzungen decken sich größtenteils mit denen aus Buch A. Es fehlt jedoch die Klassifikation linearer Gleichungssysteme in erfüllbare und unerfüllbare Gleichungssysteme. Allgemeingültige Gleichungssysteme werden ebenfalls nicht thematisiert. Als lineare Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen werden durchweg Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen betrachtet; auf andere Sonderfälle wird nicht näher eingegangen.

Für lineare Gleichungssysteme von drei Gleichungen in drei Variablen wird eine Einteilung gemäß der Anzahl der Lösungen (keine, eine einzige, unendlich viele) vorgenommen.

Wie im Buch A werden auch hier die Verbindungen zwischen Geometrie und Algebra deutlich aufgezeigt und in Aufgaben angesprochen (Modellvernetzungen). Außerdem wird - in klein gedruckten Anmerkungen - eine Verbindung aufgezeigt zwischen den Lösungsmengen nicht eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme mit zwei Geradengleichungen und ihrer algebraischen Struktur¹, sowie der entsprechenden geometrischen Interpretation durch die Lagebeziehung² der beiden Geraden (Modellvernetzung).

Im Buch B werden Gleichungssysteme nicht als Konjunktion von Aussageformen interpretiert, eine entsprechende Oberbegriff-/Unterbegriff-Relation wird hier nicht hergestellt.

Anwendungsaufgaben, die keine Zahlenrätsel sind, findet man zum betrachteten Thema nur sehr wenige. Somit wird nicht wirklich deutlich, dass sich viele reale Situationen und Probleme durch lineare Gleichungssysteme modellieren und lösen lassen (vgl. hierzu die Ausführungen im Abschnitt 5.1). Hier sind Defizite bzgl. Modellvernetzungen auszumachen.

¹ Das Konzept „algebraische Struktur“ wird dabei nicht genannt.

² Das Konzept „Lagebeziehung“ wird dabei nicht genannt.

Vernetzungen im Buch G:

Bei der Durchsicht des Buches G fällt auf, dass hinsichtlich des fachsystematischen Aufbaus allgemein ein sehr geringer Exaktheitsanspruch zu verzeichnen ist. Verwendete Begriffe werden manchmal gar nicht, manchmal nur sehr unpräzise erläutert. So wird der Begriff des „linearen Gleichungssystems“ zwar genannt und verwendet, jedoch nirgends definiert.

Es wird zwischen linearen Gleichungssystemen von zwei Gleichungen in zwei Variablen bzw. von drei Gleichungen in drei Variablen unterschieden (fachsystematische Vernetzung durch Einteilung; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV2). Anhand zweier Beispiele wird gezeigt, dass Systeme von zwei Geradengleichungen nicht immer eindeutig lösbar sind, sondern auch keine oder unendlich viele Lösungen haben können, wodurch eine Unterteilung gemäß der Anzahl der Lösungen erfolgt (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV8). Dabei werden auch Schnittpunkte von Geraden betrachtet (Merkmalsvernetzung; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV21), verschiedene Lagebeziehungen¹ von Geraden aufgezeigt (fachsystematische Vernetzung durch Fallunterscheidung; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV13) und entsprechend unterschiedliche Anzahlen der Schnittpunkte der Geraden (fachsystematische Vernetzung durch Fallunterscheidung; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV12).

Es werden verschiedene Lösungsverfahren für Gleichungssysteme mit zwei Geradengleichungen (graphisches Verfahren, Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren und Subtraktionsverfahren) vorgestellt, sowie das Eliminationsverfahren für Gleichungssysteme mit drei Variablen (Oberbegriff-Unterbegriff-Relation; Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV17), algebraische Lösungsverfahren allerdings nur für den Fall eindeutig lösbarer Gleichungssysteme². Indem Lösungsverfahren vorgestellt werden, erfolgt zudem trivialerweise eine Merkmalsvernetzung zwischen linearen Gleichungssystemen und Lösungsverfahren (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV18), sowie eine Zugehörigkeitsvernetzung, die die Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit diesem verbindet (Abschnitt 5.2.2.1, Vernetzung FV22).

¹ Das Konzept „Lagebeziehung“ wird dabei nicht genannt.

² Für nicht eindeutig lösbare Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen wird bemerkt, dass diese rechnerisch *nicht (!)* gelöst werden könnten. (Dies wird anhand von Beispielrechnungen begründet, die zu einer falschen Aussage ($0 = 9$) bzw. einer allgemeingültigen Aussage ($12 = 12$) führen.) Allein eine graphische Lösung erscheint für alle Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen geeignet.

Die Konzepte „allgemeingültiges Gleichungssystem“, „erfüllbares“ oder „unerfüllbares Gleichungssystem“ werden nicht erwähnt, entsprechende Einteilungen von linearen Gleichungssystemen erfolgen nicht. Als lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden nur solche mit zwei Geradengleichungen betrachtet, ohne dass die hierfür notwendigen einschränkenden Bedingungen genannt werden.

Modellvernetzungen zwischen algebraischen Gleichungen (Geradengleichungen) und geometrischen Darstellungen werden aufgezeigt (Abschnitt 5.2.2.2, Vernetzung AV1a). Schnittpunkte von Geraden werden als Lösungen von algebraisch formulierten Gleichungssystemen interpretiert (Abschnitt 5.2.2.2, Teil der Vernetzung AV2). Die Lagebeziehungen zweier Geraden werden mit der Anzahl der gemeinsamen Punkte dieser Geraden und der Anzahl der Lösungen des diese Geraden beschreibenden linearen Gleichungssystems in Verbindung gebracht (Abschnitt 5.2.2.2, Teil der Vernetzung AV3).

Auch im Bereich der Modellvernetzungen sind Mängel im Schulbuch zu verzeichnen. So wird dadurch, dass als lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen ausschließlich solche mit zwei Geradengleichungen betrachtet werden, dies ohne Verdeutlichung der entsprechenden Einschränkung (s.o.), der Eindruck erweckt, dass lineare Gleichungssysteme von zwei Gleichungen mit zwei Variablen immer durch zwei Geraden geometrisch repräsentiert werden.

Als Textaufgaben, die durch ein lineares Gleichungssystem modelliert werden können, findet man Zahlenrätsel, Rätsel, Aufgaben aus dem Geschäftsleben und einige historische Aufgaben. Die Modellvernetzungen auf der Grundlage von Textaufgaben könnten wesentlich vielfältiger sein, wie auch ein Vergleich mit den Ausführungen im Abschnitt 5.1 zeigt. Insbesondere werden naturwissenschaftliche Problemstellungen zur Modellierung nicht angeboten.

Vergleicht man die Bücher für das Gymnasium mit dem Gesamtschulbuch, so zeigt sich trotz der festgestellten Unterschiede bei ersteren eine größere Vielfalt an aufgezeigten Vernetzungen bei präziserer Darstellungsweise. Auch die Aufgaben sind anspruchsvoller und prüfen das Verständnis von Zusammenhängen variationsreicher.

8.1.2 Zusammenfassung der Ergebnisse im Rahmen des intendierten Curriculums

Die folgende Tabelle 2 liefert eine Übersicht über einen Großteil wesentlicher untersuchungsrelevanten Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums. Die Relationen, in denen einzelne Vernetzungsknoten stehen, werden den entsprechenden Vernetzungskategorien zugeordnet; für fachsystematische Vernetzungen werden die Relationen zusätzlich, gemäß dem jeweiligen relationsbestimmenden fachsystematischen Aspekt und entsprechend den Ausführungen in den Abschnitten 3.3.1 bzw. 5.2.2.1, präzisiert; die entsprechenden Vernetzungsbezeichnungen aus Kapitel 5.2.2¹ werden jeweils angegeben. Die einzelnen Vernetzungen erhalten in der 2. Spalte der Tabelle 2 neue Bezeichnungen,² die auch in späteren Kapiteln wieder verwendet werden. Unter Bemerkungen wird angegeben, in welchen Richtlinien bzw. Schulbüchern die einzelnen Vernetzungen zu finden sind. Dabei werden die Richtlinien für das Gymnasium bzw. die Gesamtschule mit RGY respektive RGE abgekürzt.

Die Übersicht zeigt lediglich vorhandene Vernetzungen ohne einen Hinweis auf die recht unterschiedliche Breite oder Tiefe ihrer Darstellung in den Richtlinien bzw. Büchern zu geben. Hierfür vergleiche man die Anmerkungen unter Abschnitt 8.1.1.

Zwecks einer Begrenzung der weiteren Untersuchungen in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums und mit Blick auf eine möglichst übersichtliche graphische Darstellung der Ergebnisse (vgl. Abschnitte 7.1.1 und 7.4) werden in der Tabelle 2 *nicht alle* erhobenen Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums aufgeführt.

Verzichtet wird speziell auf Vernetzungen aus dem Buch A, die sich durch die Betrachtung linearer Gleichungssysteme als konjunktive Aussageformen ergeben, zumal diese Vernetzungen bei der Behandlung der Thematik ohne weiteres abgetrennt werden können; sie haben mehr formalistischen Charakter.

¹ Einige der hier aufgeführten Vernetzungen sind auf einer kleineren Knotenmenge als der in Abschnitt 5.2.2 angegebenen realisiert. Zur Vernetzung AV3 werden mehrere Unterkategorien (M2, M3, M4, M5 und M6) im Sinne einer differenzierteren Betrachtung neu definiert.

² Da die in Tabelle 2 aufgezählten Vernetzungen nur eine Auswahl derjenigen unter Abschnitt 5.2.2 aufgeführten darstellen, erfolgt hier eine Umbezeichnung der Vernetzungen entsprechend einer neuen Nummerierung.

Ferner wird auf die im Buch A vorgenommene Einteilung linearer Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen in Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen und weitere Spezialfälle nicht weiter eingegangen, zumal die Spezialfälle nur eine Randbedeutung bei der Abhandlung der Thematik in dem Schulbuch erfahren. Auch die Vernetzungen der Konzepte erfüllbares, unerfüllbares bzw. allgemeingültiges Gleichungssystem werden in der weiteren Untersuchung nicht betrachtet.

Da lineare Gleichungssysteme von drei Gleichungen in drei Variablen in allen drei untersuchten Schulbüchern recht vernetzungsarm abgehandelt werden, reduzieren sich die folgenden Betrachtungen im Wesentlichen auf lineare Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen. Speziell wird auch nicht weiter auf die Einteilung linearer Gleichungssysteme von drei Gleichungen in drei Variablen gemäß der Anzahl ihrer Lösungen eingegangen.

Die o.a. Vernetzungen aus dem Rahmen des intendierten Curriculums, die im Fortgang der Untersuchung nicht weiter berücksichtigt werden, sind im Anhang E dargestellt und mit ihrer Bezeichnung aus Kapitel 5.2.2 beschriftet.

Die eher trivialen Vernetzungen F6, F7 und F8 in der Tabelle 2 werden hier berücksichtigt, da die Konzepte, die hierdurch in Relation zueinander gesetzt werden, bereits Knotenpunkte anderer Vernetzungen aus der Tabelle 2 sind. Die nachfolgenden graphischen Darstellungen der Vernetzung im Rahmen des intendierten Curriculums werden dadurch abgerundet. Andere triviale Vernetzungen, wie z.B. „lineare Gleichung“ „ist Teil von“ „LGS“, „2 Variable“ „sind Teil von“ „Geradengleichung“, „Lösungsmenge eines 3×3 LGS“ „gehört zu“ „ 3×3 LGS“, sind hingegen nicht berücksichtigt worden.

Tabelle 2: Wesentliche Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums

Vernetzungskategorie	neue Bezeichnung	Vernetzungsknoten	Bemerkungen
F: fachsystematische Vernetzung			
FV2 Einteilung (gemäß der Zahl der Gleichungen und der Variablen)	F1	LGS - LGS von 2 Gleichungen in 2 Variablen / LGS von 3 Gleichungen in 3 Variablen	RGY, RGE, Buch A, B, G
FV13 Fallunterscheidung (unter dem geometrischen Aspekt der Lagebeziehung)	F2	zwei Geraden - sich schneidende / parallele / identische Geraden	Buch A, B, G
FV12 Fallunterscheidung (entsprechend der Anzahl der Schnittpunkte)	F3	Schnittpunkte zweier Geraden - ein Schnittpunkt / kein Schnittpunkt / unendlich viele Schnittpunkte	Buch A, B, G
FV8 Fallunterscheidung (entsprechend der Anzahl der Lösungen)	F4	Lösungen eines LGS von 2 Geradengl. - genau eine Lösung / keine Lösung / unendlich viele Lösungen	Buch A, B, G
FV17 Oberbegriff-/ Unterbegriff-Relation	F5	Lösungsverfahren - graphisches Verfahren / Gleichsetzungsverfahren / Einsetzungsverfahren / Additionsverfahren	RGY, RGE, Buch A, B, G
FV18 Merkmalsvernetzung	F6	LGS - Lösungsverfahren	RGY, RGE, Buch A, B, G
FV21 Merkmalsvernetzung	F7	2 Geraden - Schnittpunkte zweier Geraden	Buch A, B, G
FV22 Zugehörigkeitsrelation	F8	LGS von 2 Geradengl. - Lösungen eines LGS von 2 Geradengl.	RGY, RGE, Buch A, B, G

M: Modellvernetzung				
AV1	M1	Gleichung	- Gerade	RGY, RGE, Buch A, B, G
AV3	M2	Lösung eines GLS von 2 Geradengl. 1 Lösung keine Lösung unendl. viele Lösungen	- Schnittpunkt der Geraden - 1 Schnittpkt. - kein Schnittpunkt - unendl. viele Schnittpunkte	RGY, RGE, Buch A, B, G
AV3	M3	eine Lösung keine Lösung unendlich viele Lösungen	- sich schneidende Geraden - parallele Geraden - aufeinander- liegende Geraden	RGY, RGE, Buch A, B, G
AV3	M4	1 Schnittpunkt kein Schnittpunkt unendlich viele Schnittpunkte	- sich schneidende Geraden - parallele Geraden - aufeinander- liegende Geraden	Buch A, B, G
AV3	M5	eine Lösung keine Lösung unendlich viele Lösungen	- Struktur 1 - Struktur 3 - Struktur 2 ¹	Buch A, B
AV3	M6	sich schneidende Geraden parallele Geraden aufeinanderliegende Geraden	- Struktur 1 - Struktur 3 - Struktur 2	Buch A, B
AV7	M7	Textaufgabe (Problemstellung)	- LGS (2×2) / LGS (3×3)	RGY, RGE, Buch A, B, G

¹ Struktur 2: Die beiden Geradengleichungen sind äquivalent.

Struktur 3: Bis auf einen konstanten Summanden lässt sich die eine Geradengleichung aus der anderen durch Äquivalenzumformungen gewinnen.

Struktur 1: Es liegt weder die Struktur 2 noch die Struktur 3 vor. (Vgl. Abschnitte 5.1.7 und 5.2.2.)

Wie man der Tabelle 2 noch mal entnehmen kann, findet man die Vernetzungen, die in den Richtlinien für das Gymnasium bzw. die Gesamtschule angegeben sind, in den entsprechenden Schulbüchern wieder. Die Ergebnisse im Rahmen des intendierten Curriculums ergeben sich somit bereits allein durch die Betrachtung der verwendeten Bücher.

Die Modellvernetzung M7 steht in der Tabelle 2 und in allen weiteren Betrachtungen stellvertretend für konkrete Modellvernetzungen zwischen bestimmten Textaufgaben und den zugehörigen linearen Gleichungssystemen.

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die verschiedenen Anwendungsbereiche, aus denen die Textaufgaben in den drei untersuchten Schulbüchern stammen.

Tabelle 3: Anwendungsbereiche in den Textaufgaben¹

Buch A	Zahlenrätsel Aufgaben aus der Geometrie Aufgaben aus dem Alltag (u.a. Mischungsaufgaben) Aufgaben aus dem Geschäftsleben Aufgaben aus der Physik (zum Hebelgesetz, zum Wärmeaustausch, Bewegungsaufgaben)
Buch B	Zahlenrätsel / Rätsel Aufgaben aus dem Alltag historische Aufgaben
Buch G	Zahlenrätsel / Rätsel Aufgaben aus dem Geschäftsleben historische Aufgaben

¹ Näheres zu Aufgaben aus den einzelnen Anwendungsbereichen findet man in Abschnitt 5.1.8.

Die nachfolgenden Graphen zeigen die Netzwerke zu linearen Gleichungssystemen im Rahmen des intendierten Curriculums der einzelnen Schulen auf der Grundlage von Tabelle 2. In diesen Netzwerken sind die Graphen zu den einzelnen in Tabelle 2 aufgeführten Vernetzungsaspekten jeweils zusammengefügt.¹ Die Elemente der Knotenmenge sind demnach genau die in der 3. Spalte von Tabelle 2 aufgeführten Knoten; die in den einzelnen Abbildungen jeweils dargestellte Relation ist die Vereinigung der entsprechenden in Tabelle 2 benannten Vernetzungen. Die eingezeichneten Kanten sind allesamt ungerichtet, da die betrachteten Vernetzungen symmetrisch sind bzw. mit jeder der betrachteten Vernetzungen auch ihre Umkehrrelation Bestand des intendierten Curriculums ist. Fachsystematische Vernetzungen sind grün eingezeichnet, Modellvernetzungen rot.

Durch die beiden nachfolgenden Netzwerke ist eine Zusammenfassung wesentlicher Vernetzungen im Rahmen des intendierten Curriculums gegeben und damit auch eine Kurzfassung der Antwort zur *Forschungsfrage 1.1* (vgl. Kapitel 6.1) und den dazu formulierten Unterfragen.

¹ Vgl. hierzu Kapitel 3.1.

Abbildung 16: Netzwerk im Rahmen des intendierten Curriculums, Gymn. A und B

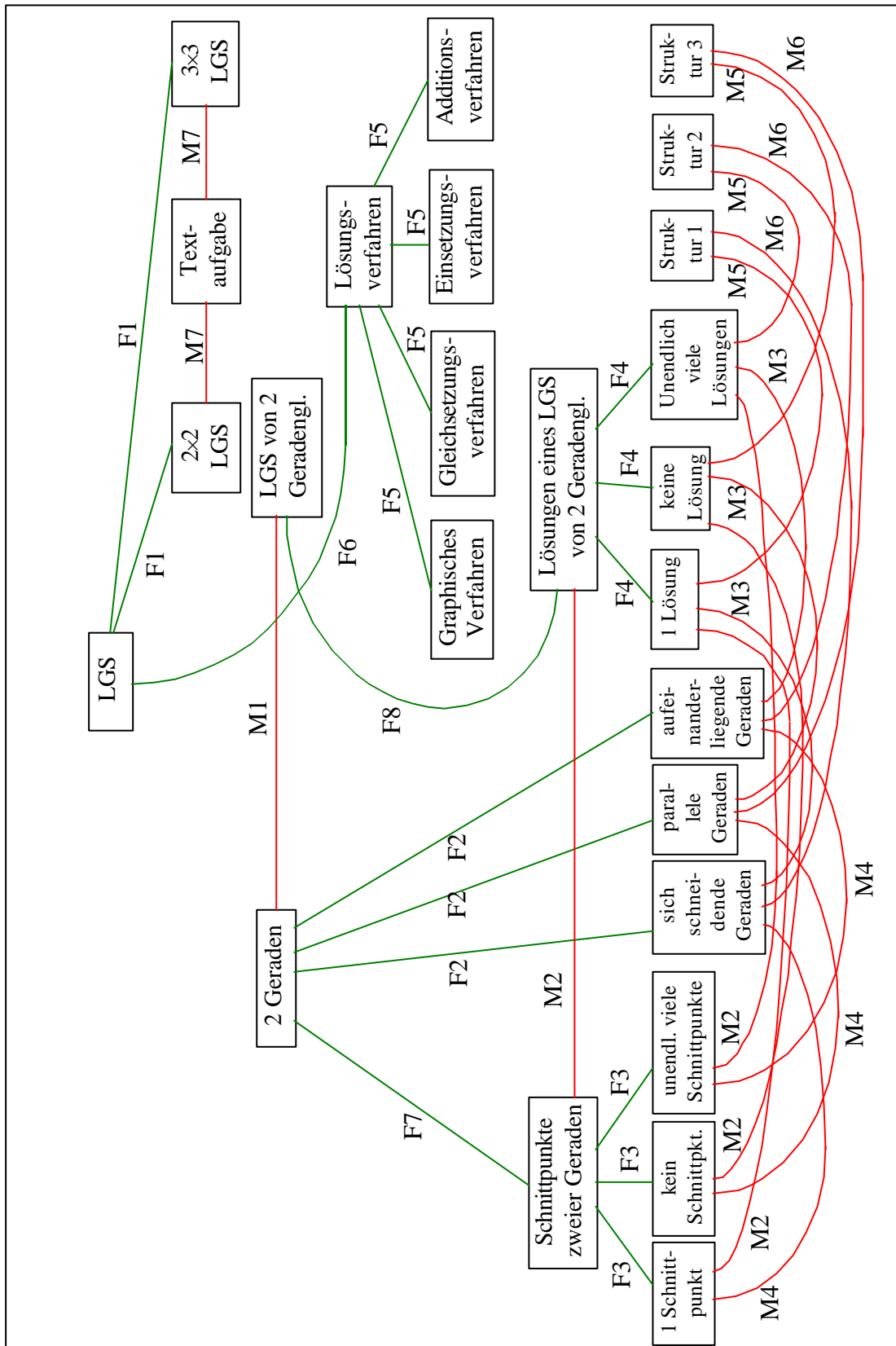
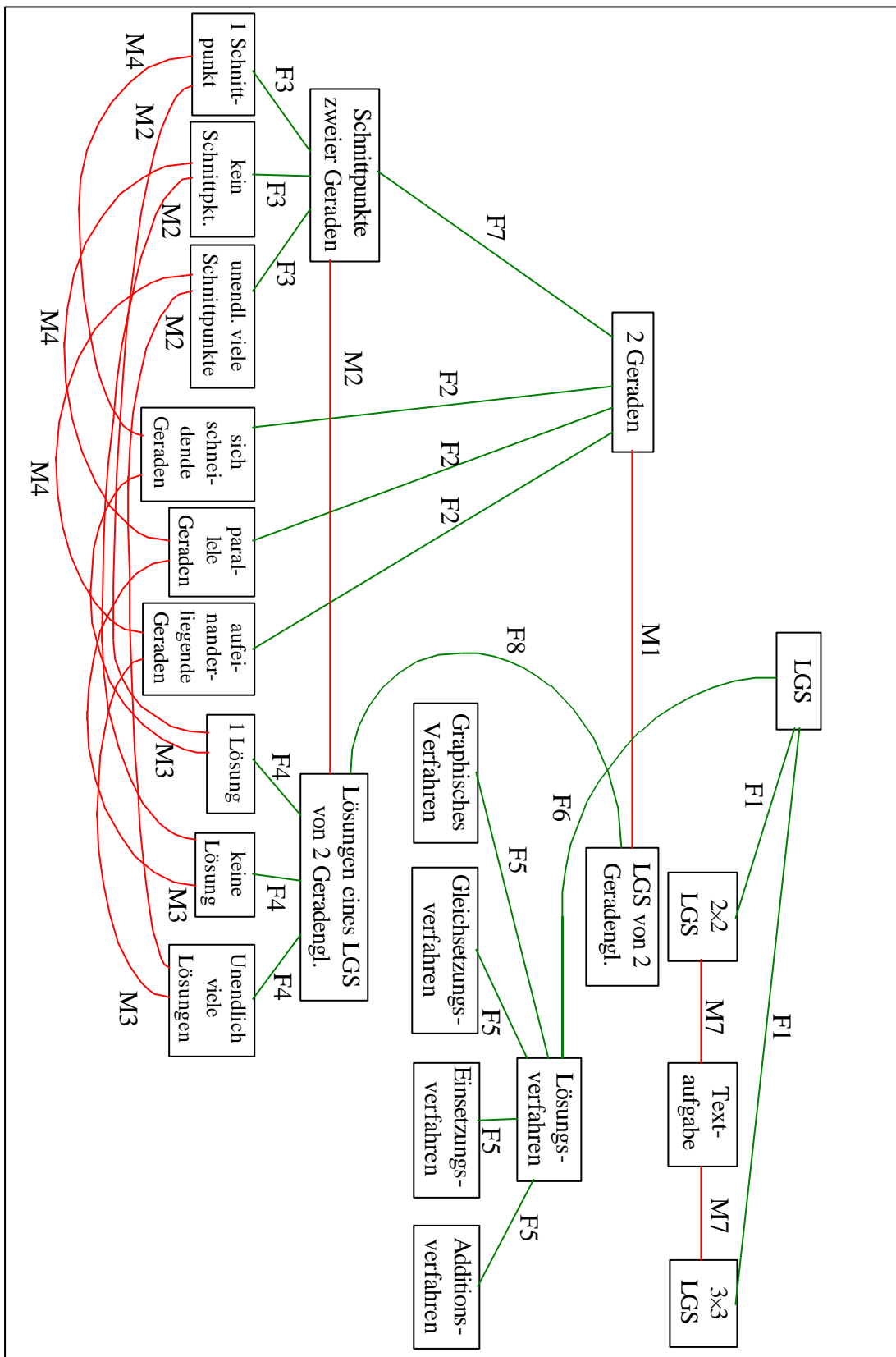


Abbildung 17: Netzwerk im Rahmen des intendierten Curriculums, Gesamtschule



An den Netzwerken in den Abbildungen 16 und 17 erkennt man, dass in den drei untersuchten Schulbüchern im Wesentlichen dieselben Vernetzungen im Mittelpunkt der Betrachtung stehen. (Die Netzwerke sind bis auf den Komplex zur algebraischen Struktur linearer Gleichungssysteme identisch.) Die Tiefe und die Präzision in den Ausführungen der einzelnen Bücher ist allerdings, wie in Abschnitt 8.1.1 dargelegt, recht unterschiedlich.

Bildliche Darstellungen von Vernetzungen wichtiger Konzepte zur Thematik der linearen Gleichungssysteme sind in den drei untersuchten Schulbüchern nicht vorhanden. Zusammenhänge werden hier weitgehend in Textform dargeboten. Graphisch veranschaulicht werden lediglich Geraden und ihre Lagebeziehungen in der Ebene durch Darstellungen im Koordinatensystem.

Auf der Grundlage der Ergebnisse im Rahmen des intendierten Curriculums sind Concept Maps erstellt worden (siehe Anhang F). Sie veranschaulichen die Vernetzung rund um das Thema der linearen Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen in ihren wesentlichen Teilen. Die dargestellten Verbindungen werden in den entsprechenden Schulbüchern explizit aufgezeigt oder können von den Schülern anhand der Bearbeitung der Aufgaben zum Thema erfahren werden. Im Sinne der Übersichtlichkeit beschränken sich die Concept Maps nur auf wichtige innermathematische Bezüge. Die Concept Map zu Buch G stellt dabei einen Ausschnitt der Concept Map zu den Büchern A und B dar, ausgenommen ist der Komplex zur algebraischen Struktur. Diese Concept Maps dienen als eine Untersuchungsgrundlage im Rahmen des erreichten Curriculums (vgl. 7.4).

8.2 Vernetzungen in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer

Die Antworten der Lehrer in den Interviews (vgl. Abschnitt 7.4) werden unter 8.2.1 aufgeführt, Abschnitt 8.2.2 enthält eine zusammenfassende Darstellung der Vernetzungen in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer.

8.2.1 Ergebnisse in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer

Die Erhebungen in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus Lehrersicht erfolgten auf der Grundlage von Lehrerinterviews (vgl. 7.1, 7.4); Anhang G enthält den verwendeten Fragebogen.

Die Antworten der drei befragten Lehrer wurden anhand von Gesprächsnotizen sinngemäß festgehalten, die betroffenen Lehrer haben bestätigt, dass die Aufzeichnungen jeweils mit dem Inhalt ihrer Ausführungen konform sind (vgl. 7.4). Diese Aufzeichnungen der Lehrerantworten sind im Anhang H wiedergegeben. Die Aussagen der einzelnen Lehrer werden dabei nicht zeitchronologisch entsprechend dem Ablauf des Interviews aufgeführt, sondern den einzelnen Fragen zugeordnet. Dabei werden die Lehrerantworten jeweils gegenübergestellt.

Im Folgenden sind nun diese Antworten in einem tabellarischen Überblick in Kurzform zusammengefasst.

Tabelle 4: Antworten der Lehrer in den Interviews

<i>Lehrer A</i>	<i>Lehrer B</i>	<i>Lehrer G</i>
1. Über welchen Zeitraum hinweg wurde das Thema der linearen Gleichungssysteme behandelt?		
6 bis 8 Wochen	4 Wochen	ca. 4 bis 5 Wochen
2. Welche Lerninhalte wurden vermittelt? Erfolgte die Auswahl der Lerninhalte in Anlehnung an das Schulbuch und wenn ja, in welchem Umfang? Wurden auch Lerninhalte vermittelt, die über die Darstellungen des Schulbuches hinausgehen?		
Es wurden die Lerninhalte aus dem Schulbuch vermittelt. Über das Buch hinausgehende Lerninhalte wurden nicht vermittelt.		
Eine Abgrenzung von linearen Gleichungen zu nichtlinearen Gleichungen wurde nicht aufgezeigt; das Bewusstsein der Schüler hierfür nicht geschärft. Auch im Zusammenhang mit Gleichungssystemen wurde den Schülern die Eigenschaft der Linearität nicht vermittelt.		

3. <i>Wie wurde der Stoff inhaltlich integriert?</i>		
Motivierender Einstieg: Frage nach den Schnittpunkten von Geraden mit den Koordinatenachsen und nach den Schnittpunkten von zwei Geraden. Dies führte zur Herleitung des Gleichsetzungsverfahrens. Additions- und Einsetzungsverfahren wurden später vorgestellt.	Der Unterricht folgte den Vorgaben des Schulbuches.	
4. <i>Haben die Schüler verschiedene Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme kennengelernt? Wurde auch ein graphisches Lösungsverfahren besprochen?</i>		
Die Schüler lernten für Gleichungssysteme mit zwei Geradengleichungen sowohl ein graphisches Lösungsverfahren als auch drei Rechenverfahren kennen, das Gleichsetzungsverfahren, das Einsetzungsverfahren und das Additionsverfahren. Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen wurden mit dem Additionsverfahren gelöst.		
		Die Aufgaben konzentrierten sich auf die Anwendung dieser Verfahren bei der Bestimmung der Lösung eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme. Rechen- training stand im Mittelpunkt. Lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen wurden nur sehr kurz behandelt mit wenigen Aufgabenbeispielen.

<i>Wurden algebraische Darstellungen und Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen geometrisch interpretiert?</i>	
Sich schneidende, parallele sowie identische Geraden wurden im Koordinatensystem graphisch dargestellt; die Lösungen der linearen Gleichungssysteme mit den zugehörigen Geradengleichungen wurden als Schnittpunkte der Geraden interpretiert.	
Geometrische und algebraische Betrachtungen erfolgten bei Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen immer parallel.	
	Im Anschluss an die Thematik der linearen Gleichungssysteme wurden lineare Ungleichungssysteme behandelt und diese zeichnerisch gelöst.
	Aufgaben, die das Verständnis dieser Zusammenhänge erfordert hätten, wurden nicht bearbeitet.
<i>Wurde im Unterricht ein Zusammenhang zwischen der algebraischen Struktur eines Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen und der Lösungsmenge des Gleichungssystems bzw. der Lagebeziehung der Geraden hergestellt?¹</i>	
Diese Zusammenhänge wurden nicht aufgezeigt.	
<i>1. Konnten die Schüler im Unterricht die Beschreibung außermathematischer Anwendungen durch lineare Gleichungssysteme erfahren? Wenn ja: Um welche Anwendungen handelte es sich und in welchem Umfang wurden sie dargestellt? Hat ein fachübergreifender Unterricht zu diesem Thema stattgefunden?</i>	
Es wurden nur Anwendungsaufgaben aus dem Buch besprochen.	Es wurden nur wenige Anwendungsaufgaben aus dem Buch gerechnet.
Ein fachübergreifender Unterricht fand nicht statt.	

¹ Im Interview mit Lehrer G erübrigte sich diese Frage aufgrund der Antwort zur 2. Frage.

<p>6. <i>Wie wurden Beziehungen zwischen einzelnen Lerninhalten dargestellt? In welchen Bereichen wurde über das Schulbuch hinausgegangen; was wurde ergänzt, was wurde ersetzt, was wurde weggelassen? ...</i></p>		
<p>Zusammenhänge wurden im selben Umfang wie im Schulbuch dargestellt und auch wie da anhand graphischer Darstellungen von sich schneidenden, parallelen bzw. identischen Geraden im Koordinatensystem veranschaulicht.</p>		
<p>7. <i>Wie schätzen Sie die motivationale Haltung der Schüler ein?</i></p>		
<p>Bei linearen Gleichungssystemen handelt es sich um ein angenehmes Thema, da die Anschauung vorhanden ist. Damit ist dieses Thema auch einfacher zu unterrichten als manches andere. Es ist vorstellbar, dass Schüler an diesem Thema Spass haben, weil sie sehen, was sie machen.</p>	<p>Lineare Gleichungssysteme sind ein schönes Unterrichtsthema. Lösungsschemata können gut begriffen werden; die Schüler können erfolgreich sein. Bei Anwendungen bekommen die Schüler eine Krise.</p>	<p>Die Lernmotivation der Schüler ist grundsätzlich ziemlich schlecht - nicht nur im Fach Mathematik!</p>
<p>8. <i>Gibt es besondere Zusammenhänge, die von den Schülern erfasst und behalten worden sind? Können die Schüler dieses Wissen um Zusammenhänge beim Lösen von Aufgaben und Problemen erfolgreich anwenden? Gelingt den Schülern das Modellieren von Textaufgaben mittels linearer Gleichungssysteme?</i></p>		
<p>Die Schüler beherrschen vor allem die Lösungsverfahren.</p>		
<p>Die Rechenverfahren fallen den Schülern zuerst ein, der Bezug zu den Geraden später.</p>	<p>Kenntnisse der Verbindungen zwischen den Lösungen eines linearen Gleichungssystems und ihrer geometrischen Deutung müssten vorhanden sein.</p>	<p>Außer Rechenverfahren haben die Schüler wahrscheinlich nichts behalten.</p>

Das Anwenden vom Wissen über Beziehungen wird den Schülern allgemein schwerfallen, vor allem, wenn die Aufgabenstellung neu für sie ist. Mit Anwendungsaufgaben haben viele Schüler Schwierigkeiten.	Aufgaben, die nicht anhand eingeübter Schemata zu lösen sind, überfordern die Schüler.
<i>Liegen Ihren Einschätzungen zwischenzeitliche Bestandsaufnahmen von Schülerkenntnissen zugrunde?</i>	
Eine zwischenzeitliche Überprüfung der Schülerkenntnisse seit dem Unterricht zu diesem Thema gab es nicht.	

Im Anschluss an das Interview bemerkte *Lehrer A* noch:

- Es wären bessere Schulbücher nötig, mit mehr Aufgaben und lebensnäheren Anwendungsbezügen.
Die Gestaltung des Schulbuches ist sehr wichtig. Wenn mit anderen Materialien außer dem Schulbuch gearbeitet wird, dann kommen die Eltern und fragen, was sie mit ihren Kindern lernen und üben können. Eltern wollen Unterricht nach Schulbuch. Dadurch ist eine bessere Überschaubarkeit des Unterrichtsstoffes gegeben, man kann den Kindern besser helfen. Auch wollen Eltern, dass ihre Kinder mehr Hausaufgaben bekommen.
- Wenn man sich mit den Fragen zu der Thematik [der linearen Gleichungssysteme] beschäftigt und anfängt, über den Unterricht nachzudenken, wird einem erst bewusst, wie wenig man den Schülern vermittelt hat, wie wenig sie doch gelernt haben. Übrig bleiben nur die Rechenverfahren.
Diese Reflexion und Bewusstseinsmachung ist auch nötig und wertvoll.

8.2.2 Zusammenfassung der Ergebnisse in den Rahmen des implementierten und des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer

Die Antworten zu den Fragen unter 1., 6. und 7. lassen erkennen, dass Besonderheiten, die auf das erreichte Curriculum in einer speziellen, ungewöhnlichen Weise Einfluss nehmen könnten, nicht vorliegen.

Der Unterricht zur betrachteten Thematik fand an den Gymnasien jeweils im 8. Schuljahr und an der Gesamtschule im 9. Schuljahr statt (vgl. Kapitel 6.2); gezielte Wiederholungen der Unterrichtsinhalte gab es seitdem nicht, es wurden höchstens einige Inhalte in anderen Zusammenhängen wieder aufgegriffen.

Durch die Interviews werden aus Lehrersicht sowohl Vernetzungen im Rahmen des implementierten Curriculums als auch eine grobe Einschätzung vorrangiger Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums erfasst. Die Ergebnisse werden nachfolgend getrennt nach Curriculumsrahmen und unter Zuordnung zu den einzelnen Schulen zusammenfassend wiedergegeben. Die verwendeten Bezeichnungen für die einzelnen Vernetzungen entsprechen denen in Tabelle 2 (Abschnitt 8.1.2) eingeführten.

8.2.2.1 Vernetzungen im Rahmen des implementierten Curriculums

Alle drei Lehrer behandelten sowohl lineare Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen als auch lineare Gleichungssysteme von drei Gleichungen in drei Variablen, wodurch eine entsprechende Aufteilung linearer Gleichungssysteme (F1) deutlich wird.

Alle drei Lehrer haben verschiedene Lagebeziehungen von Geraden aufgezeigt (F2) und entsprechend unterschiedliche Anzahlen von Schnittpunkten zweier Geraden (F3 und F7) bzw. unterschiedliche Anzahlen der Lösungen von Gleichungssystemen mit zwei Geradengleichungen (F4).

Die in den drei Schulbüchern jeweils vorgestellten Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme (graphisches Lösungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren,

Einsetzungsverfahren und Additionsverfahren für lineare Gleichungssysteme von zwei Gleichungen in zwei Variablen; Additionsverfahren für lineare Gleichungssysteme von drei Gleichungen in drei Variablen) wurden von jedem der drei Lehrer im Unterricht behandelt. Somit wurde neben der trivialen Merkmalsvernetzung F6 (lineare Gleichungssysteme „haben“ Lösungsverfahren) auch die fachsystematische Vernetzung F5 (verschiedene Konzepte zum Oberbegriff „Lösungsverfahren“) hergestellt. Mittels Lösungsverfahren gewonnene Lösungen eines Gleichungssystems stehen trivialerweise in einer Zugehörigkeitsrelation zum Gleichungssystem (F8).

Alle drei Lehrer haben Bezüge zwischen Geometrie und Algebra entsprechend der Modellvernetzungen M1, M2, M3 bzw. M4 im Unterricht vermittelt.

Die Verbindung spezieller algebraischer Strukturen von linearen Gleichungssystemen aus zwei Geradengleichungen mit der jeweiligen Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems (M5) bzw. der Lagebeziehung der Geraden (M6) wurde von keinem der drei Lehrer im Unterricht thematisiert.

Modellvernetzungen durch das Lösen von Textaufgaben (M7) erfolgten im Unterricht aller drei Lehrer. Dabei wurden die Aufgabenstellungen dem jeweils verwendeten Schulbuch entnommen; entsprechend wurden unterschiedlich differenzierte Anwendungsbereiche angesprochen (vgl. Tabelle 3 in 8.1.2).

Der Unterricht erfolgte bei allen drei befragten Lehrern in *enger Anlehnung an das Schulbuch*. Über das jeweils verwendete Schulbuch hinausgehende Vernetzungen wurden von keinem der drei Lehrer dargestellt.

Für die Vernetzung im Rahmen des implementierten Curriculums ergeben sich für die einzelnen Schulen die Graphen der nachfolgenden Abbildungen. Sie liefern gleichzeitig die Antwort auf die *Forschungsfragen unter 1.2* aus Kapitel 6.1.

Die in den Graphen dargestellten Vernetzungen entsprechen im Wesentlichen denen aus der Concept Map, die auf der Grundlage von Buch G erstellt wurde (vgl. Abschnitt 8.1.2 und Anhang F). Den drei Lehrern wurde diese Concept Map vorgelegt (vgl. Abschnitt 7.4); sie haben bestätigt, dass die dargestellten Beziehungen denen von ihnen unterrichteten entsprechen.

Abbildung 18: Netzwerk im Rahmen des implementierten Curriculums, Gymn. A und B

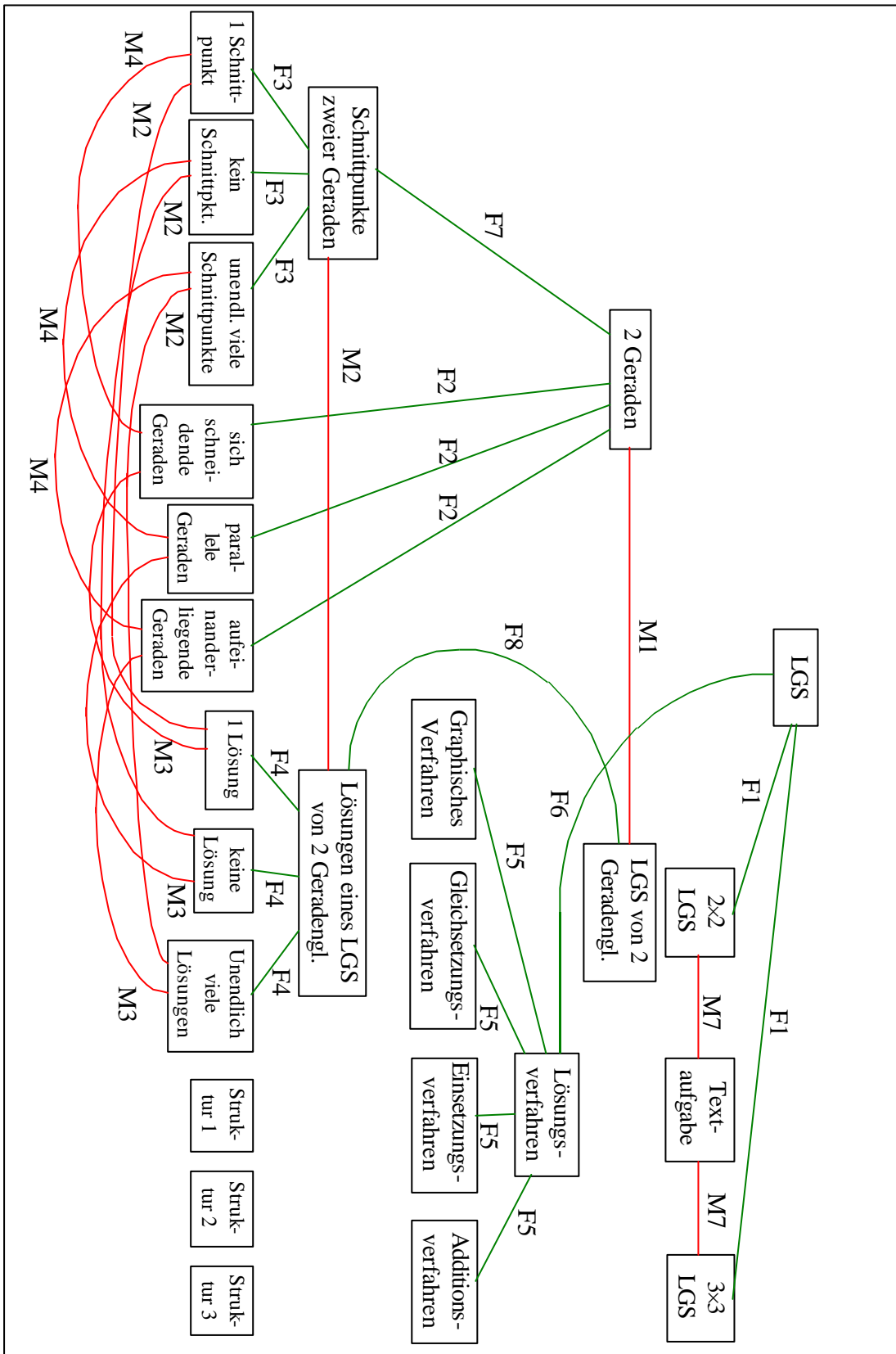
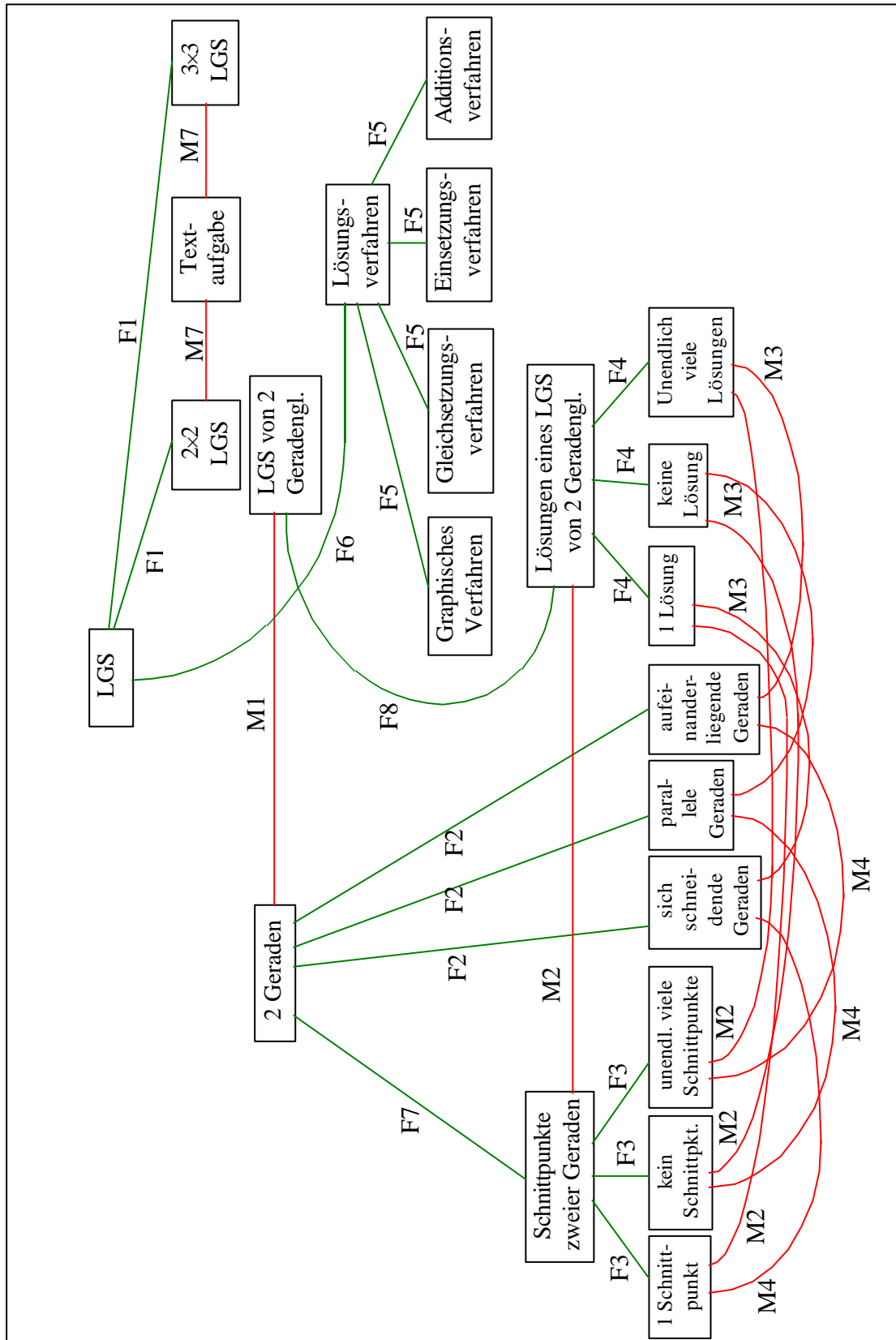


Abbildung 19: Vernetzungen im Rahmen des implementierten Curriculums, GE



8.2.2.2 Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums aus der Sicht der Lehrer

Die drei befragten Lehrer sind trotz der teils unterschiedlichen Darstellungen des Themas und des verschiedenen Tiefgangs der Behandlung im Unterricht alle drei der Meinung, dass im Wesentlichen Rechenverfahren als Kenntnisse der Schüler übrigbleiben. Als vorherrschenden Vernetzungsarten im vermeintlich erreichten Curriculum können somit die – recht trivialen – Vernetzungen F5 und F6 unterstellt werden, sowie Algorithmusvernetzungen und Ablaufvernetzungen zu den einzelnen Rechenverfahren, die allerdings nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung sind.

Bei den Gymnasialschülern dürften auch, weniger stark ausgeprägt, Modellvernetzungen zwischen Geometrie und Algebra vorhanden sein.

Ein dynamischer Umgang mit dem Wissen um Vernetzungen in verständiger, nicht algorithmenartiger Weise gelingt in der Einschätzung der Gymnasiallehrer nur wenigen ihrer Schüler; aus der Sicht von Lehrer G sind die Schüler der Gesamtschule dazu nicht in der Lage.

Schüler haben Schwierigkeiten beim Modellieren von Textaufgaben.

Mit diesen Einschätzungen der Lehrer ist eine Antwort auf die *Forschungsfrage 1.3.1* (vgl. Kap.6.1) gegeben.

8.3 Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums

Im Abschnitt 8.3.1 wird die noch ausstehende Präzisierung des Untersuchungsmaterials (vgl. Kapitel 7.4) nachgeliefert. Abschnitt 8.3.2 enthält die Ergebnisse der Schülertests und Abschnitt 8.3.3 gibt eine Zusammenfassung hierüber.

8.3.1 Präzisierung des Untersuchungsmaterials

Um Vernetzungen im tatsächlich erreichten Curriculum zu erfassen, wurden *Schülertests* durchgeführt. Diese bezogen sich auf wesentliche Vernetzungen, die für die Schüler durch den erfolgten Unterricht erfahrbar waren.

Die Untersuchung im Rahmen des erreichten Curriculums gliederte sich in sechs Schritte (vgl. Kapitel 7.2.3 und 7.4); die ersten vier prüften bewusstes deklaratives Wissen der Schüler, der fünfte Schritt diente zur Gewinnung von Erkenntnissen hinsichtlich der Fähigkeit der Schüler ihr Wissen um Vernetzungen verständig und erfolgreich in Problemlösungsprozessen anzuwenden und der sechste Schritt prüfte die Fähigkeiten der Schüler, Anwendungsaufgaben zu modellieren (siehe Anhang I).

Ergänzend zur Darstellung der Forschungsmethodik im Kapitel 7 werden nachfolgend noch einige vorgenommene Präzisierungen des Unterrichtsmaterials angegeben, die sich durch die Untersuchungsergebnisse im Rahmen des implementierten Curriculums begründeten.

So konnte die Begriffsliste, die den Schülern im *zweiten Schritt* vorgelegt wurde (siehe Anhang I), erst auf der Grundlage der im Unterricht umgesetzten Lerninhalte erstellt werden.

Die dem *vierten Schritt* zugrunde liegenden Concept Maps waren jene anhand der Schulbücher angefertigten aus Anhang F. Diese Concept Maps waren zwar aufgrund der Erhebungen im Rahmen des intendierten Curriculums entstanden, da jedoch auf der Grundlage des jeweiligen Schulbuches im Unterricht gearbeitet wurde, stellen sie ebenso wesentliche Vernetzungen aus dem Rahmen des implementierten

Curriculums dar, und somit Vernetzungen, die bei den betroffenen Schülern erwartet werden konnten.

Den Schülern wurden die Concept Maps unvollständig vorgelegt; die fehlenden Konzepte sowie Verbindungen sollten von ihnen ergänzt werden (siehe Anhang I). Die einzutragenden Verbindungen bezogen sich hauptsächlich auf Modellvernetzungen zwischen Lösungen eines Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen, Geradenschnittpunkten, Lagebeziehungen von Geraden und algebraischer Struktur eines Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen (M2, M3, M4, M5, M6). Einige Begriffe, zwischen denen die Verbindungen fehlten, sollten ebenfalls durch die Schüler ergänzt werden. Somit konnten einzuzeichnende Verbindungen nicht zu leicht erraten werden. Außerdem ließen sich Kenntnisse über weitere Vernetzungen (fachsystematische Vernetzungen F2, F3, F4) der einzutragenden Begriffe mit der nächst höheren Ebene der vorgelegten Concept Map überprüfen.

Wurden von den Schülern drei oder vier Begriffe der letzten Zeile der Concept Map kettenförmig verbunden, d.h. der erste mit dem zweiten, der zweite mit dem dritten und ggf. der dritte mit dem vierten, so wird dies genau so bewertet, wie wenn diese Begriffe alle jeweils paarweise miteinander verbunden wurden. Dies ist durch die Transitivität der Relation $M2 \cup M3 \cup M4 \cup M5 \cup M6$ ¹ zu rechtfertigen.

Da die Concept Maps Vorgaben enthielten, die für die Begriffsbündelung im dritten Schritt hätten verwendet werden können, wurden die Testunterlagen zum zweiten und dritten Schritt vor Ausgabe der Blätter zum vierten Schritt eingesammelt.

¹ Zur Vereinigung von Relationen vgl. Festlegung in Abschnitt 3.1.

Es gelten folgende Aussagen (vgl. auch Kapitel 5.1):

- (1) LGS von 2 Geradengl. hat genau eine Lösung \Leftrightarrow die beiden Geraden haben genau einen Schnittpunkt \Leftrightarrow die beiden Geraden schneiden sich \Leftrightarrow LGS hat Struktur 1
- (1) LGS von 2 Geradengl. hat keine Lösung \Leftrightarrow die beiden Geraden haben keinen Schnittpunkt \Leftrightarrow die beiden Geraden sind parallel \Leftrightarrow LGS hat Struktur 3
- (1) LGS von 2 Geradengl. hat unendlich viele Lösungen \Leftrightarrow die beiden Geraden haben unendlich viele Schnittpunkte \Leftrightarrow die beiden Geraden liegen aufeinander \Leftrightarrow LGS hat Struktur 2

Damit stehen zwei Konzepte der betrachteten Knotenmenge genau dann in einer der Relationen M2, M3, M4, M5 oder M6 zueinander, wenn sie äquivalent sind. Hieraus folgt zusammen mit der Transitivität der Äquivalenzrelation die Transitivität der Relation $M2 \cup M3 \cup M4 \cup M5 \cup M6$.

Die unvollständigen Concept Maps wurden den Schülern im DIN A 3 - Format vorgelegt, damit genügend Platz für Einträge in den freien Kästen vorhanden war.

Die endgültige Formulierung der Unterlagen für den 5. und 6. Untersuchungsschritt ist in Anhang I zu finden.

8.3.2 Ergebnisse der Schülertests

Die Schüler aller getesteten Lerngruppen an den Gymnasien haben fast ausnahmslos die gestellten Aufgaben sehr ernsthaft und sorgfältig bearbeitet. Sie haben entsprechend der Anweisungen des jeweils aufsichtführenden Lehrers selbständig gearbeitet, so dass die Testergebnisse individuelle Leistungen der Schüler widerspiegeln.

Die Schüler der Gesamtschule waren ebenfalls bemüht, die Testaufgaben bestmöglich zu bearbeiten. Die Aufgabenstellungen waren für sie jedoch so schwer, dass viele Schüler ab dem dritten Testschritt leere oder fast leere Blätter abgegeben haben. Der anfängliche Wille zu einer guten Darstellung eigener Kenntnisse in den Tests schlug bei den meisten in Resignation um. Dennoch haben sie in jedem Schritt aufs Neue versucht, mit den Aufgaben zurecht zu kommen, haben aber größtenteils von Schritt zu Schritt nach immer kürzeren Zeitabständen aufgegeben.

Die Ergebnisse der einzelnen Untersuchungsschritte werden nachfolgend dargestellt und jeweils zusammengefasst. Vernetzungen, die bei mehr als 50% der Schüler als vorhanden erscheinen, werden als „*sichere Vernetzungen*“ (vgl. Abschnitt 7.4) bezeichnet.

Eventuelle *Einflüsse der Zeit* seit Vermittlung der Lerninhalte werden für die beiden beteiligten Gymnasien in den Ergebnissen zu den einzelnen Untersuchungsschritten mit erörtert.

8.3.2.1 Ergebnisse im ersten Untersuchungsschritt

Die von den Schülern genannten Begriffe sind in den Tabellen 5 bis 9 im Anhang J aufgeführt. Für jede der beteiligten Schulen sind dabei jahrgangsbezogen die absolute und die relative Häufigkeit, mit der die Begriffe jeweils genannt wurden, angegeben. Die Begriffe sind mit fallender Häufigkeit geordnet.

Die *Gymnasialschüler* haben größtenteils Begriffe aufgeschrieben, die in einem sinnvollen Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen stehen. Lösungsverfahren wie auch graphische Darstellungen werden genannt, ebenso lineare Funktionen und Geradengleichungen. Hieraus wird ersichtlich, dass Vernetzungen sowohl zu algebraischen wie auch zu geometrischen Inhalten vorhanden sind.

Im Jahrgang 8 des Gymnasiums A werden die Konzepte „2 Variablen“ und „3 Variablen“ am häufigsten genannt (67%). Dies zeigt die sichere Vernetzung **F1** an. Ebenfalls sicher ist hier die Merkmalsvernetzungen **F6** (mit dem Additionsverfahren und mit dem Einsetzungsverfahren also mit Lösungsverfahren).

Im Jahrgang 11 des Gymnasiums A sowie in beiden getesteten Lerngruppen des Gymnasiums B weist die Häufigkeit des Konzepts „Darstellung im Koordinatensystem“ / „Geraden“, also graphische Repräsentation von linearen Gleichungen, auf die sichere Vernetzung **M1** hin. Differenziert man nicht nach einzelnen Lerngruppen, so ist zunächst allein diese Vernetzung an beiden Gymnasien als sicher zu bezeichnen.

Die starke Anbindung linearer Gleichungssysteme an graphische Darstellungen gerade bei den Schülern, bei denen der Unterricht zur Thematik länger zurückliegt, zeigt, dass das Bewusstsein um Verbindungen zwischen Algebra und Geometrie *zeitstabil* ist. Wie detailliert das Wissen um diese Verbindungen ist, lässt sich an dieser Stelle noch nicht sagen.

Die *Schüler der Gesamtschule* haben vorwiegend Begriffe aufgezählt, die keinen direkten Bezug zu linearen Gleichungssystemen haben. Man hat hier eher den Eindruck, dass sie vor allem Begriffe niedergeschrieben haben, die ihrem Ausbildungsstand entsprechend zu „anspruchsvoller Mathematik“ gehören. Begriffe, die eindeutig in einem engen Zusammenhang mit der Thematik stehen, wie „2 Unbekannte sind gesucht“, werden nur von wenigen Schülern genannt.

8.3.2.2 Ergebnisse im zweiten Untersuchungsschritt

Die Ergebnisse des zweiten Untersuchungsschrittes sind in den Tabellen 10 bis 12 im Anhang J dargestellt. Dabei ist für jeden aufgeführten Begriff schul- und jahrgangsbezogen angegeben, von wie vielen Schülern er angekreuzt wurde und welchem Prozentsatz diese Anzahl jeweils entspricht. Die Begriffe, die in keinem unmittelbaren Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen stehen, wurden grau unterlegt. Die Reihenfolge, in der die einzelnen Begriffe aufgeführt werden, entspricht der in den Testunterlagen. Konzepte, die von den Schülern selber hinzugefügt wurden, sind durch einen Doppelstrich von den vorgegebenen abgesetzt.

Die *Gymnasialschüler* haben Begriffe, die im Unterricht in Verbindung mit dem Thema der linearen Gleichungssysteme gebracht wurden, eindeutig häufiger angekreuzt als Begriffe, die keinen Bezug zum Thema haben. Eine Ausnahme bildet die Gleichung $ax + by = c$ unter 21., die linearen Gleichungssystemen nur in sehr wenigen Fällen zugeordnet wird, obwohl diese allgemeine Form der Geradengleichung mit genau den hier verwendeten Bezeichnungen in beiden an den Gymnasien verwendeten Büchern so angegeben ist.

Begriffe, die nicht in einem unmittelbaren Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen stehen, sind von den meisten Schülern der beiden Gymnasien auch entsprechend nicht angekreuzt worden. Dazu gehört auch der Begriff unter 7. (Verschiedene Potenzen von x : x , x^2 , x^3 , ...), woraus ersichtlich wird, dass die Schüler eine entsprechend ihrem Ausbildungsstand korrekte Vorstellung von der Eigenschaft der Linearität haben. Dies steht im Gegensatz zu den Erwartungen aufgrund der Äußerungen des Lehrers vom Gymnasium A, der meinte, das Bewusstsein seiner Schüler für die Eigenschaft der Linearität nicht geschärft zu haben (siehe Abschnitt 8.2.2).

Geometrische Konzepte, die in einem engen Zusammenhang mit der Thematik der linearen Gleichungssysteme stehen und Inhalt des Unterrichts waren, wurden mehrheitlich angekreuzt. Dies ist ein Hinweis auf das Wissen um bestehende Verbindungen zwischen Algebra und Geometrie (Modellvernetzungen); wie ausdifferenziert dieses Wissen ist, kann allerdings an dieser Stelle noch nicht gesagt werden. Der hohe Anteil, mit dem die Schüler des 8. Jahrgangs vom Gymnasium A geometrische Konzepte richtig zugeordnet haben, deutet jedoch auch bei dieser Schülergruppe des Gymnasiums, wie bereits bei den anderen im 1. Untersuchungsschritt, zumindest auf die sichere Vernetzung **M1** hin.

Die Anbindung der algebraischen Lösungsverfahren unter 8. (Additionsverfahren), 13. (Gleichsetzungsverfahren) und 19. (Einsetzungsverfahren) an lineare Gleichungssysteme zeigt neben der sicheren Merkmalsvernetzungen **F6** bei den Schülern des Gymnasiums A sowie des 10. Jahrgangs des Gymnasiums B auch die Kenntnis dieser Schüler um einzelne Lösungsverfahren an, zumal auch die fiktiven „Verfahren“ unter 11. (Divisionsverfahren) bzw. 14. (Abstraktionsverfahren) von diesen Schülern entschieden seltener angekreuzt wurden. Bei den Schülern des 9. Jahrgangs vom Gymnasium B wird das Wissen um Lösungsverfahren zu linearen Gleichungssystemen nur bei weniger als einem Drittel der Schüler bemerkbar. Es dominieren hier Bezüge zu geometrischen Konzepten.

Am Gymnasium A haben nahezu alle Schüler die Konzepte unter 1. (zwei Gleichungen), 3. (zwei Variablen: x, y), 12. (drei Gleichungen) und 24. (drei Variablen: x, y, z) angekreuzt, wodurch die sichere Vernetzung **F1** aufgezeigt wird. Für die Schüler der anderen Lerngruppen ist diese Vernetzung nicht sicher.

Das Konzept unter 5. (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems) wurde von den Schülern aller Lerngruppen mehrheitlich angekreuzt, wodurch die sichere Vernetzung **F8** angezeigt wird. Die ebenfalls triviale Merkmalsvernetzung **F7** (Bewusstsein der Schnittpunkteigenschaft von Geraden) kann - auch aufgrund der hohen Anteile, mit denen 9. (Schnittpunkte von Geraden) angekreuzt wurde - ebenfalls als sicher angenommen werden.

Es fällt noch auf, dass die Schüler des Jahrgangs 11 vom Gymnasiums A die Begriffe unter 6. (unendlich viele Lösungen), 10. (Geraden, die keinen Schnittpunkt haben), 15. (keine Lösung: $IL = \{ \}$) und 16. (Geraden mit unendlich vielen Schnittpunkten), die Sonderfälle darstellen, weitaus weniger angekreuzt haben als die Schüler des 8. Jahrgangs, bei denen die Unterrichtsreihe gerade erst abgeschlossen wurde. Hier scheint der Parameter *Zeit* eine Rolle zu spielen.

Ferner wird der Begriff Zahlenrätsel (unter 22.), mit Ausnahme der Schüler des 8. Jahrgangs, sehr selten angegeben; das Wissen um die Möglichkeit der Anwendung linearer Gleichungssysteme zum Modellieren dieser Aufgaben scheint als Folge der *Zeit* verblasst zu sein.

Lieferte bei den *Schülern der Gesamtschule* der 1. Untersuchungsschritt Hinweise auf nur wenige, vordergründig vorhandene, sinnvolle Vernetzungen zur Thematik, so zeigt sich doch im 2. Untersuchungsschritt, dass die Schüler anhand der vorgegebenen Begriffsliste einige sinnvolle Zuordnungen vornehmen können. (Dies lässt vermuten, dass die Schüler mit dem Begriff „lineares Gleichungssystem“ zunächst wenig anfangen konnten und ihnen möglicherweise erst anhand der Begriffsliste im 2. Schritt klar wurde, um welches Thema es sich hierbei handelt.)

Anhand der großen Zuordnungsraten der Begriffe unter 1. (zwei Gleichungen), 3. (zwei Variablen: x , y), 12. (drei Gleichungen) und 24. (drei Variablen: x , y , z)¹ ist nunmehr die fachsystematische Vernetzung **F1** als sicher zu bezeichnen. Ebenso ist die Anbindung von Lösungsverfahren an lineare Gleichungssysteme (**F6**) als sicher einzustufen. Spezielle Lösungsverfahren sind den Schülern bekannt, dies zeigt sich auch insbesondere daran, dass die fiktiven „Verfahren“ unter 11. (Divisionsverfahren) und 14. (Abstraktionsverfahren) wesentlich seltener angekreuzt wurden.

Ähnlich wie für die Gymnasialschüler steht auch für die Schüler der Gesamtschule das Konzept unter 9. (Schnittpunkte von Geraden) in einem engen Zusammenhang mit der Thematik, was auf das Bewusstsein von einer geometrischen Veranschaulichung von linearen Gleichungssystemen schließen lässt (**M1**) und auch **F7** als sichere Vernetzung anzeigt.

Die sichere Vernetzung **F8** ergibt sich aus dem hohen Prozentsatz, mit dem 5. (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems) angekreuzt wurde.

Die Ergebnisse im 2. Untersuchungsschritt weisen auch bestimmte bestehende Mängel aus. So haben die Schüler der Gesamtschule den Begriff unter 7. (verschiedene Potenzen von x : x , x^2 , x^3 , ...) als einzigen zu 100 % angekreuzt. Dies weist auf eine große Unsicherheit bezüglich der Abgrenzung der Thematik hin. Die Begriffe zu Sonderfällen unter 6. (unendlich viele Lösungen), 10. (Geraden, die keinen Schnittpunkt haben) und 16. (Geraden mit unendlich vielen Schnittpunkten) sind auffällig selten angekreuzt worden; ein Bewusstsein für diese möglichen Sachverhalte ist offenbar nicht ausgeprägt. Der Begriff „Zahlenrätsel“ unter 8. ist von keinem einzigen Schüler angekreuzt worden, obwohl ein Großteil der Textaufgaben zum Thema in dem verwendeten Schulbuch unter der Überschrift „Zahlenrätsel“ zu finden sind.

¹ 88%, 96%, 58% bzw. 42%.

8.3.2.3 Ergebnisse im dritten Untersuchungsschritt

Die von den Schülern genannten Bündelungsaspekte und die Häufigkeit, mit der diese schul- und jahrgangsbezogen aufgeführt wurden, sind in den Tabellen 13 bis 17 im Anhang J angegeben. Sind unter einem bestimmten übergeordneten Aspekt Begriffe zusammengefasst worden, ohne dass der Aspekt selber genannt wurde, so wird die Häufigkeit dieser nicht benannter Bündelungsaspekte ebenfalls angegeben.

In den darauffolgenden Tabellen 18 bis 22 im Anhang J werden, abermals schulbezogen für jeden einzelnen Jahrgang, zu jedem Aspekt die einzelnen ihm zugeordneten Begriffe aufgeführt. Für jeden dieser Begriffe wird die relative Häufigkeit seiner Zuordnung unter einem bestimmten Aspekt bezogen auf die Anzahl der in dem jeweiligen Jahrgang einer Schule ausgefüllten Blasen zu diesem Aspekt angezeigt.

Die in den Tabellen dargestellten Ergebnisse werden im Folgenden kommentiert und zusammengefasst.

Die Schüler der beiden *Gymnasien* haben vielfältige Aspekte gefunden, unter denen sich Begriffe der Liste aus dem zweiten Untersuchungsschritt einordnen lassen. Sie haben in der Regel sinnvolle Oberbegriffe angegeben und korrekte Zuordnungen von Begriffen zu den einzelnen Oberbegriffen vorgenommen.

Die meisten angegebenen Bündelungen zeigen fachsystematische Vernetzungen gemäß Oberbegriff-Unterbegriff-Relationen oder Merkmalsvernetzungen an. Diese Bündelungen waren schon aufgrund ähnlichen Wortgehalts der Begriffe der vorgegebenen Liste besonders naheliegend. Querverbindungen zwischen Geometrie und Algebra, z.B. durch die mögliche Bündelung der Begriffe unter 5. und 9. oder 10., 15. und 17. oder 6. und 16., wurden nur von einigen Schülern der 9. Klasse des Gymnasiums B unter dem übergeordneten Aspekt „Lösungen / Ergebnis“ aufgezeigt.

Der am häufigsten und von allen Lerngruppen genannte Oberbegriff war „Rechenverfahren“. Ein Großteil der Schüler des Gymnasiums A sowie des 10. Jahrgangs des Gymnasiums B fassten unter diesem Begriff verschiedene Lösungsverfahren zusammen (Vernetzung **F5**).

„Geraden“ war auch ein viel genannter Oberbegriff, am Gymnasium A von mehr als der Hälfte der Schüler. Dabei wurden unter diesem Stichwort viele Begriffe zusammengefasst, die auch unter differenzierteren Aspekten in kleineren Einheiten hätten gebündelt werden können. Letzteres, z.B. die Bündelung unter dem Stichwort „Schnittpunkte“, haben weniger als ein fünftel der Schüler vorgenommen. Die unter

„Geraden“ aufgezeigte Vernetzung lässt sich im Wesentlichen als Vereinigung von **F2** (verschiedene Lagebeziehungen zweier Geraden), **F7** (Schnittpunkteigenschaft zweier Geraden) und **F3**¹ (unterschiedliche Anzahlen von Schnittpunkten zweier Geraden) auffassen, diese Vernetzung wird im Folgenden mit **F*** bezeichnet.

Zum Stichwort „Lösungsmenge“/„Lösungen“ haben die Schüler des 8. Jahrgangs des Gymnasiums A und die Schüler des 10. Jahrgangs des Gymnasiums B mehrheitlich eine Vernetzung vorgenommen, die sich wesentlich mit **F4** (verschiedene Anzahlen von Lösungen) deckt.

Die Schüler des 11. Jahrgangs des Gymnasiums A haben mehrheitlich als einen Bündelungsaspekt „lineare Funktion“/„Geradengleichung“ betrachtet, darunter wurden vor allem die Konzepte „zwei Gleichungen“, „Geradengleichung“, „zwei Variablen: x, y“ und „ $y = mx + b$ “ zusammengefasst. Diese Vernetzung lässt sich keiner vorher benannten zuordnen; es werden hier hauptsächlich Eigenschaften linearer Funktionen angesprochen (es gibt eine Funktionsgleichung, die Funktionsgleichung enthält zwei Variable, die Funktionsgleichung beschreibt eine Gerade). Insgesamt ist diese Vernetzung aber von weniger als 50% der Schüler des 11. Jahrgangs des Gymnasiums A angegeben worden und findet daher im Folgenden keine Berücksichtigung mehr.

Die Schüler des 8. Jahrgangs des Gymnasiums A haben unter dem Oberbegriff „Variablen“ oder „Zahl der Variablen“ mehrheitlich eine fachsystematische Vernetzung gemäß der Anzahl von Variablen vorgenommen und unter dem Oberbegriff „Gleichungen“ oder „Zahl der Gleichungen“ eine fachsystematische Vernetzung gemäß der Anzahl der Gleichungen. Dies kann als sichere Vernetzung **F1** (Einteilung von linearen Gleichungssystemen gemäß der Anzahl der Variablen und der Gleichungen) gewertet werden.

Die Schüler der vier an den Tests beteiligten Jahrgänge der Gymnasien zeigen bei den Begriffsbündelungen keine eindeutigen Unterschiede, die auf die *Zeitspanne*, die seit Vermittlung der Lerninhalte zum Thema verstrichen ist, zurückgeführt werden könnten.

An der *Gesamtschule* haben nur 7 der 24 an den Tests beteiligten Schülern die Aufgabe im dritten Untersuchungsschritt bearbeitet, wobei insgesamt nur vier Bündelungsaspekte angegeben wurden. Die meisten Schüler waren durch die Aufgabenstellung stark überfordert. Unter den wenigen gelieferten Antworten stand der Prozess des Lösens von Aufgaben im Vordergrund: Aufgabenstellung (Begriffe

¹ Genau genommen müssen hier die Kanten von F3 durch Kantenzüge ersetzt werden, die jeweils aus der Kante von F7 und einer Kante von F3 bestehen. Diese Vernetzung wird im Folgenden **F3'** genannt.

unter 1., 2. und 12.), Lösungsmethoden bzw. vermeintliche Lösungsmethoden (Begriffe unter 8., 11., 13., 14. und 19.) und Lösungsmenge (Begriff unter 5.) wurden unter dem Aspekt „Lösungen“ zusammengefasst.

Die Antworten der Schüler der Gesamtschule lassen unpräzise Begriffsvorstellungen deutlich werden. So wurde der Begriff unter 15. dem Bündelungsaspekt „Variablen“ zugeordnet, wahrscheinlich weil er, wie die anderen hier gebündelten Begriffe, mathematische Symbole (\mathbb{R} , $\{ \}$) enthält.

8.3.2.4 Ergebnisse im vierten Untersuchungsschritt

Die Auswertung zum vierten Untersuchungsschritt ist in den Tabellen 23 bis 31 im Anhang J gegeben.

Zur Darstellung der Ergebnisse aus diesem Untersuchungsschritt, in dem eine unvollständige Concept Map zu ergänzen war (siehe Anhang I), wurden die leeren, von den Schülern auszufüllenden Kästchen im unteren Teil der Concept Map von links nach rechts durchnummeriert. Zu diesen Kästchennummern sind in den Tabellen 23 bis 27 im Anhang J die Einträge der Schüler aufgeführt, wobei nicht korrekte oder wenig präzise Einträge grau unterlegt sind. Es wird zudem die Häufigkeit, mit der die einzelnen Angaben gemacht wurden, für jede Schule jahrgangsbezogen angezeigt. Richtige Einträge im 4. und 5. Kästchen sind untereinander austauschbar; in den Tabellen 23 bis 27 wurde der Eintrag „sich schneidende Geraden“ jeweils dem 4. Kästchen und der Eintrag „aufeinanderliegende / identische Geraden“ jeweils dem 5. Kästchen zugeordnet.

Von den *Gymnasialschülern* in der Concept Map eingezeichnete Querverbindungen und deren Häufigkeit sind in weiteren Tabellen festgehalten (Tabellen 28 bis 31, Anhang J). Dabei stehen Begriffe, die miteinander verbunden wurden, jeweils in einer Zeile; nicht korrekte Querverbindungen wurden abermals grau unterlegt. Die drei Konzepte zur algebraischen Struktur im rechten Teil der den Gymnasialschülern vorgelegten Concept Map sind in den Tabellen 28 bis 31 gemäß ihrer Nummerierung in der Concept Map angegeben.

Die Schüler der *Gesamtschule* haben in die Concept Map keine einzige Querverbindung eingezeichnet. Einige der Schüler haben auf ihren Arbeitsbögen folgende Bemerkungen aufgeschrieben: „zu durcheinander“, „versteh ich nicht“, „keine Ahnung“, „unverständlich“. Die meisten Schüler haben bei diesem

Arbeitsschritt mündlich geäußert, die Darstellungen der Concept Map würden sie verwirren, sie könnten mit dem Durcheinander nichts anfangen.

Im Folgenden werden nun die Ergebnisse im 4. Untersuchungsschritt auf der Grundlage der Übersichten in den Tabellen 23 bis 31 (siehe Anhang J) kommentiert und zusammengefasst.

Die Schüler der beiden *Gymnasien* haben die freien Kästchen der vorgelegten Concept Map mehrheitlich ausgefüllt und dabei größtenteils passende Begriffe angegeben. Ist den meisten Schülern bewusst, dass ein lineares Gleichungssystem eine leere Lösungsmenge haben kann, so wissen (mit Ausnahme der Schüler des 8. Jahrgangs) deutlich weniger Schüler um die Möglichkeit unendlich vieler Lösungen. (Trotzdem lässt sich die Vernetzung **F4** (verschiedene Anzahlen von Lösungen) aufgrund der Eintragungen als sicher einstufen.) Im leeren Kästchen zu der Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden hat die Mehrheit der Schüler einen richtigen Eintrag vorgenommen. (Hier deutet sich eine sichere Vernetzung **F3** bei den Schülern des 11. Jahrgangs des Gymnasiums A und den Schülern des Gymnasiums B an.) Die Lagebeziehung „sich schneidende Geraden“ wurde von gut der Hälfte der Schüler angegeben, „aufeinanderliegende / identische Geraden“ von weniger als der Hälfte der Schüler.

Die nicht korrekten oder unpräzisen Einträge in den freien Kästchen zeigen zwar einen direkten Bezug zu den jeweils darüberstehenden Oberbegriffen aber gleichzeitig auch den Mangel im Wissen um übergeordnete Zusammenhänge. Bei dem Eintrag „zwei Lösungen“ z.B. kann man unterstellen, dass „genau 2 Lösungen“ gemeint waren, wobei der direkte Bezug zu dem Oberbegriff „Anzahl der Lösungen“ ersichtlich wird, aber auch die fehlende Präsenz der Beziehung zwischen Lösungen des Gleichungssystems, Schnittpunkten von Geraden und der dadurch bestimmten Lagebeziehung von Geraden. Selbst unter dem Oberbegriff „Anzahl der Schnittpunkte“ orientieren sich manche Schüler vorrangig an dem Begriff „Anzahl“, was zum Eintrag „zwei Schnittpunkte“ (gemeint: „genau zwei Schnittpunkte“) führte, ohne dass die geometrische Unmöglichkeit dieses Sachverhalts berücksichtigt wurde.

Die Auswertung der von den Gymnasialschülern eingezeichneten Querverbindungen lässt erhebliche Mängel im Wissen um Modellvernetzungen zur betrachteten Thematik deutlich werden. Auch Schüler, die richtige Einträge in die leeren Kästchen der Concept Map vorgenommen hatten, waren nicht immer in der Lage, Querverbindungen einzuzeichnen oder haben diese nur teilweise angegeben. Die meisten eingezeichneten Querverbindungen zeigen den Zusammenhang zwischen der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems von zwei

Geradengleichungen und der Anzahl der Schnittpunkte der entsprechenden beiden Geraden¹; die Verbindungen mit den Lagebeziehungen der beiden Geraden werden von weniger Schülern dargestellt und die Kenntnis um den Bezug zur algebraischen Struktur des Gleichungssystems ist eher eine Ausnahme.

Vollständig richtig ergänzt wurde die Concept Map nur von drei Schülern des Jahrgangs 11 des Gymnasiums A, zwei Schülern des Jahrgangs 9 des Gymnasiums B und einem Schüler des Jahrgangs 10 des Gymnasiums B; also insgesamt nur von 5% der getesteten Gymnasialschüler.

Die wenigen falsch eingezeichneten Querverbindungen zeigen, dass die Schüler nicht ziellos geraten haben, sondern die Aufgaben ernsthaft bearbeitet haben, und dass die richtig eingezeichneten Verbindungen i.d.R. keine Zufallstreffer sind.

Die Auswertung der Schülerbeiträge im vierten Untersuchungsschritt zeigt für die beteiligten Lerngruppen der Gymnasien keine großen Unterschiede, die sich durch die *Zeitdauer* seit Vermittlung der Lerninhalte zur betrachteten Thematik erklären ließen.

Die Schüler der *Gesamtschule* belegen durch ihre (wenigen) Einträge in den leeren Kästchen der Concept Map, dass sie durch die Aufgabenstellung maßlos überfordert waren - lediglich zwei Einträge waren richtig. Querverbindungen wurden überhaupt nicht eingezeichnet. Die Schüler äußerten, dass die Darstellung von Vernetzungen mittels der Concept Map auf sie verwirrend wirke.

8.3.2.5 Ergebnisse im fünften Untersuchungsschritt

In der Tabelle 32 im Anhang J sind jahrgangsbezogen für die beiden *Gymnasien* die Anzahlen der richtigen Lösungen zu den Aufgaben im fünften Untersuchungsschritt sowie die entsprechenden Prozentsätze angegeben.

Zur Aufgabe 1c) schrieben Schüler unterschiedlicher Lerngruppen folgende und ähnliche Bemerkungen auf:

„Zwei Geraden können nicht mehrere Schnittpunkte haben.“

„Schwachsinn, gibt's nicht.“

„Mehr als ein Schnittpunkt gibt es nicht.“

¹ Diese Verbindungen wurden von 12% der Gymnasialschüler angegeben.

Mangelndes deklaratives Wissen führte hier zur Unfähigkeit, die Aufgabe zu lösen.

Das vergleichsweise gute Abschneiden der Schüler des 11. Jahrgangs des Gymnasiums A bei der Lösung der Aufgabe 1a) war aufgrund der Ergebnisse aus dem vierten Untersuchungsschritt nicht zu erwarten. Den Schülern kam hier zugute, dass sie (mit Ausnahme von nur vier Schülern) zur Lösung dieser Aufgabe einen Zugang wählten, der auf Kenntnissen zu linearen Funktionen, die im Unterricht kurz vorher wiederholt worden waren (vgl. Abschnitt 8.2.2), beruhten. Vernetzungen, die in der Concept Map des 4. Untersuchungsschrittes dargestellt sind, waren hierbei nicht nötig. (Die Schüler lösten die Gleichung $3x + 2y = 7$ der Geraden g nach y auf und gaben dann eine zweite Geradengleichung in der Form $y = mx + n$ mit gleicher Steigung m wie die Gerade g an.) Es ist schwer zu sagen, wie die Schüler dieser Lerngruppen abgeschnitten hätten, wenn die Thematik der linearen Funktionen nicht vorher im Unterricht wiederholt worden wäre.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die meisten *Gymnasialschüler* nicht in der Lage waren, die Aufgaben in diesem Schritt zu lösen. Beim Bearbeiten der ersten Aufgabe waren die Schüler des 11. Jahrgangs des Gymnasiums A am erfolgreichsten; die Aufgaben 1a) und 1c) wurden von ca. der Hälfte dieser Schüler richtig gelöst.

Die zweite Aufgabe bereitete allen Lerngruppen besondere Schwierigkeiten. Auch Schülern, die das nötige deklarative Wissen hatten, ist es hier nicht immer gelungen dieses erfolgreich einzusetzen.

Einflüsse des Parameters *Zeit*, die seit Vermittlung der Lerninhalte zum Thema der linearen Gleichungssysteme verstrichen ist, lassen sich somit hier nicht ausmachen.

An der *Gesamtschule* wurden lediglich zur ersten Aufgabe von zwei Schülern Lösungen angegeben; diese waren jedoch nicht richtig. Die Schüler dieser Lerngruppe, die schon im Bereich des deklarativen Wissens große Defizite zeigte, waren nicht in der Lage, die gestellten Aufgaben zu lösen.

8.3.2.6 Ergebnisse im sechsten Untersuchungsschritt

Eine tabellarische Übersicht der Auswertung der Schülerlösungen im sechsten Untersuchungsschritt an den beteiligten *Gymnasien* wird durch die Tabellen 33 und 34 im Anhang J gegeben. Die Tabellen zeigen für jede Schule jahrgangsbezogen die Häufigkeiten der eingezeichneten Verbindungen zwischen jeweils einer Textaufgabe und dem vorgegebenen Gleichungssystem. Diejenigen Aufgabenstellungen, die durch das angegebene Gleichungssystem nicht modelliert werden können, sind grau unterlegt. Die einzelnen Aufgaben werden durch die in den Testunterlagen angegebenen Nummern gekennzeichnet.

Die Schüler der *Gesamtschule* zeigten bei der Bearbeitung dieses Tests große Unsicherheiten; sie äußerten, dass die von ihnen eingezeichneten Verbindungen nur erraten seien. Die abgelieferten Lösungen dieser Schüler sind somit nicht aussagekräftig.

Die Auswertung zeigt, dass die Schüler der beiden *Gymnasien* allgemein recht unsicher im Modellieren sind.

Sie haben zum großen Teil nicht erkannt, dass das vorgegebene Gleichungssystem kein Modell der 2. sowie der 6. Aufgabe ist. Die Schüler des 11. Jahrgangs haben hierbei mit 26 % bzw. 49 % die wenigsten falschen Angaben gemacht.

Nur eine Minderheit der Schüler erkannte, dass das gegebene Gleichungssystem als Modell für die 3. und die 8. Aufgabenstellung geeignet ist. Dies lässt sich dadurch erklären, dass in den Texten der 3. und der 8. Aufgabe (teilweise) Zahlen vorkommen, die im Gleichungssystem nicht auftauchen.

Aber auch bei Aufgaben, die leicht in das gegebene Gleichungssystem übersetzt werden können, wurde die entsprechende Zuordnung von vielen Schülern nicht vorgenommen.

Sieht man von dem unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad der Modellierung der einzelnen Textaufgaben ab, und bildet für die Schüler eines jeden Jahrgangs den Durchschnitt der Anteile richtiger Antworten, so liegt dieser jeweils im Bereich zwischen 40% und 50%. **M7** ist somit keine sichere Vernetzung.

Es lassen sich keine auffallend großen Unterschiede bzgl. der Leistungen der Schüler der unterschiedlichen Jahrgänge ausmachen, also auch keine Einflüsse der *Zeitspanne* seit Vermittlung der interessierenden Lerninhalte.

8.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse der Schülertests

Die Mehrheit der Schüler der *Gymnasien* verbinden mit der Thematik der linearen Gleichungssysteme wesentliche mathematische Inhalte, die im Unterricht in einen Zusammenhang mit diesem Thema gestellt wurden. Dazu gehören sowohl geometrische, als auch algebraische Inhalte. Das deklarative Wissen um die einzelnen Vernetzungen ist allerdings nicht sehr präzise ausgeprägt.

Am besten beherrscht werden einzelne fachsystematische Vernetzungen, die jedoch zum Teil nicht sinnvoll in ein übergeordnetes Netz eingebaut sind.

Modellvernetzungen zwischen den Lösungen eines Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen und den Schnittpunkten von Geraden, den Lagebeziehungen von Geraden oder gar der algebraischen Struktur des Gleichungssystems werden nur von wenigen Schülern beherrscht. Hier weist das deklarative Wissen der Schüler erhebliche Mängel auf.

Der dynamische Umgang mit diesem Wissen gelingt selbst den wenigen Schülern, die es haben, nur zum geringen Teil (*Forschungsfrage 1.3.4*). Im Modellieren von Textaufgaben zeigen die Schüler der beiden Gymnasien Unsicherheiten (*Forschungsfrage 1.3.5*).

Die Ergebnisse der Schülertests deuten auf nachfolgend dargestellte sichere Vernetzungen bei den Schülern hin (*Forschungsfragen 1.3.2, 1.3.3 und 1.3.5*). Mit F^* wird in den Graphen die Vernetzung $F2 \cup F3' \cup F7$ bezeichnet (vgl. Abschnitt 8.3.2.3).¹

Da in den Graphen diejenigen Vernetzungen eingezeichnet sind, die bei mindestens 50% der Schüler ausgemacht werden konnten, sind hier natürlich nur Teilergebnisse der Untersuchung erfasst. Insbesondere kann es sein, dass eine nicht eingezeichnete Vernetzung bei keinem Schüler oder bei fast der Hälfte der Schüler vorhanden ist, bzw. eine eingezeichnete Vernetzung nur bei knapp über der Hälfte der Schüler oder bei fast allen Schülern vorhanden ist. Insofern geben die nachfolgenden Graphen nur grobe Einblicke in vorhandene Vernetzungen im Schülerwissen und müssen in Kombination mit der detaillierteren Ergebnisdarstellung in Abschnitt 8.3.2 betrachtet werden.

¹ Da die Elemente einer Vernetzung graphisch durch Kanten (Verbindungen zwischen Knoten) dargestellt werden, ist die graphische Darstellung der Vernetzung F^* durch die Kanten zu den Vernetzungen $F2$, $F3'$ und $F7$ gegeben.

Abbildung 20: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums A, Jahrgang 8

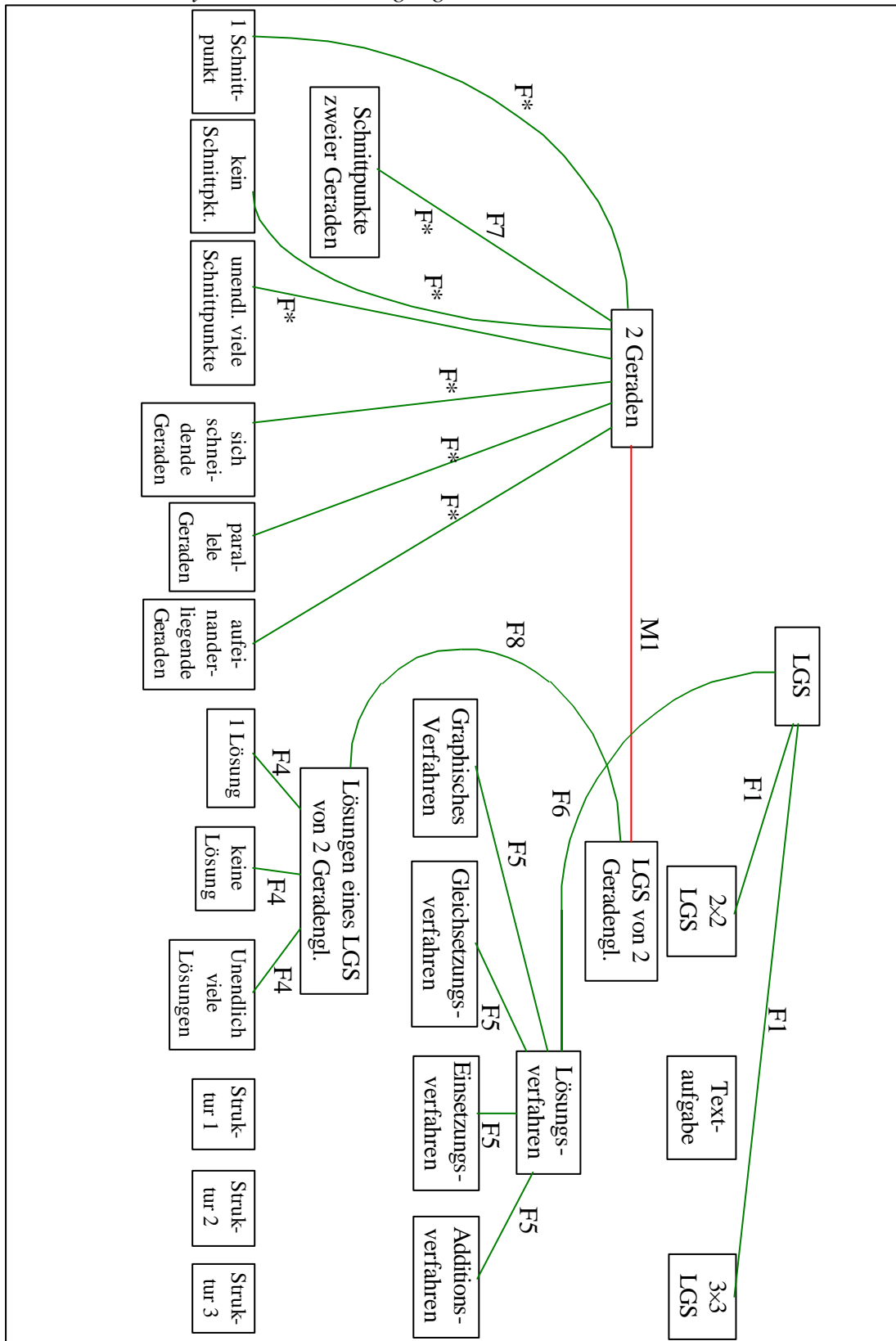


Abbildung 21: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums A, Jahrgang 11

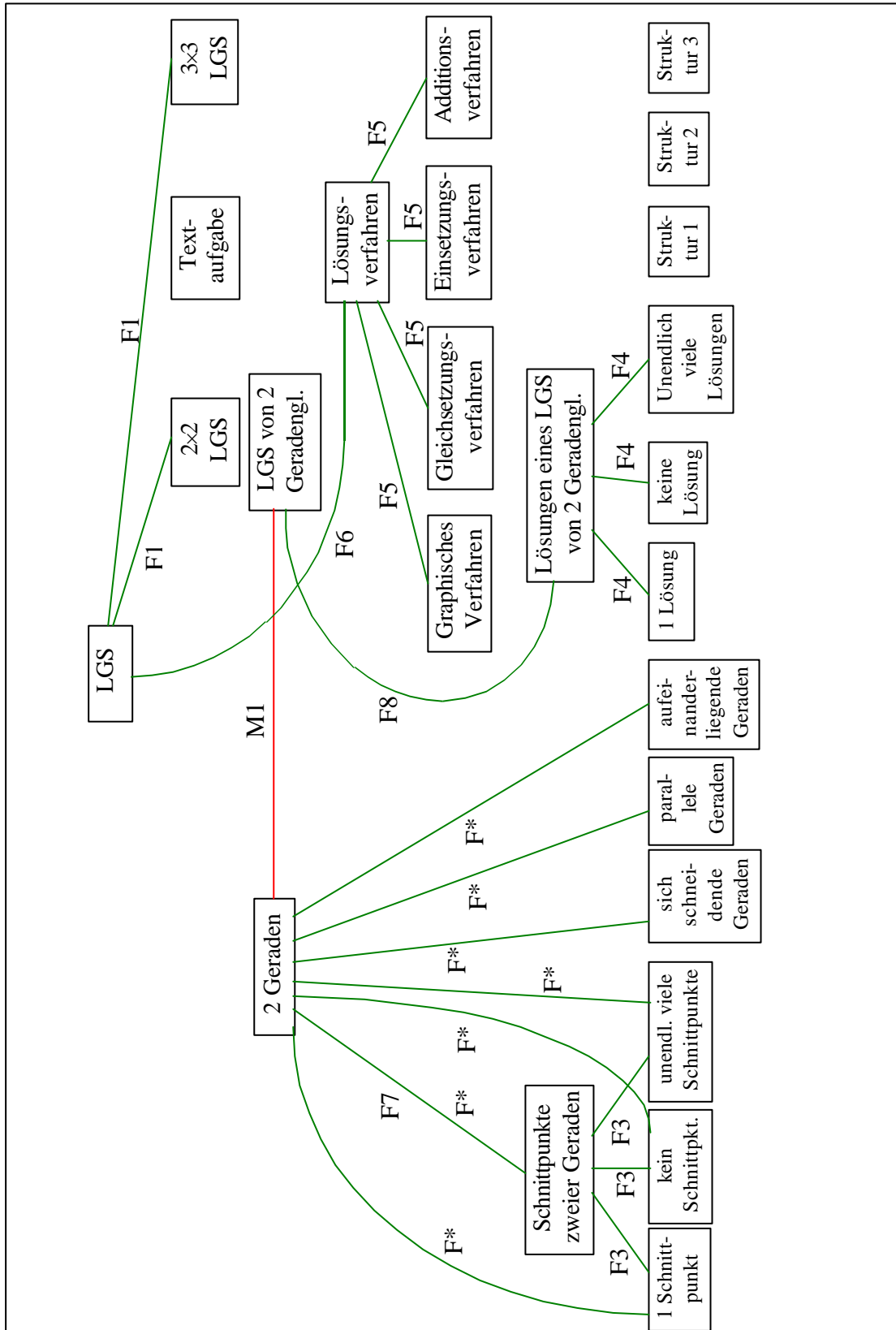


Abbildung 22: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums B, Jahrgang 9

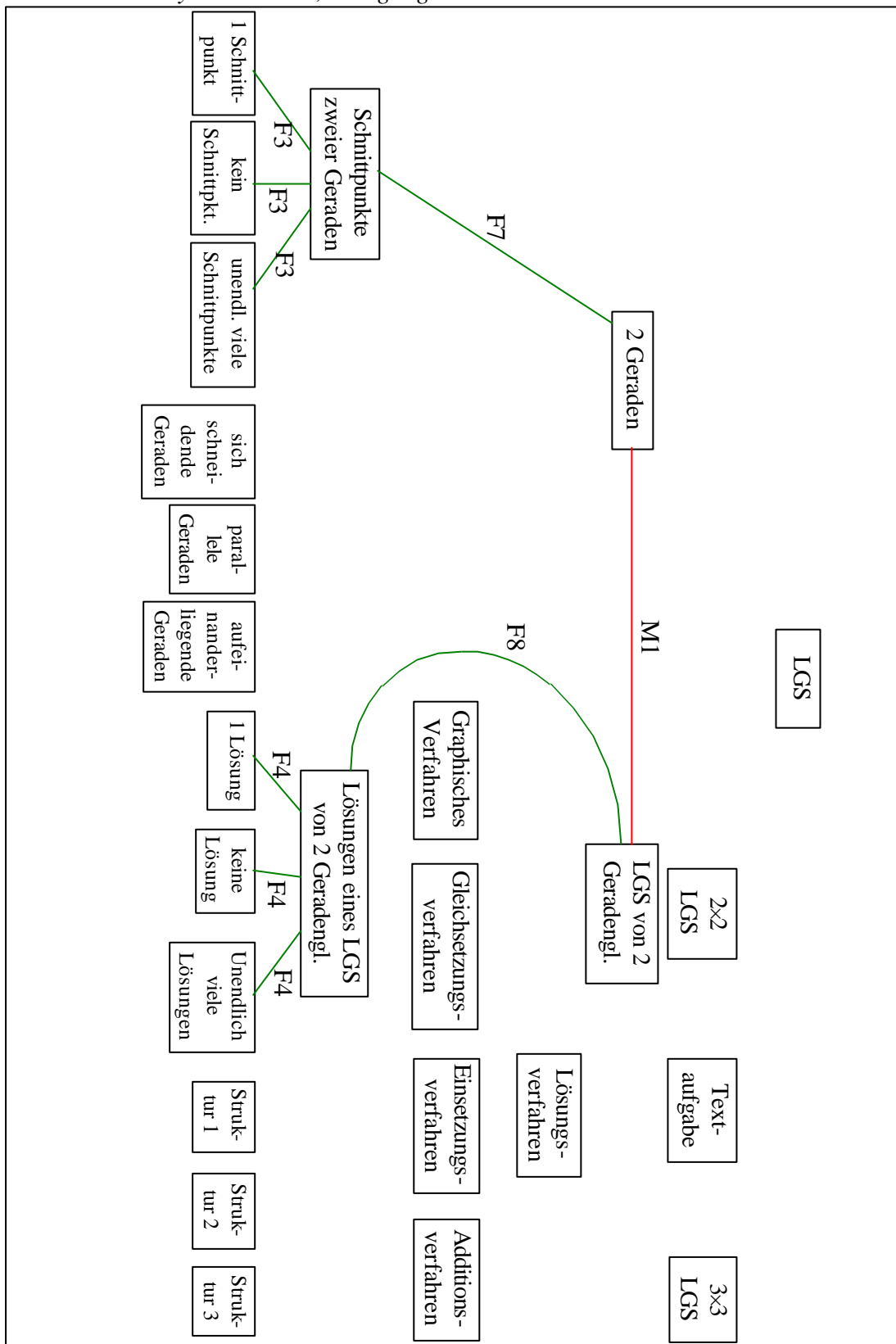
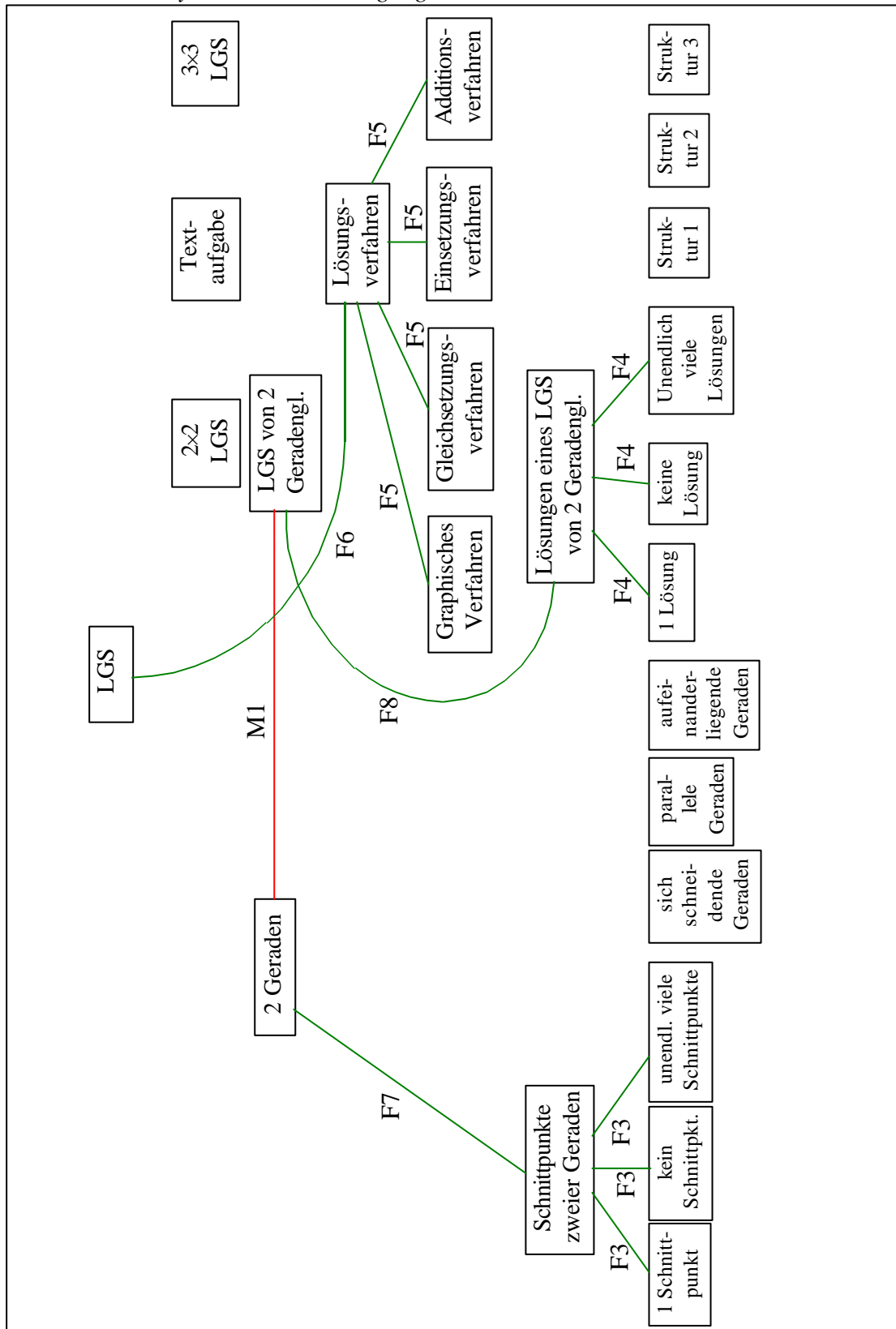


Abbildung 23: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums des Gymnasiums B, Jahrgang 10



Besonders auffällige Einflüsse der *Zeitdauer seit Vermittlung der Lerninhalte* auf das Wissen um Vernetzungen und auf den Gebrauch dieses Wissens lassen sich anhand der Untersuchungsergebnisse nicht ausmachen (*Forschungsfrage 1.3.6*). Vergleicht man die Graphen zu den sicheren Vernetzungen der Schüler des 8. Jahrgangs und des 11. Jahrgangs vom Gymnasium A bzw. der Schüler des 9. Jahrgangs und des 10. Jahrgangs vom Gymnasium B miteinander, so kommen bei den älteren Schülern lediglich wenige fachsystematische Vernetzungen dazu. Daraus ließe sich schließen, dass die Fähigkeit zum Ordnen von Wissen etwas zunimmt. Modellvernetzungen, die eine wesentliche Bedeutung für ein erfolgreiches Problemlösen haben, sind bei den Schülern aller Jahrgänge mangelhaft.

Die Schüler der *Gesamtschule* zeigen Schwierigkeiten in der Abgrenzung der Thematik der linearen Gleichungssysteme. Es bestehen Unsicherheiten in der Zuordnung von Begriffen zum Thema; insbesondere auch von Begriffen, die im Unterricht in einen Zusammenhang mit dem Thema gestellt wurden.

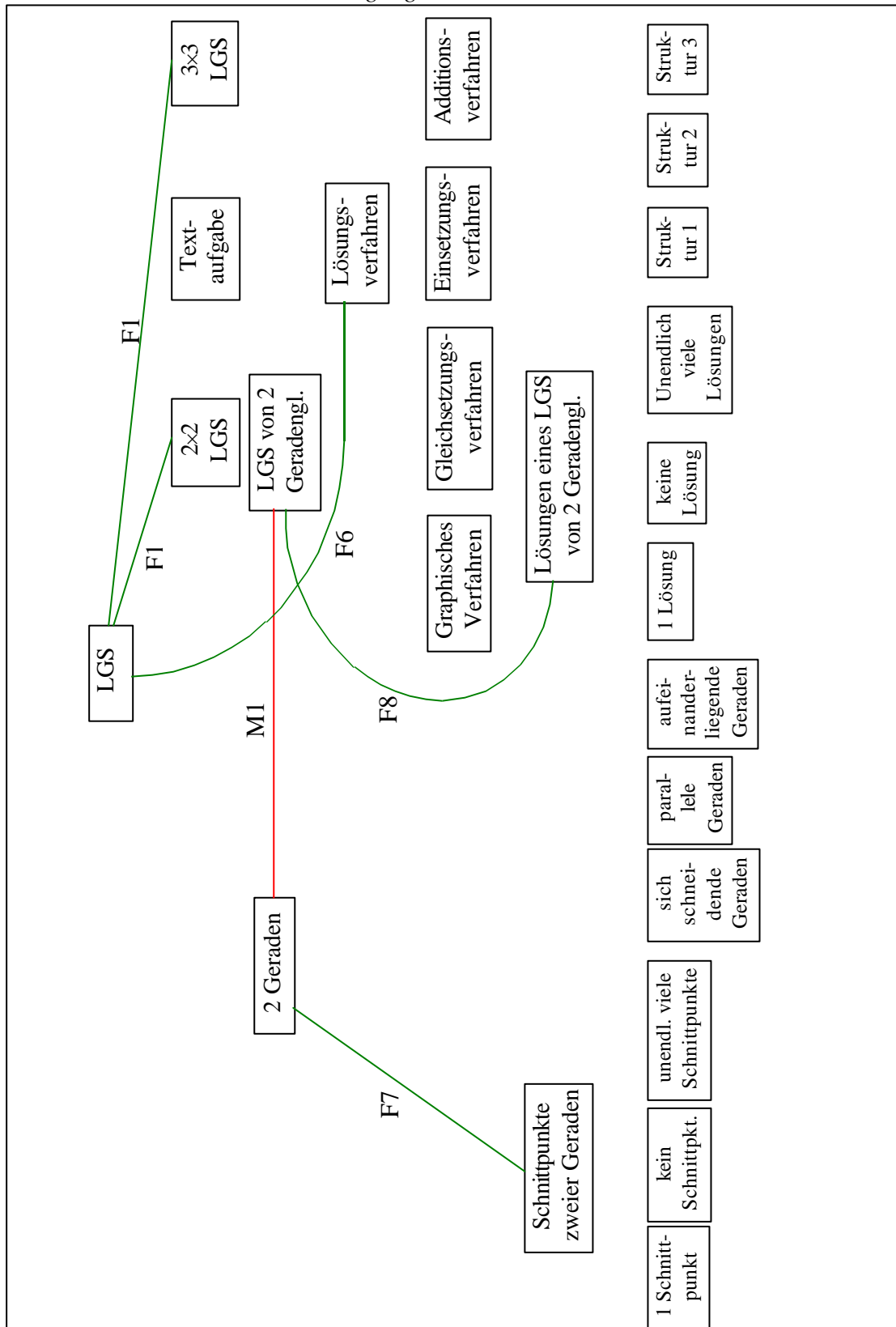
Systematisch geordnetes Wissen ist bei den Schülern der Gesamtschule zu dieser Thematik so gut wie gar nicht auszumachen (*Forschungsfrage 1.3.2*).

Modellvernetzungen sind im deklarativen Wissen dieser Schüler so gut wie nicht erkennbar (*Forschungsfrage 1.3.3*).

Das Lösen von Aufgaben, bei dem ein dynamischer Umgang mit deklarativem vernetzten Wissen erforderlich ist, gelingt den Schülern nicht (*Forschungsfrage 1.3.4*). Mathematisches Modellieren stellt eine Überforderung für diese Schüler dar (*Forschungsfrage 1.3.5*).

Die nachfolgende graphische Darstellung zeigt die als sicher ausgemachten Vernetzungen der Schüler der Gesamtschule (*Forschungsfragen 1.3.2, 1.3.3 und 1.3.5*).

Abbildung 24: Sichere Vernetzungen im Rahmen des erreichten Curriculums der Gesamtschule, Jahrgang 10



8.4 Positiva und Defizite der Vernetzungsmuster in den drei Curriculumsrahmen

Auf der Grundlage der durchgeführten Untersuchung lassen sich nun Antworten zur *Forschungsfrage 1.4* bzgl. vorhandener Positiva und Defizite der Vernetzungsmuster in den drei Curriculumsrahmen zusammenfassen.

Das Thema der linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I wird im *Rahmen des intendierten Curriculums*, vornehmlich den *Schulbüchern*, mit einem vergleichsweise sehr breiten Vernetzungsspektrum dargeboten; die einzelnen Vernetzungsarten werden dabei mit unterschiedlicher Gewichtung aufgezeigt.

Einen besonders großen Raum nehmen in den drei untersuchten Schulbüchern Algorithmen und ihre Anwendung zum Lösen von Aufgaben ein.

Die für einen fachsystematischen Aufbau der Mathematik bedeutungsvollen Vernetzungen durch Einteilungen, Fallunterscheidungen und dabei aufgezeigten Sonderfällen werden mit unterschiedlichem Exaktheitsanspruch und damit teils mit Mängeln dargeboten; Rechenaufgaben im Buch G beschränken sich auf eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme, so dass anderen Fällen nur noch eine Randposition zukommt (für Einzelheiten vgl. Abschnitt 8.1.1).

Innermathematische Modellvernetzungen, vor allem verschiedene Querverbindungen zwischen Geometrie und Algebra, werden herausgearbeitet, der dynamische Umgang mit diesen Vernetzungen beim Problemlösen wird je nach Schulbuch in unterschiedlichem Maße, und damit teils defizitär, eingefordert. Die algebraische Struktur eines Gleichungssystems wird, wenn überhaupt, nur marginal mit der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems in Verbindung gebracht. Hier könnte im Hinblick auf die später zu vermittelnden Konzepte der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit oder des Zeilenrangs bzw. Spaltenrangs einer Matrix eine vertikale Vernetzung der aktuellen mit zukünftigen Lerninhalten besser vorbereitet werden (vgl. Kapitel 5.1). Dem Zusammenhang zwischen der algebraischen Struktur eines 2×2 -Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen mit der Lagebeziehung der Geraden kommt auch wenig Beachtung zu.

Das Angebot an außermathematischen Anwendungen variiert je nach Schulbuch in Umfang und Vielfalt angesprochener Anwendungsbereiche (vgl. Abschnitt 8.1.1). Insbesondere im Buch B und im Buch G könnten die Anwendungsaufgaben zahlreicher sein und durch breitgefächere Realitätsbezüge die Bedeutung mathematischer Modelle besser herausstellen.

Der *Rahmen des implementierten Curriculums* weist aufgrund des schulbuchbezogenen Unterrichts der Lehrer ähnliche Charakteristika bezüglich vorhandener Positiva bzw. Defizite im Vernetzungsbereich auf, wie der Rahmen des intendierten Curriculums. Als zusätzliches Defizit ist hier das Fehlen eines Bezugs zwischen der algebraischen Struktur eines linearen Gleichungssystems und der Anzahl seiner Lösungen bzw. ggf. der Lagebeziehung zweier Geraden zu verzeichnen.

Das von den Schülern *erreichte Curriculum* zeigt für alle an der Untersuchung beteiligten Lerngruppen große Defizite gegenüber den erhobenen Vernetzungen in den Rahmen des intendierten bzw. des implementierten Curriculums auf, vornehmlich im Bereich der Modellvernetzungen.

Bei den Schülern der *Gymnasien* sind, trotz der unterschiedlichen eingesetzten Lehrbücher und verschiedenen Lehrpersonen, allgemeine Charakteristika festzustellen. Als positiv ist das Wissen um einige fachsystematische Vernetzungen zu verzeichnen. Hingegen zeigen nur wenige Schüler ein Wissen um inner-mathematische Modellvernetzungen (hier: Vernetzungen zwischen algebraischen und geometrischen Darstellungen), obwohl entsprechende Darstellungen in den verwendeten Schulbüchern vorhanden sind und von den Lehrern im Unterricht vermittelt wurden. Das verständige Umgang in Problemlösungsprozessen mit diesem Wissen bzgl. Vernetzungen zwischen Geometrie und Algebra ist noch mangelhafter. Ein weiterer defizitärer Bereich wird durch die Unsicherheit der Schüler beim Modellieren von Textaufgaben aufgedeckt.

Bei den Schülern der *Gesamtschule* sind in Bezug auf die untersuchten Vernetzungen so gut wie keine Positiva zu verzeichnen; ein Wissen um diese Vernetzungen ist fast nicht vorhanden. Auch die fachsystematischen Vernetzungen F3 (Fallunterscheidung entsprechend der Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden) und F4 (Fallunterscheidung entsprechend der Anzahl der Lösungen eines LGS), die bei einer Mehrheit der Gymnasialschüler ausgemacht werden konnten, fehlen weitgehend. (Dies könnte möglicherweise auf die diesbezüglich wenig ausführlichen Darstellungen im verwendeten Schulbuch und die vorgenommene Beschränkung der Rechenaufgaben auf eindeutig lösbar lineare Gleichungssysteme zurückzuführen sein.) Da von der Gesamtschule nur eine Lerngruppe an der Untersuchung beteiligt war, lassen sich die Ergebnisse allerdings nicht schulformspezifisch verallgemeinern.

8.5 Übertragung von Vernetzungen aus einem Curriculumsrahmen in den nächsten

Die Veränderungen, die bei der Übertragung der untersuchten Vernetzungen aus einem Curriculumsrahmen in den nächsten auftreten, lassen sich aufgrund der Aufnahmen von Vernetzungen in den verschiedenen Curriculumsrahmen global charakterisieren (*Forschungsfrage 2.1*) und bzgl. einzelner Vernetzungen angeben (*Forschungsfragen unter 2.2*).

Der Übergang vom intendierten Curriculum, das sich in Schulbüchern widerspiegelt, zum implementierten Curriculum erfolgt aus der Sicht der Lehrer *translationsartig*: ohne größere Verluste¹, ohne Hinzugewinne, ohne Umbildungen. Dies bestätigt Untersuchungsergebnisse, die auch im Rahmen von TIMSS gewonnen wurden (siehe Abschnitt 4.3).

Beim weiteren Übergang zum aus Lehrersicht erreichten Curriculum werden hauptsächlich Lösungsalgorithmen gefiltert; bei den Schülern der Gesamtschule bleiben nur die Rechenverfahren als Wissen übrig, bei den Gymnasialschülern werden, in verblässender Weise, auch Modellvernetzungen im Hinblick auf Beziehungen zwischen Geometrie und Algebra übertragen.

Aufgaben, die einen verständnisvollen Umgang mit vernetztem Wissen erfordern, können nur von einem Teil der Gymnasialschüler gelöst werden, von den Schülern der Gesamtschule gar nicht.

Das Modellieren von Anwendungsaufgaben fällt den Schülern schwer.

¹ Die einzigen verzeichneten Verluste sind zum einen die fehlende Vermittlung des Konzepts der Linearität im Gymnasium A und zum anderen die von den Gymnasiallehrern nicht aufgezeigten Bezüge zwischen der Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen bzw. der Lagebeziehung der entsprechenden Geraden und der algebraischen Struktur des Gleichungssystems.

Der Übergang vom implementierten Curriculum zum tatsächlich erreichten Curriculum erfolgt im Wesentlichen *filterartig*¹.

Bei den Schülern der *Gymnasien* zeigt sich, dass das Bewusstsein um die vernetzten Konzepte zur betrachteten Thematik weitgehend vorliegt², die Zusammenhangskanten zwischen den Konzepten fehlen jedoch vielfach oder sind wenig präzise ausdifferenziert. In das erreichte Curriculum der Schüler der Gymnasien wurden vor allem fachsystematische Vernetzungen übertragen. Sieht man von den einzelnen Lerngruppen ab, so konnten bei der Mehrheit der Gymnasialschüler die fachsystematischen Vernetzungen

- F3 (Fallunterscheidung entsprechend der Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden),
 - F4 (Fallunterscheidung entsprechend der Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems) und
 - F5 (Oberbegriff-/Unterbegriff-Relation: Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme),
- sowie die trivialen Verbindungen
- F6 der Merkmalsvernetzung zwischen den Konzepten „LGS“ und „Lösungsverfahren für LGS“,
 - F7 der Merkmalsvernetzung zwischen den Konzepten „Geraden“ und „Schnittpunkte zweier Geraden“ und
 - F8 der Zugehörigkeitsrelation zwischen den Konzepten „LGS von 2 Geradengleichungen“ und „Lösungen eines LGS von 2 Geradengleichungen“)

aufgedeckt werden. Etwa die Hälfte der Schüler zeigte ferner ein Wissen um die Einteilung linearer Gleichungssysteme in 2×2 - und 3×3 -Gleichungssysteme (fachsystematische Vernetzung F1) und bei fast der Hälfte der Schüler wurde eine Kenntnis um die verschiedenen Lagebeziehungen zweier Geraden (fachsystematische Vernetzung F2) sichtbar.

¹ Es wurden nur geringfügige Abweichungen der vorherrschenden filterartigen Übertragung von Lerninhalten aus dem implementierten Curriculum auf das erreichte Curriculum festgestellt. Das nach Darstellungen des Lehrers A nicht oder unzureichend vermittelte Konzept der Linearität, das Bestandteil des intendierten Curriculums ist, ist im erreichten Curriculum am Gymnasium A mit korrekter Vorstellung vorhanden. Die von den Gymnasiallehrern nicht vermittelten Bezüge zwischen der Anzahl der Lösungen eines linearen Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen und seiner algebraischen Struktur werden dennoch, wenn auch nur von sehr wenigen Schülern, beherrscht. Diese Kenntnisse wurden möglicherweise direkt von der Ebene des intendierten Curriculums auf die des erreichten Curriculums übertragen.

² Dies wird durch die Ergebnisse im ersten und im zweiten Untersuchungsschritt deutlich (vgl. Abschnitte 8.3.2.1 und 8.3.2.2).

Modellvernetzungen sind nur bei wenigen Schülern ins erreichte Curriculum übergegangen und noch weniger Schüler sind in der Lage, dieses Wissen zum Problemlösen erfolgreich einzusetzen. Lediglich die Modellvernetzung M1 zwischen einem „LGS von 2 Geradengleichungen“ und „2 Geraden“ passiert bei der Mehrheit der Schüler den Filter zum erreichten Curriculum. Die Verbindungen zwischen den Lösungen eines linearen Gleichungssystems von zwei Geradengleichungen und den Schnittpunkten der Geraden erreichen noch etwa 13% der Schüler, nur 5% der Schüler zeigen ein umfassendes Wissen um die verschiedenen Bezüge zwischen Geometrie und Algebra im betrachteten Themenbereich.

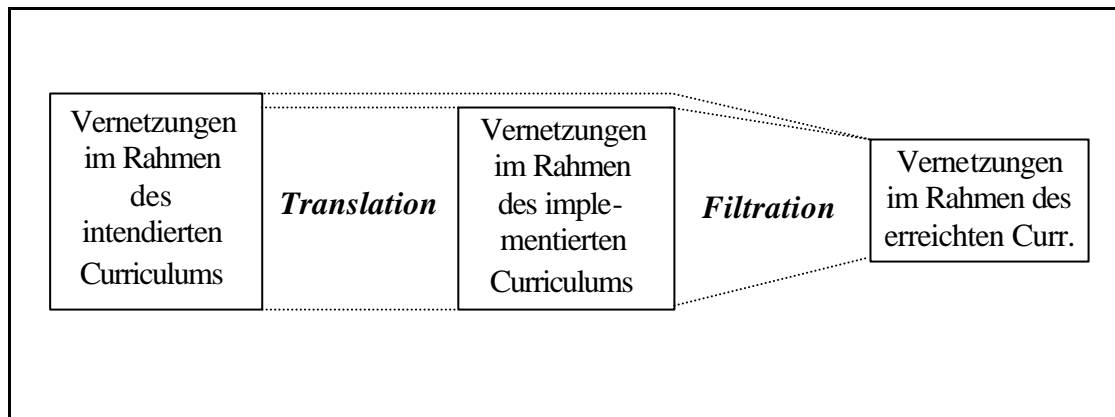
Im implementierten Curriculum beim Lösen von Anwendungsaufgaben exemplarisch vermittelte Modellvernetzungen werden im erreichten Curriculum nur unsicher beherrscht.

Bei den Schülern der *Gesamtschule* bleibt von der Beziehungshaltigkeit der Thematik fast gar nichts übrig. Vorherrschend ist die Kenntnis um verschiedene Rechenverfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme, diese wurden im zweiten Untersuchungsschritt von gut der Hälfte der Schüler angekreuzt. Allerdings wurden hier auch die fiktiven Verfahren, „Divisionsverfahren“ und „Abstraktionsverfahren“, von etwa einem fünftel der Schüler angekreuzt, was auch im Bereich der Kenntnis um Rechenverfahren auf Unsicherheiten der Schüler hinweist. Fallunterscheidungen entsprechend der Anzahl von Lösungen eines linearen Gleichungssystems, der Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden oder der Lagebeziehung zweier Geraden erscheinen, wenn überhaupt, nur einer Minderheit der Schüler bewusst zu sein. Querverbindungen zwischen Geometrie und Algebra fehlen im Wissen dieser Schüler offenbar fast vollständig. Eine Erklärung mag in der starken Ausrichtung der Schulbuchdarstellung zu dieser Thematik auf eindeutig lösbar lineare Gleichungssysteme liegen (vgl. Abschnitt 8.1.1.2).

Ein Vergleich des aus Lehrersicht erreichten Curriculums mit dem tatsächlich erreichten Curriculum zeigt, dass die Lehrer die Kenntnisse und Fähigkeiten ihrer Schüler im Großen und Ganzen realistisch einschätzen.

Nachfolgende Graphik veranschaulicht die globale Charakteristik für die Veränderung von Vernetzungen beim Übergang von einem Rahmen zum nächsten.

Abbildung 25: Globale Charakteristik der Veränderung von Vernetzungen beim Übergang von einem Curriculumsrahmen zum nächsten



Detaillierte Netzwerkdarstellungen zur Veränderung der in der Untersuchung betrachteten Vernetzungen entlang des Weges der Lehr- und Lernprozesse sind im Anhang K durch die Abbildungen 30 bis 34 gegeben. Sie stellen, getrennt nach den beteiligten Schulen und Jahrgängen, die in den drei Curriculumsrahmen erhobenen Netzwerke jeweils vergleichend dar. In den Graphiken wurden dabei die Abbildungen 16 bis 24 in stilisierter Form eingearbeitet. Die Darstellung des erreichten Curriculums erfasst somit nur als sicher einzustufende Vernetzungen.

In den Abbildungen 30 bis 34 sind abermals die fachsystematischen Vernetzungen grün eingezeichnet und die Modellvernetzungen rot. Man erkennt, dass die Netzwerke in den Rahmen des intendierten und des implementierten Curriculums fast identisch sind; vom Rahmen des intendierten zum Rahmen des implementierten Curriculums sind nur geringfügige Einbußen. Es ist der strukturelle Aspekt von linearen Gleichungssystemen, der in den untersuchten Schulbüchern für das Gymnasium behandelt wird, jedoch im Unterricht von den beiden Gymnasiallehrern nicht aufgegriffen wurde.

Im Rahmen des erreichten Curriculums fehlt in der Darstellung zu einer jeden Lerngruppe sehr viel. Rote Kanten, die für Modellvernetzungen stehen, sind fast alle verloren. Als sichere Vernetzung bleibt hier nur die Verbindung zwischen einem linearen Gleichungssystem von zwei Geradengleichungen und seiner geometrischen Interpretation als zwei Geraden übrig. Bei den grünen Kanten, die fachsystematische Vernetzungen kennzeichnen, ist je nach Lerngruppe ein unterschiedlich großer Verlust zu verzeichnen. Die Schüler vom Gymnasium A zeigen hier die meisten sicheren Vernetzungen, die von der Gesamtschule die wenigsten. Dies kann u.a. auf

die Benutzung unterschiedlicher Schulbücher zurückzuführen sein aber vor allem auch auf eine möglicherweise recht unterschiedliche Art der Implementierung der Unterrichtsinhalte.

Für die an der Untersuchung beteiligten *Gymnasien* sind die Ergebnisse hinsichtlich der Veränderung von Vernetzungen beim Übergang von einem Curriculumsrahmen zum nächsten in den nachfolgenden Netzwerkdarstellungen (Abbildung 26) zusammengefasst. Hier wird noch einmal deutlich, dass Vernetzungen aus dem Rahmen des intendierten Curriculums fast vollständig in den Rahmen des implementierten Curriculums übertragen werden; der Filter zwischen dem Rahmen des implementierten Curriculums und dem Rahmen des erreichten Curriculums ist für einen Großteil der fachsystematischen Vernetzungen (mit grünen Kanten gekennzeichnet) durchlässig, die meisten Modellvernetzungen (rote Kanten) fehlen hingegen im Filtrat (erreichtes Curriculum). Im Netzwerk zum erreichten Curriculum sind abermals nur die Kanten jener Vernetzungen eingezeichnet, die als „sicher“ einzustufen waren (also bei mehr als 50% der Schüler aufgedeckt wurden).

Abbildung 26: Vernetzungen in den Curriculumsrahmen der Gymnasien

