5 Lineare Gleichungssysteme - fachliches Umfeld für die empirische Untersuchung

Als spezielles *Thema* für eine empirische Untersuchung ist in der vorliegenden Arbeit das der *linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I* ausgesucht worden. Dieses Thema bietet den Vorteil, dass vielfältige Vernetzungsarten angesprochen werden können.

In diesem Kapitel wird eine fachlich-epistemologische Analyse des Themas (reduziert auf einen für Schulunterricht in der Sekundarstufe I zugänglichen Umfang) speziell hinsichtlich der inhärenten fachsystematischen Vernetzungen und anwendungsbezogenen Vernetzungen geliefert; sie dient als fachlicher Bezugs-rahmen für die nachfolgend vorgestellte Untersuchung.

In Abschnitt 5.1 werden verschiedene Aspekte, unter denen lineare Gleichungssysteme (LGS) in der Sekundarstufe I betrachtet werden können, aufgezeigt. Damit erhält man einen Überblick über jeweils zentrale Begriffe mit ihren, den verschiedenen Sichtweisen entsprechenden, spezifischen Interpretationen, und somit einen Überblick über mögliche Vernetzungsknoten zur vorgegebenen Thematik (Abschnitt 5.2.1). In Abschnitt 5.2.2 schließlich wird der Frage nach fachsystematischen Vernetzungen sowie anwendungsbezogenen Vernetzungen auf den in Abschnitt 5.2.1 herausgearbeiteten Konzepten unter Berücksichtigung der Ausführungen in Abschnitt 5.1 nachgegangen.

5.1 Kontexte rund um die linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I: Sichtweisen – Begriffe – Interpretationen

Linearen Gleichungssystemen kommt in verschiedenen Bereichen der Mathematik aber auch im Hinblick auf außermathematische Anwendungen eine zentrale Bedeutung zu. So stellen z.B. TIETZE, KLIKA & WOLPERS (2000, S. 33 bzw. 40) heraus, dass sich „weite Bereiche der Linearen Algebra ... in der Sprache linearer Gleichungssysteme darstellen [lassen]" und ferner, dass „lineare Gleichungssysteme wegen der Möglichkeit, vielfältige Probleme aus verschiedensten Anwendungsbereichen linear zu modellieren, zweifellos ein zentrales Mathematisierungsmuster darstellen". Entsprechend führt auch ZURMÜHL (1965, S. 105) in seinem Grundlagenwerk „Praktische Mathematik" aus:

> Zahllose Anwendungen aus Physik und Technik führen auf mehr oder weniger umfangreiche Systeme linearer Gleichungen ... Lineare Gleichungen begegnen dem Ingenieur in der Statik ..., in der Schwingungstechnik ... Auf lineare Gleichungssysteme führen zahlreiche Näherungsverfahren zur numerischen Behandlung von Rand- und Eigenwertaufgaben ... Selbst für betriebswirtschaftliche Fragen spielen ... große lineare Gleichungssysteme eine wichtige Rolle.

Im Rahmen der Schulmathematik werden lineare Gleichungssysteme vornehmlich in der Sekundarstufe II im Rahmen der Linearen Algebra behandelt und lassen sich hier mit einem großen Aspektreichtum in verschiedenen Inhaltsbereichen darbieten (vgl. TIETZE, KLIKA & WOLPERS, 2000, S. 36, 57). In der Sekundarstufe I nimmt die Thematik der linearen Gleichungssysteme einen weniger breiten Behandlungszeitraum ein, bietet in dieser Stufe aber auch eine vergleichsweise große Vielfalt an Sichtweisen.

Dabei wird unter einer *globalen Betrachtungsweise* zum einen an den Themenbereich der *linearen Funktionen* in einer Variablen und der sie als Funktionsgraphen darstellenden *Geraden* angeknüpft, sowie der sich durch die Sekundarstufe I durchziehende algebraische Themenstrang der *Terme und Gleichungen* weiterverfolgt. Zum anderen lassen sich einige Betrachtungsweisen aus der Oberstufe vorbereiten. Ferner werden lineare Gleichungssysteme als Mathematisierungsmuster unter dem globalen Aspekt der *Anwendung* von Mathematik erfahren.

Der Handhabbarkeit willen beschränkt man sich in der Sekundarstufe I auf Gleichungssysteme von zwei oder drei linearen Gleichungen mit zwei bzw. drei Variablen, also auf lineare $n \times n$-Gleichungssysteme mit $n = 2$ bzw. $n = 3$,[1] meist in den Darstellungsformen

$$a_i x + b_i y = c_i \text{ mit } i = 1,2 \qquad (*)$$

bzw. (falls $b_i \neq 0$):

$$y = m_i x + n_i \text{ mit } i = 1,2 \qquad (**)$$

für $n = 2$, und

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i \text{ mit } i = 1,2,3 \qquad (***)$$

für $n = 3$.

Sie können unter folgenden *Aspekten* betrachtet werden:

1. syntaktischer Aspekt,
2. semantischer bzw. aussagenlogischer Aspekt,
3. mengentheoretischer Aspekt,
4. relationaler bzw. funktionaler Aspekt,
5. geometrischer Aspekt,
6. Kalkülaspekt,
7. struktureller Aspekt,
8. Modellierungsaspekt.

Im einzelnen wird dies nachfolgend näher erläutert.

[1] Gleichwohl könnte man Schüler bereits in der Sekundarstufe I mit nichtquadratischen linearen m×n-Gleichungssystemen bekannt machen, und entsprechend auch die Frage nach der Lösungsvielfalt eines linearen Gleichungssystems (andeutungsweise) aufwerfen.

5.1.1 Der syntaktische Aspekt

Syntaktisch gesehen bestehen lineare Gleichungssysteme (in der Sekundarstufe I) aus zwei bzw. drei Gleichungen; jede Gleichung entsteht, wenn man zwei geeignet strukturierte Terme mit dem Gleichheitszeichen verbindet (vgl. VOLLRATH, 1994, S. 192). Der Begriff des Terms wird dabei als Oberbegriff für Summen, Differenzen, Produkte, usw. und auch Zahlen und Platzhalter erklärt (vgl. VOLLRATH, 1994, S. 99).

5.1.2 Der semantische bzw. aussagenlogische Aspekt

In semantischer Sicht interessiert man sich für die Wirkung von Einsetzungen (MALLE (1993, S. 46-47) spricht in diesem Zusammenhang vom „Einsetzungs-aspekt“). Es werden diejenigen Einsetzungen für die in einem Gleichungssystem vorkommenden Variablen hervorgehoben, für die alle Gleichungen wahr sind.

In der Sprache der Aussagenlogik ist ein lineares Gleichungssystem hiernach eine konjunktive Aussageform. Jede einzelne Gleichung des Systems ist dabei eine Aussageform, die durch Einsetzen von bestimmten Zahlen für die Variablen in eine wahre Aussage übergehen kann. Die konjunktive Aussageform geht genau dann in eine wahre Aussage über, wenn alle verknüpften Aussageformen bei derselben Einsetzung in wahre Aussagen übergehen.

Aussageformen, und damit auch Gleichungen bzw. Gleichungssysteme, werden als äquivalent bezeichnet, wenn sie jeweils für genau dieselben Einsetzungen in wahre Aussagen übergehen.

Man unterscheidet zwischen erfüllbaren und unerfüllbaren Aussageformen (und damit erfüllbaren und unerfüllbaren Gleichungssystemen). Eine Aussageform heißt dann erfüllbar, wenn es eine Einsetzung gibt, für die die Aussageform in eine wahre Aussage übergeht; gibt es keine solche Einsetzung, so heißt die Aussageform unerfüllbar. Ferner werden allgemeingültige Aussageformen, die für jede Einsetzung in wahre Aussagen übergehen, als Sonderfall herausgestellt.

Bei der Frage nach denjenigen Einsetzungen, für welche eine Aussageform in eine wahre Aussage übergeht, ist von entscheidender Bedeutung, welche Einsetzungen überhaupt zulässig sind. Hier ergibt sich die Notwendigkeit einer begrifflichen Präzisierung, sie erfolgt in der Sprache der Mengenlehre.

5.1.3 Der mengentheoretische Aspekt

Die mengentheoretische Sicht kann durch das Begriffstripel „Gleichungen – Grundbereich – Lösungsmenge“ umrissen werden (vgl. WALSCH, 1992, S. 9). Diese Sicht verbindet den vorgenannten Aspekt mit allen nachfolgend betrachteten Sichtweisen linearer Gleichungssysteme: Es geht letztlich immer darum, für ein System bestehend aus Gleichungen (aufgefasst als konjunktive Aussageform), definiert über einem bestimmten Grundbereich (Menge der Werte, die als Einsetzungen zulässig sind),[1] eine Lösungsmenge zu finden, d.h. Werte, für die die Gleichungen in wahre Aussagen übergehen. Diese Werte nennt man Lösungen, sie sind Elemente der Lösungsmenge.

Mengentheoretisch ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen des Systems. Als Sonderfälle lassen sich allgemeingültige Gleichungssysteme hervorheben, bei denen die Lösungsmenge gleich der Grundmenge ist, sowie unerfüllbare Gleichungssysteme mit einer Lösungsmenge, die leer ist.

[1] Der Grundbereich eines linearen 2×2-Gleichungssystems ist i.d.R. $\mathbb{R}^2$, der eines 3×3 Gleichungssystems $\mathbb{R}^3$; Einschränkungen erfolgen i.d.R. nur bei Anwendungsaufgaben.

5.1.4 Der relationale bzw. funktionale Aspekt

Gleichungen mit Variablen definieren Relationen zwischen den Variablen. Ein lineares Gleichungssystem zeigt somit entsprechend der Zahl seiner Gleichungen mehrere gleichzeitig bestehende Relationen auf.

Insbesondere lassen sich lineare Gleichungssysteme auch unter dem funktionalen Aspekt betrachten. Da sich Funktionen in der Sekundarstufe I in der Regel auf solche mit einer Variablen beschränken[1], ist diese Sichtweise hier eher für 2×2-Gleichungssysteme angemessen.

Für den Fall $(a_i;b_i) \neq (0;0)$ (mit den Bezeichnungen aus (*), S. 115) kann man jede der beiden Gleichungen in der Form einer expliziten Funktionsgleichung angeben (d.h. aufgelöst nach einer Variablen); in der Sekundarstufe I wird man sich auf den Fall $b_i \neq 0$ mit $i = 1,2$ beschränken und, wie üblich, y als Funktion von x betrachten. Ein lineares Gleichungssystem stellt sich dann als ein System von Funktionsgleichungen linearer Funktionen dar, die Frage nach den Lösungen des Gleichungssystems wird zur Frage nach denjenigen Variablenwerten x, für welche die Funktionswerte gleich groß sind.

Sonderfälle lassen weitere Fragestellungen zu: Beim Gleichungssystem $y = 2x + 5$ und $x = 3$ z.B. kann man fragen, welchen Funktionswert die Funktion mit $x \mapsto 2x + 5$ an der Stelle $x = 3$ hat; umgekehrt kann man z.B. beim Gleichungssystem $y = 2x + 5$ und $y = 7$ fragen, an welcher Stelle die Funktion mit $x \mapsto 2x + 5$ den Funktionswert 7 hat.

[1] KIRSCH (1986) empfiehlt die Behandlung von Funktionen mehrerer Veränderlicher, speziell von Funktionen des Typs $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, bereits in der Sekundarstufe I, etwa im 10. Schuljahr. Er führt aus, dass lineare Funktionen zweier Veränderlicher und die „Geometrie“ ihrer Graphen als Unterrichtsgegenstand eine erschließende Bedeutung insbesondere auch für raumgeometrische Fragestellungen haben kann. Er betrachtet jedoch nur einzelne Funktionsgleichungen, nicht Gleichungssysteme.

5.1.5 Der geometrische Aspekt

Betrachtet man die Graphen der beiden linearen Funktionen eines 2×2-Gleichungssystems mit $b_i \neq 0$, $i=1,2$, so handelt es sich um zwei Geraden g_1 und g_2; sie stellen die Erfüllungsmengen der beiden Aussageformen des LGS dar. Die Frage nach den Lösungen des Gleichungssystems stellt sich jetzt als Frage nach den Graphenschnittpunkten und somit nach Schnittpunkten von Geraden dar. Man unterscheidet dabei drei Fälle:

(1) Die Lösungsmenge ist einelementig (besteht aus einem Paar $(x;y)$), falls die Geraden genau einen Schnittpunkt haben: $|g_1 \cap g_2| = 1$.

(2) Die Lösungsmenge ist leer, falls die Geraden keinen Schnittpunkt haben, also parallel zueinander sind: $g_1 \cap g_2 = \emptyset$.

(3) Die Lösungsmenge ist die Menge aller Paare $(x;y)$, durch die eine der Geradengleichungen erfüllt wird. Sie enthält unendlich viele Elemente, das Gleichungssystem ist jedoch nicht allgemeingültig. Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn sich die beiden Geraden in allen ihren Punkten schneiden, also zusammenfallen: $g_1 \cap g_2 = g_1 = g_2$.

Im Fall (1) haben die beiden Geraden (linearen Funktionen) unterschiedliche Steigung, in den beiden anderen Fällen jeweils gleiche Steigung.

Obige Betrachtungen sind u.a. auch hilfreich, wenn es um einen Größenvergleich von Funktionswerten linearer Funktionen in einer Variablen geht. Insbesondere gibt der Schnittpunkt zweier linearer Funktionen mit unterschiedlicher Steigung diejenige Stelle an, ab der die Funktionswerte der einen Funktion die entsprechenden der anderen „überholen“.

Im Rahmen einer geometrischen Betrachtung eines linearen 2×2-Gleichungssystems kann man sich von der Form der Darstellung der einzelnen Gleichungen als explizite Funktionsgleichungen lösen und eine Darstellung des Gleichungssystems durch entsprechende implizite Funktionsgleichungen der Form $a_i x + b_i y = c_i$ mit $i = 1,2$ wählen. In die Betrachtungen lassen sich dann auch Parallelen zur y-Achse (Geraden mit $a_i \neq 0$ und $b_i = 0$, bzw. äquivalent dazu Geraden in der Darstellungsform $x = \text{const.}$) einbeziehen. Die Lagebeziehung oder die Schnittpunktmenge der Geraden lässt sich über die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems erklären (s.o.).

Der geometrische Aspekt der Schnittpunktbetrachtung von Geraden im $\mathbb{R}^2$ vermittelt Grundvorstellungen für eine weiterführende Behandlung von Schnittpunktgebilden von Geraden und Ebenen in der Oberstufe.

Als Sonderfälle lassen sich lineare 2×2-Gleichungssysteme (über $\mathbb{R}^2$) mit $(a_i;b_i) = (0;0)$ für mindestens ein $i \in \{1, 2\}$ betrachten. Eine Gleichung $a_i x + b_i y = c_i$ mit $a_i = b_i = c_i = 0$ ist allgemeingültig, d.h. für jede Einsetzung $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt; unter geometrischer Betrachtung beschreibt eine solche Gleichung alle Punkte der x-y-Ebene. Eine Gleichung $a_i x + b_i y = c_i$ mit $a_i = b_i = 0$ und $c_i \neq 0$ ist unerfüllbar, beschreibt also geometrisch betrachtet keinen Punkt. Man unterscheidet drei Fälle:

- Für ein $i \in \{1, 2\}$ gilt: $a_i = b_i = 0$ und $c_i \neq 0$. Dann beschreibt die entsprechende Gleichung des Systems eine leere Punktmenge (s.o.); die Schnittpunktmenge, die durch das Gleichungssystem beschrieben wird, ist ebenfalls leer. Das Gleichungssystem hat keine Lösung, ist also unerfüllbar.
- Für eine der beiden Gleichungen ist $a_i = b_i = c_i = 0$, die andere Gleichung ist eine Geradengleichung (d.h. $(a_i;b_i) \neq (0;0)$). Die Schnittpunktmenge, die durch das Gleichungssystem beschrieben wird, ist gleich der Menge aller Punkte, die durch die Geradengleichung beschrieben wird.
- Für beide Gleichungen gilt: $a_i = b_i = c_i = 0$. Dann ist das Gleichungssystem allgemeingültig und beschreibt alle Punkte der x-y-Ebene.

5.1.6 Der Kalkülaspekt

Ein Gleichungssystem wird unter dem Kalkülaspekt betrachtet, wenn die Ermittlung seiner Lösungsmenge im Mittelpunkt steht. Dabei erscheint das Gleichungssystem als ein „Paket“ von (zwei oder drei) Zeichenreihen, mit denen nach gewissen Regeln operiert werden darf und deren eventuelle Bedeutung man während des Arbeitens vergessen kann (vgl. MALLE, 1993, S. 67).

In der Sekundarstufe I werden üblicherweise graphische sowie algebraische Lösungsverfahren vermittelt. Als algebraische Lösungsverfahren werden in der Regel das Gleichsetzungsverfahren, das Einsetzungsverfahren, das Additionsverfahren[1] und evtl. auch die Cramersche Regel vorgestellt. Bei der Anwendung eines Rechenverfahrens führt man i.d.R. Umformungen durch; dafür benötigt man Regeln, insbesondere Regeln für Äquivalenzumformungen, welche Gleichungen bzw. Gleichungssysteme in äquivalente überführen, und Regeln für Termumformungen. Von Bedeutung ist dabei die Eigenschaft dieser Umformungen die Lösungsmenge zu erhalten.

Abhängig von den konkret im Gleichungssystem vorkommenden Termen können die zur Verfügung stehenden Lösungsverfahren unterschiedlich gut geeignet sein.

Bei der Ermittlung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems unter dem Kalkülaspekt zeigt sich, dass ein lineares Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben kann. Ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen kann allgemeingültig oder auch nicht allgemeingültig sein.

5.1.7 Der strukturelle Aspekt

Die Tatsache, dass ein lineares Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben kann, führt zu der Frage, ob man es dem Gleichungssystem nicht „ansehen" kann, welcher Fall vorliegt. Hier kommt der strukturelle Aspekt ins Spiel. So lässt sich z.B. feststellen, dass ein 2×2-Gleichungssystem (definiert über $\mathbb{R}^2$) unendlich viele Lösungen hat, wenn a_1, b_1 und c_1 jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2, b_2 bzw. c_2 (mit den Bezeichnungen von oben) sind, und dass es keine Lösung hat, wenn a_1 und b_1 jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2 bzw. b_2 sind, nicht aber c_1 von c_2. Über die bewusste Thematisierung der algebraischen Struktur eines linearen Gleichungssystems im Zusammenhang mit der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems lässt sich ein Vorverständnis der Konzepte der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit, der Linearkombination (speziell anhand von 3×3-Gleichungssystemen), sowie des Zeilenrangs bzw. Spaltenrangs (einer Matrix und einer erweiterten Matrix) entwickeln.

[1] Unter Anknüpfung an das Additionsverfahren wird später in der Sekundarstufe II der Gaußsche Algorithmus eingeführt.

Betrachtet man speziell Systeme zweier linearer Funktionsgleichungen in der Form $y = m_1 x + n_1$ und $y = m_2 x + n_2$, so wird durch die in den Gleichungen vorkommenden Parameter m_i bzw. n_i (und damit durch die jeweils spezielle algebraische Struktur des Gleichungssystems) eine Fallunterscheidung hinsichtlich der verschiedenen Lagebeziehungen der zugehörigen Funktionsgraphen gekennzeichnet:

- Ist $m_1 \neq m_2$, so sind die Funktionsgraphen zwei Geraden unterschiedlicher Steigung, also zwei sich schneidende Geraden.
- Ist $m_1 = m_2$ und $n_1 \neq n_2$, so sind die Funktionsgraphen zwei Geraden gleicher Steigung mit unterschiedlichem y-Achsenabschnitt, also zwei parallele Geraden.
- Ist $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$, so sind die Funktionsgraphen zwei identische Geraden.

Weitere strukturelle Betrachtungen wurden bereits in den Ausführungen unter 5.1.5 zum geometrischen Aspekt angesprochen. So zeichnen sich beispielsweise 2×2-Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen (dargestellt in der Form $a_i x + b_i y = c_i$ mit $i = 1{,}2$) dadurch aus, dass $(a_i ; b_i) \neq (0;0)$ für $i = 1{,}2$.

5.1.8 Der Modellierungsaspekt

Über lineare Gleichungssysteme lassen sich zahlreiche außermathematische aber auch innermathematische Problemstellungen modellieren.

Zu den innermathematischen Problemstellungen gehören vor allem:

- geometrische Problemstellungen (Die beiden Gleichungen im beschreibenden algebraischen Modell zeigen Beziehungen zwischen geometrischen Größen auf, teils durch geometrische Formeln, teils aufgrund der Vorgaben in der Problemstellung.),
- Zahlenrätsel (In der Regel werden hier gesuchte Zahlen oder Ziffern durch die Variablen eines linearen Gleichungssystems repräsentiert, und ihre Relationen durch entsprechende Gleichungen.),

- Interpolationsprobleme (Hierzu gehört z.B. die Bestimmung des Funktionsterms einer quadratischen Parabel $ax^2 + bx + c$, die durch drei vorgegebene Punkte geht. Man erhält ein 3×3-Gleichungssystem in den Variablen a, b und c, die zu bestimmen sind.[1]).

Außermathematische Anwendungsaufgaben, die sich über lineare Gleichungssysteme modellieren und in der Sekundarstufe I behandeln lassen, finden sich z.B. in folgenden Bereichen:

- verschiedene Problemstellungen aus dem Alltag, dem Geschäftsleben und der Wirtschaft (Hier werden z.B. Entfernungen, Geldbeträge (speziell Preise), Stückzahlen, Anzahlen von Personen oder Zeitlängen über die Unbekannten eines linearen Gleichungssystems modelliert. Viele dieser Aufgaben sind eingekleidete Zahlenrätsel oder lassen sich dem Typ der Mischungsaufgaben[2] zuordnen (z.B. Mischung zweier Kaffeesorten mit unterschiedlichem kg-Preis). Als spezieller Aufgabentyp, bei dem die funktionale Sichtweise von linearen Gleichungssystemen zum Tragen kommt, sei hier noch die Bestimmung eines möglichst günstigen unter verschiedenen Stromtarifen, Telefontarifen u.ä., möglichst günstiger Kontoführungsgebühren, Lagerhaltungskosten usw., in Abhängigkeit von Verbrauchs-/Gebrauchseinheiten erwähnt.[3]),
- Aufgaben aus der Chemie (Hierzu gehören größtenteils Mischungsaufgaben, z.B. Mischung zweier Lösungen unterschiedlicher Konzentration[4], speziell Mischung von Metalllegierungen.),

---

[1] Da quadratische Gleichungen im Unterricht i.d.R. später behandelt werden als lineare Gleichungssysteme, wird diese Anwendung eher in eine Unterrichtsreihe zu quadratischen Gleichungen integriert.

[2] Mischungsaufgaben können über 2×2-Gleichungssysteme folgender Struktur gelöst werden: $x+y=s$ und $ax+by=cs$. Die zweite Gleichung erhält man aus der ersten durch drei lineare Übergänge ($x \to ax$, $y \to by$, $s \to cs$), definiert durch drei Werte einer bestimmten Größe (z.B. drei kg-Preise a, b und c für zwei Kaffeesorten bzw. für die Mischung aus x Mengeneinheiten der ersten und y Mengeneinheiten der zweiten Sorte). c ist dabei das mit x und y gewichtete Mittel von a und b: $c=(ax+by):(x+y)$, vgl. OTTER & KIEẞWETTER, 1993, S. 8-9.

[3] Die jeweiligen Kosten werden hierbei durch lineare Funktionen in einer Variablen (Anzahl der Einheiten) beschrieben, je nach Tarif mit unterschiedlicher Steigung (Preis der Einheit) und unterschiedlichem y-Achsenabschnitt (Grundpreis, Fixkosten). Die Lage der Schnittstellen der beschreibenden Funktionsgraphen sind entscheidend für die Wahl eines möglichst günstigen Tarifs.

[4] Die Konzentrationsangaben erfolgen hierbei korrekterweise in Gewichtsprozenten. (In vielen gängigen Schulbüchern für den Mathematikunterricht findet man jedoch Aufgaben dieser Art mit Konzentrationsangaben in Volumenprozenten. Da sich Volumina von Flüssigkeiten beim Mischen

- Aufgaben aus der Physik (z.B. Aufgaben zum Hebelgesetz[1], Bewegungsaufgaben (Bestimmung von Geschwindigkeiten oder Fahrstrecken verschiedener Fahrzeuge), Aufgaben zum Wärmeaustausch[2]),
- Aufgaben aus der Geschichte (Beispielsweise sind viele Mischungsaufgaben aus früheren Kulturen überliefert (vgl. OTTER & KIEßWETTER, 1993, S. 9); so ging es z.B. bei den Babyloniern um Felder mit verschiedenen Erträgen; bei den Ägyptern um Biere verschiedener Stärke; bei Archimedes um eine Krone, die aus Gold und Silber war, also um Metalle mit verschiedenen spezifischen Gewichten.).

Ein lineares Gleichungssystem als Modellierung einer Problemstellung kann zunächst als Objekt, stellvertretend für diese Problemstellung, betrachtet werden. (Diese Sichtweise kommt dem „Gegenstandsaspekt" bei MALLE (1993, S. 46-47) nahe.) Bei der Bestimmung der Lösungen des Gleichungssystems mittels algebraischer Lösungsverfahren tritt vor allem der Kalkülaspekt in den Vordergrund. Unter dem Modellierungsaspekt wird ein lineares Gleichungssystem immer dann gesehen, wenn Bezüge zwischen der vorgegebenen Problemstellung und dem es beschreibenden linearen Gleichungssystem hergestellt werden, d.h. im Zuge der Algebraisierung der Problemstellung sowie der Interpretation algebraisch gewonnener Lösungen oder auch Zwischenergebnisse.

Während die Bedeutung der Grundmenge bei einer rein algebraischen Behandlung von linearen Gleichungssystemen leicht untergeht, kommt bei Anwendungsaufgaben der Betrachtung der Grundmenge, entsprechend der Einschränkungen durch den Anwendungsbereich, eine entscheidende Rolle zu.

---

i.d.R. nicht additiv verhalten, werden dabei falsche Vorstellungen über Sachzusammenhänge generiert!)

[1] Die Gleichungen ergeben sich hier aus der formelmäßigen Formulierung des Hebelgesetzes; einige (i.d.R. zwei) der vorkommenden Größen sind zu bestimmen. Das Hebelgesetz gibt dabei die Relation der in ihm vorkommenden Größen, insbesondere auch der unbekannten Größen, an.

[2] Grundlage ist die Formel zur Bestimmung der Mischtemperatur einer Flüssigkeit, wenn zwei Mengen der gleichen Flüssigkeit unterschiedlicher Temperatur gemischt werden. Diese Formel beschreibt die Relation zwischen zu bestimmenden unbekannten Größen.

5.2 Vernetzungen rund um die linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I

Abschnitt 5.2.1 gibt eine Übersicht über Vernetzungsknoten zum Themenbereich der linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I, Abschnitt 5.2.2 geht der Frage nach fachsystematischen Vernetzungen sowie anwendungsbezogenen Vernetzungen auf der Menge dieser Knoten nach.

5.2.1 Vernetzungsknoten

Die Ausführungen unter Abschnitt 5.1 lassen die Fülle mathematischer und nichtmathematischer Objekte erkennen, die als *Vernetzungsknoten* zum Themenbereich der linearen Gleichungssysteme in der Schulmathematik der Sekundarstufe I in Frage kommen können. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben wird nachfolgend eine Liste gegeben. Der Übersichtlichkeit halber werden dabei die aufgeführten Vernetzungsknoten unter übergeordneten Begriffen kategorisiert; diese beziehen sich auf die unter Abschnitt 5.1 aufgeführten Aspekte.

1. *Komponenten eines linearen Gleichungssystems* (aus syntaktischer Sicht; vgl. Abschnitt 5.1.1):
   zwei/drei Gleichungen, Terme, Gleichheitszeichen, Summen, Differenzen, Produkte, ..., Zahlen, Platzhalter.

2. *Begriffe der Aussagenlogik* (vgl. Abschnitt 5.1.2):
   Aussageform (speziell: konjunktive Aussageform, allgemeingültige Aussageform, erfüllbare Aussageform, unerfüllbare Aussageform), Aussage (wahre Aussage, falsche Aussage), äquivalent.

3. *Mengentheoretische Begriffe* (vgl. Abschnitt 5.1.3):
   Lösungsmenge (speziell: leere Lösungsmenge), Grundmenge, Schnittmenge.

4. *Funktionentheoretische Begriffe* (vgl. Abschnitt 5.1.4):
   (lineare) Abbildung, (lineare) Funktion, Relation, Funktionsgleichung, Funktionsterm, Funktionswert, Variable, Definitionsbereich, Funktionsgraph.

5. *Begriffe unter einer geometrischen Betrachtungsweise* (Begriffe aus der Geometrie und aus der Graphentheorie; vgl. Abschnitt 5.1.5):
   Graph, Gerade, Steigung, y-Achsenabschnitt, Punkt, Koordinaten, Schnittpunkt, Lagebeziehung, parallele Geraden, sich schneidende Geraden, identische Geraden (Geraden, die zusammenfallen).

6. *Begriffe* bei einer Betrachtung *unter dem Kalkülaspekt* (vgl. Abschnitt 5.1.6):
   - Lösung, Anzahl der Lösungen (keine Lösung, genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen),
   - Lösungsverfahren: Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Einsetzungsverfahren, graphische Lösungsverfahren, Cramersche Regel,
   - Umformungsregeln: Regeln für Termumformungen, Regeln für Äquivalenzumformungen; und ihre Eigenschaften (speziell: Erhalt der Lösungsmenge).

7. *Strukturelle Eigenschaften* (vgl. Abschnitt 5.1.7), z.B.:
   Gleichungssystem von der Form $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ mit: a_1, b_1 und c_1 sind jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2, b_2 bzw. c_2;
   Gleichungssystem von der Form $a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ mit: a_1 und b_1 sind jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2 bzw. b_2, nicht aber c_1 von c_2;
   Gleichungssystem von der Form $y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$ mit $m_1 \neq m_2$;
   Gleichungssystem von der Form $y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$ mit $m_1 = m_2$ und $n_1 \neq n_2$,
   Gleichungssystem von der Form $y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$ mit $m_1 = m_2$ und $n_1 = n_2$.

8. *Interpretationen unter dem Modellierungsaspekt* (vgl. Abschnitt 5.1.8):
   verschiedene Interpretationen von linearen Gleichungssystemen, den vorkommenden Variablen und Termen in Anwendungen.

Einige mathematische Objekte finden sich entsprechend ihrer unterschiedlichen Interpretationen unter verschiedenen der in 5.1 aufgeführten Sichtweisen. Es lassen sich daher auch unter *aspektverbindenden Oberbegriffen* Vernetzungsknoten zusammenfassen, z.B.:

- *Interpretationen der Lösungsmenge eines LGS* (aus aussagenlogischer Sicht, vgl. 5.1.2; unter dem funktionalen Aspekt, vgl. 5.1.4; unter geometrischer Sichtweise, vgl. 5.1.5; und unter dem Modellierungsaspekt, vgl. 5.1.8):
  Menge aller Werte, für welche die durch die einzelnen Gleichungen gegebenen Aussageformen alle in wahre Aussagen übergehen;
  Menge der Paare $(x;y)$, die zwei Funktionsgleichungen simultan erfüllen;
  Menge von Schnittpunkten;
  Koeffizienten eines Interpolationspolynoms und andere anwendungsspezifische Interpretationen.
- *Interpretationen der jeweiligen Anzahl der Lösungen eines 2×2-LGS mit* $(a_i;b_i) \neq (0;0)$ (unter dem Kalkülaspekt, vgl. 5.1.6; unter geometrischer Sichtweise, vgl. 5.1.5; unter dem funktionalen Aspekt, vgl. 5.1.4; und aus struktureller Sicht, vgl. 5.1.7):
  - keine Lösung (leere Lösungsmenge), kein Schnittpunkt von Geraden/Funktionsgraphen, parallele Geraden, lineare Funktionen mit gleicher Steigung und unterschiedlichem y-Achsenabschnitt; a_1 und b_1 sind jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2 bzw. b_2, nicht aber c_1 von c_2,
  - genau eine Lösung (LGS ist eindeutig lösbar), genau ein Schnittpunkt von Geraden/Funktionsgraphen, sich schneidende Geraden, lineare Funktionen mit unterschiedlicher Steigung, a_1 und b_1 sind nicht jeweils dasselbe Vielfache von a_2 bzw. b_2,
  - unendlich viele Lösungen, unendlich viele Schnittpunkte (die Punkte einer Gerade), identische (zusammenfallende) Geraden, lineare Funktionen mit gleicher Steigung und gleichem y-Achsenabschnitt, a_1, b_1 und c_1 sind jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2, b_2 bzw. c_2 (die beiden Gleichungen sind äquivalent).

5.2.2 Vernetzungen

Entsprechend der Ausführungen am Ende von Kapitel 3.5, beschränken sich die weiteren Betrachtungen von Vernetzungen in der vorliegenden Arbeit auf fachsystematische Vernetzungen sowie anwendungsbezogene Vernetzungen.

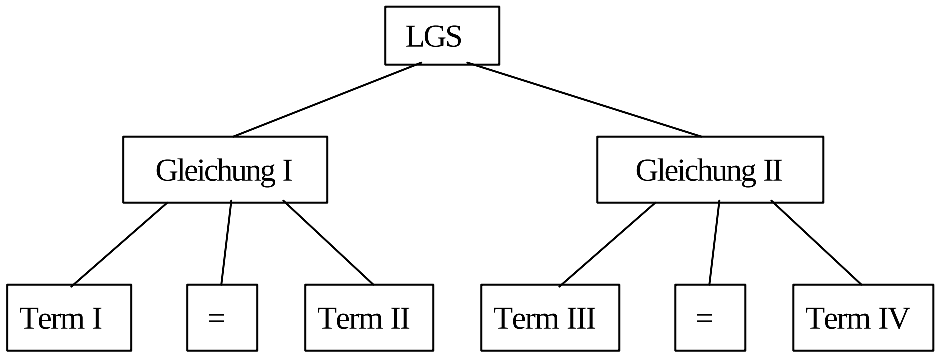
Im Folgenden werden entsprechend Vernetzungen dieser Kategorien auf der Menge der im Abschnitt 5.2.1 aufgezeigten Knoten[1] zum Themenbereich linearer Gleichungssysteme herausgestellt; dies auf der Grundlage schulrelevanter Betrachtungsweisen (siehe Abschnitt 5.1).

5.2.2.1 Fachsystematische Vernetzungen

Vernetzungen, die sich als *Teilmengenbeziehungen* auffassen lassen (Oberbegriff-/Unterbegriff-Relation, Obermengen-/Untermengen-Relation, Teile-Ganzes-Beziehung, Fallunterscheidungen, Merkmalsvernetzung; vgl. Abschnitte 3.3.1 und 3.5), sind spezielle fachsystematische Vernetzungen. Hierzu gehören u.a.:

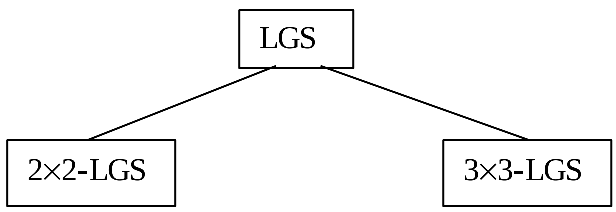
[1] Gleichwohl können die in Abschnitt 5.2.1 aufgelisteten Konzepte auch Knoten in Graphen zu anderen Vernetzungskategorien sein.

(FV1) die Teile-Ganzes-Beziehung zwischen einem LGS und seinen Bestandteilen, z.B.:

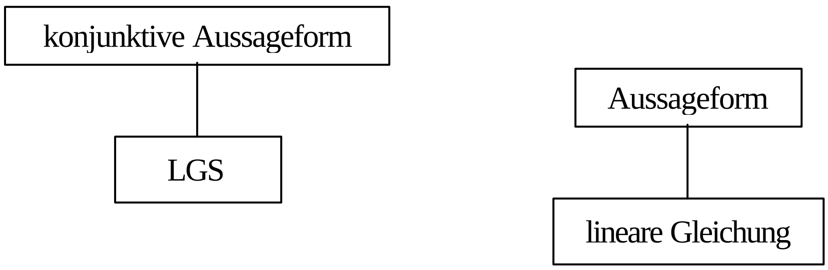


(Dieser Vernetzung liegt die Betrachtungsweise eines LGS unter syntaktischem Aspekt zugrunde (vgl. Abschnitt 5.1.1). Die einzelnen Vernetzungsknoten sind aus den jeweils untergeordneten (nach syntaktischen Regeln) zusammengesetzt, sie werden aus diesen Knoten „abgeleitet“. Insofern kann man die Relation, die diesem Netzwerk zugrunde liegt, auch als „ist ableitbar aus“ bezeichnen; dann müssen die einzelnen Kanten allerdings mit einer Richtung versehen werden.)

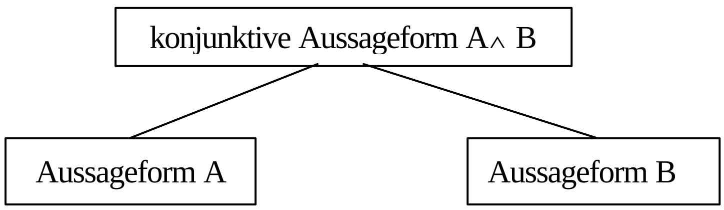
(FV2) die Einteilung linearer Gleichungssysteme in 2×2-Gleichungssysteme und 3×3-Gleichungssysteme (aus der Perspektive der in der Sekundarstufe I vorgenommenen Beschränkungen, vgl. 5.1.1), dies ebenfalls aus syntaktischer Sicht:



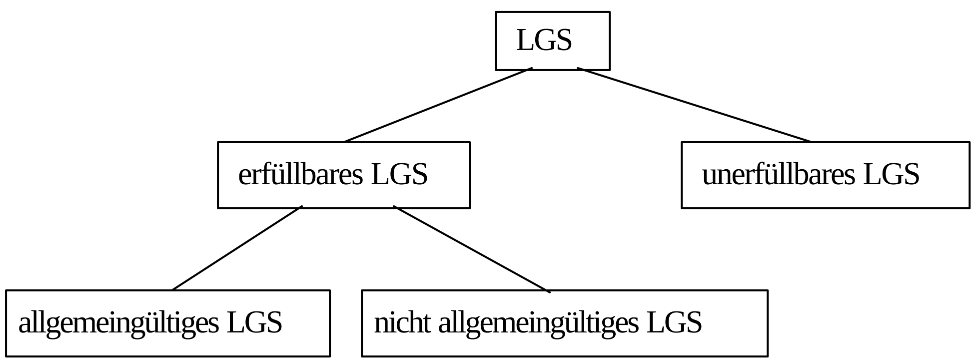
(FV3) die Oberbegriff-/Unterbegriff-Relation zwischen konjunktiven Aussageformen und linearen Gleichungssystemen bzw. zwischen Aussageformen und linearen Gleichungen unter semantischer Betrachtungsweise (vgl. Abschnitt 5.1.2):



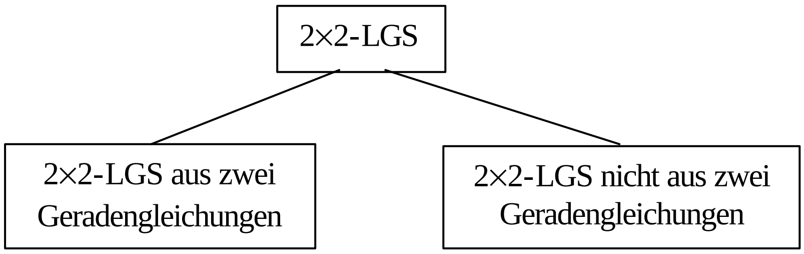
(FV4) die Teile-Ganzes-Beziehung zwischen einer konjunktiven Aussageform und den einzelnen verknüpften Aussagen (vgl. Abschnitt 5.1.2), z.B.:



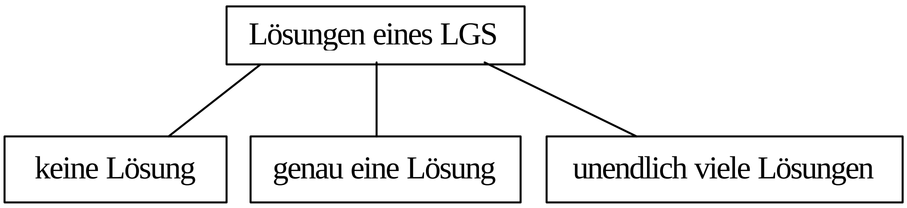
(FV5) die Einteilung linearer Gleichungssysteme in erfüllbare und unerfüllbare lineare Gleichungssysteme, ferner die Einteilung erfüllbarer linearer Gleichungssysteme in allgemeingültige und nicht allgemeingültige lineare Gleichungssysteme (unter semantischer Betrachtungsweise, vgl. Abschnitt 5.1.2):



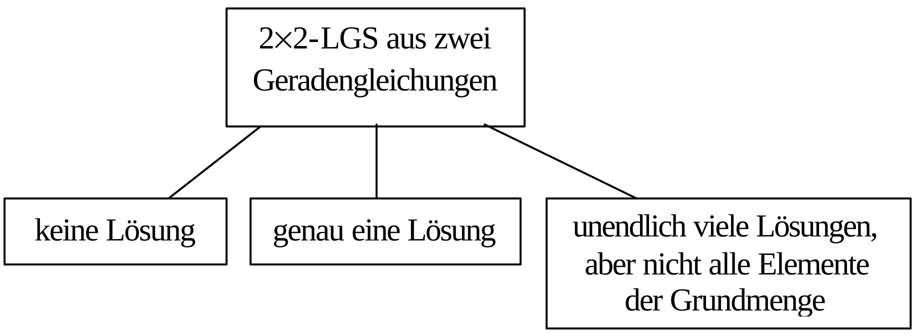
(FV6) die Einteilung linearer 2×2-Gleichungssysteme in lineare Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen und lineare Gleichungssysteme, die nicht aus zwei Geradengleichungen bestehen (vgl. Abschnitt 5.1.5):



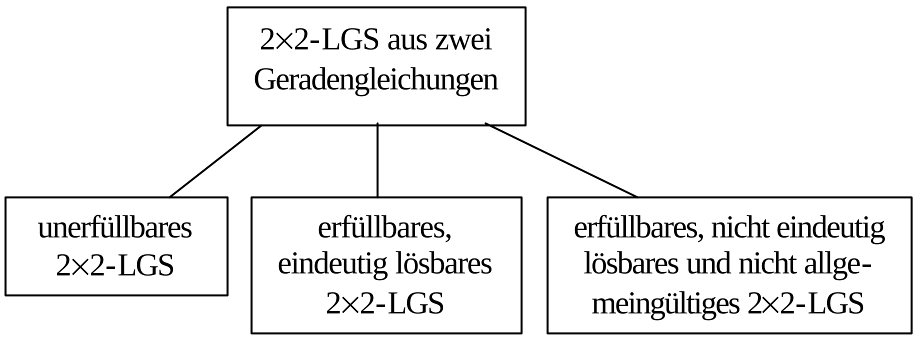
(FV7) die Einteilung von linearen Gleichungssystemen gemäß der Anzahl der Lösungen eines LGS (vgl. Abschnitt 5.1.6):



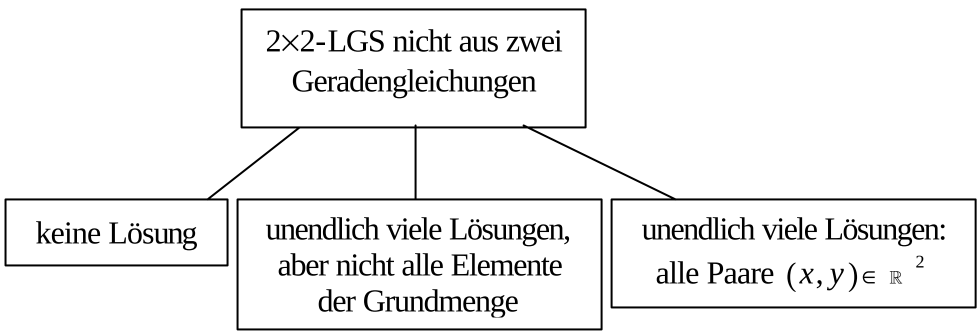
(FV8) speziell die Einteilung linearer 2×2-Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen (definiert über $\mathbb{R}^2$) gemäß der Anzahl ihrer Lösungen (vgl. Abschnitt 5.1.5):



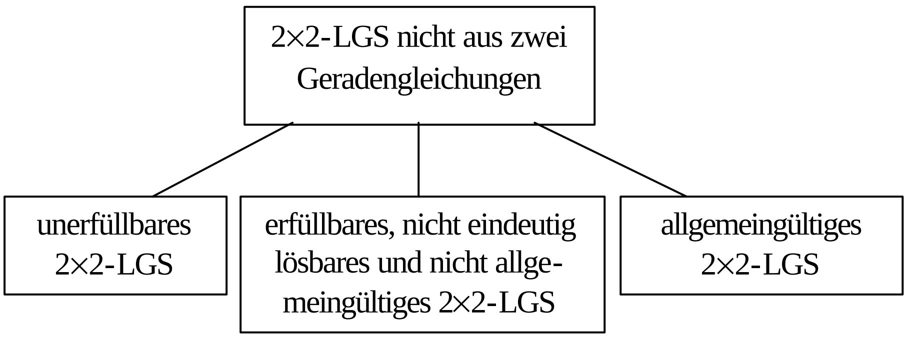
(FV9) und entsprechend (unter einer weiteren Betrachtung in semantischer Sicht, vgl. Abschnitt 5.1.2) die Einteilung linearer 2×2-Gleichungssysteme von zwei Geradengleichungen in unerfüllbare, erfüllbare und eindeutig lösbare bzw. erfüllbare, nicht eindeutig lösbare und nicht allgemeingültige Gleichungssysteme:



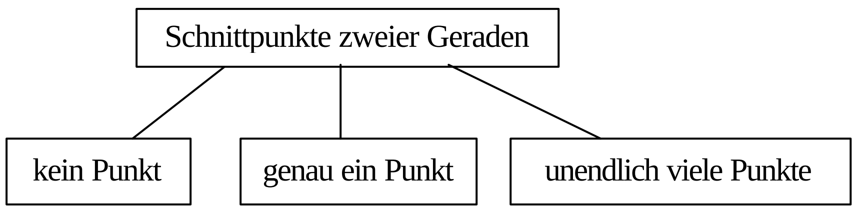
(FV10) ferner die Einteilung von linearen 2×2-Gleichungssystemen (definiert über $\mathbb{R}^2$), die nicht aus zwei Geradengleichungen bestehen, gemäß der Anzahl ihrer Lösungen (vgl. Abschnitt 5.1.5):



(FV11) und entsprechend (abermals unter einer weiteren Betrachtung in semantischer Sicht, vgl. Abschnitt 5.1.2) die Einteilung linearer 2×2-Gleichungssysteme, die nicht aus zwei Geradengleichungen bestehen, in unerfüllbare, erfüllbare und nicht eindeutig lösbare aber nicht allgemeingültige bzw. allgemeingültige Gleichungssysteme:

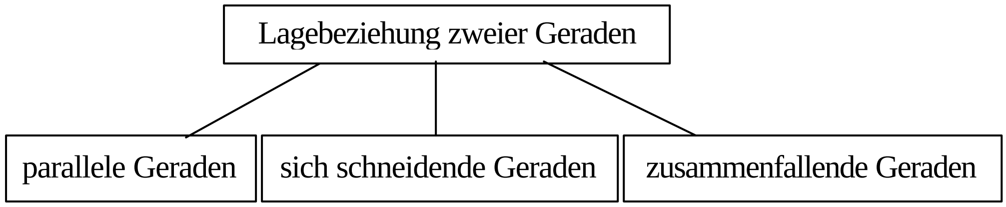


(FV12) die Vernetzung durch Fallunterscheidung aufgrund der Anzahl der Schnittpunkte zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$:



(Diese Vernetzung, wie auch die nachfolgende, ergibt sich im Zuge einer geometrischen Betrachtung, vgl. Abschnitt 5.1.5.)

(FV13) die Verbindungen des Oberbegriffs „Lagebeziehung zweier Geraden“ mit den verschiedenen möglichen Lagebeziehungen, die zwei Geraden im $\mathbb{R}^2$ haben können:



(FV14) die Einteilung linearer 2×2-Gleichungssysteme gemäß ihrer algebraischen Struktur (vgl. Abschnitt 5.1.7):

- algebraische Struktur eines 2×2-GLS
  - 2×2-GLS mit $(a_i;b_i) \neq (0;0)$
  - 2×2-GLS mit $(a_i;b_i) = (0;0)$

(FV15) die Einteilung linearer 2×2-Gleichungssysteme mit $(a_i;b_i) \neq (0;0)$ gemäß ihrer algebraischen Struktur[1] (vgl. Abschnitt 5.1.7):

- algebraische Struktur eines 2×2-GLS mit $(a_i;b_i) \neq (0;0)$
  - Es ist nicht: $a_1 = k \cdot a_2$, $b_1 = k \cdot b_2$
  - $a_1 = k \cdot a_2$, $b_1 = k \cdot b_2$, $c_1 = k \cdot c_2$ mit $k \neq 0$
  - $a_1 = k \cdot a_2$, $b_1 = k \cdot b_2$, $c_1 \neq k \cdot c_2$ mit $k \neq 0$

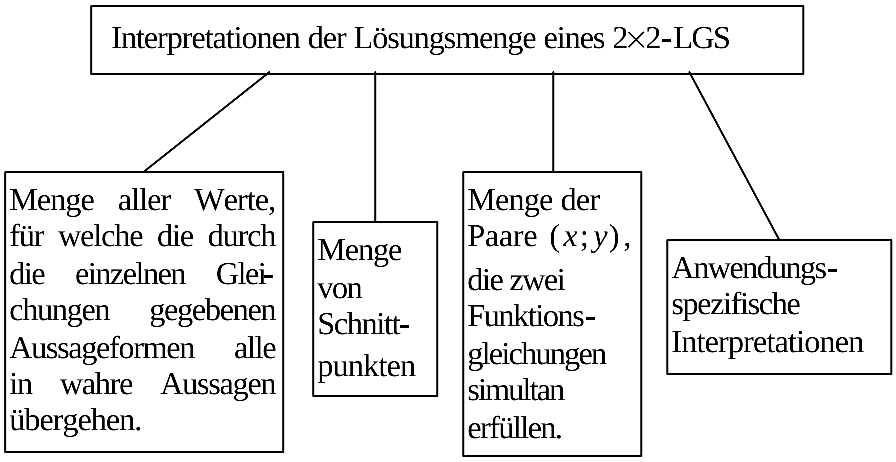
[1] Die drei Knoten, die die verschiedenen algebraischen Strukturen angeben, wird man in der Schule eher in Textform umschreiben, etwa:

Struktur 2: a_1, b_1 und c_1 sind jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2, b_2 bzw. c_2; oder einfach: die beiden Gleichungen sind äquivalent.

Struktur 3: a_1 und b_1 sind jeweils dasselbe (von 0 verschiedene) Vielfache von a_2 bzw. b_2, nicht jedoch c_1 von c_2; oder: bis auf einen konstanten Summanden lässt sich die eine Gleichung aus der anderen durch Äquivalenzumformungen gewinnen.

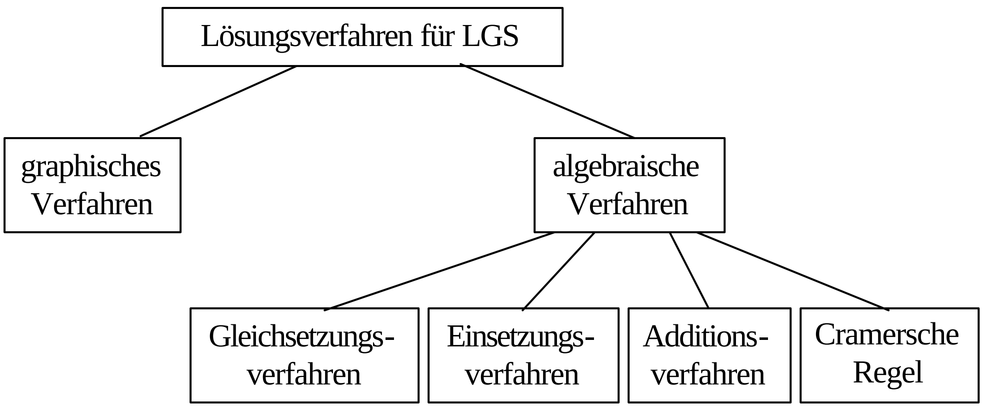
Struktur 1: Es liegt weder die Struktur 2 noch die Struktur 3 vor.

(FV16) die Verbindungen des Oberbegriffs „Interpretationen der Lösungsmenge eines LGS“ mit den verschiedenen entsprechenden Interpretationen (vgl. Abschnitt 5.2.1), z.B.:



(Diese Vernetzung ergibt sich aufgrund verschiedener möglicher Sichtweisen bei der Behandlung linearer Gleichungssysteme: aus aussagenlogischer Sicht, vgl. Abschnitt 5.1.2; unter geometrischer Sichtweise, vgl. Abschnitt 5.1.5; unter dem funktionalen Aspekt, vgl. Abschnitt 5.1.4; und unter dem Modellierungsaspekt, vgl. Abschnitt 5.1.8).

(FV17) die Verbindungen des Oberbegriffs „Lösungsverfahren für LGS“ mit den verschiedenen entsprechenden Lösungsverfahren:



(Diese Vernetzung, wie auch die drei nachfolgenden, resultieren aus der Behandlung linearer Gleichungssysteme unter dem Kalkülaspekt, vgl. Abschnitt 5.1.6).

(FV18) die Merkmalsvernetzung des Konzepts „LGS“ mit dem Konzept „Lösungsverfahren“ (entsprechend der Eigenschaft: „es gibt Lösungsverfahren für LGS“),

LGS

Lösungsverfahren für LGS

(FV19) die Merkmalsvernetzung zwischen dem Konzept „Äquivalenzumformung“ und ihrer Eigenschaft, die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht zu verändern.

(FV20) die Merkmalsvernetzung zwischen dem Konzept „Lösungsmenge eines LGS“ und ihrer Eigenschaft, die Schnittmenge der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen zu sein, z.B.:

Lösungsmenge L des 2×2-LGS $G_1 \wedge G_2$

$\mathrm{L}(G_1 \wedge G_2) = \mathrm{L}(G_1) \cap \mathrm{L}(G_2)$

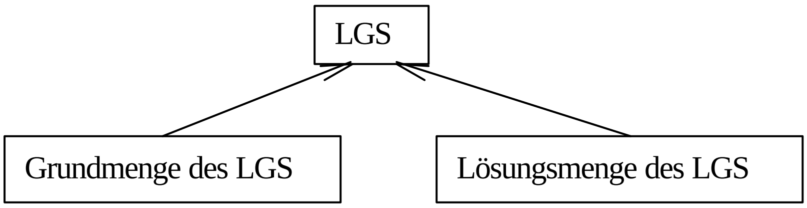
(FV21) die Merkmalsvernetzung zwischen dem Konzept „Geraden“ und der Eigenschaft „Schnittpunkte der Geraden“ (unter geometrischer Betrachtungsweise, vgl. Abschnitt 5.1.5):

Geraden

Schnittpunkte der Geraden

Durch eine *Zugehörigkeitsrelation* (vgl. Abschnitte 3.3.1 und 3.5) werden

(FV22) Grundmengen und Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme mit diesen in Beziehung gesetzt[1] (in einer mengentheoretischen Sichtweise, vgl. Abschnitt 5.1.3):



[1] Entsprechend der Definition der Zugehörigkeitsrelation (vgl. Abschnitte 3.3.1 und 3.5) sind in diesem Graphen gerichtete Kanten eingezeichnet.

5.2.2.2 Anwendungsbezogene Vernetzungen

Zu den anwendungsbezogenen Vernetzungen gehören u.a.:

(AV1) die *Modellvernetzung* zwischen der algebraischen Darstellung eines linearen Gleichungssystems und seiner elementargeometrischen Interpretation, z.B.:

(AV1a)

$a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ mit $(a_i;b_i) \neq (0;0)$, $i = 1,2$ — 2 Geraden im $\mathbb{R}^2$

(AV1b)

$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ und $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ — Menge aller Punkte der *x*-*y*-Ebene

und ggf. seiner funktionalen Interpretation:

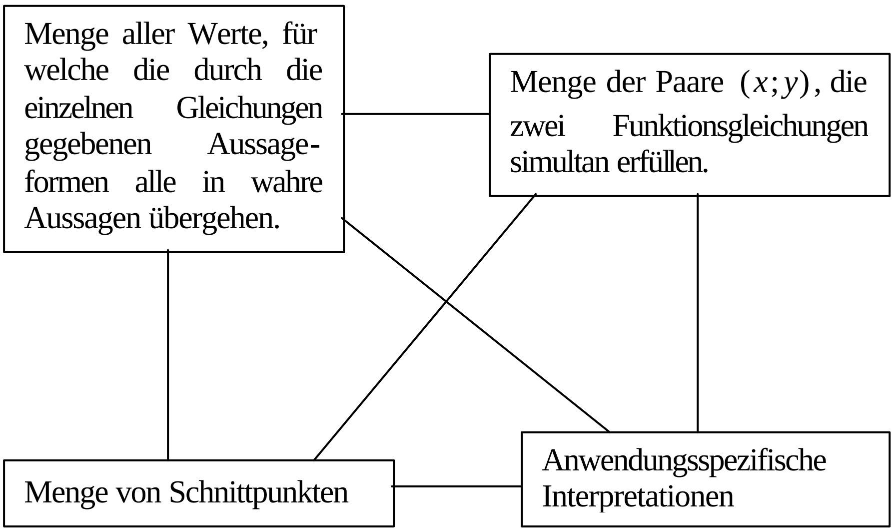
(AV1c)

$a_1x + b_1y = c_1$ und $a_2x + b_2y = c_2$ mit $b_i \neq 0$, $i = 1,2$ — $y = m_1x + n_1$, $y = m_2x + n_2$

2 Geraden im $\mathbb{R}^2$ (mit endlicher Steigung)

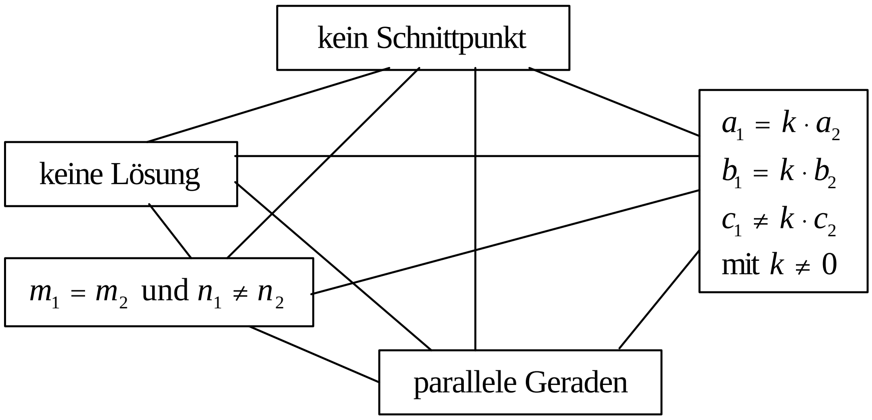
(Hierdurch werden strukturelle, geometrische und funktionale Aspekte miteinander verbunden, vgl. Abschnitte 5.1.7, 5.1.5 und 5.1.4.)

(AV2) die *Modellvernetzung* zwischen den verschiedenen Interpretationen der Lösungsmenge eines LGS (vgl. Abschnitte 5.1.2, 5.1.5, 5.1.4, 5.1.8 sowie 5.2.1), z.B. für ein 2×2-LGS:

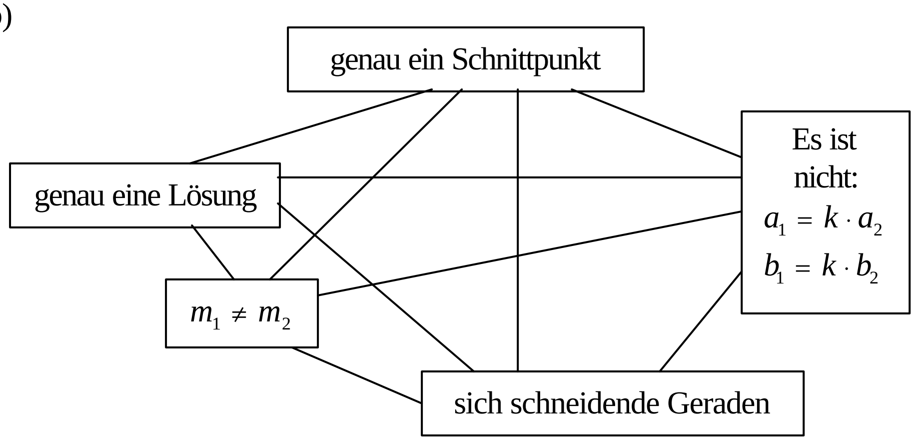


(AV3) die *Modellvernetzung* zwischen der Anzahl der Lösungen eines 2×2-LGS mit $(a_i;b_i)\neq(0;0)$ und ihren jeweiligen Interpretationen (unter dem Kalkülaspekt, vgl. 5.1.6; unter geometrischen Sichtweisen, vgl. 5.1.5; und aus struktureller Sicht, vgl. 5.1.7; siehe auch Abschnitt 5.2.1), z.B. für $b_i\neq 0$:

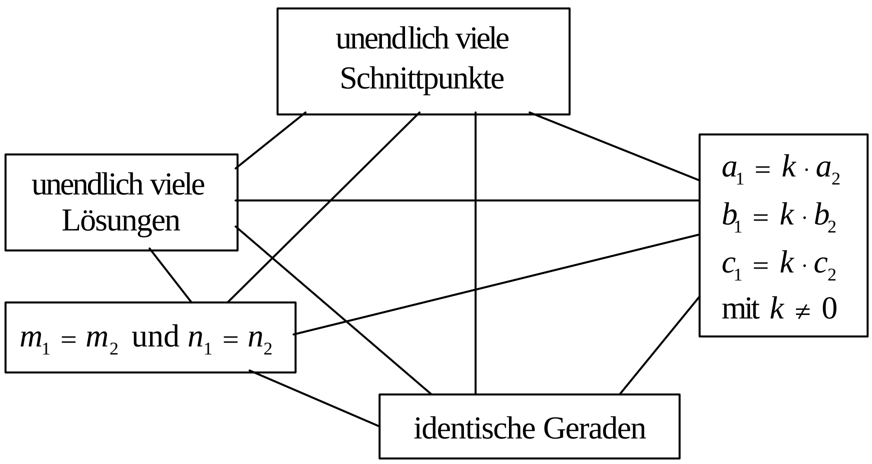
(AV3a)



(AV3b)



(AV3c)



(AV4) die *Algorithmusvernetzung* (vgl. Abschnitte 3.3.2 und 3.5) zwischen linearen Gleichungssystemen und geeigneten Lösungsverfahren[1] (unter dem Kalkülaspekt, vgl. 5.1.6),

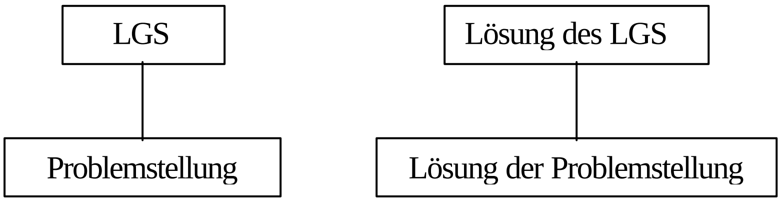
(AV5) die *Regelvernetzung* (vgl. Abschnitte 3.3.2 und 3.5) zwischen mathematischen Ausdrücken, die umgeformt werden müssen, und jeweils geeigneten Umformungsregeln für Termumformungen bzw. für Äquivalenzumformungen (unter dem Kalkülaspekt, vgl. Abschnitt 5.1.6),

(AV6) die *Ablaufvernetzung* zwischen den einzelnen Verfahrensschritten eines Lösungsalgorithmus (speziell zwischen den Verfahrensschritten jeweils des Additionsverfahrens, des Gleichsetzungsverfahrens und des Einsetzungsverfahrens) gemäß der Reihenfolge, in der diese durchzuführen sind (abermals unter dem Kalkülaspekt, vgl. Abschnitt 5.1.6),

[1] Je nach der Form eines LGS und den auftretenden Zahlenwerten kann der eine oder andere numerische Lösungsalgorithmus von Vorteil sein. (Z.B. wird man das LGS $\begin{cases} 2y = x+1 \\ 2y = 3x-2 \end{cases}$ vorzugsweise mit dem Gleichsetzungsverfahren, das LGS $\begin{cases} x+y=5 \\ y = x+1 \end{cases}$ mit dem Einsetzungsverfahren und das LGS $\begin{cases} 3x+2y=7 \\ 5x-2y=1 \end{cases}$ mit dem Additionsverfahren lösen.) Bestimmte Typen von linearen Gleichungssystemen werden dabei mit bestimmten besonders geeigneten Verfahren vernetzt.

Graphische Lösungsverfahren für 2×2-Gleichungssysteme von zwei Geradegleichungen gehen mit Modellvernetzungen einher: algebraische Gleichungen eines LGS werden in einem kartesischen Koordinatensystem geometrisch als Geraden dargestellt, die Schnittpunkte der Geraden als Lösungen des LGS interpretiert.

(AV7) die *Modellvernetzung* zwischen bestimmten außermathematischen Problemstellungen und ihrer jeweiligen Mathematisierung mittels eines linearen Gleichungssystems bzw. zwischen der Lösung des linearen Gleichungssystems und deren Interpretation als Lösung der außermathematischen Problemstellung (unter dem Modellierungsaspekt, vgl. Abschnitt 5.1.8):



Die verschiedenen Modellvernetzungen verbinden somit unterschiedliche Sichtweisen für lineare Gleichungssysteme, insbesondere algebraische und geometrische Aspekte. Werden Vernetzungen als Prozess betrachtet, so wird durch jede Modellvernetzung ein Sichtwechsel für ein mathematisches Objekt vorgenommen.

Algorithmus-, Regel- und Ablaufvernetzungen erfolgen unter dem Kalkülaspekt.

In der vorliegenden Arbeit ist die Betrachtung von Algorithmusvernetzungen, Ablaufvernetzungen sowie Regelvernetzungen nicht Gegenstand der empirischen Untersuchung, weil das Schülerwissen bzgl. dieser anwendungsbezogenen Vernetzungen bereits wesentlich durch Klassenarbeiten geprüft wird. Vielmehr fokussiert die weitere Abhandlung fachsystematische Vernetzungen (als strukturgebendes und ordnendes Element mathematischen Wissens) sowie Modellvernetzungen (als bedeutendes Element für Querverbindungen in einem hierarchisch organisierten mathematischen Wissen, als Bindeglied zwischen mathematischen Objekten und dem „Rest der Welt" und als ein entscheidender Prozessanteil beim Problemlösen).