3 Vernetzungsaspekte beim Mathematiklernen - Begriffliches

Immer wieder wird vielfach die Forderung nach einer besseren Vernetzung mathematischer Lerninhalte durch Unterricht erhoben (vgl. Kapitel 2), der Begriff der Vernetzung jedoch kaum näher präzisiert. Auch wird der Begriff der Vernetzung sehr vielschichtig verwendet. Eine Begriffseinengung und -abgrenzung, die für den Fokus „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ sinnvoll ist, erweist sich als nötig.

Somit wird in Abschnitt 3.1 zunächst die Struktur von vernetzten Systemen herauskristallisiert, wobei Vernetzungen mathematisch modelliert werden. Zwecks inhaltlicher Charakterisierung von Vernetzungen, die im Mathematikunterricht generiert werden, dienen in Abschnitt 3.2 als Fundgrube Dialoge rund um den Satz des Pythagoras. Es zeigt sich, dass sowohl die Vernetzungen innerhalb der Mathematik selbst (Abschnitt 3.3) als auch die Vernetzungen von Mathematik mit nichtmathematischen Bereichen (Abschnitt 3.4) inhaltlich untergliedert werden können. Die zusammenfassende Aufstellung einer entsprechenden Kategorisierung von relevanten Vernetzungen für den Mathematikunterricht liefert Abschnitt 3.5. Im Abschnitt 3.6 schließlich wird auf statische und dynamische Aspekte des Vernetzungswissens eingegangen. Es werden die Begriffe des deklarativen und des prozeduralen Wissens erläutert und mit Vernetzungswissen in Bezug gesetzt.

3.1 Zum Begriff „Vernetzung" - Strukturelles

Unter einem *vernetzten System* versteht man ein System, in dem die einzelnen Komponenten in vielfältiger Weise in Beziehung zueinander stehen. Man unterscheidet dynamische und statische vernetzte Systeme (vgl. VESTER, 1990, S. 20). In *dynamischen* Systemen sind durch die Verbindungen der Systemkomponenten Abhängigkeiten zwischen diesen definiert, so dass die Manipulation einer Komponente Veränderungen anderer nach sich zieht. Somit kann man hier den Zustand einer Komponente als Funktion der jeweiligen Zustände der mit dieser Komponente verbundenen Komponenten verstehen. *Mathematische Systeme* zählen zu den *statischen* Systemen (VESTER, 1990, S. 20); hier sind die einzelnen Komponenten mathematische Objekte (d.h. Begriffe, Lehrsätze, Beweise, Algorithmen, Formeln, Terme usw.) und damit feststehende (unveränderliche) Konzepte.

Jedem vernetzten System mit endlich vielen Komponenten liegt das *Netzwerk* seiner Systemkomponenten zugrunde. Mathematisch lässt sich ein Netzwerk durch einen Graphen beschreiben, dessen Knotenpunkte entsprechend existierender Beziehungen (Relationen) zwischen den Systemkomponenten miteinander verbunden sind.

Unter einem *Graph* G versteht man das Paar G = (V, E)[1] aus einer endlichen Menge $V \neq \emptyset$ und einer Menge E von zweielementigen Teilmengen von V. Die Elemente von V heißen *Punkte* (auch *Knoten* oder *Ecken* genannt), die von E *Kanten*. Für eine Kante $e = \{a, b\}$ heißen a und b die *Endpunkte* von e. Erweitert man die Definition, indem man zulässt, dass Punktepaare auch durch mehrere Kanten verbunden sein können, so spricht man von einem *Multigraphen*[2], im Folgenden auch *Graph*[3] genannt. Werden die Kanten eines Graphen mit einer Richtung versehen, so erhält man einen *gerichteten Graph* oder *Digraph*. Die Elemente von E sind hier nicht zweielementige Teilmengen von V, sondern geordnete Paare (a, b) mit $a \neq b$ aus V. Für eine Kante e = (a, b) heißt dann a der *Anfangspunkt* und b der *Endpunkt* von e. Ein *Netzwerk* ist nun ein Paar (G, w), wobei G = (V, E) ein Graph

---

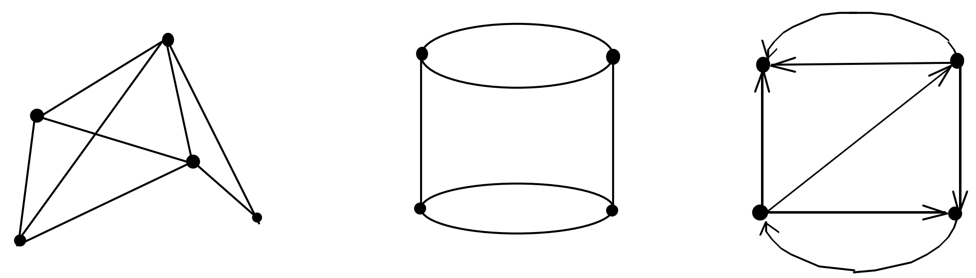
[1] V: englisch vertices; E: englisch edges

[2] In einem Multigraphen können die Kanten nicht mehr eindeutig nur durch die Angabe ihrer Endpunkte bezeichnet werden. Für eine präzisere Notation vgl. z.B. JUNGNICKEL, 1987, S. 20.

[3] Zur Abgrenzung werden dann Graphen, bei denen jedes Punktepaar jeweils nur durch höchstens eine Kante verbunden ist, als „*einfache Graphen*" bezeichnet (vgl. JUNGNICKEL, 1987, S. 20).

oder Digraph ist und w eine reellwertige Abbildung auf E, deren Funktionswerte z.B. als Längen, Zeitdauer, Kosten, Gewinn, Gewicht, Kapazität, Wahrscheinlichkeit interpretiert werden können (vgl. z.B. JUNGNICKEL, 1987; BIGGS, 1989).[1]

Abbildung 1: Beispiele für Graphen



Graph

Multigraph oder Graph

gerichteter Graph

In einem vernetzten System entsprechen die einzelnen Systemkomponenten den Knoten eines Netzwerks, d.h. den Elementen von V. Systemkomponenten und die sie repräsentierende Knoten in einem Netzwerk werden im Folgenden auch *Vernetzungsknoten* genannt.

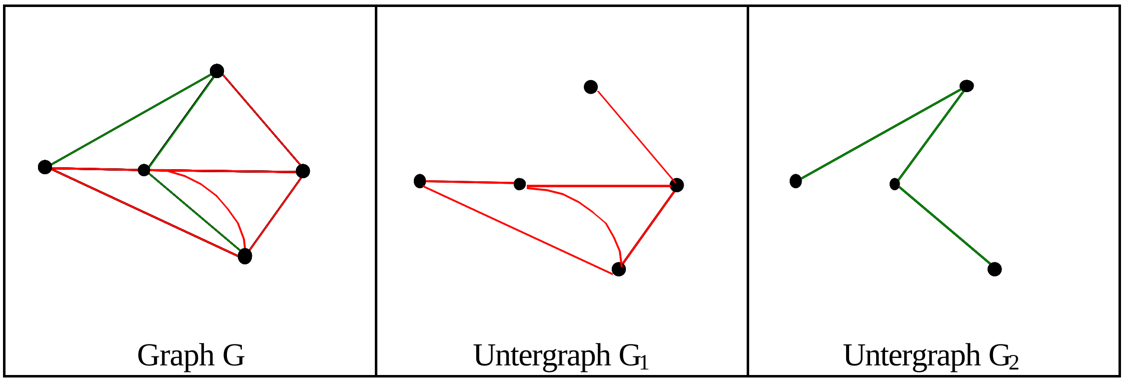
Die Beziehung(en) (Relation(en)) zwischen den Vernetzungsknoten eines Systems werden im zugehörigen (Multi)Graphen G durch die Kanten, d.h. die Elemente aus E, aufgezeigt. Dabei können die Kanten gerichtet oder ungerichtet sein. Eine gerichtete Kante (a, b) zeigt, dass der Vernetzungsknoten a in Relation zu dem Vernetzungsknoten b steht; eine ungerichtete Kante {a, b} zeigt, dass sowohl a in Relation zu b steht als auch b in Relation zu a. Jede ungerichtete Kante {a, b} lässt sich demnach durch zwei gerichtete, (a, b) und (b, a), ersetzen und umgekehrt.

Werden Komponenten eines Systems unter n verschiedenen Aspekten verbunden, so entspricht jedem Aspekt eine Relation R_i, $1 \le i \le n$, die durch einen einfachen Graphen G_i mit $G_i = (V_i, E_i)$, $V_i \subset V$, $E_i \subset E$, darstellbar ist. Jeder Graph G_i ist dabei ein *Untergraph*[2] von G.

[1] In der vorliegenden Arbeit wird auf mögliche Spezifizierungen der Abbildung w im Hinblick auf Mathematikunterricht nicht näher eingegangen.

[2] Ist G = (V, E) ein Graph, V' eine Teilmenge von V und $E|V'$ die Menge aller Kanten e, die beide Endpunkte in V' haben, so heißt jeder Graph G' = (V', E') mit $E' \subset E|V'$ ein Untergraph von G (vgl. JUNGNICKEL, 1987, S. 15).

Abbildung 2: Beispiele für Untergraphen G_i zu einem Graph G



Umgekehrt lassen sich die Graphen $G_i = (V_i, E_i)$ zu n verschiedenen Relationen R_i, $1 \leq i \leq n$, zu einem (Multi)Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \bigcup V_i$, $E = \bigcup E_i$ zusammenfügen. Sind die Relationen R_i disjunkt, so ist G ein Graph, der kein Multigraph ist; durch G wird dann eine Relation R dargestellt, die in naheliegender Weise als Vereinigung der R_i definiert sei.

Unter einer *Vernetzung* wird nachfolgend die einem Netzwerk zugrunde liegende Relation R auf der Menge der Vernetzungsknoten verstanden. Teilaspekte der Vernetzung entsprechen Teilrelationen R_i von R und definieren Untergraphen G_i von G. Im Hinblick auf R_i wird im Folgenden auch von der *Vernetzungskategorie* R_i gesprochen.

Vernetzung bezeichnet dabei sowohl den Prozess des Vernetzens, also das in Relation setzen, als auch das Ergebnis (vgl. dazu FISCHER, 1991, S. 121). Ein Knoten a eines Systems *wird* mit einem Knoten b des Systems *vernetzt*, wenn a zu b in eine Relation gesetzt wird; zwei Knoten eines Systems werden als *vernetzt* bezeichnet, wenn sie als Endpunkte einer Kante in der dem Netzwerk zugrunde liegende Relation zueinander stehen.

In Bezug auf *Vernetzungen im Mathematikunterricht* interessieren uns insbesondere Vernetzungen, bei denen für jede Kante mindestens ein Endpunkt ein mathematisches Objekt ist, das zum Unterrichtsgegenstand Mathematik gehört. Unter *mathematischen Objekten* werden Begriffe, Lehrsätze, Beweise, Algorithmen, Formeln, Terme usw. verstanden. So sind beispielsweise die mathematischen Objekte „Dreieck“ und „gleichseitiges Dreieck“ als Endpunkte einer Kante der Oberbegriff-Unterbegriff-Relation miteinander vernetzt; die mathematischen Objekte „$x^2 + y^2 = 1$“ und „Kreis um (0; 0) mit Radius 1“ sind Endpunkte einer Kante der Relation (Vernetzung) „ist eine Modellierung von“ (vgl. auch Abschnitt 3.3.2).

Neben Vernetzungen auf Mengen mathematischer Objekte müssen im Mathematikunterricht auch die vielfältigen Beziehungen berücksichtigt werden, in denen mathematische Objekte und nichtmathematische Komponenten (beispielsweise Anwendungsaufgaben) zueinander stehen. Für diese Vernetzungen hat jede Kante als Endpunkte einen mathematischen Knoten und einen nichtmathematischen Knoten. Damit werden Vernetzungen zwischen mathematischen und nichtmathematischen Komponenten durch *bipartite Graphen*[1] dargestellt.

Zur näheren Charakterisierung der für Mathematikunterricht relevanten Vernetzungen stellt sich die Aufgabe, entsprechende Vernetzungsknoten samt ihren wechselseitigen Beziehungen zu ermitteln.

[1] Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *bipartit*, wenn es eine disjunkte Zerlegung $V = S \cup T$ der Knotenmenge gibt mit $E \subset S \times T \cup T \times S$. Alle Kanten haben also jeweils einen Endpunkt in S und einen Endpunkt in T (vgl. z.B. JUNGNICKEL, 1987, S. 85).

3.2 Beispiel eines Netzwerks: „Der Satz des Pythagoras“

Einer theoretischen Analyse von Vernetzungsknoten, die für den Mathematikunterricht relevant sind, und deren Vernetzungen sei hier zunächst das Ergebnis einer nicht repräsentativen, aber dennoch aufschlussreichen Umfrage vorangestellt. Es handelt sich dabei um spontane Antworten auf die Frage: „Was fällt dir/Ihnen zum Satz des Pythagoras ein?“, also um vorrangige bewusste gedankliche Verknüpfungen mit dem Konzept „Satz des Pythagoras“.

Dieses mathematische Konzept wurde hier als Exempel ausgewählt, weil es einen zentralen Lerninhalt des Mathematikunterrichts darstellt, also erwartet werden kann, dass es vielen Menschen bekannt ist, und weil es vielfältige Assoziationen zu anderen inner- und außermathematischen Lerninhalten gestattet. Befragt wurden (zufällig ausgewählte) Oberstufenschüler und Erwachsene, d. h. Menschen, bei denen man i.d.R. voraussetzen kann, dass sie den Satz des Pythagoras kennen gelernt haben. Die Frage wurde mündlich gestellt und direkt, ebenfalls mündlich von dem jeweils Befragten beantwortet; sofort danach wurde die gegebene Antwort schriftlich notiert.

Die Antworten sind im Folgenden widergegeben, sortiert nach Schülerantworten und Antworten von Erwachsenen. Antworten, die mehrfach genannt wurden, sind nur einmal aufgeführt; Ziel ist hier, das breite Spektrum der gegebenen Antworten zu zeigen.

Frage: *Was fällt dir/Ihnen zum Satz des Pythagoras ein?*

Schülerantworten:

Schüler A: $a^2 + b^2 = c^2$.
Schüler B: Rechtwinklige Dreiecke.
Schüler C: Hypotenuse.
Schüler D: Seiten und Strecken berechnen.
Schüler E: Zehntes Schuljahr.
Schüler F: Flächen von Quadraten.
Schüler G: Ägypten. Der Nil wurde damit vermessen.
Schüler H: So ein alter Grieche.
Schüler I: Hat etwas mit Mathe zu tun. Hab ich verdrängt.
Schüler J: Wir mussten Diagonalen und andere Linien von räumlichen Körpern berechnen. Wir haben deshalb diese Körper mit Stäben zusammengebaut; dann konnte man besser sehen, wie man rechnen muss.

Antworten von Erwachsenen:

Person A: Erstens: Meine zweite Staatsexamensprüfung. Ich habe dem Prüfer mindestens fünf Beweise zum Satz des Pythagoras geliefert und er wollte immer noch etwas von mir. Ich weiß bis heute nicht was.
Zweitens: Für Schüler heißt der Satz des Pythagoras immer $a^2 + b^2 = c^2$, egal wo der rechte Winkel liegt.
Drittens: Felder in Ägypten.
Person B: Irgend etwas mit Hypotenuse, rechtwinkligen Dreiecken und dann noch Katheten oder so ähnlich.
Person C: Rechtwinkliges Dreieck, Metrik, Abstandsberechnung.
Person D: Pythagoras? Lass mich raten! Der ist schon tot.
Person E: Quadratisch. Praktisch. Gut. Es gab mal eine Schokoladenwerbung mit dem Satz des Pythagoras.
Meine zweite Staatsexamensarbeit handelte von diesem Thema.
Person F: So ein Papier. Ach nein, das war ja Papyrus.
Person G: $a^2 + b^2 = c^2$.
Mathematisch verbinde ich nicht sehr viel mit Pythagoras, eher aber mit dem Philosophen Pythagoras:

Die Römer haben Pythagoras für einen Spinner gehalten.

Bei Ovid gibt es in den „Metamorphosen“ ein Gedicht über Pythagoras, das „Pythagoreische Lehrgedicht“.

Pythagoras wurde angeblich von einem römischen König nach Italien gebracht.

Mit Pythagoras verbinde ich auch die Sphärenharmonie. Dabei bin ich mir nicht ganz sicher; es könnte sein, dass diese auch von einem anderen Griechen stammt.

Person H: Gar nichts. Wirklich nichts.

Person J: Eine Lehrprobe, die ich dazu in einer schwachen 9. Klasse einer Hauptschule hatte.

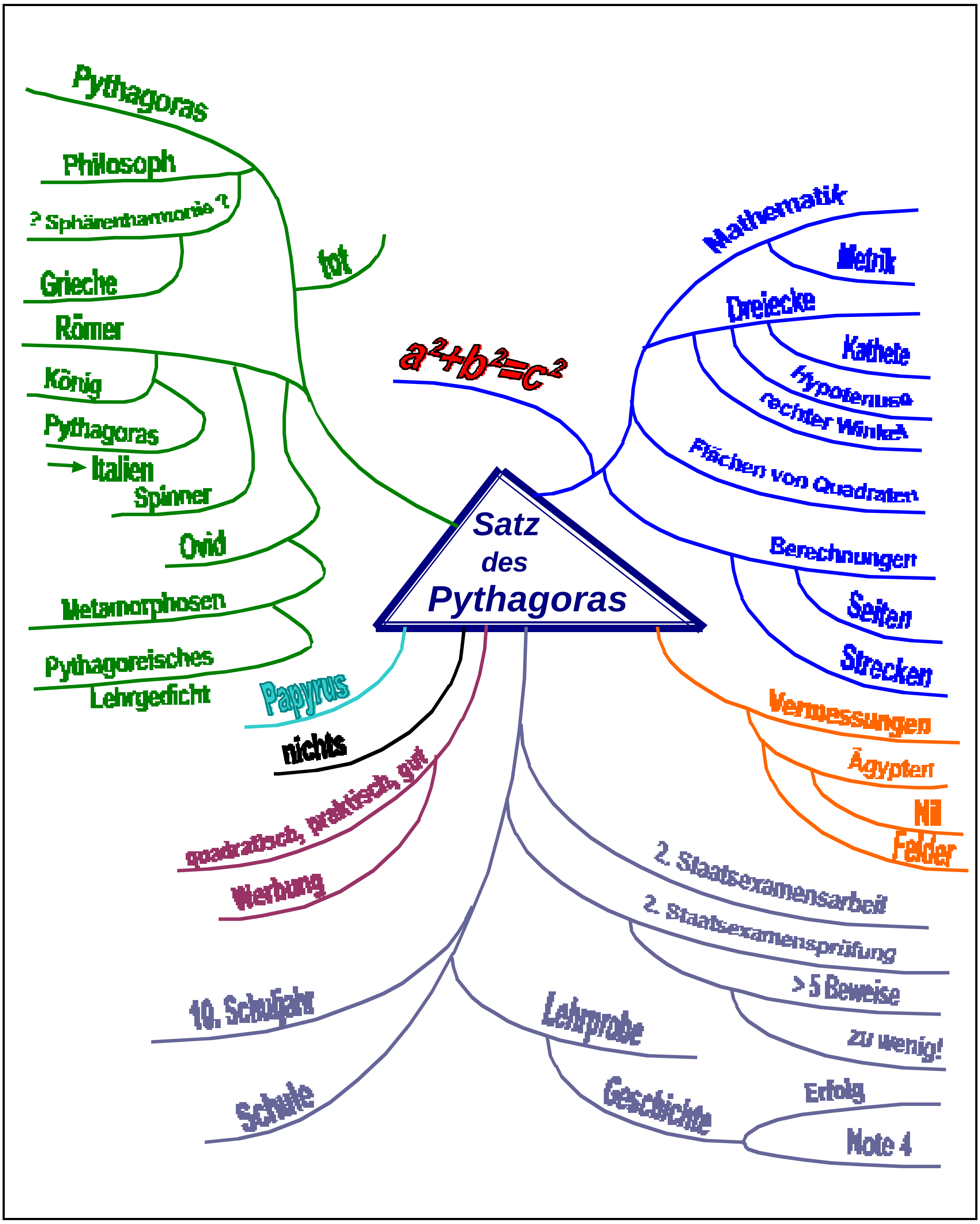
Ich habe den Schülern eine Geschichte erzählt. Die ging so: „Es war einmal ein König, der lebte auf einem Grundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks hatte. An dieses Grundstück grenzten drei quadratische Waldflächen. Der König hatte zwei Söhne und wollte, dass die Waldflächen zu gleichen Teilen nach seinem Tode auf die beiden Söhne aufgeteilt werden. Zusammenhängende Waldflächen sollten möglichst nicht geteilt werden. Somit beauftragte er die Hofmathematiker mit der Lösung des Problems.“

Die Schüler haben sich sehr aktiv mit der Aufgabe auseinandergesetzt, sie haben Flächen ausgeschnitten, geteilt, zusammengelegt, und waren voll bei der Sache. Es hat ihnen Spaß gemacht und sie sind selber auf die Lösung des Problems gekommen. Die Geschichte half ihnen, den Satz des Pythagoras gut zu behalten. Sie kannten diesen Satz auch viel später und haben sich auch immer wieder an die Geschichte erinnert. Mein Fachleiter hat mir für die Stunde allerdings eine 4 gegeben, mit der Begründung, Märchen seien unpassend für einen Unterricht in einer neunten Klasse. Ich erzähle die Geschichte dennoch immer wieder im Unterricht und immer mit gutem Erfolg.

In der folgenden Abbildung 3 sind die gegebenen Antworten in der graphischen Darstellungsform einer Mind Map[1] zusammengefasst.

[1] Zu Mind Maps vgl. Abschnitte 4.1.1.6 und 4.1.2.1.

Abbildung 3: Mind Map zum Satz des Pythagoras – Ergebnis einer Befragung



3.3 Innermathematische Vernetzungen

Die Umfrage zum Satz des Pythagoras (Abschnitt 3.2) zeigt, wie vielseitig ein mathematisches Objekt im Bewusstsein von Menschen vernetzt sein kann. Dabei bestehen Anbindungen sowohl an mathematische Knoten (Objekte) als auch an nichtmathematische Knoten. Von heuristischem Interesse sind hier einerseits diese assoziierten Objekte wie Gegenstandsbereiche und andererseits die jeweilige Relation, die den Beziehungszusammenhang konstituiert. Dieses Kapitel beschränkt sich zunächst auf den innermathematischen Bereich.

Im Abschnitt 3.2 werden mit dem Satz des Pythagoras folgende Objekte aus dem innermathematischen Bereich in Verbindung gebracht:

1. $a^2 + b^2 = c^2$ (1, 19, 29),
2. rechtwinklige Dreiecke (2, 21, 23),
3. Hypotenuse (3, 21), Katheten (22),
4. Flächen von Quadraten (6),
5. Beweise (15),
6. Metrik, Abstandsberechnung (23),
7. Seiten und Strecken berechnen (4),
   Diagonalen und andere Linien von räumlichen Körpern berechnen (10-11), ferner
8. eine mathematische Problemstellung, als Geschichte verpackt (43-51).

Es wird nun der Frage nachgegangen, in welcher Relation diese Knoten direkt oder indirekt mit dem Satz des Pythagoras stehen:

1. $a^2 + b^2 = c^2$ ist eine Aussageform, eine Algebraisierung des Satzes des Pythagoras, wobei a und b die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnen und c die Länge der Hypotenuse dieses Dreiecks. Somit ist der Satz des Pythagoras eine Interpretation der Aussageform $a^2 + b^2 = c^2$. In diesem Sinne entsprechen die mathematischen Objekte „$a^2 + b^2 = c^2$“ und „Satz des Pythagoras“ einander, wobei das eine Objekt aus dem anderen durch Modellierung hervorgeht.
   Der vorliegende Beziehungszusammenhang kann demnach durch die Relation „entspricht“ (im oben beschriebenen Sinne) oder „ist eine Modellierung von“ konstituiert sein.

2. Der Satz des Pythagoras gilt nur für rechtwinklige Dreiecke; er kann unter der (notwendigen und hinreichenden) Voraussetzung, dass ein Dreieck rechtwinklig ist, hergeleitet werden. Gilt umgekehrt für ein Dreieck der Satz des Pythagoras, so kann man daraus ableiten, dass das Dreieck rechtwinklig ist.
   Die Beziehung zwischen rechtwinkligen Dreiecken und dem Satz des Pythagoras kann demnach als logischer Schluss („$\Rightarrow$" bzw. „$\Leftarrow$") von einer Aussage auf eine andere charakterisiert werden; sprachlich lässt sich die Relation durch „daraus folgt" bzw. „ist herleitbar aus" umschreiben.

3. Hypotenuse und Katheten sind Bestandteile eines rechtwinkligen Dreiecks und auch Teile der Quadrate, die im Satz des Pythagoras betrachtet werden.
   Es handelt sich hierbei um die Relation „ist ein Teil von".
   Diese Teile-Ganzes-Relation lässt sich, fasst man das Ganze als Menge T seiner Teile auf, als Teilmengenbeziehung „$\subset$" auf der Potenzmenge von T in der Boolschen Algebra interpretieren.

4. Flächen von Quadraten sind Elemente oder Teile der Aussage des Satzes des Pythagoras.
   Somit kann die Relation abermals durch „ist ein Teil von" umschrieben werden. Ähnlich wie unter 3. lässt sich diese Relation auf eine Teilmengenbeziehung „$\subset$" zurückführen.

5. Ein mathematischer Beweis zu einem Satz zeigt, dass dieser Satz gültig ist; er steht zu dem Satz in der Relation „zeigt die Gültigkeit von", „beweist".
   Umgekehrt steht der Satz des Pythagoras mit jedem seiner Beweise in der Relation „wird bewiesen durch".
   Da jeder Beweis jeweils nur einen speziellen Satz zeigt und somit diesem Satz anhängig ist, kann hier auch eine allgemeinere Relation der Zugehörigkeit („gehört zu") formuliert werden.

6. Der Satz des Pythagoras (in seiner algebraisierten Form) wird für Abstandsberechnungen angewandt, steht also zu diesen in der Relation „wird angewandt für".

7. Der Satz des Pythagoras (in seiner algebraisierten Form) wird für die Berechnung von Längen angewandt; dieser Beziehung liegt abermals die Relation „wird angewandt für" zugrunde.

8. Im Satz des Pythagoras wird die Lösung des hier gestellten Problems formuliert; die Relation kann also lauten „ist die Lösung von".
   Da zu jeder Problemstellung oder Aufgabe deren Lösungen (sofern vorhanden) gehören, kann die Relation auch allgemeiner als Zugehörigkeit („gehört zu") gewertet werden.

Die Relationen unter 2. bis 5. und 8. sind durch fachsystematische Aspekte begründet, die Relationen unter 1., 6. und 7. dienen Anwendungszwecken. Ebenso werden Relationen, die zwischen mathematischen Objekten des Schulstoffes bestehen können, also *schulrelevante innermathematische Vernetzungen*, allgemein zum einen durch den Aufbau der Mathematik, also die Fachsystematik, bestimmt und zum anderen durch verschiedene Anwendungsbezüge. Damit werden zwei Kategorien schulrelevanter Vernetzungen auf mathematischen Objekten definiert: die *fachsystematische Vernetzung* und die *anwendungsbezogene Vernetzung*.

Einzelne Unterkategorien dieser schulrelevanten Vernetzungen werden in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 herausgestellt und durch Beispiele belegt.

Die hier vorgenommene Kategorisierung innermathematischer Vernetzungen bezieht sich dabei sowohl auf Vernetzungen im Schulstoff Mathematik als auch auf Vernetzungen auf kognitiver Ebene von Individuen. Zugrunde liegen folgende Überlegungen: Die Vernetzungen im Stoffgebiet der Mathematik spiegeln objektivierte Wissensstrukturen des menschlichen Geistes wider. Bei allen Unterschieden, die die Wissensstrukturen einzelner Individuen aufweisen, zeigt sich doch unter der Voraussetzung des Vorhandenseins gleicher Wissensbausteine, dass diese von Menschen in ähnlicher Weise in Beziehung zueinander gesetzt werden und dass Menschen in charakteristischer Weise Gedanken aneinander reihen. Es besteht ein gewisser Konsens über Mathematik in ihrer Beziehungshaltigkeit und logisches Denken. *Vernetzungen mathematischer Objekte im menschlichen Geist* auf der Basis einer breiten allgemeinen Übereinstimmung entsprechen daher den *Vernetzungen im Stoffgebiet der Mathematik*, denn die Mathematik ist ein Produkt des menschlichen Geistes; sie handelt von Ideen in unseren Köpfen samt ihrer Beziehungen. Die Ordnungsstruktur mathematischer Objekte im menschlichen Geist spiegelt sich im fachsystematischen Aufbau von Mathematik wider; die Abläufe beim mathematischen Denken bestimmen, wie mathematische Objekte prozesshaft vernetzt werden. Selbst wenn man entsprechend einer platonistischen Sichtweise annimmt, dass es eine externe, vom menschlichen Geist unabhängige, mathematische Realität gibt, die es für Mathematiker zu entdecken gilt, so ist doch die Mathematik, die wir kennen und mit der wir arbeiten, ein Konstrukt des menschlichen Gehirns. Vernetzungen, die auf der kognitiven Ebene eines Individuums durch Mathematikunterricht hervorgerufen werden, sind somit subjektiv gefärbte Teile von objektiven Wissensstrukturen, den Vernetzungen im Unterrichtsstoff Mathematik.

Vernetzungen zwischen schulrelevanten mathematischen Objekten lassen sich daher auf der Ebene des Unterrichtsstoffes und auf kognitiver Ebene von Individuen in gleicher Weise kategorisieren.

3.3.1 Unterkategorien der fachsystematischen Vernetzung

Die Relationen, die durch die *Fachsystematik* gegeben sind, setzen mathematische Objekte aufgrund verschiedener Aspekte in Beziehung zueinander. So gibt es u.a. Relationen, die der Mathematik verschiedene hierarchische Strukturen verleihen, eine Relation, die dem deduktiven Gerüst der Mathematik entspricht und eine Relation, der die systematisierende Darstellung der Mathematik durch BOURBAKI zugrunde liegt (vgl. auch GRIESEL & POSTEL, 1992, S. 370-371[1]). Durch diese Relationen werden Unterkategorien der fachsystematischen Vernetzung definiert.

Hierarchische Strukturen werden durch *Ordnungsrelationen*[2] oder *strenge Ordnungsrelationen*[3] mit folgender Festlegung bedingt: Steht ein Objekt a in der Relation $\subset$ bzw. $\subseteq$ zu einem von a verschiedenen Objekt b ($a \subset b$ bzw. $a \subseteq b$), so gehört das Objekt b einer anderen Hierarchiestufe an als das Objekt a. Graphisch kann man vereinbaren, dass dann b in der Zeichenebene oberhalb von a zu zeichnen ist[4], was zu einer vertikalen Anordnung von Hierarchieebenen führt. Üblich sind

[1] Hier wird der Aufbau der Mathematik aus drei Blickwinkeln beschrieben: Zum ersten wird auf die Einteilung der Mathematik in verschiedene Inhaltsbereiche/Gebiete eingegangen, zum zweiten auf die Systematisierung der Mathematik durch BOURBAKI und zum dritten wird die Mathematik als deduktive Wissenschaft beschrieben.

[2] Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $\subseteq$ von $M \times M$ heißt *Ordnungsrelation*, wenn $\subseteq$ reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. $(M; \subseteq)$ heißt *geordnete Menge*. (Vgl. DTV-ATLAS ZUR MATHEMATIK, Band 1, S. 43).

[3] Sei M eine Menge. Eine Teilmenge $\subset$ von $M \times M$ heißt *strenge Ordnungsrelation*, wenn $\subset$ asymmetrisch und transitiv ist. $(M; \subset)$ heißt streng *geordnete Menge*. (Vgl. DTV-ATLAS ZUR MATHEMATIK, Band 1, S. 43).

[4] Die Darstellung von Ordnungsstrukturen endlicher Mengen mittels sog. Ordnungsdiagramme (Hasse-Diagramme) erfolgt mit dieser Vereinbarung und der Zusatzvereinbarung, dass b nicht mehr mit a verbunden wird, wenn b über andere Punkte mit a verbunden ist (Transitivität), wodurch die Fülle der Linien reduziert ist. (Vgl. DTV-ATLAS ZUR MATHEMATIK, Band 1, S. 43).

auch eine horizontale Anordnung von Hierarchieebenen (bei einer Vereinbarung, dass b rechts von a zu zeichnen ist) oder eine radiale Anordnung von Hierarchieebenen (bei einer Vereinbarung, dass a mehr zur Mitte der Zeichenebene und b mehr zum Rand der Zeichenebene zu zeichnen ist). Die Graphen der strengen Ordnungsrelationen sind stets gerichtete Graphen (dies folgt direkt aus der Eigenschaft der Asymmetrie).

Eine hierarchische Struktur erhält die Mathematik aufgrund ihrer *Einteilung in* einzelne *Inhaltsbereiche*. Bezogen auf die Schulmathematik sind dies die Gebiete Analysis, Lineare Algebra/Geometrie und Stochastik (in der Sekundarstufe II) bzw. Aufbau des Zahlensystems, Rechnen mit den jeweiligen Zahlen, Algebra und Geometrie (in der Sekundarstufe I), die jeweils in weitere Teilbereiche untergliedert sind. Auf der Menge der Begriffe, die für diese Inhaltsbereiche stehen, ist eine fachsystematische Vernetzung durch die strenge Ordnungsrelation „ist ein Teilbereich von“ gegeben. (Z.B. „Differentialrechnung“ „ist ein Teilbereich von“ „Analysis“.)

Die *Zuordnung* einzelner mathematischer Objekte *zu Inhaltsbereichen* gemäß der strengen Ordnungsrelation „ist ein Objekt aus dem Bereich“ bestimmt ebenfalls eine fachsystematische Vernetzung. (Z.B. „Dreieck“ „ist ein Objekt aus dem Bereich“ „Geometrie“.)

Auf der Menge aller Begriffe der Schulmathematik führt die *„Oberbegriff-Relation“* („ist ein Oberbegriff von“) als strenge Ordnungsrelation zu einer hierarchischen Struktur. Dasselbe gilt für ihre Umkehrrelation, die *„Unterbegriff-Relation“* („ist ein Unterbegriff von“). (Z.B. „SSS“ „ist ein Unterbegriff von“ „Kongruenzsatz für Dreiecke“, „Kongruenzsatz für Dreiecke“ „ist ein Oberbegriff von“ „SSS“; „rechtwinkliges Dreieck“ „ist ein Unterbegriff von“ „Dreieck“, „Dreieck“ „ist ein Oberbegriff von“ „rechtwinkliges Dreieck“.)

Auch die *„Obermengen-Relation“* („ist eine Obermenge von“) bzw. ihre Umkehrrelation, die *„Untermengen-Relation“* („ist eine Untermenge von“), durch welche Mengen mathematischer Objekte in Beziehung zueinander gesetzt werden, bestimmen eine Ordnung innerhalb der Schulmathematik. (Z.B. „Menge aller reellen Zahlen“ „ist eine Obermenge von“ „Menge aller rationalen Zahlen“, „Menge aller rationalen Zahlen“ „ist eine Untermenge von“ „Menge aller reellen Zahlen“; „Menge aller Rechtecke“ „ist eine Obermenge von“ „Menge aller Quadrate“, „Menge aller Quadrate“ „ist eine Untermenge von“ „Menge aller Rechtecke“.)

Ähnlich tragen auch die *„Teile-Ganzes-Beziehung“* (strenge Ordnungsrelation „ist ein Teil von“) und ihre Umkehrrelation „hat als ein Bestandteil“ auf der Menge schulrelevanter mathematischer Objekte zur Strukturierung der Schulmathematik bei. (Z.B. „Schenkel“ „ist ein Teil von“ „Winkel“, „Winkel“ „hat als ein Bestandteil“ „Schenkel“; oder auch die o.a. Beispiele unter 3. und 4. zum Satz des Pythagoras.)

Weitere systematisierende Relationen ergeben sich aufgrund von *Kategorisierungen, Klasseneinteilungen, Fallunterscheidungen*. Hier werden Mengen mathematischer Objekte mit bestimmten ihrer Teilmengen (Kategorien, Klassen, Fällen) in Beziehung zueinander gesetzt gemäß der Relationen „hat als eine Kategorie/eine Klasse/einen möglichen Fall“ bzw. „ist eine Kategorie/eine Klasse/ein Fall von“. (Z.B. „Menge der Winkel“ „hat als eine (Winkel)klasse“ „Menge der rechten Winkel“, „Menge der rechten Winkel“ „ist eine (Winkel)klasse von“ „Menge der Winkel“[1].)

Alle bislang genannten fachsystematischen Vernetzungen sind letztlich verschiedene Ausprägungen der Teilmengenrelationen „$\subseteq$“ oder „$\subset$“ bzw. ihrer Umkehrungen „$\supseteq$“ oder „$\supset$“.

Eine weitere fachsystematische Vernetzung ist die *„Merkmalsvernetzung“*, durch die mathematische Objekte und ihre Merkmale (Eigenschaften, Charakteristika) miteinander verbunden sind. Die entsprechende Relation lautet: „ist ein Merkmal / eine Eigenschaft von“, ihre Umkehrrelation: „hat als ein Merkmal / eine Eigenschaft“. (Z.B. „gleichschenkliges Dreieck“ „hat als eine Eigenschaft“ „2 gleich lange Seiten“, „2 gleich lange Seiten“ „ist eine Eigenschaft von“ „gleichschenkliges Dreieck“.)

Auch diese Relation lässt sich, wie die weiter oben genannten, mathematisch als *Teilmengenrelation* auffassen, denn betrachtet man stellvertretend für ein Objekt die Menge aller seiner Eigenschaften, so bilden ausgezeichnete Eigenschaften des Objekts eine Teilmenge dieser Menge aller Eigenschaften des Objekts.

Die Anbindung von Beweisen an den jeweiligen Satz, der durch sie bewiesen wird (siehe das o.a. Beispiel unter 5.), oder von Lösungen eines mathematischen Problems/einer mathematischen Aufgabe an dieses Problem/diese Aufgabe (siehe das o.a. Beispiel unter 8.) sind Beziehungen einer weiteren Vernetzung, der *„Zugehörigkeitsrelation“* („gehört zu“). Sie ist u.a. zwischen der Menge der Beweise und der Menge der Sätze, die zum Unterrichtsstoff Mathematik gehören, bzw. zwischen der Menge von Lösungen zu Problemen/Aufgaben und der Menge der Probleme/Aufgaben aus dem Unterrichtsstoff definiert. Die darstellenden Graphen sind gerichtet.

In der Mathematik werden aus den Axiomen, die einer Theorie zugrunde liegen, Sätze gefolgert, und aus bereits bewiesenen Sätzen und Axiomen weitere Sätze. Dies führt zu dem sog. *deduktiven Aufbau* der Mathematik. Zusammenhänge, in die mathematische Objekte entsprechend dem deduktiven Gerüst der Mathematik

[1] Vgl. z.B. DTV-ATLAS ZUR MATHEMATIK, S. 149.

gestellt werden, kennzeichnen weitere fachsystematische Vernetzungen. Sie sind auf der Menge aller Aussagen definiert, die Relationen lauten: „daraus folgt“ / „$\Rightarrow$“ bzw. „ist herleitbar aus“ / „$\Leftarrow$“. (Ein Beispiel für eine Kante dieser Relation ist weiter oben unter 2. zu finden.) In der Schule erfahren Schüler nur Bruchstücke des deduktiven Gerüstes der Mathematik.

Eine maßgebliche systematisierende Darstellung der Mathematik wurde durch *BOURBAKI* vorgenommen (BOURBAKI, 1950; vgl. auch die Anmerkungen in Abschnitt 2.1). Das Gesamtgebäude der Mathematik wird hier nach vereinheitlichenden Gesichtspunkten dargestellt. Als solche dienen in den einzelnen Gebieten auftretende *Strukturen*. Es werden drei Grundstrukturen herausgestellt, die algebraischen Strukturen, die topologischen Strukturen und die Ordnungsstrukturen; aus ihnen werden weitere Mischstrukturen gebildet (vgl. z.B. DTV-ATLAS ZUR MATHEMATIK, S. 37).[1]

Die Strukturen sind nicht an bestimmte mathematische Inhalte gebunden. So kann man die Struktur der Gruppe sowohl in der Arithmetik (Addition reeller Zahlen) als auch in der Linearen Algebra (Addition von Vektoren) antreffen.

Die Verbindung bestimmter mathematischer Inhalte mit der zugrunde liegenden Struktur ist eine fachsystematische Vernetzung. Des Weiteren ist die Verbindung unterschiedlicher mathematischer Inhalte aufgrund einer gemeinsamen Struktur eine fachsystematische Vernetzung. Diese Vernetzungen führen zu Querverbindungen zwischen den unterschiedlichen Gebieten der Mathematik. Sie werden allerdings im Schulunterricht kaum explizit angesprochen.

[1] Eine algebraische Struktur liegt vor, wenn auf einer Menge eine oder mehrere (innere, äußere) Verknüpfungen erklärt sind, wie etwa Addition und Multiplikation in Zahlenmengen oder die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren. Beispiele für algebraische Strukturen sind: Halbgruppe, Gruppe, Ring, Körper, Modul, Vektorraum.

Eine topologische Struktur liegt vor, wenn in einer Menge ein System von Teilmengen mit gewissen Eigenschaften ausgezeichnet wird. Eine Menge mit einer topologischen Struktur heißt topologischer Raum.

Eine Ordnungsstruktur liegt vor, wenn auf einer Menge eine sog. Ordnungsrelation definiert ist. Im weitesten Sinne bedeutet dies, dass es in dieser Menge nach bestimmten Regeln vergleichbare Elemente gibt, wie das z.B. bei Zahlenmengen (außer $\mathbb{C}$) durch die Relation „$\leq$ “ geschieht. Zu den Ordnungsstrukturen zählen: geordnete, linear geordnete, induktiv geordnete, wohlgeordnete Menge. (Vgl. z.B. DTV-ATLAS ZUR MATHEMATIK, S. 37).

3.3.2 Unterkategorien der anwendungsbezogenen Vernetzung

Die Anwendung mathematischer Objekte zur Lösung von Aufgaben oder Problemen führt zur *anwendungsbezogenen Vernetzung*. So werden Aufgaben oder Probleme mit Modellen, Sätzen, Regeln oder Algorithmen, die zu ihrer Lösung geeignet sind, verbunden. Auf entsprechende Unterkategorien der anwendungsbezogenen Vernetzung wird nachfolgend eingegangen.

Eine Unterkategorie der anwendungsbezogenen Vernetzung ergibt sich durch die *Anwendung von Modellen*.

In der Mathematik versteht man unter einem *Modell* (für ein Axiomensystem) jede Interpretation der Grundbegriffe des Axiomensystems, durch die die Axiome (Aussageformen) in wahre Aussagen übergehen.[1] Zu einem Axiomensystem kann es mehrere isomorphe Modelle geben; verschiedene Interpretationen desselben Grundbegriffs entsprechen dabei einander, ebenso die Aussagen, die innerhalb unterschiedlicher Modelle gewonnen wurden. So können z.B. die in einem Modell als reelle Zahlen interpretierten Elemente in einem anderen (geometrischen) Modell als Strecken interpretiert werden, Produkte reeller Zahlen als Rechtecksflächen, Zahlenpaare als Punkte, bestimmte Gleichungen als Geraden, oder der Satz des Pythagoras als algebraische Gleichung (vgl. obiges Beispiel unter 1.).

Während in der mathematischen Logik nur konkrete Interpretationen für Axiomensysteme als Modelle bezeichnet werden, ist der Modellbegriff in den empirischen Wissenschaften umfassender (vgl. WEBER, 1980, S. 57). Hier werden auch, und vor allem, axiomatische Theorien als Formalisierungen faktischer Theorien als Modelle (bei WEBER: „Strukturmodelle“) bezeichnet. Diesem erweiterten Modellbegriff möchte ich mich im Folgenden anschließen, weil die Anwendung einer Struktur (axiomatischen Theorie) vom Prinzip her (vgl. unten) der Anwendung eines anderen Modells gleichkommt.

Mathematische Aufgaben oder Probleme, formuliert in der Sprache eines Modells, lassen sich oft durch Übersetzung in ein anderes Modell („*Modellierung*“) leichter lösen.[2] So gibt es geometrische Probleme, die sich nach Übersetzung in ein algebraisches Modell („*Algebraisierung*“) algebraisch leichter lösen lassen als

[1] Zum Begriff Modell für ein Axiomensystem vgl. z.B. FISCHER KOLLEG MATHEMATIK (S. 14), herausgegeben von JUNG und BRAUNER, oder Fischer Lexikon Mathematik 1 (S. 285), herausgegeben von BEHNKE und TIETZ.

[2] Beispiele findet man u.a. bei KIEßWETTER, 1994; KIEßWETTER & REHLICH, 1994.

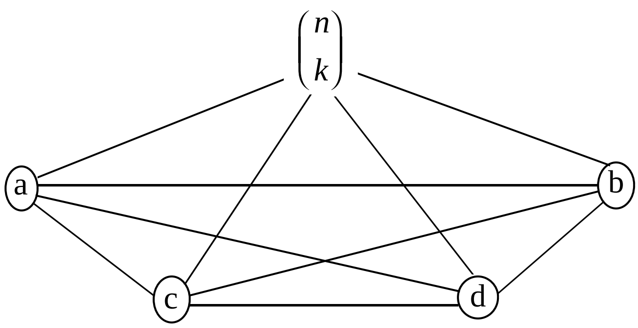
geometrisch; andererseits lassen sich auch viele algebraische Probleme durch Übersetzung in die Geometrie („*Geometrisierung*“) leichter lösen.

Die Entsprechung eines Problems bzw. einer Aufgabe in einem anderen Modell wird „*Modell des Problems*“ bzw. „*Modell der Aufgabe*“ genannt. Probleme oder Aufgaben, ihre Elemente, sowie allgemein mathematische Objekte in der Formulierung eines Modells stehen mit ihren Entsprechungen in anderen Modellen in Relation zueinander (Relation: „entspricht“, „ist eine Modellierung von“). Diese Relation wird im Folgenden „*Modellvernetzung*“ genannt.[1] Sie ist eine symmetrische Relation, denn jede Übersetzung von einem Modell in ein anderes erlaubt auch eine Rückübersetzung.

Als ein Beispiel für ein Konzept, das vielfältige Modellierungen (bei KIEßWETTER: Repräsentationen) erlaubt, gibt KIEßWETTER (1994, S. 43) den Ausdruck $\binom{n}{k}$ an, der u.a. für folgendes stehen kann:

a) Lottoschein: Anzahl der Möglichkeiten von n Feldern k anzukreuzen,
b) Dualzahlen: Anzahl der höchstens n-stelligen Dualzahlen, bei denen an genau k Stellen eine 1 steht,
c) Teilmengen: Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge,
d) Binompotenzen: Anzahl der Summanden $a^k b^{n-k}$ beim Ausmultiplizieren von $(a+b)^n$.

Die Modellvernetzung (bei KIEßWETTER: repräsentative Vernetzung), die sich hier ergibt, ist in folgendem Schema dargestellt. Dabei kennzeichnen die Knoten a bis d die oben unter a) bis d) angegebenen Repräsentationen von $\binom{n}{k}$, jede Kante zeigt an, dass die durch sie verbundenen Knotenpunkte vernetzt sind. Da die Modellvernetzung eine symmetrische Relation ist, sind die eingezeichneten Kanten ungerichtet.



[1] KIEßWETTER (1994) nennt verschiedene Interpretationen einer mathematischen Struktur oder eines mathematischen Zusammenhangs „Repräsentationen“ dieser Struktur bzw. dieses Zusammenhangs und deren Vernetzung „repräsentative Vernetzung“.

Eine weitere Unterkategorie der anwendungsbezogenen Vernetzung wird durch die *Anwendung mathematischer Sätze* zur Lösung mathematischer Probleme erklärt. Sie ist gekennzeichnet durch die Anbindung von Sätzen an Probleme, die mit ihrer Hilfe gelöst werden können (Relation: „kann gelöst werden unter Anwendung des (Satzes)“). So wird z.B. für die Berechnung der Diagonalen in einem Rechteck mit bekannten Seitenlängen der Satz des Pythagoras angewandt, das Berechnungsproblem ist dadurch mit dem Satz des Pythagoras vernetzt. Diese Vernetzungskategorie wird im Folgenden *„Theoremvernetzung“* genannt. Sie ist eine Relation zwischen zwei disjunkten Knotenmengen, einer Menge von mathematischen Problemen und einer Menge von mathematischen Sätzen, und wird somit durch einen bipartiten Graphen[1] beschrieben.

Die Umkehrrelation ordnet mathematischen Sätzen jeweils Probleme zu, die mit ihrer Hilfe gelöst werden können (Relation: „wird angewandt für“). Beispiele sind oben unter 6. und 7. genannt.

Mathematische Aufgaben können oft unter *Anwendung von Regeln* gelöst werden. Dabei werden jeweils Aufgaben eines bestimmten Typs mit einer Regel in Verbindung gebracht, die zu ihrer Lösung geeignet ist. Hieraus ergibt sich eine Vernetzung, die *„Regelvernetzung“*, von mathematischen Aufgaben bzw. Aufgabentypen mit Regeln gemäß der Relation „kann gelöst werden unter Anwendung der Regel“. (Z.B. „Berechne $3 \div \frac{6}{11}$“ „kann gelöst werden unter Anwendung der Regel“ „Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man die Zahl mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert“.)

Für viele Klassen strukturell verwandter mathematischer Aufgaben gibt es *Lösungsverfahren bzw. Algorithmen*, mit deren Hilfe diese Aufgaben in einer standardisierten Weise gelöst werden können. Dabei gehören zu mathematischen Lösungsverfahren sowohl graphische als auch rechnerische Verfahren.

Die Verbindung mathematischer Aufgaben oder Aufgabentypen mit Lösungsverfahren bzw. Algorithmen, die zu ihrer Lösung angewandt werden können, definiert eine Vernetzung gemäß der Relation „kann gelöst werden unter Anwendung des (Lösungsverfahrens / Algorithmus)“. (z.B. „LGS“ „kann gelöst werden unter Anwendung des“ „Gauß-Algorithmus“, „$\int_1^2 xe^x dx$“ „kann gelöst werden unter Anwendung des Verfahrens“ „partielle Integration“.) Diese Vernetzung wird im Folgenden *„Algorithmusvernetzung“* genannt.

[1] Zur Definition von bipartiten Graphen siehe Abschnitt 3.1.

Die Umkehrung einer Algorithmusvernetzung („ist ein Algorithmus/Lösungsverfahren für“) ordnet Algorithmen/Lösungsverfahren jeweils Aufgaben/Aufgabentypen zu, die mit ihrer Hilfe gelöst werden können.

Regeln und Lösungsverfahren bzw. Algorithmen lassen sich als spezielle mathematische Sätze auffassen. *Mit dieser Interpretation sind die Regelvernetzung und die Algorithmusvernetzung nur Unterkategorien der umfassenden Theoremvernetzung.*

Wird ein Lösungsverfahren bzw. Algorithmus zur Lösung einer Aufgabe angewandt, so werden einzelne Verfahrensschritte in einer festen Reihenfolge durchgeführt. Diese Verfahrensschritte stehen gemäß ihrer *Abfolge im Algorithmus* in einer Ordnungsrelation zueinander, wodurch noch eine anwendungsbezogene Vernetzungskategorie, die *„Ablaufvernetzung“*, charakterisiert ist. (Relation „wird gefolgt von“ (in der Literatur auch als „Vorgänger-Nachfolger-Relation“ bezeichnet; vgl. z.B. JÜNGST, 1992, S. 35) auf der Menge der Verfahrensschritte einer Lösungsmethode / Menge der Anweisungen eines Algorithmus.)

Die aufgeführten Vernetzungskategorien mathematischer Objekte des Unterrichtsstoffes Mathematik erheben nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, es sind damit aber wesentliche Kategorien von Vernetzungen, die im Mathematikunterricht relevant sind, erfasst.

3.4 Vernetzung zwischen mathematischen Knoten und nichtmathematischen Knoten

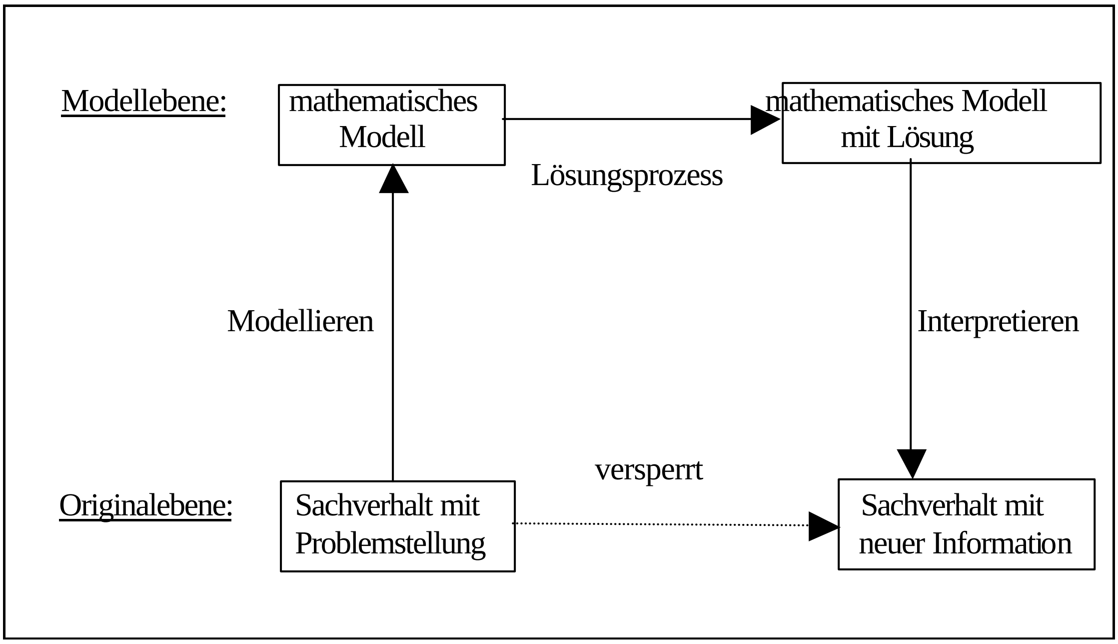
In der Umfrage zum Satz des Pythagoras (Kapitel 3.2) findet man neben Bezügen zu mathematischen Begriffen (siehe Kapitel 3.3) auch verschiedene Verbindungen zu nichtmathematischen Knoten. Hierzu gehören außermathematische Anwendungen (7, 20, 43-50), z.B. „Vermessung des Nils“, „Felder in Ägypten“, und Bezüge zur menschlichen Kulturlandschaft (7-8, 20, 24-26, 31-39, 43-50), z.B. „Philosoph Pythagoras“, „Schokoladenwerbung“. Die Vernetzungsknoten entsprechen dabei jenen aus dem Unterrichtsstoff oder entstammen dem außerschulischen Erfahrungsbereich, wie im Falle der „Schokoladenwerbung“. Mathematische Objekte werden auf kognitiver Ebene aber auch mit weiteren Inhalten ganz anderer Qualität vernetzt. So wird der in der Umfrage vorgegebene mathematische Begriff „Satz des Pythagoras“ auch mit bestimmten Situationen (5, 10-13, 27) und Erlebnissen (14-16, 41-61) in Verbindung gebracht. Emotionen werden ebenfalls mehr oder weniger explizit an den mathematischen Begriff geknüpft (9, 16-17, 58, 61). Schließlich wird auch zum ähnlich klingenden Begriff „Papyrus“ (28) eine Verbindung hergestellt. Die Vernetzungskomponente „$a^2 + b^2 = c^2$“ (1, 19, 29) kann nicht nur als ein algebraischer Ausdruck, also ein mathematisches Objekt, gewertet werden, sondern auch als ein Merksatz für den Satz des Pythagoras. Einen Hinweis hierauf liefert auch die Aussage der Person A (18-19): „Für Schüler heißt der Satz des Pythagoras immer $a^2 + b^2 = c^2$, egal wo der rechte Winkel liegt.“ Dies zeigt eine weitere Qualität von Vernetzungsknoten.

Somit lassen sich nun verschiedene Vernetzungskategorien für Verbindungen zwischen mathematischen Objekten (mathematischen Knoten, Menge M) und nichtmathematischen Inhalten (nichtmathematischen Knoten, Menge N) ableiten. Sie werden durch bipartite Graphen beschrieben, deren Kantenmengen Teilmengen von $M \times N \cup N \times M$ sind.

Hierbei sind zunächst außermathematische *Anwendungen* zu berücksichtigen. Dies sind reale Probleme, die sich mathematisch modellieren (mathematisieren) lassen, also homomorph in mathematischer Sprache formuliert werden können. In der Umfrage zum Satz des Pythagoras (3.2) wird „Vermessung des Nils“ (7) genannt, ferner „Felder in Ägypten“ - die unter Anwendung des Satzes von Pythagoras vermessen wurden - (20), sowie eine Problemstellung als Geschichte verpackt (43-50).

Durch *Modellierungen* (*Mathematisierungen*) außermathematischer Problemstellungen erhält man mathematische Modelle der Probleme; diese gestatten oft einen vereinfachten Umgang mit der Wirklichkeit. Eine Problemlösung, die in der Modellebene gewonnen wurde, kann durch *Interpretieren* auf die Originalebene der Problemstellung übersetzt werden und führt zu neuer Information zum ursprünglichen Sachverhalt. Das Schema, das dem gesamten Problemlösungsprozess mittels mathematischer Modelle zugrunde liegt, ist in folgender Abbildung dargestellt. (vgl. ZAIS, Beiträge zum Mathematikunterricht 1995, S. 541)[1]:

Abbildung 4: Problemlösungsprozess mittels mathematischer Modelle



[1] Es handelt sich hierbei um eine stark vereinfachte Darstellung: Eine Mathematisierung komplexerer Probleme gelingt oft erst nach Vereinfachung der Problemstellung, z.B. durch zusätzliche einschränkende Vorgaben oder nach einer vorgeschalteten Modellbildung auf der Originalebene (vgl. dazu z.B. TIETZE, KLIKA & WOLPERS, 1997, S. 121ff; BLUM, 1985, S. 200ff; WEBER, 1980).

Bei diesem Prozess werden reale Phänomene in zweifacher Weise mit Mathematik verknüpft: Zum einen wird eine Problemstellung mit ihrem Modell in Beziehung gesetzt, zum anderen das Modell samt gewonnener Lösung mit dem ursprünglichen Sachverhalt samt neuer Information, die der Lösung entspricht. Dabei entsprechen Elemente der Originalebene solchen auf der Modellebene und umgekehrt, sie sind miteinander vernetzt.

Betrachten wir z.B. die in der Umfrage zum Satz des Pythagoras (Abschnitt 3.2) genannte Aussage „Felder in Ägypten“ (20). Hinter dieser Aussage steht die überlieferte Geschichte, dass Pythagoras auf einer Reise nach Ägypten dort Landvermesser beobachtete, die mit einem Knotenseil exakt rechtwinklige Felder abstecken konnten. Das verwendete Knotenseil war ein geschlossenes Seil, das in gleichmäßigen Abständen 12 Knoten besaß (vgl. z.B. KOULLEN, U. AITS & D. AITS, 1994). Die Problemstellung auf der Originalebene lautet: „Stecke rechtwinklige Flächen ab“. Das entsprechende Problem auf der mathematischen Modellebene lautet: „Konstruiere rechte Winkel“. Über diese Entsprechung sind die beiden Problemstellungen miteinander vernetzt. Auf der Modellebene kann eine Lösung wie folgt angegeben werden: „Konstruiere ein Dreieck mit den Seitenlängen 3LE, 4LE und 5LE. Dann ist der Winkel, der der Seite von 5LE gegenüberliegt, ein rechter Winkel.“ (Dies ist ein Spezialfall des Satzes des Pythagoras.) Auf der Originalebene wurde diese Aufgabe mit dem Knotenseil realisiert: Der Umfang des Dreiecks entspricht dem geschlossenen Seil, eine Strecke von 1LE entspricht einem Seilstück zwischen zwei Knoten, die drei Ecken des Dreiecks entsprechen drei der Knoten und zwar so, dass zwischen diesen auserwählten Knoten 3, 4 bzw. 5 Seilstücke, die jeweils von zwei Knoten begrenzt sind, liegen. Die Zirkelkonstruktion auf mathematischer Ebene wird durch das Spannen des Seils in der Originalebene realisiert. Der rechte Winkel im Dreieck der Modellebene entspricht auf Originalebene dem Winkel, der dem längsten (gespannten) Seilabschnitt gegenüberliegt. Auf diese Weise sind die einzelnen Elemente des mathematischen Modells mit ihren Entsprechungen im außermathematischen Sachverhalt vernetzt.

Bei einer Vernetzung, die außermathematische Sachverhalte bzw. Probleme und ihre mathematischen Modelle sowie einzelne Elemente eines außermathematischen Sachverhalts und ihre Entsprechungen in einem mathematischen Modell in Beziehung zueinander setzt, wird im Folgenden von „***Modellvernetzung***“ gesprochen (symmetrische Relation „entspricht“). Es wird hier die gleiche Bezeichnung gewählt, wie für die gleichartige Vernetzung im innermathematischen Bereich, die einander entsprechende Elemente unterschiedlicher Modelle in Relation zueinander setzt.

Im Abschnitt 3.2 wurde der Satz des Pythagoras auch mit mehreren kulturellen Aspekten in Verbindung gebracht. Der Begriff der *Kultur* bezieht sich auf alles, „was der Mensch als gesellschaftliches Wesen bzw. die Menschen aller Völker zu den verschiedensten Zeiten und in unterschiedlichster Weise produktiv bearbeitet oder gestalterisch hervorgebracht haben; dies im Widerstreit mit den zerstörerischen Potenzen, die der Menschheit eigen sind“ (MEYERS LEXIKON, 1995).

Somit ist Mathematik selbst ein Bestandteil der Kultur, mathematischen Objekten haften kulturelle Aspekte an. HERSH (1997, S. 11) betont:

> From the viewpoint of philosophy mathematics must be understood as a human activity, a social phenomenon, part of human culture, historically evolved, and intelligible only in a social context: I call this viewpoint ‚humanist’.

Die geschichtliche Entwicklung mathematischer Bereiche ist somit eingebettet in die allgemeine kulturelle Entwicklung[1] und damit eng mit dieser verknüpft; Anwendungen der Mathematik in frühen Zeiten aber auch in der modernen Technik stellen kulturelle Errungenschaften dar.

So wird in der Umfrage aus Kapitel 3.2 der mathematische Inhalt „Satz des Pythagoras“ mit dem Mathematiker und Philosophen Pythagoras in Verbindung gebracht (8, 24, 31ff.), oder mit einem Gedicht über Pythagoras, das „Pythagoreische Lehrgedicht“ in den „Metamorphosen“ von Ovid (33-34); ferner mit Anwendungen (Vermessung des Nils (7), Felder in Ägypten (20)), mit einer Geschichte (43-50) und mit der Schokoladenwerbung „Quadratisch. Praktisch. Gut.“ (25).

Die Relationen zwischen Mathematik und außermathematischer Kultur sind dabei sehr vielfältig. Entsprechend unterschiedlich können im Mathematikunterricht aufgezeigte Bezüge zur menschlichen Kulturlandschaft sein. Hierbei werden kulturelle Aspekte und mathematische Inhalte wechselseitig miteinander vernetzt („***Kulturvernetzung***“), die Relation lässt sich allgemein, wenn auch nicht sehr genau, durch „hat etwas zu tun mit“ umschreiben. Diese Relation darstellende Graphen sind bipartit; die Kanten verbinden jeweils Elemente zweier verschiedener Kulturlandschaften, der mathematischen und der außermathematischen, und sind aufgrund der jeweils wechselseitigen Vernetzung der Knoten ungerichtet.

[1] Als eine Konsequenz des Verständnisses von Mathematik als Kultur formuliert PREDIGER (2001, S. 129) die Forderung an die Mathematikdidaktik, dass „Mathematiklernende die Mathematik als Teilkultur unserer Gesamtkultur erfahren können“ sollten.

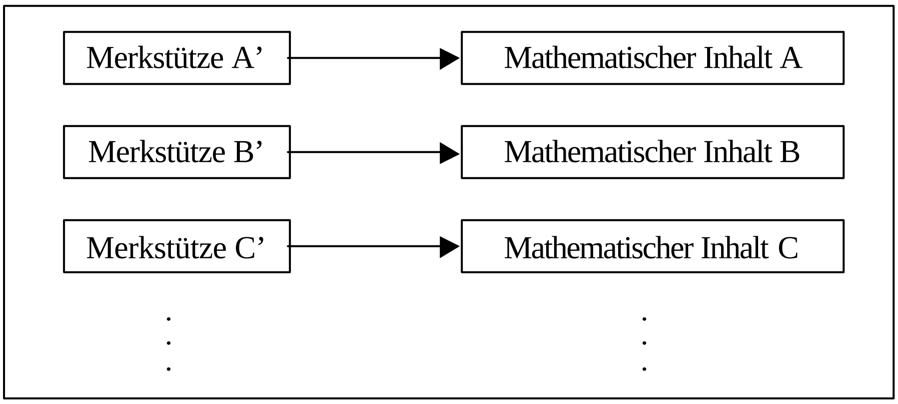
Eine weitere Kategorie von Vernetzungsknoten wird durch *Merkstützen* bestimmt. Im Abschnitt 3.2 kann der mehrmals erwähnte Ausdruck „$a^2 + b^2 = c^2$" (1, 19, 29) als Merkstütze für den Satz des Pythagoras gewertet werden; aber vielleicht auch die Geschichte zum Satz des Pythagoras (43-50), zumal Person J auch bemerkt: „Die Geschichte half ihnen, den Satz des Pythagoras gut zu behalten." (55-56). Der Spruch „Quadratisch. Praktisch. Gut." der Schokoladenwerbung (25) kann ebenfalls als Merkstütze dienen, vor allem, wenn man dabei das Bild der Schokoladenwerbung vor Augen hat (entnommen: BAPTIST, 1997, S. 26):

Eine Anbindung von Merkhilfen an mathematische Inhalte erleichtert deren Erinnern. Somit ist eine Vernetzung von Merkstützen mit mathematischen Objekten des Unterrichtsstoffes bedeutend und schulrelevant, sie wird als „***mnemotechnische***[1] ***Vernetzung***" definiert (Relation: „ist eine Merkstütze für"). Eine Merkhilfe kann z.B. eine „Eselsbrücke", ein Merksatz, ein Merkvers, ein Beispiel oder eine visuelle Merkhilfe (Bild, Symbol) sein. Sie kann im Unterricht zusammen mit einem

[1] Die *Mnemotechnik* ist die Gedächtniskunst, die Wissenschaft systematischen Erinnerns. Sie empfiehlt u.a. assoziative Merkstützen.

Lerninhalt dargeboten werden oder vom lernenden Individuum selbst konstruiert werden.

Graphen zur mnemotechnischen Vernetzung sind bipartit und aufgrund der Definition der entsprechenden Relation gerichtet:



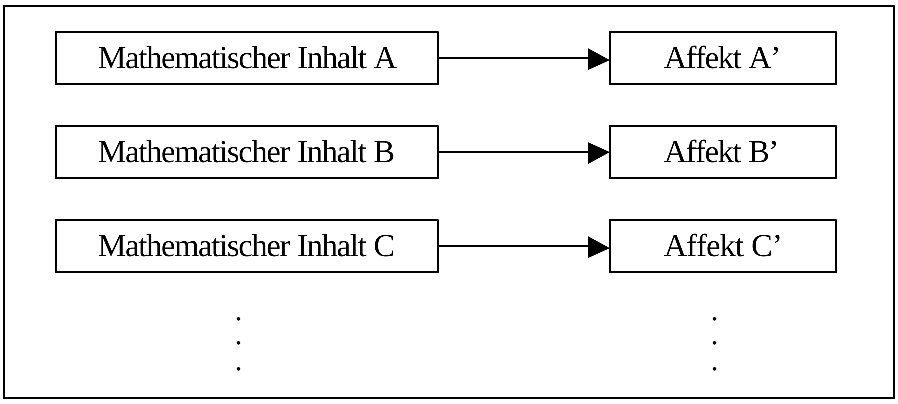
Anwendungen oder kulturelle Aspekte als Vernetzungsknoten, aber auch ein Teil der Merkstützen sind Bestandteile des Unterrichtsstoffs; sie sind auf stofflicher Ebene an mathematische Inhalte gekoppelt und werden auf kognitiver Ebene ebenso mit mathematischen Inhalten vernetzt. Die Umfrage aus Abschnitt 3.2 zeigt, dass im Bewusstsein von Menschen noch weitere, nicht dem Unterrichtsstoff entstammende, Verbindungen zwischen mathematischen Objekten und nichtmathematischen Inhalten vorhanden sind.

Hierzu gehören *Emotionen, Gefühle,* die an Lerninhalte gebunden werden. So sagt Schüler I in 3.2: „Hat etwas mit Mathe zu tun. Hab ich verdrängt.“ (9); in den Antworten der Erwachsenen wird der Satz des Pythagoras mit Situationen und Erlebnissen in Verbindung gebracht, an die bestimmte Emotionen geknüpft werden (Ärger über einen Prüfer (14-17), Ungerechtigkeitsempfinden (58-61), vielleicht auch ein wenig Stolz (61)).

TÖRNER (1997, S. 107) bemerkt:

> ...the cognitive net of mathematical contents overlaps the emotional net. ... single mathematical objects, i.e. the theorems, the methods, the formulas, the terms etc. have an emotional loading.

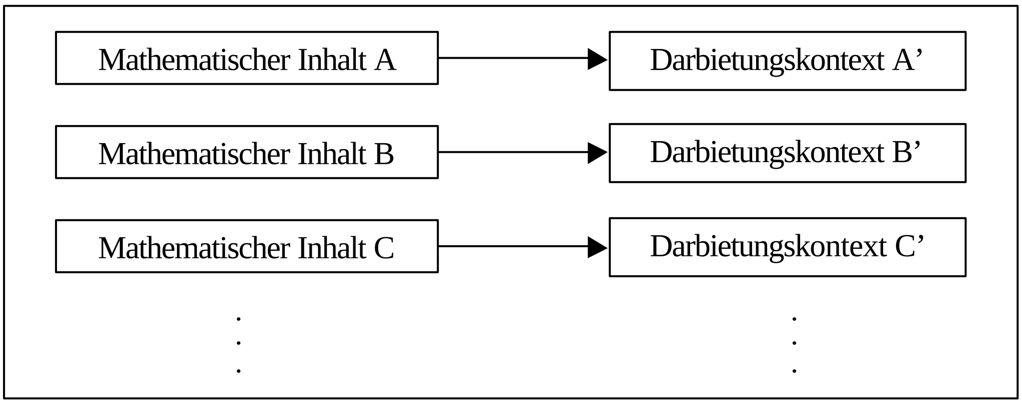
Die Anbindung von Emotionen an mathematische Inhalte (Verbindung mathematischer Inhalte mit affektiven Komponenten) definiert somit eine Vernetzungskategorie, die „***Affektvernetzung***“. Entsprechende darstellende Graphen sind bipartit und gerichtet:



Im Abschnitt 3.2 werden auch verschiedene Situationen und Erlebnisse mit dem vorgegebenen mathematischen Inhalt, dem Satz des Pythagoras, in Verbindung gebracht. Hierzu gehören „Zehntes Schuljahr“ (5), die Aussage des Schülers J: „Wir mussten Diagonalen und andere Linien von räumlichen Körpern berechnen. Wir haben deshalb diese Körper mit Stäben zusammengebaut; dann konnte man besser sehen, wie man rechnen muss.“ (10-13), Erlebnisse bei einer zweiten Staatsexamensprüfung (14-17), eine zweite Staatsexamensarbeit (27), Erlebnisse im Zusammenhang mit einer Lehrprobe (41-60).

Die Aussagen der Schüler beziehen sich auf den Unterricht und das Unterrichtsgeschehen, die Antworten der Erwachsenen zeigen, dass im Laufe des Lebens neue vielfältige Verknüpfungen mit ehemaligen Unterrichtsinhalten entstehen. Wir wollen uns im Folgenden hauptsächlich mit durch Unterricht generierten Vernetzungen bei Schülern befassen, also z.B. Erlebnisse aus dem Leben Erwachsener, die an Inhalte des früheren Schulunterrichts dieser Personen anknüpfen, nicht als Vernetzungsknoten berücksichtigen.

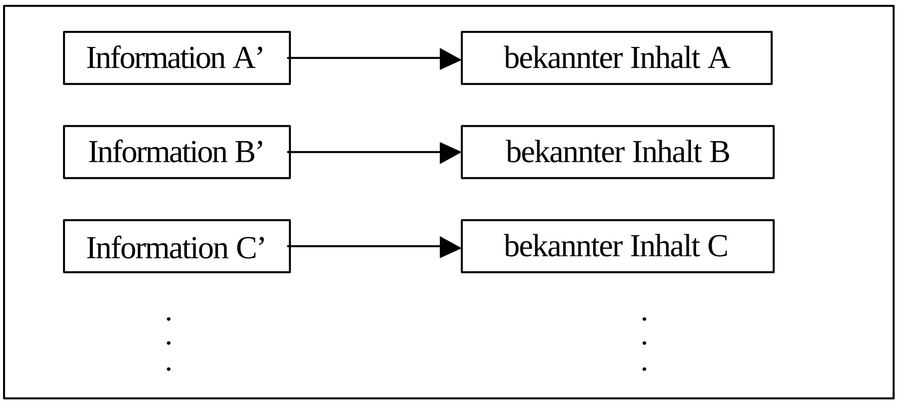
In Bezug auf Schulunterricht ist die Antwort des Schülers J besonders aufschlussreich. Sie zeigt, dass der Kontext, in dem Wissen im Unterricht dargeboten und erworben wird, den Wissensbeständen der Lernenden anhaften. Je nach Art der kontextuellen Darbietung können Schüler auf unterschiedliche Weise Wissen erschließen, z.B. durch Handlungen, durch Betrachtung mathematischer Strukturen, über Anwendungen, durch Bilder, über Anekdoten und Geschichten. Jeder subjektiv erfahrene Erwerbskontext zu einem mathematischen Wissensinhalt kann als Vernetzungsknoten betrachtet werden, sofern er gedächtnismäßig an diesen Wissensinhalt gebunden wird. Mit dieser Interpretation erhält man eine Vernetzung zwischen mathematischen Inhalten und ihren jeweiligen Darbietungskontexten im Unterricht, die durch Relation „wurde gelernt/erworben in folgender Weise“ umschrieben werden kann. Da der zugrunde liegende Beziehungszusammenhang auf einer Betrachtung aus dem Bereich der Lernpsychologie[1] basiert, kann er als „***lernpsychologische Vernetzung***" definiert werden. Darstellende Graphen für diese Vernetzung sind bipartit und gerichtet:



Einen Hinweis auf eine weitere Vernetzungsart liefert Person F, die Pythagoras mit dem ähnlich klingendem Wort Papyrus verbindet (28). Es ist ein Charakteristikum für menschliche Informationsverarbeitung, dass wahrgenommene Informationen mit ähnlichen Gedächtnisinhalten in Beziehung zueinander gesetzt werden.

So gehen in den Prozess der Informationsverarbeitung von im Unterricht dargebotenen Wissen nicht nur die von außen auf einen Lernenden einströmenden Informationen ein, sondern auch das *bereits vorhandene Wissen* des Lernenden. Gemäß konstruktivistischer Lerntheorien (vgl. Abschnitt 4.1.1) werden neue Informationen mit altem Wissen abgeglichen, wobei bereits bestehende Wissensstrukturen gefestigt oder abgeändert bzw. ergänzt werden (vgl. Abschnitt 4.1.2.6). Wir haben es hier mit einer Vernetzung zwischen neuen zu verarbeitenden Informationen, speziell mathematischen Lerninhalten, und alten, ihnen entsprechenden Wissensbeständen zu tun (Relation: „ist ähnlich/gleich dem bekannten Inhalt). Sie wird im Folgenden „***Ähnlichkeitsvernetzung***" genannt; darstellende Graphen sind bipartit und gerichtet:

[1] Die Lernpsychologie ist die wissenschaftliche Erforschung der Gesetzmäßigkeiten, nach welchen sich die Auseinandersetzung eines Lernenden mit einem Lerngegenstand vollzieht (vgl. KÖCK & OTT, Wörterbuch für Erziehung und Unterricht, 1994).



Die Ähnlichkeitsvernetzung ist nicht nur charakteristisch für Lernprozesse, sie bestimmt auch wesentlich die überdauernde Struktur des Wissensnetzes eines Individuums (vgl. Abschnitt 4.1.2.6).

3.5 Kategorien der Vernetzungen im Mathematikunterricht – ein Überblick

Um über *Vernetzungen* reden zu können, die *im Mathematikunterricht* bei Schülern entstehen, ist es sinnvoll, diese zu kategorisieren. Einige Kategorien ergeben sich aus der Beziehungshaltigkeit des Unterrichtsstoffes, andere werden durch die Unterrichtssituation bestimmt oder durch kognitive Prozesse beim Schüler.

Eine Zusammenstellung naheliegender *Vernetzungskategorien* aufgrund der Ausführungen in den Abschnitten 3.3 und 3.4 wird nachfolgend gegeben. Sie gliedern sich in Vernetzungen auf der *Menge mathematischer Objekte* M bzw. auf Teilmengen von M (Vernetzungen als Teilmengen von $M \times M$) und Vernetzungen, deren Kanten jeweils einen mathematischen Knoten (mathematisches Objekt) und ein Element der *Menge nichtmathematischer Knoten* N miteinander verbinden (Vernetzungen als Teilmengen von $M \times N \cup N \times M$).

Die Vernetzungskategorien definieren dabei die *Art der Beziehung* zwischen den Vernetzungsknoten, unabhängig davon, ob die jeweilige Relation auf M bzw. auf $M \cup N$ betrachtet wird oder nur auf Teilmengen von M bzw. $M \cup N$. Dies ist sinnvoll, da sich Vernetzungen im Mathematikunterricht i.d.R. jeweils nur auf kleine Teilmengen von M bzw. $M \cup N$ beschränken.

Vernetzungen als Teilmengen von* M´ M *(innermathematische Vernetzungen):

Fachsystematische Vernetzung: Eine fachsystematische Vernetzung ist eine Relation auf einer Menge mathematischer Objekte, die zu einer inneren Ordnung/Strukturierung/Systematisierung der Mathematik als Ganzes oder von Teilmengen mathematischer Objekte führt. Die verschiedenen Aspekte, unter denen eine Ordnung/Strukturierung/Systematisierung erfolgen kann, definieren Unterkategorien der fachsystematischen Vernetzung. So gibt es insbesondere

- verschiedene Vernetzungen, die im Wesentlichen unterschiedliche Interpretationen von *Teilmengenbeziehungen* sind (vgl. Abschnitt 3.3.1, S. 46-47): Einteilungen in Inhaltsbereiche, Oberbegriff-/Unterbegriff-Relation, Obermengen-/Untermengen-Relation, Teile-Ganzes-Beziehung, Kategorisierungen, Klasseneinteilungen, Fallunterscheidungen, Merkmalsvernetzung, ...),
- die *Zugehörigkeitsrelation* (vgl. Abschnitt 3.3.1, S. 47),

- Vernetzungen, die zum *deduktiven Aufbau* der Mathematik führen (Relationen „ist herleitbar aus“, „⇒“, vgl. S. 47-48),
- Vernetzungen, die den systematisierenden Gesichtspunkten von *BOURBAKI* Rechnung tragen (vgl. Abschnitt 3.3.1, S. 48).

Anwendungsbezogene Vernetzung: Hierunter sind Vernetzungen zusammengefasst, die sich durch die Anwendung mathematischer Objekte zur Lösung mathematischer Aufgaben / Probleme ergeben. Dazu zählen insbesondere folgende Vernetzungen:

- ***Modellvernetzung:*** Mathematische Objekte, speziell Probleme oder Aufgaben und deren Elemente stehen über Modellvernetzungen mit ihren Entsprechungen in einem mathematischen Modell in Relation zueinander (vgl. Abschnitt 3.3.2, S. 50).
- ***Theoremvernetzung:*** Eine Theoremvernetzung ist eine Relation zwischen einer Menge von Problemstellungen und einer Menge mathematischer Sätze, wobei eine Anbindung von Sätzen an Probleme, die mit ihrer Hilfe gelöst werden können, erfolgt (vgl. Abschnitt 3.3.2, S. 51).
  Als spezielle Theoremvernetzungen kann man folgende auffassen (vgl. S. 51-52):
  - *Regelvernetzung:* Eine Regelvernetzung ist eine Vernetzung mathematischer Aufgabenstellungen mit Regeln, die für die Lösung dieser Aufgaben geeignet sind.
  - *Algorithmusvernetzung:* Eine Algorithmusvernetzung ist eine Vernetzung mathematischer Aufgaben oder Aufgabentypen mit geeigneten Algorithmen / Lösungsverfahren für deren Lösung.
- ***Ablaufvernetzung:*** Eine Ablaufvernetzung ist eine Vernetzung der einzelnen Verfahrensschritte eines Algorithmus gemäß der Reihenfolge, in der diese durchzuführen sind (vgl. S. 52).

Vernetzungen als Teilmengen von $M \times N \cup N \times M$ *(Vernetzungen, deren Kanten jeweils ein mathematisches Objekt und einen nichtmathematischen Knoten in Beziehung setzen):*

Modellvernetzung: Außermathematische Sachverhalte bzw. Probleme und deren Elemente stehen über Modellvernetzungen mit ihren Entsprechungen in einem mathematischen Modell in Relation zueinander (vgl. Abschnitt 3.4, S. 55).

Kulturvernetzung: Eine Kulturvernetzung setzt mathematische Inhalte bzw. Aufgabenstellungen und nichtmathematische kulturelle Aspekte in Beziehung zueinander (vgl. Abschnitt 3.4, S. 56).

Lernpsychologische Vernetzung: Eine lernpsychologische Vernetzung ist eine Vernetzung, die jeweils einem Lerninhalt die Art seines Darstellungskontextes im Zuge seiner Erfahrung im Unterricht zuordnet (vgl. Abschnitt 3.4, S. 60).

Mnemotechnische Vernetzung: Durch eine mnemotechnische Vernetzung erfolgt die Anbindung von Merkstützen an mathematische Inhalte (vgl. Abschnitt 3.4, S. 57).

Ähnlichkeitsvernetzung: Eine Ähnlichkeitsvernetzung ist eine Vernetzung eines mathematischen Inhalts mit demselben oder einem ähnlichen, dem lernenden Individuum bereits bekannten Inhalt (vgl. Abschnitt 3.4, S. 60).

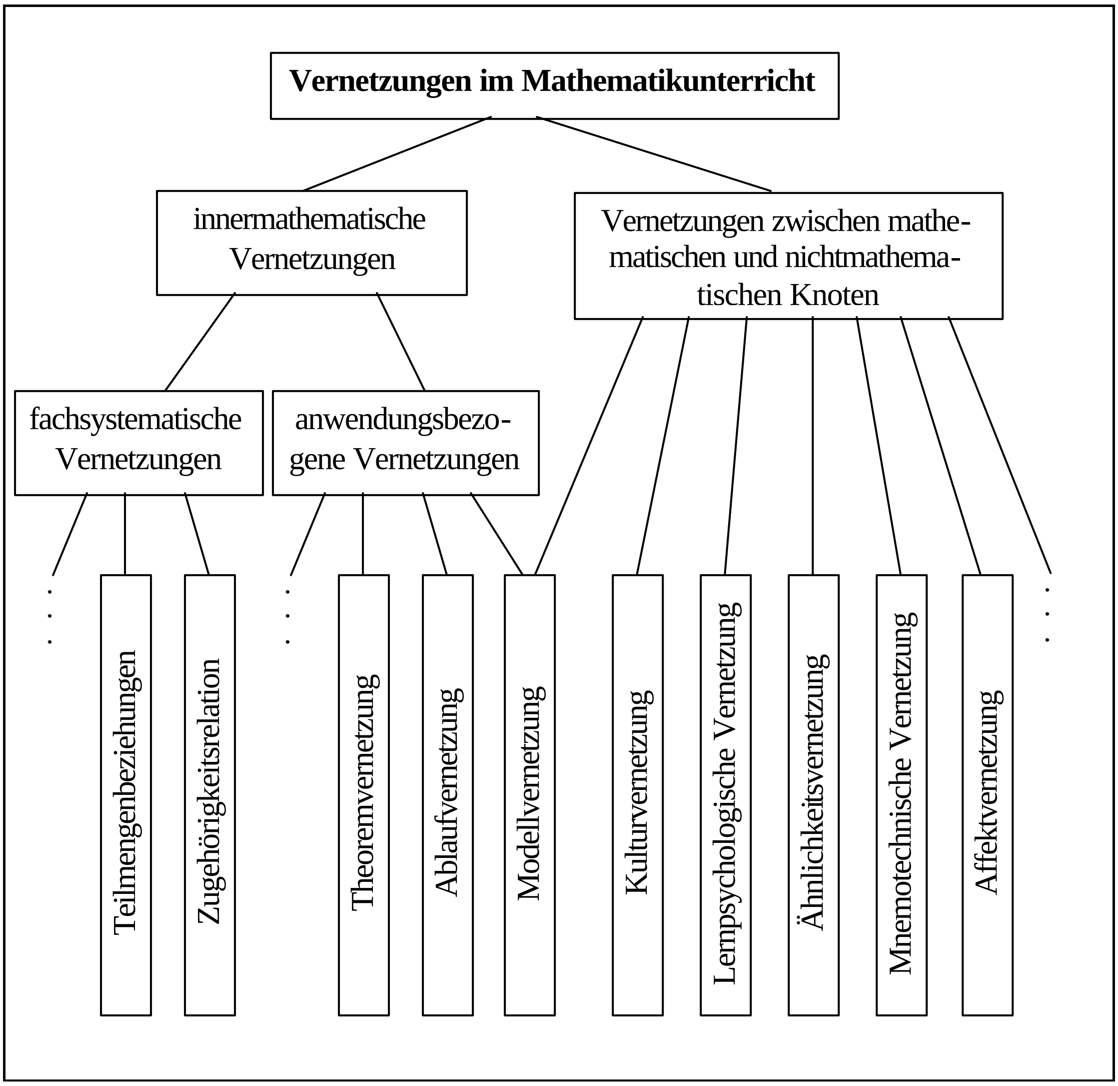
Affektvernetzung: Eine Vernetzung mathematischer Inhalte mit affektiven Komponenten wird als Affektvernetzung bezeichnet (vgl. Abschnitt 3.4, S. 58).

Durch die Benennung verschiedener Vernetzungskategorien ist hiermit ein begriffliches Instrumentarium für wesentliche Vernetzungen sowohl im Unterrichtsstoff Mathematik als auch auf kognitiver Ebene der Schüler geschaffen. Die einzelnen Vernetzungskategorien sind sehr unterschiedlicher Qualität, es werden aber Vernetzungen aller Kategorien bei Schülern durch die Lehr- und Lernprozesse im Mathematikunterricht generiert (vgl. Ausführungen in Abschnitt 4.1.2).

Auf kognitiver Ebene handelt es sich bei der vorgenommenen Kategorisierung um eine Einteilung von Vernetzungen, derer wir uns *bewusst* werden. Eventuelle unbewusste Vernetzungen (vgl. Abschnitt 4.1.3) sind uns nicht oder nicht direkt zugänglich.

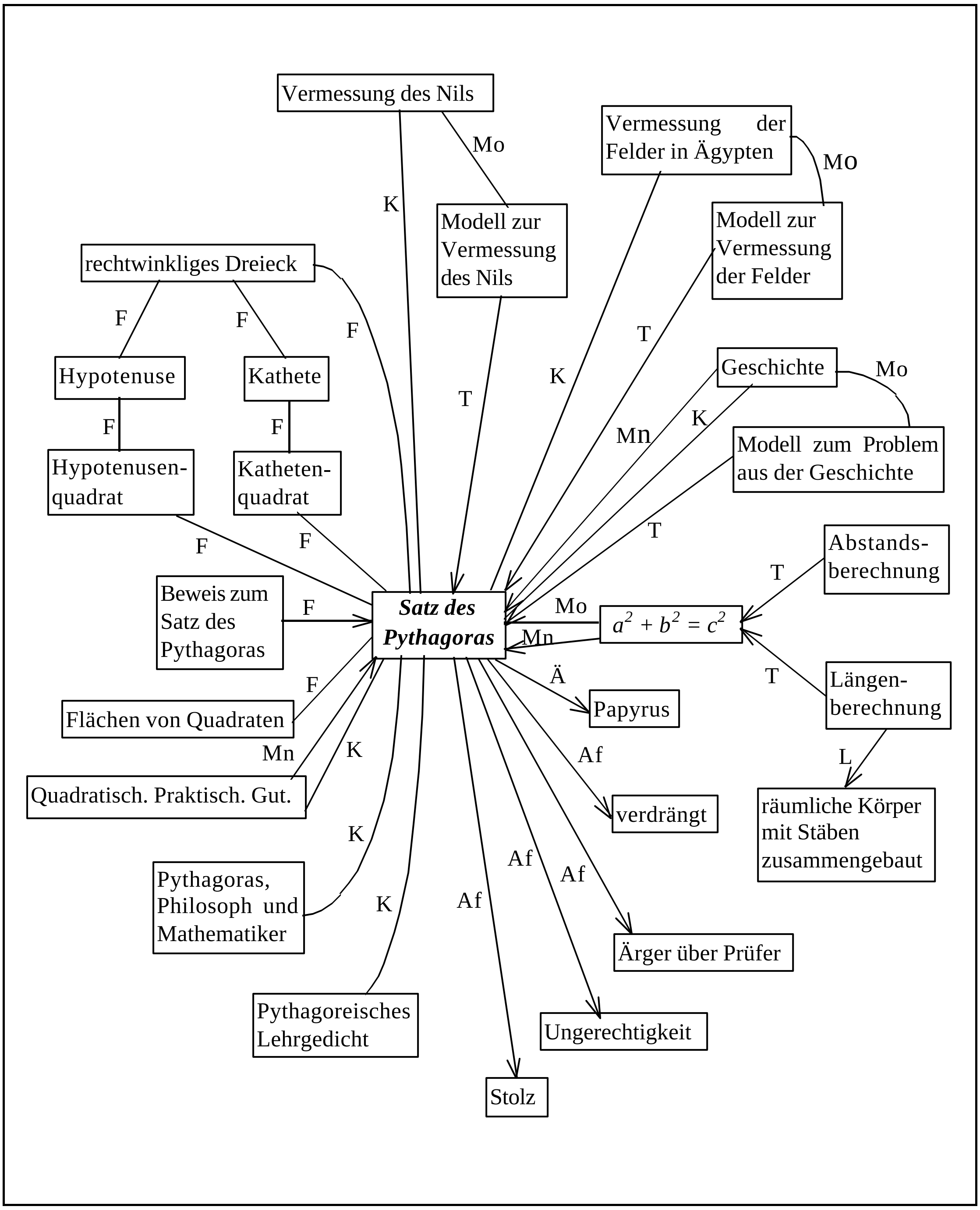
Auch kann man sicherlich *nicht alle* möglichen, uns bewussten Vernetzungen mit mathematischen Objekten in die oben aufgezeigten Kategorien einordnen; die vorgenommene Einteilung (Abbildung 5) scheint aber den größten Teil des Spektrums dieser Vernetzungen abzudecken.

Abbildung 5: Kategorien der Vernetzungen im Mathematikunterricht



Die nachfolgende graphische Darstellung zeigt das Netzwerk zum Satz des Pythagoras auf der Grundlage der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Umfrage. Die eingezeichneten Kanten sind jeweils mit dem/den Anfangsbuchstaben derjenigen Vernetzungskategorie gekennzeichnet, die den Beziehungszusammenhang zwischen den verbundenen Knoten konstituiert.

Abbildung 6: Vernetzung zum Satz des Pythagoras



Vernetzungen unterschiedlicher Kategorien müssen nicht notwendig disjunkt sein. So können zwei Knoten gemäß unterschiedlicher Relationen vernetzt sein. Beispielsweise sind die Knoten „Quadratisch. Praktisch. Gut.“ und „Satz des Pythagoras“ sowohl durch eine Kante der mnemotechnischen Vernetzung als auch durch eine Kante der Kulturvernetzung miteinander verbunden (siehe Abschnitt 3.4).[1] Eine entsprechende graphische Darstellung liefert einen Multigraphen.

Die auf kognitiver Ebene von Individuen ausgelösten Vernetzungen verschiedener Kategorien sind zudem nicht unabhängig voneinander. So können verschiedene Vernetzungsarten untereinander konkurrieren, so dass die einen gegenüber den anderen dominieren.[2] Positive und negative Rückkopplungsprozesse zwischen der Ausbildung einzelner Verbindungen können erfolgen.

Die Einteilung maßgeblicher Vernetzungen im Mathematikunterricht ist für analytische Zwecke hilfreich, jedoch sind isolierte Betrachtungen von Vernetzungen einzelner Kategorien insofern idealisiert, als dass Kopplungen mit Vernetzungen anderer Kategorien unberücksichtigt bleiben.[3]

---

[1] In der graphische Darstellung in Abbildung 6 sind entsprechend der beiden Relationen zwei Kanten zwischen den beiden Knoten eingezeichnet.

[2] Wir wissen, dass es im Gehirn ein Netzwerk aus anatomischen Arealen gibt, das ausschließlich der Aufmerksamkeit dient und eine exekutive Kontrolle über weitverzweigte Netzwerke im Gehirn ausübt. Werden zwei kognitiven Aufgaben gleichzeitig ausgeführt, so behindern sie sich unabhängig von der Natur der beteiligten Verarbeitungsvorgänge gegenseitig; die Aufmerksamkeitssysteme bestimmen, welche Aufgabe Priorität erhält (POSNER & RAICHLE, 1996, S. 266). Auch die Reihenfolge einzelner Verarbeitungsschritte hängt davon ab, in welchem Maße sie jeweils durch das exekutive Aufmerksamkeitsnetzwerk gebahnt sind (POSNER & RAICHLE, 1996, S. 189-190); es ist nachgewiesen, dass die Festlegung von Prioritäten durch Instruktion eines Individuums beeinflusst werden kann.

[3] Eine Kopplung von Vernetzungen finden wir zum Beispiel bei der „Superzeichen-Bildung“, aber auch in dynamischen kognitiven Prozessen.

Das kognitive Wissensnetz beinhaltet nicht nur einzelne, miteinander verbundene Elemente, sondern auch „Superzeichen“, d.h. zu Komplexen zusammengefasste Teile. So ein Komplex mit seinem spezifischen Muster erlaubt es durch Mustererkennung, dass man einen ganzen Ausschnitt der Wirklichkeit als ein einziges Teil erfasst, sofern dieses mit dem vorhandenen Muster in Einklang steht. Hierbei würden also die Einzelteile ganzer Vernetzungskomplexe synchron im Denkprozess eingesetzt (vgl. u.a. DÖRNER, 1989, S. 62; PALM, 1988b).

Dynamische Vernetzungskopplungen sind auf die komplizierten Prozesse in den hochvernetzten neuronalen Systemen zurückzuführen. Forschungsergebnisse sowohl auf neuronaler wie auch auf psychologischer Ebene zeigen, dass die Informationsverarbeitung durch unser Gehirn und Denkprozesse (also auch Vernetzungsprozesse) nicht nur seriell, sondern auch parallel erfolgen. Derselbe Stimulus kann unterschiedliche Aktivitäten in verschiedenen Hirnregionen auslösen, die dann parallel durchgeführt werden (POSNER & RAICHLE, 1996, S. 38).

Dies gilt auch für die *vorliegende Arbeit*, die sich *ab Kapitel 4.2 auf die Betrachtung einiger Vernetzungen aus dem innermathematischen Bereich sowie auf Modellvernetzungen von und mit außermathematischen Anwendungen* (also einiger fachsystematischer Vernetzungen sowie einiger anwendungsbezogener Vernetzungen) *beschränkt*.

3.6 Vernetzungsaspekte des prozeduralen und des deklarativen Wissens

Da wir unter dem Begriff „Vernetzung“ sowohl den Prozess des Vernetzens, das aktive in Relation setzen, als auch das Ergebnis hiervon verstehen (vgl. Abschnitt 3.1), haben Vernetzungen einen statischen und einen dynamischen Charakter. Statisches Vernetzungswissen liegt dann vor, wenn man weiß, dass und wie bestimmte Knoten in einer Relation zueinander stehen; dynamisches Vernetzungswissen beschreibt die Fähigkeit, bestimmte Knoten mit anderen in Bezug setzen zu können.

In der Literatur werden in diesem Zusammenhang häufig die Begriffe „deklaratives Wissen“ bzw. „prozedurales Wissen“ gebraucht. Unter deklarativem Wissen (auch Zustandswissen oder begrifflichem Wissen; englisch: „declarative knowledge“ oder „conceptual knowledge“) wird üblicherweise ein Wissen um Begriffe, Daten, Fakten, Sachverhalte, Situationen, Ereignisse verstanden. Unter prozeduralem Wissen (auch Veränderungswissen; englisch: „procedural knowledge“) versteht man in der Regel Handlungswissen, d.h. Wissen um Operationen und Prozeduren (vgl. TERGAN, 1986, S. 8).

Zu deklarativem und prozeduralem mathematischen Wissen werden z.B. in HIEBERT (1986) mehrere Beiträge geliefert. HIEBERT & LEFEVRE (1986, S. 3-4) definieren hier deklaratives Wissen als beziehungsreiches Netzwerkwissen:

> Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information.

Prozedurales Wissen untergliedert sich nach ihrer Definition in zwei verschiedene Teile (HIEBERT & LEFEVRE, 1986, S. 6-8). Der eine Teil ist die Vertrautheit mit der formalen Sprache, den Symbolen der Mathematik; der andere Teil dieses Wissens beinhaltet Regeln und Algorithmen, oder allgemein Verfahren zum mathematischen Problemlösen:

> One kind of procedural knowledge is a familiarity with the individual symbols of the system and with the syntactic conventions for acceptable configurations of symbols. The second kind of procedural knowledge consists of rules or procedures for solving mathematical problems. Many of the procedures that students possess probably are chains of prescriptions for manipulating symbols. However, procedural knowledge also includes strategies for solving problems that do not operate directly on symbols.

Als Hauptunterschied zwischen deklarativem und prozeduralem Wissen stellen HIEBERT & LEFEVRE (1986, S. 8) heraus:

> The primary relationship in procedural knowledge is „after“, which is used to sequence subprocedures and superprocedures linearly. In contrast conceptual knowledge is saturated with relationships of many kinds.

Die Charakterisierung der beiden Wissensformen erfolgt bei verschiedenen Autoren jedoch nicht in identischer, wenngleich in ähnlicher Weise. So führen HAAPASALO & KADIJEVICH (2000, S. 139-141) u.a. folgende Sichtweisen auf:

- Procedural knowledge comprises productions (condition-action-rules), whereas ‘declarative knowledge’ … is composed of tangled hierarchies of cognitive units (ANDERSON, 1983).
- Procedures are modelled by productions (condition-action-rules), whereas concepts refer to several kinds of relational representations such as A is a kind of B, event A is caused by event B, object A is above object B, and event A happened after event B (BYRNES & WASIK, 1991).
- Procedural knowledge is rich in algorithms for completing tasks but is lacking in relationships, whereas conceptual knowledge is rich in relationships but is lacking in algorithms for completing tasks (HIEBERT & WEARNE, 1986).
- Procedural knowledge is viewed as sequences of actions, whereas conceptual knowledge refers to connected networks (HIEBERT & CARPENTER, 1992).
- Procedural knowledge denotes knowledge of procedures and mastery of computational skills, whereas conceptual knowledge relates to knowledge of various interconnections between conceptions that give meaning to mathematical procedures (SHIMIZU, 1996).

HAAPASALO & KADIJEVICH (2000) stellen heraus, dass Mathematikausbilder oft eine Unterscheidung zwischen prozeduralem und deklarativem Wissen vornehmen, indem sie einfach über „algorithmic performance“ bzw. „understanding“ sprechen. Prozeduralem Wissen wird danach eine dynamische Natur zugeschrieben, während deklaratives Wissen als statisch betrachtet wird. Letzterer Sichtweise schließen sich HAAPASALO & KADIJEVICH (2000, S. 141) nicht an; sie definieren:

- *Procedural knowledge* denotes dynamic and successful utilization of particular rules, algorithms or procedures within relevant representation form(s). …
- *Conceptual knowledge* denotes knowledge of and a skilful “drive” along particular networks, the elements of which can be concepts, rules (algorithms, procedures, etc.), and even problems … given in various representation forms.

Beim Aufgaben- und Problemlösen kommen u.a. auch Lösungsstrategien zum Tragen, die ein verständiges Bewegen in Netzwerkstrukturen (d.h. ein verständiges dynamisches Vernetzen, aktives in Beziehung setzen von Konzepten) erfordern. Ein Handeln entsprechend dieser Strategien im Zuge von Problemlösungsprozessen lässt sich nicht eindeutig einer der beiden Wissensformen (deklarativ versus prozedural) zuordnen.[1]

Um Missverständnissen vorzubeugen, wird in der vorliegenden Arbeit unter deklarativem Wissen das Netzwerkwissen von Individuen verstanden, sowohl statisch (im Sinne von: „Ich weiß, dass Konzept A in Relation R zu Konzept B steht.“) als auch dynamisch (im Sinne von: „Ich kann Konzept A unter der Relation R mit Konzept B in Beziehung setzen.“). Geht es hingegen um das verständige, aktive Bewegen in Netzwerkstrukturen im Zuge eines Problemlösungsprozesses, so wird dies explizit so angegeben; die Begriffe deklarativ oder prozedural werden hierbei nicht verwendet.

[1] STAR (2000) hebt „procedural understanding“ als abstraktes und tiefes Wissen hervor, das aufgrund (zu) enger Definitionen von prozeduralem bzw. deklarativem Wissen in Untersuchungen kaum Beachtung gefunden hat.