

4 Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen

Geht man der Frage nach Ursachen für Defizite im Bereich vernetzten Wissens und Denkens nach, so müssten die gesamten Lehr- und Lernprozesse samt der sie bestimmenden Faktoren berücksichtigt werden.

Die Ausbildung vernetzter kognitiver Strukturen, das Lernen von Zusammenhängen, sowie vernetztes Denken werden in der Regel durch den Fachunterricht ausgelöst. Vernetzungen werden erlernt oder generiert, indem ein Individuum von außen einströmende Informationen auf der Grundlage seiner kognitiven Strukturen und emotionalen und motivationalen Einstellungen verarbeitet.

Bezogen auf den Mathematikunterricht muss man demnach neben der Frage nach individuellen Lernprozessen auch der Frage nachgehen, *welche* Informationen ein Individuum zu verarbeiten hat und *wie* diese Informationen dargeboten werden. Fachliche Inhalte und ihre Präsentation im Unterricht müssen hierbei berücksichtigt werden, aber auch soziale Interaktionen und emotionsbestimmende Situationen.

Auf Theorien, Hypothesen und Erkenntnisse bezüglich der kognitiven Komponente Vernetzungen betreffend wird in Abschnitt 4.1 eingegangen. Es zeigt sich, dass das Lernen von Vernetzungen auf äußerst komplexen Prozessen beruht, die derzeit nur bruchstückhaft beschrieben werden können.

Die schulischen Lehr- und Lernprozesse erfolgen zudem nicht in einem isolierten System. Sie werden vor allem mitbestimmt durch curriculare Vorgaben der Richtlinien und Lehrpläne aber auch durch andere Faktoren, wie z.B. die Schulorganisation.

Somit ergibt sich ein sehr komplexes Zusammenspiel verschiedener Faktoren, die für vernetztes Wissen und Denken maßgeblich sein könnten und damit auch für Defizite in diesem Bereich. Um das Wirkungsgefüge in diesem komplizierten System bzgl. Vernetzungen zu erfassen, erscheint es sinnvoll, zunächst Bestandsaufnahmen einiger weniger Systemkomponenten durchzuführen, um dann davon ausgehend und unter Einbeziehung weiterer Komponenten ihr Zusammenwirken zu analysieren.

Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen stehen ab Abschnitt 4.2 *fachsystematische Vernetzungen* und *anwendungsbezogene Vernetzungen*, also Vernetzungen, die zum Unterrichtsgegenstand gehören und im Geist von Lernenden generiert werden. Diese Vernetzungen samt ihrer Defizite, die zwar vielseitig beklagt aber wenig präzisiert werden, sind für uns die Angelpunkte im System. Ihre Bestandsaufnahme dient erstens der klaren Herausstellung und Beschreibung bestehender Mängel und bildet

zweitens eine naheliegende Ausgangsbasis im Hinblick auf weitere Arbeit zur Erfassung des Wirkungsgefüges, dem Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen unterworfen sind.

Aufgrund dieser Vorüberlegungen wird in Abschnitt 4.2 ein Modell vorgestellt, das sich in besonderer Weise zur Bestandsaufnahme fachsystematischer Vernetzungen sowie anwendungsbezogener Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen eignet und die Möglichkeit bietet, diese Vernetzungen auf ihrem Weg aus einer rein stofflichen Ebene auf eine kognitive Ebene von Lernenden zu verfolgen und eventuelle Veränderungen der Vernetzungen des Unterrichtsstoffs durch die Lehr- und Lernprozesse auszumachen.

Einige erste Daten zu Existenz und Umfang fachsystematischer Vernetzungen sowie anwendungsbezogener Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen lassen sich auf der Grundlage dieses Modells, nicht zuletzt anhand der Ergebnissen von TIMSS, direkt angeben (Abschnitt 4.3).

4.1 Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen – die kognitive Komponente

Zur Beschreibung der kognitiven Dimension Vernetzungen betreffend gibt es derzeit keine allumfassende Theorie. Jedoch eignen sich diverse Theorien und Modelle zur Erklärung oder Darstellung einzelner kognitiver Aspekte, speziell einiger Aspekte der Manifestation von Vernetzungen im Gehirn, ihrer Generierung, Speicherung, Abänderung, Abrufung aus dem Gedächtnis und Anwendung in Denk- und Problemlösungsprozessen. Sie werden in Abschnitt 4.1.1 mit kurzen Erläuterungen aufgeführt. Auf der Basis dieses theoretischen Hintergrunds werden in Abschnitt 4.1.2 Vernetzungen der einzelnen in Kapitel 3 definierten Kategorien betrachtet, und einige Anmerkungen zu ihrer Genese, Speicherung und Abrufung aus dem Gedächtnis gegeben. Abschnitt 4.1.3 geht darauf ein, dass wir uns vieler Vernetzungen gar nicht erst bewusst werden, zu ihnen keinen direkten Zugang haben. Insbesondere wird hier das Phänomen der Intuition angesprochen.

4.1.1 Theorien und Modelle

Eine Theorie, in der das Phänomen „Vernetzung“ abgehandelt und adäquat erfasst wird, gibt es nicht. Zur Beschreibung einiger Aspekte der Manifestation von Vernetzungen im Gehirn, ihrer Generierung, Speicherung, Abänderung, Abrufung aus dem Gedächtnis und Anwendung in Denk- und Problemlösungsprozessen können jedoch verschiedene Theorien zu Geist und Gehirn dienlich sein. Dies sind einerseits wissenspsychologische und -philosophische Theorien, andererseits Theorien und Modelle der Neuropsychologie und -physiologie, der Künstliche Intelligenz-Forschung und der Physik.

4.1.1.1 Konstruktivismus

Der Konstruktivismus ist eine philosophische Theorie der Wahrnehmung und der Erkenntnis, die für sich in Anspruch nimmt, durch Resultate und Theorien aus den Einzelwissenschaften wie der Neurobiologie, der Psychologie und der Kommunikationswissenschaft begründet zu sein (ROTH, 1992, S.277). Eine Grundannahme dieser Theorie ist, dass Wissen nicht passiv erworben wird, sondern vom erkennenden Subjekt aktiv konstruiert wird; Denken wird hierbei als beziehungsstiftendes Denken angesehen. Der Grundstein zur Theorie des Konstruktivismus wurde von PIAGET gelegt, Weiterentwicklungen führten zunächst zum sog. radikalen Konstruktivismus und später zum sozialen Konstruktivismus. Beide Richtungen, sowohl der radikale als auch der soziale Konstruktivismus, stellen sich als adäquate Lerntheorien der Mathematik dar (ERNEST, 1991, 1994).

Der *radikale Konstruktivismus* beschreibt das Verhältnis zwischen Wissen und Wirklichkeit als eine Anpassung im funktionalen Sinn. Alle Verständigung, alles Lernen und Verstehen ist hiernach stets Bau und Interpretation des erlebenden Subjekts. Da die Welt, die wir erleben und erkennen, demnach von uns selber konstruiert wird, besteht kein Anspruch auf „Wahrheit“ im Sinne einer Übereinstimmung (vgl. GLASERSFELD, 1981).

Im *sozialen Konstruktivismus* wird zusätzlich die Ebene der sozialen Interaktionen berücksichtigt. Nicht nur das Individuum konstruiert Realität, sondern die Gesellschaft als Ganzes. Die Realität, in die das Individuum hineinwächst und die es nachkonstruiert, ist schon vorab eine sozial-kulturelle Realität, sie ist von den Mitgliedern der Gesellschaft konstruiert (vgl. OERTER, 1988, S. 350; ERNEST, 1991, 1994).

Der Konstruktivismus liefert ein Modell zur Erklärung der Entstehung und Veränderung individueller kognitiver Wissensnetze. Wesentlich hierbei ist das Abgleichen neuer Informationen, die ein Individuum wahrnimmt, mit bereits im Gedächtnis vorhandenen Wissensstrukturen.

4.1.1.2 Situierte Kognition

Andere Lerntheorien heben die Situietheit der Kognition hervor (vgl. z.B. LERMAN, 1998, 2000, 2001). Unter der Perspektive dieser Theorien wird die Abhängigkeit allen Lernens insbesondere von der sozialen Interaktion des Erwerbszusammenhangs betont. Wissen löst sich danach nicht von den Handlungsregeln und dem Sinn des Erwerbskontextes (vgl. BLK¹, 1997, S. 21).

So wird z.B. von BAUERSFELD (1983) ausgeführt, dass Wissen, Denken und Verstehen an den Kontext gebunden seien, in dem sie erworben wurden. Er nennt die innere Repräsentation des Erwerbskontextes von Wissen subjektiven Erfahrungsbereich SEB.

Ähnlich werden in der Lerntheorie von BEREITER (1990) „contextual modules“ postuliert. Er definiert (S. 612):

Contextual refers to a set of conditions that give rise to development of a module and that later serve to activate or release it.

Die contextual modules bezeichnen dabei Komplexe bestehend aus Wissen, Fähigkeiten, Zielen und Gefühlen (a.a.O., S. 613). Als ein contextual module von besondere Bedeutung für Unterricht hebt BEREITER (a.a.O., S. 614) das „topical module“ hervor, ein Modul, das deklaratives Wissen rund um ein Thema umfasst, ebenso wie Ziele in Bezug auf angestrebtes Wissen, Prozeduren zum Erlangen von Wissen in dem spezifischen Gebiet, und allgemein eine besondere Einstellung zu dem Wissensgebiet – Interesse, Desinteresse, vielleicht sogar Aversion – zusammen mit einem gewissen Selbstkonzept in Bezug auf das Wissensgebiet.

Aus dem Blickwinkel dieser Lerntheorien lässt sich insbesondere die Anbindung nichtmathematischen Inhalte an mathematische Objekte erklären, ferner der Einfluss dieser Vernetzungen auf die Aktivierbarkeit, Wiederverwendbarkeit und Weiterentwicklung mathematischen Wissens (BLK, 1997, S. 20).

¹ BUND-LÄNDER-KOMMISSION FÜR BILDUNGSPLANUNG UND FORSCHUNGSFÖRDERUNG

4.1.1.3 Wissenspsychologische Modelle

Wissenspsychologische Modelle bestehen aus Annahmen über die Repräsentation von Wissen und Annahmen über Prozesse, die über dem repräsentierten Wissen operieren. Grundlegende Repräsentationssysteme für Wissen sind Semantische Raum-Modelle und Produktionssysteme (vgl. TERGAN, 1986).

Semantische Raum-Modelle betreffen Ansätze zur Abbildung von deklarativem Wissen, d.h. Wissen um Begriffe, Daten, Fakten, Sachverhalte, Situationen, Ereignisse, in räumlich strukturierten Repräsentationssystemen. Dazu gehört z.B. der Netzwerk-Ansatz oder der Schema-Ansatz (vgl. TERGAN, 1986).

Beim *Netzwerk-Ansatz* werden deklarative Wissensinhalte häufig in Netzwerkstrukturen repräsentiert, i.e. gerichtete Graphen, in denen Konzepte durch Knoten und Relationen durch Kanten dargestellt sind (vgl. z.B. WENDER, 1988). Ein konstitutives Merkmal von Netzwerk-Ansätzen ist dabei die propositionale Darstellungsform (vgl. TERGAN, 1986, S. 36; WENDER, 1988, S. 57f).¹

Durch den Netzwerk-Ansatz wird eine bildliche Darstellung mentaler Netzwerke möglich - Vernetzungen können auf diese Weise sichtbar gemacht werden. Spezielle Graphen, die sich zur Wissensrepräsentation in Netzwerkstrukturen eignen, sind z.B. Concept Maps (vgl. Abschnitte 4.1.2.1 und 7.2.2) oder Mind Maps (vgl. Abschnitte 4.1.1.6 und 4.1.2.1).

Schematheoretische Ansätze der Wissensrepräsentation gehen davon aus, dass Schemata grundlegende Einheiten unseres Wissens darstellen. Unter einem Schema wird dabei ein ausgrenzbares Teilsystem eines Wissensnetzwerks verstanden, in dem aufgrund von Erfahrungen typische Zusammenhänge eines Realitätsbereichs repräsentiert sind. Schemata sind ineinander verschachtelt und miteinander vernetzt. Sie sind hierarchisch organisiert. Jedes Schema besteht aus Subschemata, die wiederum als Konfiguration von Subschemata beschrieben werden können. Schemata als elementare kognitive Strukturen enthalten nicht nur deklaratives Wissen, sondern auch Informationen darüber, wie dieses Wissen einzusetzen ist (vgl. TERGAN, 1986, S. 104). Einheiten gespeicherten Wissens als Vernetzungskomponenten können in diesem Modell als Schemata (oder Subschemata) aufgefasst

¹ Die propositionale Darstellungsform gründet auf der Prädikatenlogik. Ein Prädikat ist eine Relation zwischen Argumenten; unter einer Proposition wird ein Prädikat verstanden, dessen Argumente durch Begriffe ausgefüllt sind. Eine Proposition ist eine Aussage, sie gibt an, dass bestimmte Dinge in einer bestimmten Relation zueinander stehen.

werden, Vernetzungen entsprechen dann der Vernetzung von Schemata. Sind kognitive Schemata hierarchisch angeordnet und untereinander vernetzt, so wird Wissen leichter aktivierbar (vgl. BLK, Heft 60, S. 21).

Produktionssysteme (siehe ANDERSON, 1976, 1983) erfassen Wissensstrukturen auf der Grundlage von Bedingungs-Aktions-Einheiten (Produktionen). Die Bedingungen spezifizieren bestimmte Merkmale von Informationen. Wenn diese Merkmale denjenigen der Information, die sich gerade im Kurzzeitgedächtnis befindet, entsprechen, dann wird eine bestimmte Produktion ausgeführt. Vernetzungen mit mathematischen Methoden (z.B. mit Algorithmen, Regeln) können auf dieser theoretischen Grundlage betrachtet werden.

4.1.1.4 Das „Advance Organizer Model“

Eine Lehr- und Lerntheorie, die auf der Grundannahme hierarchisch organisierten Wissens aufbaut und in besonderer Weise auf den Erwerb fachsystematisch strukturierten und vernetzten Wissens abzielt, ist die Lehr- und Lerntheorie „Advance Organizer Model“ von AUSUBEL (vgl. z.B. BELL, 1978, S. 231-234). AUSUBEL vertritt den Standpunkt, dass die allgemeinsten, abstraktesten und umfassendsten Konzepte und Prinzipien zu einem Thema zuerst vorgestellt werden sollten, danach erst konkretere, spezielle Konzepte. (Dieses Grundprinzip nennt er „principle of progressive differentiation“.) Durch diese top-down-Vorgehensweise kann man – so seine Überzeugung – Schülern helfen, neue Informationen zu organisieren und zu strukturieren, was zu einem sinnvolleren Lernen führt. Entsprechend dem zweiten Grundprinzip seiner Lehr- und Lerntheorie, dem „principle of integrative reconciliation“, sollten neue Informationen bewusst mit bereits bekannten Lerninhalten in Bezug gesetzt werden, in das bestehende Wissensnetz sinnvoll eingebaut werden. BELL (1978, S. 233) führt aus:

This means that teachers should purposely organize their courses, units, and topics so that subsequent learning is carefully related to previous learning. Teachers should also present material so that students recognize the relationships among various topics. These relationships should be explicitly identified for students and discussed with them.

Entsprechend wird in den „NCTM Principles and Standards for School Mathematics“ (NCTM, 2000, S. 64) im Hinblick auf den „Connections Standard“

gefordert, dass Lehrer auf bestehende Beziehungen zwischen Konzepten explizit hinweisen sollten:

Students need to be made explicitly aware of the mathematical connections.

4.1.1.5 Wissen und Verhaltensregulation – ein integratives Modell

Wissenspsychologische Modelle alleine reichen nicht aus, um aus psychologischer Sicht das Verhalten, den Umgang mit Wissen zu erklären. DÖRNER hat hierfür ein Modell entworfen, in dem die *Wissenspsychologie* und die *Motivationspsychologie* verbunden werden (DÖRNER, 1988).

Er hat ein allgemeines Schema der Verhaltensregulation aufgestellt und dabei mehrere parallel arbeitende Informationssysteme postuliert. Im Zentrum seiner Betrachtungen steht die Absichtsregulation, die er sehr differenziert beschreibt, aber auch die Rolle von Emotionen und einer allgemeinen Selbstkontrolle werden reflektiert.

Bestimmte Einflüsse auf die Aktivierbarkeit von Vernetzungen können damit beschrieben werden.

4.1.1.6 Biologische Modelle

Der Geist oder die Psyche eines Menschen können nicht losgelöst vom Körper betrachtet werden, denn zweifellos wird der Körper durch den Geist beeinflusst und dieser umgekehrt durch den physischen Zustand des Körpers. Der menschliche Körper gehorcht aber *biologischen, anatomischen Gesetzmäßigkeiten* und diese wiederum unterliegen den allumfassenden *physikalischen Naturgesetzen*. Philosophische oder psychologische Erkenntnis-, Lern- und Denktheorien müssen daher Erkenntnisse aus der Biologie, speziell der *Neurophysiologie* berücksichtigen und dürfen nicht im Widerspruch zu den Gesetzmäßigkeiten der Natur stehen. Vernetzungen in unserem Geist werden auf neuronaler Ebene verarbeitet und codiert.

Die Vorgänge werden dabei durch chemische Prozesse beeinflusst oder gesteuert und gehorchen den physikalischen Gesetzen.

Während in der Mathematikdidaktik verschiedene philosophische und psychologische Theorien ihre Berücksichtigung finden, werden Erkenntnisse aus der Neurophysiologie noch wenig beachtet. Neue technische Entwicklungen und Forschungen ermöglichen es aber eine Brücke zwischen der Kognitionsforschung und der Neurowissenschaft zu schlagen. Vor allem neue bildgebende Verfahren wie z.B. die Positronenemissionstomographie (PET) gewähren die Herstellung einer direkten Beziehung zwischen Gehirn und Geist (vgl. z.B. POSNER & RAICHLE, 1994). Aber auch die großen Fortschritte, die in der *Künstliche Intelligenz-Forschung* erzielt wurden, lassen Rückschlüsse auf menschliche Informationsverarbeitung und menschliches Denken zu (vgl. z.B. BAUER, GEISEL, PAWELZIK & WOLF, 1997).

Neurophysiologische Theorien

Um die menschliche Informationsverarbeitung im Hinblick auf Wissenserwerb physiologisch besser zu verstehen, kann man sich zunächst auf das *Gehirn*, wo diese hauptsächlich vonstatten geht, konzentrieren, darf jedoch nicht aus den Augen verlieren, dass das Gehirn mit dem ganzen Körper und auch dessen Außenwelt in wechselseitiger Einflussnahme steht.

Im menschlichen Gehirn erfolgt die Informationsverarbeitung biologisch betrachtet im Wesentlichen in der Großhirnrinde, dem Neocortex.¹ Die einzelnen Rindenbereiche stehen über Züge von Nervenfasern in Verbindung miteinander. Außerdem steht die Hirnrinde durch sogenannte Projektionsbahnen direkt oder indirekt mit allen tieferen Abschnitten des Zentralnervensystems und dadurch mit der ganzen Körperperipherie in Verbindung. Dass alle unterrichtlichen Wahrnehmungen bei der Verarbeitung von Wissensinformationen und schließlich der Ausbildung eines Wissensnetzes mitspielen (vgl. Abschnitt 4.1.1.2), ist angesichts der vielfältigen komplizierten und differenzierten neuronalen Verschaltungen einsichtig.

Auch der Einfluss von Gefühlen lässt sich auf neuronaler Ebene beschreiben. Die Hirnrinde steht speziell auch mit dem limbischen System in Verbindung. Hier sind die „Gefühle“ und ihre Bezüge zu bestimmten Umweltsituationen anatomisch verankert. Im limbischen System gibt es mehrere Engpässe, sogenannte „Flaschenhalsstrukturen“ durch die ein großer Teil der neuen Inhalte auf ihrem Weg zu den Gedächtnisspeichern des Gehirns geleitet werden. Beim Passieren dieser

¹ Dabei handelt es sich um ein flächenartiges, ca. 3mm dickes Gewebe, das rund 14 Milliarden Nervenzellen enthält. Jede dieser Zellen kann bis zu 10.000 Kontakte mit anderen Zellen knüpfen, wodurch sich ein außerordentlich kompliziertes neuronales Netz ergibt.

Engpässe erfahren die Inhalte eine emotionale Färbung. Die Großhirnrinde wiederum, in der sich auch die Grundspeicher für das Weltwissen befinden, arbeitet in der Regel mit subcorticalen Regionen zusammen, wodurch gespeicherte Inhalte spezifisch mit körperlichen Reaktionen und Gemütsregungen verknüpft sind. Somit erklärt sich, dass an der kognitiven Verarbeitung von Informationen, die in der Großhirnrinde vonstatten geht, durch das limbische System auch Emotionen mitbeteiligt sind (vgl. z.B. MARKOWITSCH, 1997).

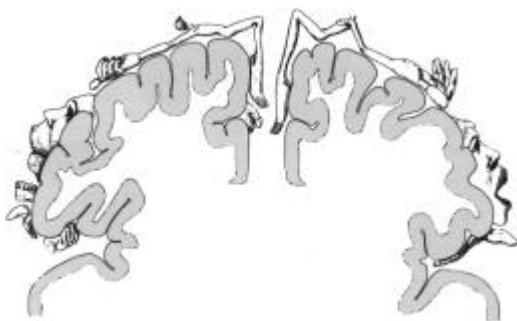
Die Einflussnahme von Emotionen auf die Informationsverarbeitung erfolgt an den Kontaktstellen der einzelnen Neuronen, den Synapsen. Über diese Schaltstellen werden Signale anderer Neuronen an den Zellkörper eines Neurons weitergeleitet. Durch unterschiedliche Typen von Synapsen können Eingaben einen aktivierenden oder hemmenden Einfluss auf das Neuron haben. An den Synapsen erfolgen auch Gedankensperren oder Denkblockaden unter Stress. Der unmittelbare Einfluss von Emotionen auf die Informationsverarbeitung im Gehirn wird hierdurch anatomisch begründet (vgl. z.B. VESTER, 1995, S. 53, 1997, S. 97f).

Die Synapsen zwischen Neuronen verändern entsprechend der „Hebbschen Lernregel“ ihre Wirksamkeit aufgrund der Aktivität der Verbindungspartner. Diese Regel ist eine weitgehend akzeptierte Grundregel der Neurobiologie (vgl. Z.B. BAUER, GEISEL, PAWELZIK & WOLF, 1997, S. 76), sie wurde 1949 von dem kanadischen Psychologen HEBB postuliert. Informationswege im Gehirn werden danach bei häufiger Nutzung „eingefahren“. Lernen ist hiernach der Vorgang, der die Verbindungen zwischen den Nervenzellen, die Synapsen, verstärkt (MÜLLER & RITTMANN, 1996).

Der Speicherort für das Wissen befindet sich in dem hochkomplizierten Netzwerk von Neuronen. Daher liegt es nahe, eine Abbildung des Wissensnetzes, speziell des mathematischen Netzwerkes und seiner Verbindungen zu anderen Gedächtnisinhalten, auf einen Teil des neuronalen Netzes zu untersuchen.

Forschungsergebnisse aus verschiedenen nichtmathematischen Bereichen zeigen, dass sich eine solche Abbildung in großen Teilen als projektionsartig erweist. Sie ist zwar in der Regel geometrisch verzerrend, jedoch die Beziehung der räumlichen Nähe bleibt im Wesentlichen erhalten und zwar nicht nur im Sinne einer räumlichen Nachbarschaft der Teile eines Bildes beruhend auf visuellen Wahrnehmungen, sondern auch im abstrakten Sinne (vgl. BAUER, GEISEL, PAWELZIK & WOLF, 1997, S. 74). Informationen werden also nicht isoliert abgespeichert, sondern in dem Kontext, in der Vernetztheit, in der sie erfahren werden, und entsprechend auch erinnert (vgl. hierzu auch Abschnitt 4.1.1.2).

Allerdings weist diese Abbildung auch viele Unstetigkeitsstellen auf (siehe nachfolgende Abbildung, entnommen BAUER, GEISEL, PAWELZIK & WOLF, 1997, S. 76), und wirft im Detail betrachtet mehr Probleme als Lösungen bei der Zuordnung bestimmter Hirnteile zu bestimmten Funktionen auf (EPPING, 1996, S. 6).



*Der somatosensorische Cortex
und die motorischen Felder:*

Der Körper wird im Kleinen
zusammenhängend, im Großen
jedoch zerstückelt abgebildet.

PALM (1988a, S. 489-490) bemerkt:

Es wäre sicher naiv, das neuronale Netzwerk ..., das im wesentlichen die „Hardware“-Struktur des Gehirns bildet, direkt zum Beispiel mit einem semantischen Netzwerk ... zu identifizieren (Neurone als Knoten des semantischen Netzwerks und synaptische Verbindungen als Netzwerkverbindungen). Eine solche naive Vorstellung wird unter Neurophysiologen schon seit einigen Jahren als das Dogma vom „Großmutterneuron“ (d.h. dem Neuron, das den „Knoten“, bzw. das Konzept „Großmutter“ darstellt) belächelt.

Funktionell lassen sich in bestimmten Feldern der Großhirnrinde bestimmte Leistungen lokalisieren. Die Kodierung der Gedächtnisinhalte des Wissens ist zwar zum großen Teil noch ein Rätsel, jedoch

in irgendeiner Weise existieren sicherlich Untergliederungen und Aufgabenverteilungen zwischen über- und untergeordneten teils parallel, teils seriell verknüpften Netzwerken in der Großhirnrinde, dem Grundspeicher des episodischen Gedächtnisses und des Weltwissens. (MARKOWITSCH, 1997, S. 33).

Erste Erkenntnisse können bereits für Unterricht und Didaktik verwertet werden. Beispielsweise ist neurologischen Befunden zufolge die linke Hirnhemisphäre in der Regel eher für Sprache, Analyse, Logik, Arithmetik, Algorithmen also vornehmlich für serielle Prozesse zuständig, während die rechte Hirnhemisphäre auf parallele Verarbeitungen wie ganzheitliche Erfahrungen, Raumwahrnehmung, Geometrie, divergentes Denken spezialisiert ist („Hemisphärentheorie“).¹ Kreatives Denken (und damit aktives Vernetzen), wie es in mathematischen Problemlösungsprozessen

¹ Eine strikte Lokalisierung kann dabei nicht angegeben werden, denn an einzelnen kognitiven Funktionen sind, wie man heute annimmt, stets viele Hirnareale beteiligt (vgl. ENGEL, KÖNIG & SINGER, 1993, S. 42; POECK, 1997, S. 34). Auch scheint die Aufgabenverteilung im Gehirn hormonbedingt geschlechtlich unterschiedlich zu sein (vgl. RUBNER, 1996; KIMURA, 1992).

verlangt wird, erfordert sowohl logisches als auch divergentes Denken, so dass beide Hemisphären benötigt werden. Eine starke Ausrichtung schulischen Lernens auf Wissenserwerb und Logik, wodurch eine Gehirnhälfte überreizt und die andere zu wenig trainiert wird, ist demzufolge hinderlich für die Entwicklung kreativen Denkens (PEHKONEN 1991, 1997). PEHKONEN (1997) betont:

... the balance between logic and creativity is very important. If one places too much emphasis on logical deduction, creativity will be reduced. What one wins in logic will be lost in creativity and vice versa.

Auf der Grundlage der Hemisphärentheorie ist auch die Methode des Mind Mapping¹ entwickelt worden; sie erscheint eine effiziente Methode zum Lernen von Vernetzungen, insbesondere auch im Mathematikunterricht, zu sein (vgl. z.B. BRINKMANN, 2001a, 2002a, in Druck). Mind Mapping ist eine spezielle Methode der graphischen Darstellung von Wissen in seiner Vernetztheit und Strukturiertheit (vgl. Abschnitte 4.1.1.3 und 4.1.2.1); sie spricht gezielt beide Gehirnhälften an, wodurch Synergieeffekte genutzt werden können, die die geistige Leistung erheblich verbessern. Der Brückenschlag zwischen linker und rechter Hirnhälfte wird dadurch erreicht, dass durch die Mind Map-Technik logische Zusammenhänge durch individuelle Kreativität in einem künstlerischen Bild dargestellt werden: „Mind Mapping verknüpft Vorstellungskraft mit Struktur und Bilder mit Logik“ (SVANTESSON, 1992, S. 44). Die Förderung des Zusammenspiels der beiden Gehirnhälften durch Mind Mapping kann für den Mathematikunterricht in besonderer Weise gewinnbringend sein. DAVIS & HERSH (1986, S. 332) stellen heraus:

Wir sind der Meinung, daß es besser ist für die Mathematik, wenn die beiden Gehirnhälften mit ihren Möglichkeiten zusammenwirken, sich ergänzen und gegenseitig steigern, anstatt sich zu bekämpfen und zu behindern.

¹ Ausführliche Darstellungen der Methode des Mind Mapping findet man in BUZAN, 1976; BUZAN & BUZAN, 1997; BEYER, 1993a, 1993b, 1996; HUGL, 1995; KIRCKHOFF, 1992; SVANTESSON, 1992.

Für Mind Mapping als Unterrichtsmethode im Mathematikunterricht vgl. BRINKMANN, 2000a, 2001a, 2002a, 2002b, in Druck; ENTREKIN, 1992.

Neuronale Netze

Theoretische Neurowissenschaftler untersuchen zwecks Aufdeckung der grundlegenden Eigenschaften biologischer Informationsverarbeitung abstrahierte Modelle natürlicher *neuronaler Netze*. Sowohl künstliche als auch natürliche neuronale Netze werden dabei als Ensembles gekoppelter einfacher Modellneuronen, auch Knoten des Netzes genannt, beschrieben. Die Analyse dieser Netze erfolgt vor allem mittels mathematischer Verfahren z.B. aus der nichtlinearen Dynamik und der statistischen Physik und mittels Computersimulationen.

Eine der Erkenntnisse, die aus einer Vielzahl neurobiologischer Experimente hervorgeht, ist, dass viele neuronale Karten (i.e. Abbildungen von Reizen auf ein Neuronengitter) erst unter dem Einfluss externer Reize ihre Struktur oder zumindest ihre Feinstruktur selbst organisieren (BAUER, GEISEL, PAWELZIK & WOLF, 1997, S. 76). Auf der Ebene der künstlichen neuronalen Netze gibt es Modelle, die dieser Erkenntnis gerecht werden. Einen einfachen, durch numerische Robustheit hervorstechenden Algorithmus für das Lernen selbstorganisierender neuronaler Karten hat z.B. KOHONEN (1995) von der technischen Universität in Helsinki 1982 vorgestellt.

Versteht man auf der Ebene der Lernpsychologie Lernprozesse als Veränderung und Anreicherung des jeweiligen Wissensnetzes, so geht man heute auch hier davon aus, dass sich Lernprozesse weitgehend selbst organisieren. KIEßWETTER (1994, S. 3) hebt hervor:

[Man sollte] versuchen, hinter die Regeln und Abläufe solcher Selbstorganisationsprozesse zu kommen, um diese dann im erkannten vorgegebenen Rahmen geeignet initiieren und beeinflussen zu können.

Hier wird deutlich, dass die intensiven Forschungsarbeiten, die sich mit künstlichen neuronalen Netzen befassen, in Zukunft genauere Erkenntnisse über Lern- und Denkprozesse liefern und Einfluss auf die Unterrichtspsychologie nehmen könnten.

Mittels künstlicher neuronaler Netze, die eine algorithmische Funktionsweise haben, lassen sich gemäß der Darstellungen von PENROSE (1995 und 1998) jedoch nicht alle menschlichen Denkprozesse simulieren. PENROSE begründet dies mit dem Gödelschen Unentscheidbarkeitssatz und macht quantenphysikalische Effekte für den leistungsfähigen menschlichen Verstand mitverantwortlich. Er zeigt sogar auf, an welchen biologischen Strukturen Quanteneffekte zum Tragen kommen könnten. Auch andere namhafte Wissenschaftler bringen ein quantenmechanisches Regelwerk im Nervengeflecht mit menschlichem Denken, Verstand und Bewusstsein in Verbindung, jedoch kann man diese Abhängigkeiten noch nicht näher beschreiben.

Die heutigen Vorstellungen über die physikalische Substanz des Geistes sind noch sehr vage.

4.1.1.7 Zusammenfassung

Es gibt derzeit viele Theorien, die Prozesse des Erkennens, Lernens oder Denkens - also Prozesse, die zu Vernetzungen führen oder auf der Grundlage vernetzter Strukturen ablaufen - beschreiben und erklären helfen; jedoch angesichts der Komplexität der Thematik keine allumfassende integrative Theorie, die sämtlichen Erkenntnissen der Philosophie, der Psychologie, der Neurophysiologie und der Physik gerecht wird. Auch ist eine integrative Theorie über die kognitive Neurowissenschaft nach Ansicht von POSNER & RAICHLE (1996, S. 263) zur Zeit noch nicht möglich.

Man ist sich zwar einig, dass neuronale Prozesse auf niedrigen Ebenen jeweils höhere mentale Phänomene bewirken, jedoch bereiten Erklärungsversuche höherer Hirnleistungen über Abläufe in entsprechenden Nervennetzen konzeptionelle Schwierigkeiten. Zu diesen höheren mentalen Leistungen gehören Denkvorgänge und Vorstellungen, Wahrnehmungsprozesse, Lern- und Gedächtnisleistungen, emotionale Bewertungen von externen Ereignissen und internen Zuständen und intentionale Handlungsentwürfe.

Für eine lückenlose Beschreibung der neuronalen Entsprechungen dieser Leistungen reichen die in den Naturwissenschaften bisher üblichen Formen der Beschreibung nicht mehr aus. Es treten sprachliche Probleme auf, die in der Regel mit Umschreibungen oder Hinweisen auf Analogien umgangen werden (WOLF SINGER, 1994, S. VIII).

Dennoch lassen Erkenntnisse, die in den letzten Jahren gewonnen wurden, die Neurobiologie und die kognitive Psychologie langsam zusammenwachsen. Da es möglich ist, „elementare Aspekte, einzelne Schritte der für verschiedene Lernformen wichtigen neuronalen Mechanismen ... heute detailliert auf zellulärer und sogar molekularer Ebene [zu] untersuchen“ (KANDEL & HAWKINS, 1994, S. 114), könnten erste Bausteine zu einem Brückenschlag zwischen Kognitionspsychologie und Molekularbiologie gefunden werden.

Bei der Erklärung von Aspekten im Zusammenhang mit Vernetzungen ist es sinnvoll, sich nicht auf eine Theorieebene zu beschränken; sondern Erkenntnisse aus allen relevanten Forschungsbereichen zu berücksichtigen und zusammenzufügen,

denn je nach betrachtetem Aspekt eignen sich die verschiedenen Theorien unterschiedlich gut für eine Beschreibung.

Bei der Vielzahl theoretischer Ansätze, die eine Betrachtung von Vernetzungen gestatten, ist eine lückenlose Bestandsaufnahme der Erkenntnisse Vernetzungen betreffend jedoch schwer möglich, zumal die einzelnen Erkenntnisse auch in der Regel nicht gezielt unter dem Stichwort „Vernetzung“ zu finden sind. Es ist im einzelnen vielmehr von Zusammenhängen, Beziehungen, Assoziationen, Denkprozessen, Informationsverarbeitung u.a. die Rede. Die Bruchstücke, die hierbei etwas über Vernetzungen aussagen, und sich speziell auf Vernetzungen im Mathematikunterricht beziehen oder sich auf diese (hypothetisch) übertragen lassen, müssen erst herauspräpariert werden.

Sucht man gezielt nach Erkenntnissen bzgl. Vernetzungen im Mathematikunterricht, so findet man in der Literatur lediglich wenige spärliche Informationen. Insgesamt lässt sich feststellen, dass eine Denkpsychologie, die dem mathematischen Bereich zuzuordnen wäre, derzeit wenig existent ist. SCHWANK (1996, S. 168) stellt heraus, dass selbst „die Erforschung der allgemeinen Begriffsbildung in der Psychologie noch nicht weit genug fortgeschritten ist, um einen ernsthaften Beitrag zum Problem der mathematischen Begriffsbildung leisten zu können.“ Begriffe stellen aber Vernetzungskomponenten dar, mit der Begriffsbildung geht auch eine Ausbildung von Vernetzungen dieses Begriffs einher.

4.1.2 Anmerkungen zu den einzelnen Vernetzungskategorien vor dem Hintergrund theoretischer Modelle

Im Folgenden seien einige Bemerkungen zu den Vernetzungen der einzelnen Kategorien zusammengetragen. Es werden (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) Erkenntnisse und Hypothesen vor dem Hintergrund verschiedener Theorien bezüglich der Genese von Vernetzungen im Unterricht, der Verarbeitung und Speicherung derselben sowie ihrer Abrufbarkeit aufgezeigt.

4.1.2.1 Fachsystematische Vernetzungen

Schematheoretische Ansätze der Wissensrepräsentation (vgl. Abschnitt 4.1.1.3) erlauben Hypothesen bezüglich der mentalen Repräsentation fachsystematischer Vernetzungen. Einzelne mathematische Konzepte können hierbei als Schemata aufgefasst werden. Der theoretischen Annahme zufolge werden diese Schemata miteinander in einer hierarchisch organisierten Weise vernetzt. Bezogen auf die mathematische Fachsystematik kann eine hierarchische Ordnung auf einer Teilmengenbeziehung zwischen mathematischen Konzepten basieren; auch das deduktive Gerüst der Mathematik bestimmt einen hierarchischen Aufbau (vgl. Abschnitt 3.3.1).

Jedes Konzept ist gekennzeichnet durch bestimmte, es charakterisierende Merkmale. Eine Vernetzung zwischen Konzepten verschiedener Hierarchiestufen kann man sich im Modell der Schematheorie durch eine Erweiterung oder Einengung des Merkmalsraumes entstanden denken.

Vernetzungen zwischen zwei Elementen derselben Hierarchiestufe entstehen dann aufgrund der Gleichheit betrachteter Merkmalsteilmengen der beiden Elemente. Diese Merkmalsteilmenge bestimmt auch die Zugehörigkeit von Konzepten zu derselben Hierarchiestufe. Solche Merkmalsteilmengen können mathematische Strukturen im Sinne von BOURBAKI sein. Fachsystematische Vernetzungen aufgrund der Herausstellung gemeinsamer Strukturen zweier mathematischer Konzepte sind demnach Vernetzungen auf einer durch die gemeinsame Struktur bestimmten Hierarchieebene.

Die Lehr- und Lerntheorie „Advance Organizer Model“ von AUSUBEL, die auf der Grundannahme hierarchisch organisierten Wissens aufbaut, ist in besonderer Weise auf den Erwerb fachsystematischer Vernetzungen ausgerichtet (vgl. Abschnitt 4.1.1.4). Hiernach sollten Lehrer insbesondere auf bekanntes Wissen von Schülern Bezug nehmen, auf Vernetzungen alter Lerninhalte mit neuen explizit hinweisen und damit eine (korrekte) Einordnung neuer Konzepte in das bestehende Wissensnetz der Schüler ermöglichen. Bereits bekannte Lerninhalte werden dabei als wichtigster Einflussfaktor für das Lernen angesehen (AUSUBEL, 1968, Epigraph):

If I had to reduce all of educational psychology to just one principle, I would say this: The most important single factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly.

Ausgehend von diesem Grundprinzip sind Concept Maps (vgl. Abschnitt 7.2.2) als spezielle graphische Wissensrepräsentationen mit hierarchischer Struktur entwickelt

worden (vgl. Abschnitt 4.1.1.3), sie sollten als Mittel zur Visualisierung des Wissens eines Individuums dienen (NOVAK & GOWIN, 1984, S. 40):

Concept Mapping is ... an educational tool; it has been developed specifically to tap into a learner's cognitive structure and to externalize, for both the learner and the teacher to see, what the learner already knows.

Somit könnten Concept Maps als Unterrichtsmittel speziell auch im Hinblick auf den Erwerb fachsystematischer Vernetzungen¹ eine Schlüsselrolle zukommen (vgl. Abschnitt 9.2.2).

Verschiedene positive Aspekte des Einsatzes von Concept Maps im Unterricht bezüglich des Lernens von Vernetzungen werden z.B. von NOVAK (1990, 1996) und NOVAK & GOWIN (1984) angegeben.² Bislang fand die Methode des Concept Mapping allerdings vornehmlich im naturwissenschaftlichen Bereich Anwendung, umfassende Erfahrungen im Mathematikunterricht stehen noch aus (vgl. MALONE & DEKKERS, 1984, S. 225; HASEMANN & MANSFIELD, 1995, S. 47).

Auch eine hierarchische Organisation des Wissens – speziell auch entsprechend der Fachsystematik – kann Schülern erleichtert werden. Das „principle of progressive differentiation“ des „Advance Organizer Model“ zielt auf eine entsprechende Hilfe für Schüler zur Strukturierung neuer Informationen ab (vgl. Abschnitt 4.1.1.4).

Aber auch der Gebrauch von graphischen Wissensrepräsentationen mit einer hierarchischen Struktur erweist sich hierfür als vielversprechend. Durch die Visualisierung von Netzwerken können diese als Gesamtbild abgespeichert und so

¹ Concept Maps eignen sich gleichwohl auch zur Darstellung von anderen Vernetzungsarten, insbesondere von Modellvernetzungen (vgl. Abschnitt 7.2.2).

² Als positive Aspekte in Bezug auf das Lernen von Vernetzungen geben die Autoren an:

- Die Lerneffektivität kann verbessert werden, wenn Schüler Concept Maps erstellen. Die aktive Integration von Begriffen führt zu einem sinnvollen Lernen, neue Verbindungen werden gesehen. Neue Lerninhalte können leichter gegliedert und besser verstanden werden.
- Concept Mapping bietet eine Hilfe zum Lernen, zum Denken und zum Problemlösen.
- Concept Mapping trainiert das Gehirn.
- Concept Maps können zur Aufdeckung von Missverständnissen und falschen Deutungen eingesetzt werden, so dass hierbei erkannte falsche Vorstellungen anschließend verändert werden können.
- Concept Maps erlauben eine zusammenfassende Wiederholung von Lerninhalten zu einem Thema.
- Concept Maps können bei der Vorbereitung auf Prüfungen eingesetzt werden.
- Concept Maps dienen als Gedächtnisstütze; das gesamte Bild wird erinnert.
- Concept Mapping hat einen positiven Einfluss auf die Einstellung von Lernenden. Es hilft Schülern, das gute Gefühl zu erkennen, das mit dem Erbringen von Leistung und dem Erlangen von Verständnis einhergeht.

auch wieder erinnert werden (vgl. Ausführungen zur Abbildung von Wissensnetzen in Abschnitt 4.1.1.6). Geeignete graphische Darstellungen erscheinen z.B. Concept Maps oder Mind Maps (vgl. Abschnitt 4.1.1.6) zu sein (vgl. auch BRINKMANN, 1999, 2001c). Sie finden jedoch bislang im Mathematikunterricht wenig Einsatz.

So kann man auch in der didaktischen Literatur speziell zu Mind Mapping im Mathematikunterricht nur einige wenige Artikel finden. Allerdings sind Berichte von Lehrern über erste gesammelte Erfahrungen durchweg positiv.¹ ENTREKIN (1992) hebt hervor:

I found Mind Mapping to be an effective and delightful pedagogical tool.

Von einigen Lehrern in Deutschland habe ich Rückmeldungen erhalten, die besagen, dass vor allem schwächere Schüler von der Methode des Mind Mapping profitieren, insbesondere dass Mind Maps ihnen helfen ihr Wissen besser zu strukturieren.

4.1.2.2 Anwendungsbezogene Vernetzungen

Zu der anwendungsbezogenen Vernetzung gehören die Unterkategorien der Modellvernetzung, Theoremvernetzung und Ablaufvernetzung (siehe Abschnitte 3.3.2 und 3.4). Sie werden nachfolgend einzeln diskutiert.

Modellvernetzung

Durch Modellvernetzungen werden gleiche Strukturen in unterschiedlichen Interpretationen miteinander verbunden; sie können als Schemata (vgl. Abschnitt 4.1.1.3) mit einer gleichen Merkmalskombination,² an die unterschiedliche Vorstellungen gebunden sind, verstanden werden.

¹ Von ihren ersten Erfahrungen berichtet z.B. RASCH (2001).

² Entsprechend der Ausführungen unter Abschnitt 4.1.2.1 kann man daher Modellvernetzungen als Vernetzungen von Schemata derselben Hierarchiestufe ansehen, wobei diese Hierarchiestufe durch die den Schemata gemeinsame Merkmalskombination bestimmt ist.

Somit lassen sich Modellvernetzungen insbesondere auch in Concept Maps graphisch abbilden, da in dieser speziellen Darstellungsweise auch Verbindungen zwischen Konzepten derselben Hierarchiestufe vorgesehen sind (vgl. Abschnitt 7.2.2).

Der Vorgang des Vernetzens erfordert hier einen Sichtwechsel, der Schülern oft schwer fällt. In den NCTM Principles and Standards for School Mathematics 2000 werden Forderungen an die Lehrerrolle für die Entwicklung von Vernetzungen dieser Art gestellt. Lehrer sollten Schülern vor allem viele entsprechende Lerngelegenheiten geben. Der Auswahl geeigneter Aufgaben/Problemstellungen kommt eine besonders wichtige Rolle zu; Schüler sollten ermutigt werden, mathematische Ideen außerhalb der Schule zu suchen, zu entdecken (a.a.O., S. 203); ein fachübergreifender Unterricht kann die Anwendung von Modellvernetzungen wesentlich fördern (a.a.O., S. 278-279). Das Unterrichtsklima sollte Denkprozesse von Schülern unterstützen, Lösungsvorschläge von Schülern sollten ausdiskutiert werden auch wenn sie falsch sind (a.a.O., S. 359).

Wird mathematisches Wissen im Zuge einer Modellierung eines außermathematischen Sachverhalts erworben, ist zu beachten, dass dieser Sachverhalt als Erwerbkontext dem mathematischen Wissen zunächst anhaftet (vgl. Abschnitte 4.1.1.2 und 4.1.1.6). Ein wiederholtes Aufgreifen dieses mathematischen Lerninhalts in unterschiedlichem Kontext führt im Allgemeinen zu einem Abstreifen des Erwerbkontextes (Lösen der Modellvernetzung) und damit zu einem flexiblen, freien Umgang mit dem entsprechenden mathematischen Wissen (vgl. BLK, 1997, S. 21).

Theoremvernetzung

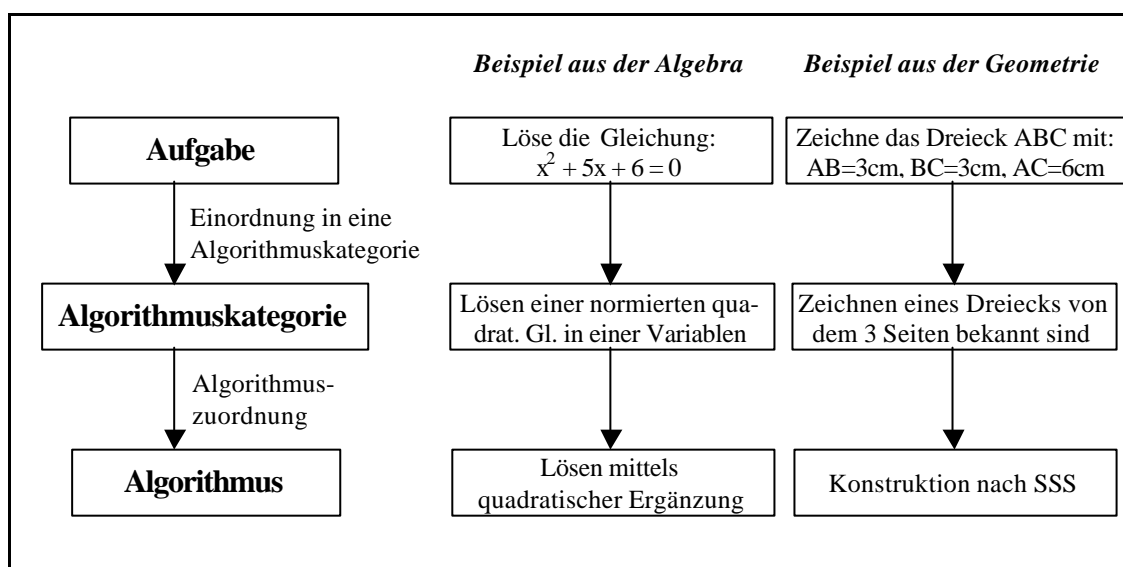
Theoremvernetzungen lassen sich in Produktionssystemen (vgl. Abschnitt 4.1.1.3) betrachten. Sind in einer Problemstellung die Voraussetzungen für die Gültigkeit eines Satzes gegeben, so sind diese Voraussetzungen Merkmale (Bedingung), aufgrund derer eine Verbindung zum entsprechenden Satz hergestellt wird (Theoremvernetzung) und schließlich Aussagen mittels des Satzes gewonnen werden (Aktion).¹

Algorithmus- und Regelvernetzungen als spezielle Theoremvernetzungen können entsprechend in Produktionssystemen beschrieben werden: Weist eine bestimmte Aufgabe diejenigen Merkmale auf, die Voraussetzung für die Anwendbarkeit eines Algorithmus bzw. einer Regel sind, so wird aufgrund dessen die Verbindung zum entsprechenden Algorithmus bzw. der Regel hergestellt. Die Anwendung des Algorithmus bzw. der Regel im Aktionsteil der Produktion kann sich anschließen.

¹ OPWIS (1988, S. 78-79) stellt als Beispiel ein Produktionssystem zur Subtraktion zweier rationaler Zahlen vor; bei MANDL, FRIEDRICH & HRON (1988, S. 141) findet man ein Beispiel zum Beweis der Kongruenz zweier Dreiecke.

Die Algorithmus- wie auch die Regelvernetzung kann demnach als eine zweistufige Zuordnung gesehen werden (Abbildung 7). Die erste Stufe, das Einordnen in eine Algorithmus- bzw. Regelkategorie, erfolgt aufgrund der Herausstellung der Merkmale, die Bedingung für die Anwendung des entsprechenden Algorithmus bzw. der Regel sind. Die zweite Stufe ist die eigentliche Zuordnung des Algorithmus bzw. der Regel aufgrund dieser Merkmale.

Abbildung 7: Algorithmusvernetzung als zweistufige Zuordnung



Eine Aufgabe kann auch mehreren Algorithmuskategorien zugeordnet werden, falls es verschiedene Algorithmen für ihre Lösung gibt. So kann beispielsweise die Aufgabe „Für welches x aus den reellen Zahlen wird der Ausdruck $2x^2 - 8x + 9$ minimal?“ in die Algorithmuskategorie „Bestimmung des Scheitelpunkts einer quadratischen Parabel“ zum Algorithmus „Scheitelpunktsbestimmung quadratischer Parabeln mittels quadratischer Ergänzung“ eingeordnet werden oder in die Algorithmuskategorie „Bestimmung eines relativen Extremums einer differenzierbaren Funktion“ zu einem Algorithmus der Bestimmung relativer Extrema mittels der Differentialrechnung.

Sind verschiedene Algorithmen jeweils für die Lösung derselben Aufgaben geeignet, so stimmen die zugehörigen Algorithmuskategorien überein. So gehört z.B. die Algorithmuskategorie „Lösen linearer Gleichungssysteme“ sowohl zum Algorithmus „Additionsverfahren“ als auch zum Algorithmus „Einsetzungsverfahren“.

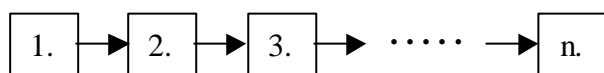
Das Lernen von Theoremvernetzungen (speziell Algorithmusvernetzungen bzw. Regelvernetzungen) kann vom Lehrer unterstützt werden, indem die Merkmale, die

Bedingung für die Anwendung eines bestimmten Theorems (Algorithmus, Regel) sind, an mehreren Beispielen wiederholt hervorgehoben werden.

Ablaufvernetzung

Auch Ablaufvernetzungen lassen sich durch Produktionssysteme (vgl. Abschnitt 4.1.1.3) beschreiben. Jeder Verfahrensschritt eines Algorithmus ist dabei Bedingung für die Durchführung des nächsten.

Hilfreich zum Lernen der Ablaufvernetzung zu einem Algorithmus können durchnummerierte Arbeitsanweisungen für die einzelnen nacheinander auszuführenden Verfahrensschritte sein. Vorteilhafterweise wird man diese Arbeitsanweisungen in einer Liste aneinander reihen oder als linear verbundene Knoten graphisch darstellen gemäß folgendem Schema:



4.1.2.3 Die Kulturvernetzung

In der Kognitionsforschung besteht Übereinstimmung, dass Wissen gemeinsam mit dem Kontext, in den es eingebettet ist, erworben wird (BLK, 1997, S. 20)¹: Den Wissensbeständen haftet ihr Erwerbzusammenhang an und nimmt Einfluss auf deren Aktivierbarkeit, Wiederverwendbarkeit und Weiterentwicklung (vgl. Abschnitt 4.1.1.2).

So entstehen Kulturvernetzungen im Unterricht durch die Einbettung mathematischer Objekte in einen Kontext mit Inhalten nichtmathematischer Kultur. Durch die Kopplung abstrakter mathematischer Inhalte an Geschichten, Bilder, Anwendungen u.s.w. werden diese mit Leben gefüllten mathematischen Gegenstände auch als solche im Gedächtnis gespeichert und lassen sich dann leichter erinnern. Das Abrufen mathematischer Objekte aus dem Gedächtnis wird dabei zum einen durch die erweiterten Zugriffsmöglichkeiten über die Anbindungen zu Kulturinhalten erleichtert. Zum anderen kann die Lebensnähe, die mathematischen Gegenständen

¹ Vgl. auch die Ausführungen zu neuronalen Netzen in Abschnitt 4.1.1.

durch den Kontext verliehen wird, die motivationale und emotionale Haltung positiv beeinflussen, was wiederum zu einer besseren Speicherung und Aktivierbarkeit der Lerngegenstände führt (vgl. Abschnitt 4.1.1.6).

Die Kopplung von Wissen an seinen Erwerbszusammenhang erschwert jedoch gleichzeitig den Transfer von Wissen, also die Ausbildung neuer Vernetzungen (vgl. u.a. RENKL, 1996). LERMAN (1999, S. 105) stellt heraus:

The problem of transfer is an important issue in the teaching and learning of mathematics and research is needed, both to offer directions for teaching and learning and to contribute to the development of theory concerning socially and culturally situated knowledge.

4.1.2.4 Die lernpsychologische Vernetzung

Wie bei den Ausführungen zur Kulturvernetzung in Abschnitt 4.1.2.3 muss auch hier hervorgehoben werden, dass Wissen gemeinsam mit seinem Darbietungskontext erworben wird (vgl. Abschnitt 4.1.1.2). Zu diesem Kontext gehört auch die Art der Erschließung von Unterrichtsinhalten; ihre Bindung an Lerninhalte führt zur lernpsychologischen Vernetzung.

Die lernpsychologische Vernetzung, die im Unterricht aufgebaut wird, kann u.U. über lange Zeit gespeichert werden. Lerninhalte können dann bei einem Abruf aus dem Gedächtnis durch die Verknüpfung mit der Art ihrer ursprünglichen Erschließung leichter rekonstruiert und damit auch vollständiger erinnert werden, wodurch hierbei die lernpsychologische Vernetzung auch gleichzeitig eine mnemotechnische Vernetzung darstellt.

Wird ein Wissensinhalt im Laufe der Zeit in unterschiedlichen Kontexten erfahren bzw. erprobt, so wird er im Allgemeinen jedoch vom Erwerbszusammenhang gleichsam abgezogen (vgl. BLK, 1997, S. 21). Die lernpsychologische Vernetzung ist daher in der Regel nicht von langer Dauer; wie man Dinge gelernt hat, weiß man später meist nicht mehr.

4.1.2.5 Die mnemotechnische Vernetzung

Die mnemotechnische Vernetzung entsteht durch die Anbindung von Merkstützen an mathematische Inhalte. Eine Merkstütze für einen Lerninhalt kann dabei vorgegeben und direkt mit diesem im Unterricht vermittelt werden. Schüler können sich aber auch selbständig Merkstützen konstruieren; Tipps seitens des Lehrers können hierfür hilfreich sein.

Die Anbindung einer Merkstütze an einen mathematischen Inhalt bewirkt, dass der Inhalt leichter erinnert werden kann. Das Abrufen dieses Inhalts aus dem Gedächtnis erfolgt dann über die zugehörige Merkstütze, d.h. erst wird die Merkstütze erinnert und dann der damit vernetzte Inhalt. Allerdings besteht die Gefahr, dass eine Merkstütze dauerhafter im Gedächtnis hinterlegt wird als der eigentlich durch sie zu erinnernde Inhalt, wodurch die entsprechende mnemotechnische Vernetzung verloren geht: Erinnert wird nur noch diese Stütze.

4.1.2.6 Die Ähnlichkeitsvernetzung

Wissen und Erkenntnis sind selbstreferenziell, denn Erfahrung mißt sich an Erfahrung, Erkenntnis korrigiert sich an Erkenntnis.

Wir behalten dasjenige an Erfahrung bei, was sich in der Vergangenheit bewährt hat, und wir messen an diesem Erfahrungsschatz alles Neue und erweitern dadurch den Erfahrungsschatz und schreiben ihn gleichzeitig teilweise um. Wir betreiben also kontinuierliche Prüfung des soeben Erlebten auf Konsistenz mit dem früher Erlebten und vorläufig Bewährten. (ROTH, 1992, S. 279).

Dies ist ein Grundprinzip des Konstruktivismus (vgl. Abschnitt 4.1.1.1). Es lehrt uns, dass Ähnlichkeitsvernetzungen grundlegende Bestandteile des Lernprozesses sind. Durch das wiederholte Erfahren von Wissensbausteinen in verschiedenem Kontext erkennt ein Individuum mittels Ähnlichkeitsvernetzungen¹, welche Merkmalskombinationen häufig auftreten und welche seltener. Häufig auftretende Merkmals-

¹ Ähnlichkeitsbeziehungen und ihre Charakteristika wurden von TVERSKY eingehend untersucht. Es zeigt sich z.B., dass die Relation der Ähnlichkeitsvernetzung in gewisser Weise weder notwendig transitiv, noch symmetrisch ist (vgl. TVERSKY, 1977).

kombinationen festigen sich dabei im Gedächtnis, bestimmte Verbindungen im Wissensnetz werden gestärkt.

Neurobiologisch lässt sich dies mit der „Hebbschen Lernregel“ erklären (vgl. Abschnitt 4.1.1.6). Hiernach werden die Auftrittswahrscheinlichkeiten bestimmter Merkmale in den Stärken synaptischer Kopplungen zwischen Nervenzellen repräsentiert. Informationswege im Gehirn werden dadurch bei häufiger Nutzung „eingefahren“ (vgl. z.B. ROTH, 1992, S. 315; MÜLLER & RITTMANN, 1996, S. 36; ENGEL, KÖNIG & SINGER, 1993, S. 44).

Im Unterricht werden einzelne mathematische Inhalte zu verschiedenen Zeitpunkten und häufig auch in unterschiedlichem Kontext aufgegriffen.¹ Dies geschieht im Sinne einer Wiederholung, wird bedingt durch ein Spiralcurriculum oder ist notwendig aufgrund der vielfältigen Bezüge zwischen mathematischen Inhalten. Auf diese Weise kann ein Inhalt mit sich selbst oder einem ähnlichen bereits bekannten Inhalt verbunden werden, was jedes Mal zu einer Ähnlichkeitsvernetzung führt.

Ähnlichkeitsvernetzungen sind nicht nur grundlegend für das Lernen, sie sind auch wesentlicher Bestandteil von Problemlösungsprozessen. Informationen aus Aufgabenstellungen werden über Ähnlichkeitsvernetzungen mit bekanntem Wissen abgeglichen; entspricht dieses dem Bedingungsteil eines Produktionssystems, so knüpft Handlungswissen an dieser Basis an - der Problemlösungsprozess setzt ein.

¹ Die Ähnlichkeitsvernetzungen, die daraus resultieren, bewirken eine *Präzisierung von Objektvorstellungen*. Sind erste Erfahrungen mit einem einzelnen Objekt noch stark an die jeweilige Lernsituation gebunden, und der Begriff des Objekts verschwommen, so werden spezifische Merkmale dieses Objekts durch Ähnlichkeitsvernetzungen in Wiederholungsphasen nach und nach herauskristallisiert und das Objekt gegenüber anderen abgegrenzt. Die Objektvorstellung und die Verbindungen zu anderen Objekten bilden sich heraus. Beispielsweise entwickelt sich die Vorstellung von einem Punkt als Bleistiftklecks mit endlicher Ausdehnung, die zu der Auffassung führen kann, dass eine Strecke aus endlich vielen Punkten besteht, zu dem abstrakten Begriff von einem Objekt, das einen Ort hat, aber keine Ausdehnung (TALL, 1991, S. 65).

4.1.2.7 Die Affektvernetzung

In der Schule können in zweierlei Weise Anbindungen von Emotionen an Wissensinhalte erfolgen. Zum einen werden aufgrund des sozial konstituierten Unterrichts Emotionen ausgelöst und an die zu verarbeitenden Informationen gebunden, wodurch Wissensbausteine zusammen mit emotionalen Ladungen gespeichert und erinnert werden (vgl. Abschnitt 4.1.1.2); zum anderen können durch rein kognitive Prozesse im Zuge der Verarbeitung neuer Informationen oder beim Umgang mit mathematischem Wissen Emotionen ausgelöst werden (z.B. durch Erfolgs- oder Misserfolgserlebnisse), die dann mit den verarbeiteten bzw. verwendeten Wissensinhalten vernetzt werden.

Zum ersten: Durch empirische Untersuchungen wird gut belegt, dass für die Verarbeitung und auch die spätere Anwendung von Wissen u.a. die soziale Interaktion des Erwerbskontextes von Bedeutung ist (BLK, 1997, S. 21). BAUERSFELD (1983, S. 2) hebt ausdrücklich hervor, dass innere Repräsentation des Erwerbskontextes von Wissen, die sog. subjektiven Erfahrungsbereiche (SEB), auch Gefühle mit einschließen. In der Lerntheorie von BEREITER (1990, S. 613) ist von „contextual modules“ die Rede, Komplexen bestehend aus Wissen, Fähigkeiten, Zielen und Gefühlen (vgl. Abschnitt 4.1.1.2).

Zum zweiten: Einige Aufschlüsse über das Mitwirken von Emotionen beim Einspeichern von Lerninhalten und ihre Anbindung an diese liefern neuere Forschungsergebnisse aus der Neuropsychologie (vgl. Abschnitt 4.1.1.6). Unsere Gefühlswelt wird danach vor allem vom limbischen System¹ gesteuert, das auch die meisten Fakten des Wissenssystems zu passieren haben.²

¹ Entsprechend neuerer Erkenntnisse in der Peptidforschung sind Peptide, die u.a. im limbischen System stark angereichert sind, die biochemische Manifestation von Gefühlen. Peptide fungieren als molekulare Boten und verbinden Hirnzellen, Immunzellen und Drüsen, wodurch das Nervensystem, Immunsystem und das endokrine System miteinander zu einem einzigen psychosomatischen Netzwerk verknüpft werden, das sich durch den gesamten Organismus erstreckt (vgl. CAPRA, 1996, S. 320-323). CAPRA folgert daher, dass „Kognition ein Phänomen ist, das den gesamten Organismus umfaßt und durch ein kompliziertes chemisches Netzwerk von Peptiden wirkt, das unsere geistigen, emotionalen und biologischen Aktivitäten integriert“.

² Nach heutigen neuropsychologischen Erkenntnissen könnte es für die Eingabe von Fakten neben dem primären und schnellen Weg über das limbische System noch einen zweiten, trägeren Weg geben, der nicht über dieses geht. Hierbei würde lediglich die Hirnrinde vermitteln und für die

Inzwischen steht fest, daß neue Informationen ohne bestimmte Teile dieses Systems nicht langfristig festgehalten werden können. Die Inhalte müssen, bevor sie abgelegt werden, erst diese Strukturen passieren. ... In gewisser Weise werden hier sensorische Informationen aus der Außenwelt und innere - motivationale und emotionale - Zustände integriert. (MARKOWITSCH, 1997, S. 29, eigene Anordnung).

Das limbische System ist wie ein Filter,

es ist ... die Instanz, die relevante Inhalte aussortiert, mit Emotionen versieht und wahrscheinlich bündelt, mithin synchronisiert, bevor sie sie bestimmten Bezirken der Hirnrinde zur Ablagerung zuordnet“ (MARKOWITSCH, 1997, S. 29).

Je nach Art der affektiven Komponente, die an einen Wissensinhalt gebunden ist, wird dieser - bedingt durch entsprechende biologische Hormonreaktionen - mehr oder weniger gut im Gedächtnis gespeichert bzw. aktiviert. Ist eine Information mit Freude, Erfolgserlebnis, erotischer Anregung, mit Neugier oder Spaß verbunden, so wird sie weit besser verankert (VESTER, 1997, S. 155). VESTER weist nachdrücklich darauf hin, dass sich daraus ein Lerngesetz ergibt, das „in unseren Schulen und Universitäten sträflich vernachlässigt“ wird (S. 155):

So wichtig es ist, den Lernprozeß von unangenehmen Begleiterscheinungen zu befreien, so wichtig ist es auch, das Lernen mit schönen und angenehmen Ereignissen zu verknüpfen.

Er betont, dass der Effekt, den man dabei erreicht, sogar ein doppelter ist:

Beim späteren Abrufen, beim Erinnern der so gespeicherten Information wird ja auch die Freude wieder erinnert, der Spaß, die Begeisterung, die wir dabei hatten. Alles Empfindungen, die ... den Organismus wieder in den gleichen hormonellen Zustand bringen, ihn sozusagen „entstressen“. Ein Zustand in dem die Schaltverbindungen des Gehirns besonders gut funktionieren.

Der Abruf von Faktenwissen kann allerdings auch gefühlsneutral erlebt werden. Als Erklärung vermutet MARKOWITSCH (1997), dass durch Wiederholung und nachfolgende Darbietung von Informationsinhalten in anderen Kontexten solches Wissen verallgemeinert wird. Es verliert dabei die biographische Note, den episodischen Charakter, und wird dann von der ursprünglichen Speicherregion für persönliche Erinnerungen (in der Regel der rechten Hemisphäre) auf die linke Cortexhälfte, die für eher gefühlsneutrales Faktenwissen zuständig ist, übertragen und lässt sich nachfolgend von dieser wecken. „Dies würde erklären, warum Weltkenntnisse anscheinend durchaus ohne Beteiligung limbischer Strukturen ... abgelagert werden können Je mehr Inhalte geistig verarbeitet sind oder je mehr

Speicherung sorgen (vgl. MARKOWITSCH, 1997, S. 32). Bei dieser Art der Aufnahme von Lerninhalten, die durchaus möglich scheint, würde eine Affektvernetzung ausbleiben.

sie ins Wissenssystem übergehen, desto neutraler werden sie auch“ (MARKOWITSCH, 1997, S. 32/33).

Schüler erfahren Wissensinformationen anfangs eher episodisch, als singuläre Fakten. Dies bedingt eine enge Verknüpfung mit den durch die Einzelereignisse jeweils ausgelösten Emotionen. Demnach dürften Schüler Wissensinhalte stärker mit emotionalen Ereignissen verbinden als Erwachsene, bei denen die Fakten nach oftmaligem Wiederholen und vielfältigem Verarbeiten eher gefühlsneutral hinterlegt wurden. Vielleicht ist dies ein Grund, weshalb die Rolle der Affektvernetzung im Lernprozess oft unterschätzt wurde.

4.1.3 Unbewusste Vernetzungen - Intuition

Wenn man über die kognitive Dimension von Vernetzungen spricht, kann man unbewusste geistige Tätigkeit nicht ignorieren.¹ Ein Großteil unserer Denkprozesse, und damit auch Vernetzungsprozesse, verläuft im Verborgenen, ohne dass wir einen direkten Zugang dazu haben. MINSKY (1990, S. 29) merkt an:

Allgemein sind wir uns am wenigsten dessen bewußt, was unser Geist am besten vermag.

Diese unbewussten Denkprozesse kommen beim Phänomen der *Intuition* zum Tragen. Darunter versteht man den Vorgang, bei welchem Wirklichkeit ohne detaillierte Beobachtung und ohne Zwischenschalten kritisch abwägenden Reflektierens mehr ahnend und gleichsam schlagartig in ihrer wesentlichen Aussage erfasst wird (vgl. WÖRTERBUCH FÜR ERZIEHUNG UND UNTERRICHT, 1994).² Sie erscheint uns rätselhaft, als eine Eingebung von außen, weil wir uns der Vorgänge der Intuition nicht bewusst sind. So definiert MINSKY (1990, S. 331) Intuition als den

Mythos, daß der Geist unmittelbare (und deshalb unerklärliche) Fähigkeiten besitzt, Probleme zu lösen oder Wahrheiten zu erkennen.

Bezogen auf das Erfassen mathematischer Wirklichkeit ist Intuition für viele Problemlösungsprozesse entscheidend, ihr kommt aber auch eine Schlüsselrolle für

¹ Die bislang betrachteten kognitiven Vernetzungsaspekte beziehen sich auf bewusste Vernetzungen (vgl. auch Abschnitt 3.5, S. 64).

² Zu verschiedenen Arten der Intuition vgl. z.B. FISCHBEIN, 1987.

die Entwicklung der gesamten Mathematik zu. VAN DER WAERDEN (1953, S. 122) schreibt in einem Aufsatz über „Einfall und Überlegung in der Mathematik“:

... Wissenschaftler wissen über solche Fälle plötzlicher Erleuchtung zu berichten. POINCARÉ nennt sie ein deutliches Zeichen einer langen unbewussten Vorarbeit. „Die Rolle der unbewussten Arbeit in der mathematischen Erfindung scheint mir unbestreitbar“, schreibt er.

Dass Intuition als Bewusstwerdung des Ergebnisses eines längeren (teils) unbewussten Denkens uns in der Regel wie ein plötzlicher Vorgang ohne Vorgeschichte erscheint, erklärt MINSKY (1990, S. 128) so:

Viele ... Dinge werden von den ausgedehnten, schweigenden Systemen in unserem Geist für uns erledigt, die in längst vergessenen Kinderjahren errichtet wurden. Wir denken kaum an die riesigen Maschinen, die wir entwickelt haben, um den Raum zu verstehen, und die so unauffällig arbeiten, daß sie keine Spuren in unserem Bewußtsein hinterlassen.

Allgemein wird als Grundlage für die Intuition das *implizite Wissen* angesehen, d.h. das Vorhandensein eines Realitätsmodells im Kopf des Akteurs, dessen sich dieser nicht oder nicht vollständig bewusst ist (vgl. z.B. DÖRNER, 1989, S. 65). Auf die Mathematik übertragen, müssen also Menschen, die scheinbar ohne Nachzudenken eine richtige Antwort auf eine mathematische Fragestellung geben, ein implizites mathematisches Wissensnetz in sich tragen, das die Lösung der entsprechenden Fragestellung liefern kann; wie dies allerdings vonstatten geht, welche Vernetzungen hier vom menschlichen Geist vorgenommen werden, ist nicht geklärt.

Das intuitive Erfassen von Sachverhalten ist allerdings beim Lehren und Lernen von Mathematik keine vernachlässigbare Größe. Insbesondere muss berücksichtigt werden, dass es einige charakteristische Schwächen für menschliche Intuition gibt (vgl. DÖRNER, 1989, S. 167), dass Vieles der menschlichen Intuition allgemein zuwiderläuft.¹ Ferner gibt es intuitive Fehldeutungen, die sehr individuumsabhängig sind. Letzteres lässt sich durch subjektspezifische Wissensnetze, beruhend auf den jeweiligen individuellen Erfahrungen, erklären.

Daher ist es wichtig, intuitive Äußerungen von Schülern mit deren expliziten Wissen (d.h. bewusst äußerbares Wissen) in Beziehung zu setzen. Durch eine anschließende Reflexion und Analyse können Schüler ihre ursprünglichen intuitiven Vorstellungen überprüfen und korrigieren und damit mehr mathematisches Verständnis erlangen (vgl. KOYAMA, 1996, S. 198). Diesen Vorgang kann man durch eine Umstrukturierung des Wissensnetzes erklären. Er bewirkt schließlich veränderte Vorstellungen.

¹ STEWART (1990, S. 133) merkt z.B. an, dass die „Topologie .. voll von Dingen ... [ist], die der Intuition zuwiderlaufen“.

Eine Theorie zu kognitiven Aspekten von Vernetzungen und eine Didaktik, die darauf aufbaut, muss unvollständig bleiben, solange wir keinen oder einen nur eingeschränkten Zugang zu unbewussten Vernetzungen haben. Die Intuition, als eine Bewusstwerdung von Ergebnissen unbewusster Denkarbeit, ist ein Schlüssel zu einem der vielen Schlösser der verborgenen Systeme unseres Gehirns.

4.2 Das Modell der Curriculumsrahmen – Instanzen zur Erfassung von Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen

Im Folgenden beschränkt sich die Arbeit auf die Betrachtung *fachsystematischer Vernetzungen* sowie *anwendungsbezogener Vernetzungen*; wenn also von Vernetzungen die Rede ist, so sind solche dieser Kategorien gemeint.

Fachsystematische Vernetzungen und anwendungsbezogene Vernetzungen mathematischer Objekte in Lehr- und Lernprozessen gehören zum großen Teil zum Unterrichtsstoff Mathematik. Als curricularer Bestandteil lassen sich Vernetzungen, ähnlich wie Curricula, aus drei unterschiedlichen Perspektiven betrachten: als intendiert, als implementiert und als erreicht. Diese drei Betrachtungsweisen bilden die Grundlage der Rahmenkonzeption für Curricula.

Diese Rahmenkonzeption für Curricula wurde 1976 von einer Expertengruppe bestehend aus insgesamt rund 35 Mathematikern, Mathematiklehrern sowie Erziehungswissenschaftlern im Vorfeld von SIMS (Second International Mathematics Study) entwickelt. Die Expertengruppe hatte zur Aufgabe Vorschläge für Untersuchungsgegenstände der durchzuführenden internationalen Vergleichsstudie SIMS zu unterbreiten. Nach mehrtägigen Beratungen hatten sich drei Interessensbereiche herauskristallisiert. Zum einen wurde empfohlen, Lehrpläne zu untersuchen, speziell auf Inhalte, die zu vermitteln sind, und auf die Bedeutung, die diesen im Hinblick auf verschiedene mathematische Aspekte zukommt. Hierauf sollte erlerntes Schülerwissen bezogen werden. Zum zweiten wurde die Notwendigkeit herausgestellt, umfangreiche und detaillierte Informationen über den Mathematikunterricht im Klassenzimmer zu erlangen. Der dritte Interessensbereich fokussierte Unterrichtsergebnisse im Hinblick auf mathematisches Schülerwissen und auf Schülereinstellungen zur Mathematik. Diese drei Interessensbereiche führten schließlich zu einer modellhaften Beschreibung von Lehr- und Lernprozessen mittels drei sich beeinflussender Rahmungen; jenes Modell lag SIMS und später auch TIMSS zugrunde (vgl. TRAVERS & WESTBURY, 1989, S. 5ff; TRAVERS, GARDEN & ROSIER, 1989, S. 3f).

Hier wird herausgestellt, dass ein Curriculum aus allen drei Perspektiven untersucht werden muss, will man ein vollständigeres Bild davon gewinnen (ROBITAILLE & ROBECK, 1997, S. 15):

The framework highlights the fact, that a given curriculum may be viewed from three perspectives – curriculum as intended, as implemented, and as attained – and that, in order to get a more

complete picture of what a curriculum in a particular jurisdiction is like, one must examine it from these three perspectives.

Eine Beschreibung des Modells der Curriculumsrahmen liefert z.B. ROBITAILLE (1994, S. 37-39). Die drei curricularen Rahmen, das intendierte Curriculum, das implementierte Curriculum und das erreichte Curriculum, sind danach wie folgt erklärt:

The intended curriculum consists of the mathematics ... content as defined at the system level. ... the intended curriculum is embodied in textbooks, in curriculum guides, in the content of examinations and in policies, regulations, and other official statements generated to direct the educational system. The intended curriculum, the mathematics ... content which students are expected to study and learn, may be described in the form of mathematics ... concepts, processes, skills, and attitudes.

The implemented curriculum is the mathematics ... content as it is interpreted by teachers and made available to students. ... the implemented curriculum is influenced by the intended curriculum, and it can be described in terms of concepts, processes, skills, and attitudes.

The attained curriculum consists of the outcomes of schooling: the content of mathematics ... students have learned in the course of their studies. What students learn will be influenced by what was intended and by the opportunities that were made to them. The attained curriculum can be described in terms of the concepts, processes, skills, and attitudes in mathematics ...

Somit ergibt sich das *intendierte Curriculum* aus den

- Lehrplänen und Studentafeln,
- zugelassenen Schulbüchern sowie anderen Unterrichtsmaterialien,
- Absprachen unter Lehrern (z.B. in Fachkonferenzen, bei der Planung von Unterricht).

Dieses Curriculum entspricht also den Vorgaben, die einer Unterrichtsplanung und Durchführung zugrunde liegen.

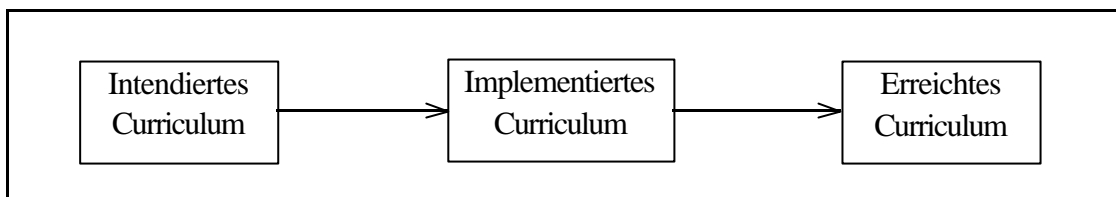
Das *implementierte Curriculum* besteht aus den Inhalten, die in einer spezifischen Klasse im Fachunterricht tatsächlich behandelt wurden.

Das *erreichte Curriculum* ist das von den Schülern erworbene Wissen. Dazu gehört das Zustandswissen oder deklarative Wissen der Schüler, d.h. das Wissen um Konzepte in ihrer Beziehungshaltigkeit und damit vernetztes Wissen, wie auch die Fähigkeit, mittels Vernetzungen (aktivem in Relation setzen) Probleme zu lösen. Das erreichte Curriculum widerspiegelt sich in den einzelnen Schülerleistungen.

Die drei Curriculumsrahmen bilden wesentliche Schnitte in den Lehr- und Lernprozessen, an denen die stofflichen Inhalte und damit auch deren Vernetzungen, insbesondere fachsystematische Vernetzungen und anwendungsbezogene Vernetzungen, festgemacht sind. Die wesentlichen Beziehungen zwischen den drei Curriculumsrahmen ergeben sich aus einer Kausalkette, der der Unterrichtsstoff in

Lehr- und Lernprozessen unterworfen ist: Schülerkenntnisse sind abhängig von unterrichtetem Stoff und dieser unterliegt den Vorgaben des intendierten Curriculums. Somit folgt der Unterrichtsstoff im Wesentlichen dem Weg vom intendierten über das implementierte zum erreichten Curriculum (Abbildung 8; vgl. z.B. TRAVERS & WESTBURY, 1989, S. 6; TRAVERS, 1993, S. 4).

Abbildung 8: Modell der Curriculumsrahmen

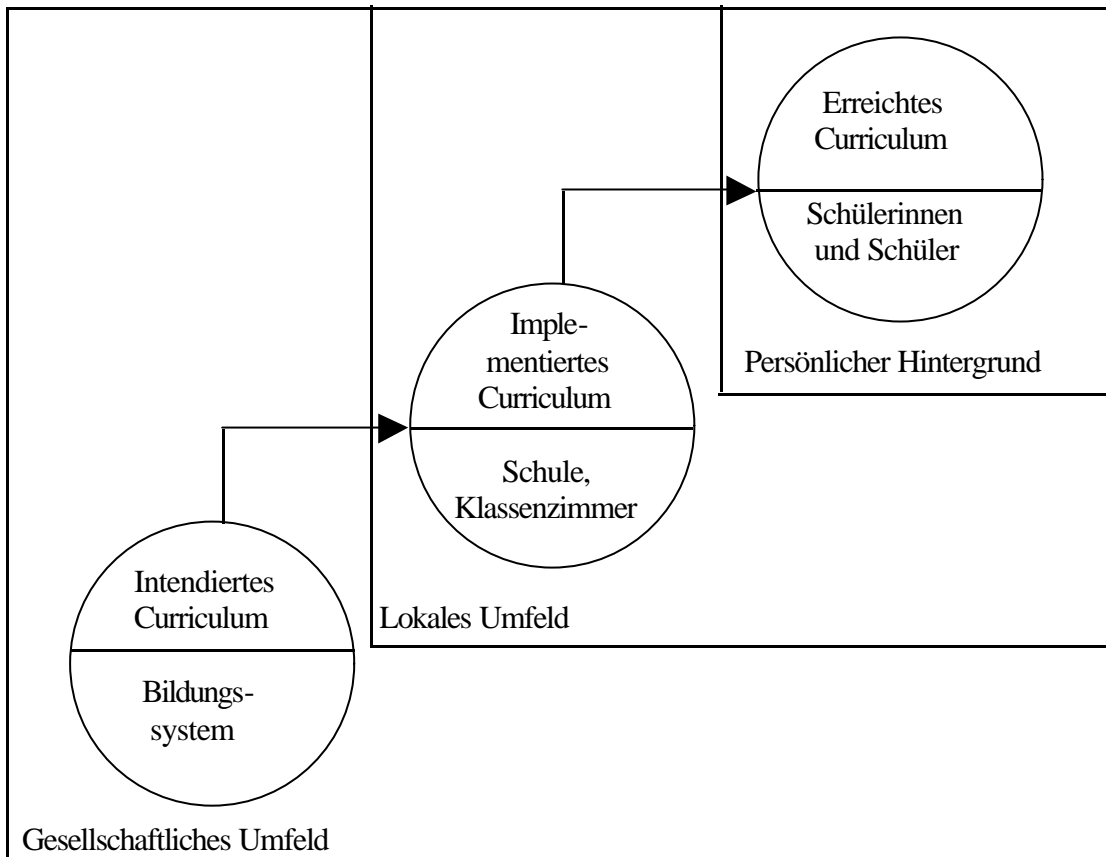


Die *Curriculumsrahmen* bieten sich daher *als Kontrollinstanzen* zur Verfolgung von Vernetzungen mathematischer Objekte in Lehr- und Lernprozessen an.

Diese Rahmen werden in der vorliegenden Arbeit als zentrales Hilfsmittel und damit als Teil einer Modellierung zur Untersuchung von Vernetzungen eingesetzt. *Grenzen des Modells* der drei Curriculumsrahmen ergeben sich durch die modellbedingten Vereinfachungen; diese werden nachfolgend skizziert.

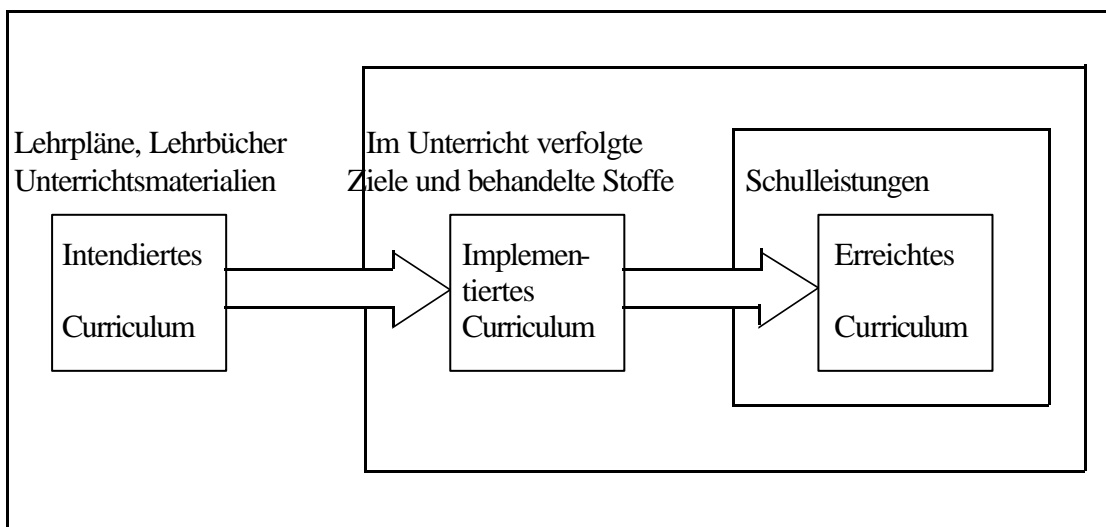
So stellen die einzelnen Curriculumsrahmen keine abgeschlossenen, sich nur gegenseitig beeinflussenden Einheiten dar. In der sehr aufwendigen TIMS-Studie wird dieser Tatsache durch eine Verfeinerung des Modells Rechnung getragen, indem die Curricula in ihren jeweils spezifischen Kontext eingebettet werden. Darstellungen der TIMSS-Rahmenkonzeption findet man in TIMSS Monograph No.1 (ROBITAILLE u.a., 1993, S. 26) und TIMSS Monograph No.2 (ROBITAILLE & GARDEN, 1996, S. 37):

Abbildung 9: TIMSS-Rahmenkonzeption (in Monograph No.1)



IEA. TIMSS (ROBITAILLE u.a., 1993, S. 26),
entnommen: BAUMERT&LEHMANN, 1997, S. 47.

Abbildung 10: TIMSS-Rahmenkonzeption (in Monograph No.2)



IEA. TIMSS (ROBITAILLE & GARDEN, 1996, S. 37),
entnommen: BAUMERT&LEHMANN, 1997, S. 180.

Die Darstellung in Abbildung 9 zeigt, dass die Curriculumsrahmen eingebettet sind in das gesellschaftliche Umfeld, das lokale Umfeld der Schule sowie in den persönlichen Hintergrund der Schüler und hiervon mitbestimmt werden. So gewinnt z.B. das implementierte Curriculum seine Gestalt „in einem Wechselspiel zwischen steuernden curricularen Vorgaben, lokalen institutionellen Rahmenbedingungen, Schülervoraussetzungen und dem professionellen Selbstverständnis der Fachlehrer“ (BAUMERT & LEHMANN, 1997, S. 180). Das erreichte Curriculum ist u.a. abhängig von den Vorkenntnissen eines Lernenden, seinen kognitiven Strukturen, aber auch seinen Einstellungen und Wertschätzungen gegenüber einem Fach oder bestimmten fachlichen Inhalten, seinen Emotionen und Motivationen. Letztere wiederum sind u.a. abhängig von den Fähigkeiten eines Lehrers, Schüler zu begeistern, von Erwartungshaltungen, die an einen Schüler herangetragen werden, sowie den eigenen Erwartungen eines Schülers an sich selbst, von der Selbsteinschätzung eigenen Könnens des Schülers, von seinen individuellen Zielen, die er sich gesetzt hat.

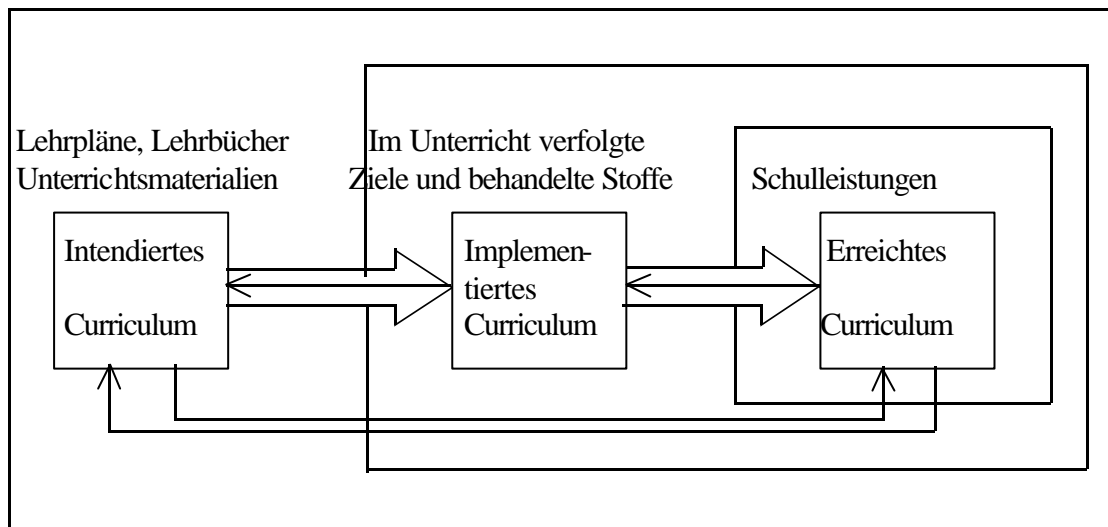
Aber selbst der in TIMSS berücksichtigte übergreifende Rahmen des gesellschaftlichen Umfeldes in Abbildung 9 ist zu eng gefasst, denn die gesamte außerunterrichtliche Umwelt nimmt Einfluss auf die Lehr- und Lernprozesse. Die Aneignung von Unterrichtsstoff, das Erlangen von (Schul-)Wissen, insbesondere auch von Wissen über Vernetzungen mathematischer Objekte, beschränkt sich nicht auf die Schule und die Hausaufgaben, sondern wird durch die gesamten außerschulischen Erfahrungen eines Lernenden mitgeprägt. Dies sind nicht nur soziokulturelle Erfahrungen in der menschlichen Gesellschaft sondern auch Erfahrungen mit der uns umgebenden Natur, mit dem Universum, in dem wir leben.

Eine Vereinfachung ist auch durch die mittels der Pfeile in Abbildung 8, Abbildung 9 und Abbildung 10 aufgezeigte alleinige Richtung von links nach rechts gegeben. Die Ausrichtung der Pfeile zeigt dabei die dominierende Richtung der Determinierung eines Curriculums durch ein anderes gemäß der weiter oben dargestellten Kausalkette an.

Eine Rückwirkung in geringerem Maße ist aber ebenfalls vorhanden, so dass also das implementierte Curriculum durch das Zusammenspiel mit dem erreichten Curriculum mitbestimmt wird und das intendierte Curriculum aufgrund von Erfahrungswerten bzgl. des implementierten und erreichten Curriculums revidiert wird. Auch ist es möglich, dass Teile des intendierten Curriculums direkt auf das erreichte Curriculum Einfluss nehmen, ohne dass sie im Schulunterricht vermittelt wurden. Ein Schüler kann sich z.B. Lerninhalte, die im Unterricht nicht behandelt wurden, durch Lesen der entsprechenden Abschnitte im Schulbuch selber aneignen oder es könnten dem Schüler diese Lerninhalte von seinen Eltern vermittelt werden. Diese Überlegungen schließen die Betrachtung vernetzten Wissens als Bestandteil der curricularen Rahmen mit ein.

Zur Darstellung des beschriebenen Sachverhalts ist in Abbildung 11 eine Änderung der Abbildung 10 vorgenommen: in die großen von links nach rechts gerichteten Pfeile sind kleine Rückwärtspfeile gesetzt und die Rahmen des intendierten und des erreichten Curriculums sind mit Pfeilen verbunden. Somit wird deutlich, dass die drei Curricula in ein Wechselspiel miteinander treten.

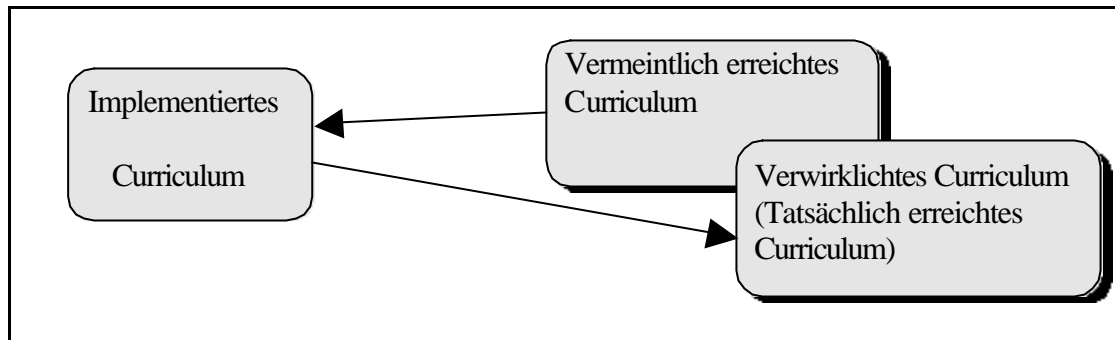
Abbildung 11: Verfeinerte Rahmenkonzeption



Bezüglich des erreichten Curriculums ist zu berücksichtigen, dass das tatsächlich erreichte Curriculum beim Schüler, das *verwirklichte Curriculum*, nicht mit den Vorstellungen des Lehrers über das bei den Schülern erreichte Curriculum übereinstimmen muss. Das Bild, das sich ein Lehrer vom Wissen seiner Schüler – auch bzgl. Vernetzungen – macht, kann ganz falsch sein, zum einen, weil der Lehrer das Wissen seiner Schüler vielleicht objektiv nicht richtig einschätzt, zum anderen, weil das Bild des Lehrers über das von den Schülern erreichte Curriculum mitgeprägt sein kann von seiner Erwartungshaltung gegenüber dem, was die Schüler aufgrund seiner Unterrichtsgestaltung wissen und können sollten.

Rückwirkungen auf das implementierte Curriculum werden aber aufgrund der Vorstellung des Lehrers vom erreichten Curriculum ausgeübt, nicht durch das tatsächlich von Schülern erreichte Curriculum (Abbildung 12). Bei einer Darstellung des Wechselspiels der Curricula müsste daher das erreichte Curriculum wie in Abbildung 12 aufgefächert werden in das aus Lehrersicht beim Schüler vermeintlich erreichte Curriculum und das tatsächlich in Schülerköpfen verwirklichte Curriculum.

Abbildung 12: Wechselspiel zwischen implementiertem und erreichtem Curriculum



Auch der *Einfluss des Parameters Zeit* ist in den Darstellungen der Abbildungen 8, 9 und 10 nicht erfasst. So muss im Hinblick auf das implementierte und das erreichte Curriculum insbesondere beachtet werden,

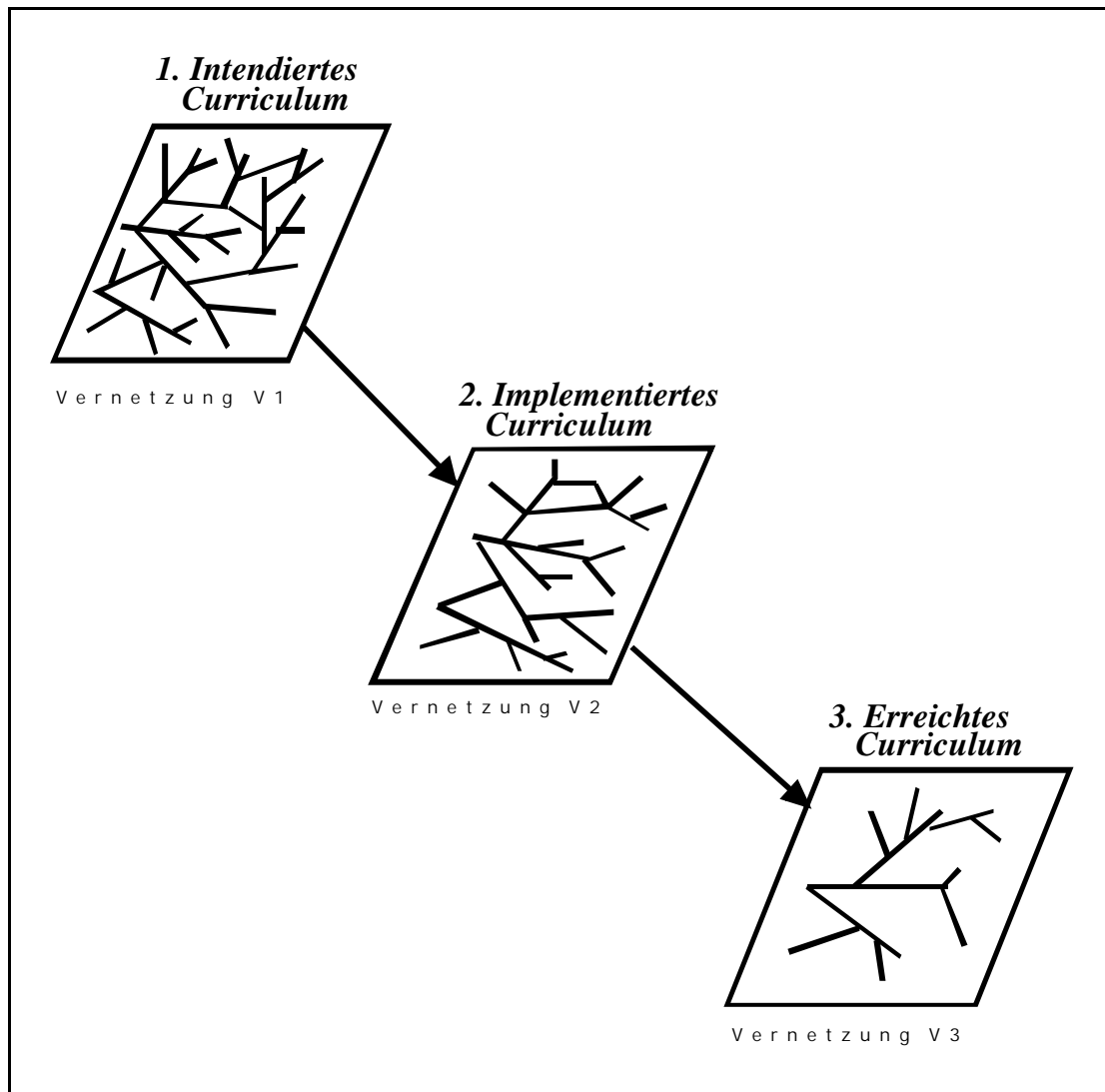
- über welchen Zeitraum hinweg bestimmte Lerninhalte vermittelt wurden, d.h. wie viel Gelegenheit zum Lernen geboten wurde,
- welcher Zeitraum zwischen der Vermittlung der Lerninhalte und dem Ist-Zustand im erreichten Curriculum liegt, weil Lerninhalte unterschiedlich lang gespeichert werden.

Die Bestandsaufnahme von Vernetzungen in Curriculumsrahmen (zunächst ohne Berücksichtigung der Parameter, die von außen auf die Rahmen Einfluss nehmen) bietet eine gute Keimzelle zur Untersuchung von Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen. Sind bestimmte Vernetzungen in den drei durch die Rahmen vorgegebenen Kontrollinstanzen bekannt, so lassen sie sich miteinander vergleichen. Sind Unterschiede festzustellen, so deutet dies darauf hin, dass Vernetzungen nicht einfach von dem Rahmen des intendierten Curriculums in den Rahmen des implementierten Curriculums und weiter in den Rahmen des erreichten Curriculums übertragen werden, sondern dass auch andere Faktoren, die in Lehr- und Lernprozessen eine Rolle spielen, Einfluss nehmen. Diese Einflüsse können dann mittels weiterer geeigneter Modelle zur Beschreibung von Lehr- und Lernprozessen genauer analysiert werden.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich im Folgenden auf die (vergleichende) Erhebung einiger *fachsystematischer Vernetzungen und anwendungsbezogener Vernetzungen*, also von stoffbezogenen Vernetzungen, in den drei Curriculumsrahmen, wobei im Wesentlichen das einfache Modell der Curriculumsrahmen aus Abbildung 8 zugrunde gelegt wird. Hierdurch können ggf.

bestehende Mängel aufgedeckt werden und eventuelle Übertragungslücken und Übertragungsfehler bei dem Übergang von Vernetzungen aus dem Rahmen des intendierten Curriculums über den Rahmen des implementierten Curriculums hin zum Rahmen des erreichten Curriculums sichtbar werden (Abbildung 13).

Abbildung 13: Übertragung von Vernetzungen von einem Rahmen in den nächsten



Dabei ist es denkbar, dass

- Übergänge wie Filter oder Siebe wirken, durch die Vernetzungen nur teilweise übertragen werden,
- an den Übergängen ein „Umflechten“ vernetzter Inhalte stattfindet, indem vorhandene Vernetzungen gelöst und neue gebildet werden,
- bei der Übertragung der Vernetzungen von einem Rahmen in einen anderen neue Vernetzungen hinzukommen.

Neben der Bestandsaufnahme von Vernetzungen im tatsächlich erreichten Curriculum ist, wie oben dargelegt, auch eine Bestandsaufnahme von Vernetzungen im aus Lehrersicht vermeintlich erreichten Curriculum von Bedeutung. Eine von Lehrern vorgenommene grobe Einschätzung von vorrangigen Vernetzungen im erreichten Curriculum ihrer Schüler wird daher in den Untersuchungen zur vorliegenden Arbeit in exemplarischer Weise ebenfalls eingefangen. Hierbei wird auf Modellebene der Rahmen des erreichten Curriculums in das tatsächlich bei Schülern erreichte Curriculum und das aus Lehrersicht vermeintlich erreichte Curriculum aufgefächert.

Ferner wird in Ergänzung zu dem Curriculumsrahmenmodell in der vorliegenden Arbeit auch der Parameter Zeit, die seit der Vermittlung von Lerninhalten bis zur entsprechenden Bestandsaufnahme im erreichten Curriculum vergangen ist, berücksichtigt. Ergebnisse von Bestandsaufnahmen von Vernetzungen im erreichten Curriculum bei unterschiedlichen Werten dieses Parameters können verglichen werden und lassen Rückschlüsse über die Beständigkeit von Vernetzungen zu.

Eine detaillierte Diskussion geeigneter Methoden zur Bestandsaufnahmen von Vernetzungen in Curriculumsrahmen wird in Kapitel 7 geliefert.

4.3 Erste Daten zu Vernetzungen in den Curriculumsrahmen

Eine erste Durchsicht von Lehrplänen/Richtlinien und Schulbüchern sowie der Ergebnisse von TIMSS liefert auf phänomenologischer Basis einige allgemeine Informationen über fachsystematische Vernetzungen und anwendungsbezogene Vernetzungen innerhalb der drei Curriculumsrahmen, sowie einige Informationen bzgl. der Übertragung vernetzter Inhalte von einem Rahmen zum anderen.

In *Richtlinien und Lehrplänen* für Mathematik werden vielfach Lernziele aufgeführt, die den Erwerb eines vernetzten mathematischen Denkens beinhalten. So wird für das Land Nordrhein-Westfalen in den Richtlinien und Lehrplänen Mathematik für die Sekundarstufe I des Gymnasiums (1993, S. 31, 32) ausgeführt:

Mathematikunterricht wird ... Themen miteinander verflechten, gemeinsame Strukturen herausarbeiten, Beziehungen knüpfen, ...

Der Mathematikunterricht der Sekundarstufe I des Gymnasiums soll ... die Fähigkeit entwickeln, Sachverhalte zu mathematisieren sowie mathematische Formulierungen inhaltlich zu deuten; er soll erfahrbar machen, wie man mit Mathematik außermathematische Probleme lösen und Phänomene der Umwelt verstehen kann ...

In den Richtlinien Mathematik für die Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen (1980, S. 17, 18) kann man lesen:

Mathematik ... [hat] mit Beginn des 20. Jahrhunderts Denkweisen entwickelt, die für das Begreifen und Bewerten der Zusammenhänge unseres Lebens in ihren grundsätzlichen Umrissen durch die Schule vermittelt werden müssen. ...

... der Mathematikunterricht in der Gesamtschule ... muß ... mögliche Verbindungen zu den anderen Unterrichtsfächern und den anderen Lebensbereichen der Schüler pflegen. ...

Es genügt ... nicht, daß lediglich Kenntnisse und Erkenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten im Mathematikunterricht vermittelt werden; vielmehr ist der Zusammenhang dieser Bereiche von entscheidender Bedeutung.

Im „Katalog der fachspezifischen Lernziele des Mathematikunterrichts“ in den Richtlinien Mathematik des Landes Nordrhein-Westfalen für die gymnasiale Oberstufe (1981, S. 28, 29) werden u.a. angeführt:

- Verständnis der wesentlichen Begründungszusammenhänge; ...
- Fähigkeit zur Einordnung konkreter Fragestellungen in bekannte Zusammenhänge und zur Anwendung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten auf konkrete Situationen; ...
- Fähigkeit ... zur zielgerichteten Verknüpfung von Lehrsatzinhalten; ...
- Fähigkeit, mathematische Modelle realer Sachverhalte in einfachen Fällen anzugeben ...

In den neuen Richtlinien und Lehrplänen für die gymnasiale Oberstufe in Nordrhein-Westfalen (1999) bilden den „Kern der didaktischen Konzeption“ sog. „zentrale Ideen“, denen eine besondere Bedeutung für die Vernetzung mathematischer Inhalte zukommt. Diese zentralen Ideen sind die Idee der Zahl, die Idee des Messens, die Idee des räumlichen Strukturierens, die Idee des funktionalen Zusammenhangs, die Idee der Wahrscheinlichkeit, die Idee des Algorithmus und die Idee des mathematischen Modellierens. Sie haben eine doppelte Funktion für die didaktische Konzeption (S. 6):

- Die zentralen Ideen stellen gleichsam „rote Fäden“ dar, die die mathematischen Gegenstände der gymnasialen Oberstufe und der vorangehenden Schuljahre miteinander verbinden. In dieser Funktion können sie verhindern helfen, dass die zu lernende Mathematik für die Schülerinnen und Schüler in eine Fülle isolierter Begriffe, Spezialkenntnisse und Techniken auseinander fällt. An ihnen lässt sich verdeutlichen, wie die Schulmathematik in sich vernetzt ist.
- Darüber hinaus lässt sich anhand der zentralen Ideen zeigen, wie mathematische und außermathematische Kultur miteinander verknüpft sind. ...

Zu der konkreten Umsetzung dieser Lernziele bzw. didaktischen Konzeption im Unterricht findet man in den zitierten Richtlinien höchstens einige wenige Hinweise, meist unverbindlicher Art. Auch der anzustrebende Tiefgang in der Ausprägung dieser Lernziele bleibt aufgrund mangelhafter inhaltlicher Füllung unklar. Hier erhalten Lehrer und Schulbuchautoren trotz bestimmter Einschränkungen wie z.B. der Zulassungspflicht für Schulbücher einen Freiraum, den sie unterschiedlich nutzen können.

Eine grobe Durchsicht von *Schulbüchern* zeigt, dass hier mathematische Inhalte in Anlehnung an die Fachsystematik weitgehend linear angeordnet sind. Man hat gewissermaßen drei „Hauptstränge“ oder „Hauptsäulen“, die Algebra, die Geometrie und die Stochastik in der Sekundarstufe I bzw. die Analysis, die Lineare Algebra/Vektorgeometrie und die Stochastik in der Sekundarstufe II, auf denen man im regelmäßigen Wechsel jeweils „stückweise emporklimmt“. Querverbindungen zwischen den einzelnen Strängen könnten dabei wesentlich häufiger dargestellt werden, als es der Fall ist. (Beispielsweise ließen sich viel öfter und konsequenter algebraische Terme oder Aussagen geometrisch interpretieren, über unterschiedliche Anordnungen und Zählweisen geometrischer Objekte zahlentheoretische Aussagen herleiten, oder statistische Betrachtungen in Unterrichtseinheiten zur Algebra,

Geometrie oder Analysis einbinden.) Auch könnten außermathematische Problemstellungen, die sich mittels Mathematisierungen lösen lassen, zahlreicher geboten werden und ein breiteres Anwendungsspektrum ansprechen. Somit kommen insbesondere Modellvernetzungen als spezielle anwendungsbezogene Vernetzungen recht kurz.

Untersuchungen im Rahmen von TIMSS zeigen, dass Lehrer sehr häufig Schulbücher im *Unterricht* einsetzen, in Deutschland sind es über 95% (BEATON et al., 1996, S. 156-158). Dabei ist das Schulbuch vor allem für die Präsentation von Lerninhalten entscheidend. „In almost all countries, the textbook was the major written source mathematics teachers used in deciding *how* to present a topic to their classes.“ In Deutschland beruht die Entscheidung der Lehrer bzgl. der Darstellung von Sachverhalten in 75% aller Fälle auf der Darstellung in Schulbüchern und nur in 25% in Anlehnung an die curricularen Vorgaben. Es kann daher unterstellt werden, dass die in gängigen Schulbüchern dargestellten Vernetzungen maßgebend für den Unterricht sind, d.h. dass Vernetzungen aus dem Rahmen des intendierten Curriculums zum größten Teil unverändert in den Rahmen des implementierten Curriculums übertragen werden.

TIMSS zeigt ferner, dass unter den Lehrern ein weitgehender Konsens darüber herrscht, dass mathematische Inhalte in mehr als nur einer Repräsentation im Unterricht dargestellt werden sollten, wodurch Mathematik als ein Netzwerk von Konzepten und Prozeduren erfahren wird (BEATON et al., 1996, S. 138). Die Tatsache, dass die Präsentation mathematischer Inhalte im Unterricht in starker Anlehnung an die Präsentation in Schulbüchern erfolgt (s.o.), legt den Schluss nahe, dass Lehrer die Darstellung vernetzter Inhalte in Schulbüchern entweder für ausreichend halten, oder aber aus welchen Gründen auch immer nicht bereit oder in der Lage sind, die Darstellungen in Schulbüchern in größerem Umfang durch weitere zu ergänzen.

Das *tatsächlich erreichte Curriculum*, das durch Schülerleistungen messbar ist, legt nach TIMSS den Schluss nahe, dass im Bereich des vernetzten Denkens Defizite vorhanden sind (vgl. Abschnitt 2.5).

Tiefergehende und differenziertere Erkenntnisse über Vernetzungen in den drei Curriculumsrahmen kann man erreichen, indem man konkrete Vernetzungen zu bestimmten Themen in der Rahmenkonzeption betrachtet und vergleichend analysiert. Eine Untersuchung gemäß dieser Vorgehensweise wird in der vorliegenden Arbeit vorgestellt; das dabei betrachtete Thema ist das der linearen Gleichungssysteme im Mittelstufenunterricht.