2 Das Forschungsthema Vernetzung im Mathematikunterricht in der fachdidaktischen Diskussion

Vernetzungen im Mathematikunterricht sind und waren vielfach Gegenstand der fachdidaktischen Diskussion, in die hier ein Einblick gegeben werden soll.

Als Einführung liefert Abschnitt 2.1 einen historischen Abriss. Er zeigt Sichtweisen bezüglich Vernetzungen im Mathematikunterricht in Deutschland im zeitlichen und gesellschaftlichen Wandel auf. Abschnitt 2.2 geht auf den internationalen Konsens ein, dass Vernetzungen mathematischer Inhalte ein zentrales Lernziel des Mathematikunterrichts sein sollten. Im Abschnitt 2.3 wird die Bedeutung, die vernetztem Denken insbesondere für mathematisches Problemlösen aus psychologischer Sicht beigemessen wird, herausgestellt. Entsprechend sind immer wieder Forderungen an Curricula Vernetzungen betreffend erhoben worden. Sie kommen in verschiedenen Stellungnahmen und Erklärungen zum Ausdruck, die in Abschnitt 2.4 angeführt sind. Wiederholt werden Mängel bezüglich Vernetzungen beklagt. Nicht zuletzt deckt nun die TIMS-Studie in Deutschland Defizite im Vernetzungsbereich auf, die einen dringenden Handlungsbedarf deutlich werden lassen (Abschnitt 2.5).

2.1 Vernetzungen im Mathematikunterricht aus dem Blickwinkel der Mathematikgeschichte in Deutschland

Der Begriff „*Vernetzung*“, ein aktuelles, viel verwendetes Schlagwort in Deutschland, wurde erst in den 70er Jahren (siehe 2.3) geprägt. Dennoch ist die Diskussion rund um Vernetzungen im Mathematikunterricht keineswegs neu, sinnverwandte Begriffe wie Beziehungshaltigkeit[1], Zusammenhang[2], Verbindung, Bezug, Anbindung durchziehen die Literatur zur Mathematik und ihrer Didaktik. Dies beruht letztlich auf der Tatsache, dass sich die Mathematik selbst als eine Wissenschaft von außerordentlich reicher und vielfältiger Beziehungshaltigkeit darstellt. Mathematische Inhalte sind untereinander vielschichtig vernetzt und stehen zudem in mannigfacher Verbindung zur nichtmathematischen Außenwelt.

Das Gesamtgebilde der Mathematik wurde jedoch nicht immer so gesehen. Entwicklungsgeschichtlich bildeten sich zunächst verschiedene, eher getrennte mathematische Disziplinen heraus. Die Fülle der im Laufe der Zeit und insbesondere im 19. Jahrhundert neu hinzugewonnenen Erkenntnisse in den einzelnen Disziplinen drohte zu einem Auseinanderfallen der Mathematik in mehrere Einzelwissenschaften zu führen. So gab es in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts Bestrebungen mit dem Ziel einer Synthese scheinbar divergierender Richtungen (vgl. WUßING, 1974, S. 16). Dies betraf vor allem die Geometrie und diente nicht zuletzt FELIX KLEIN (1849-1925) als ein Motiv für die Ausarbeitung des „Erlanger Programms“, das er im Jahre 1872 vorstellte und das die weitere Entwicklung der Mathematik entscheidend prägen sollte. Rückblickend (1921) drückte sich KLEIN so aus (WUßING, 1974, S. 16-17):

> Mein Interesse war ... darauf gerichtet, im Widerstreite der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinander herlaufenden, äußerlich einander unähnlicher und doch ihrem Wesen nach verwandter Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen.

[1] Der Begriff „Beziehungshaltigkeit“ hat durch FREUDENTHAL den Rang eines fachdidaktischen Ausdrucks erhalten (s. S. 15).

[2] Der Begriff „Zusammenhang“ findet in den KMK-Richtlinien aus dem Jahr 1968 häufige Verwendung (s. S. 15).

FELIX KLEIN nahm nicht nur entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik, sondern auch und vor allem auf den mathematischen Unterricht, dessen Reform im ersten Quartal des 20. Jahrhunderts, die *Meraner Reform*, nach ihm auch als KLEIN'sche Reform bezeichnet wird. KLEIN's Wirken und Schaffen ist dabei immer wieder vom *Streben nach Synthese* gekennzeichnet. So formuliert er in der Einleitung zu einer Vorlesung im Rahmen der Lehrerausbildung (KLEIN, 1933, S. 2):

> Meine Aufgabe hier wird stets sein, Ihnen den *gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisziplinen* vorzuführen, der in den Spezialvorlesungen nicht immer genügend zur Geltung kommt, sowie insbesondere ihre *Beziehungen zu den Fragen der Schulmathematik* zu betonen.

Weiterhin führt er in seiner Vorlesung aus (KLEIN, 1925, S. 228):

> Vor allem glaube ich, daß die *Fusion der verschiedenen Gebiete* heutzutage im Unterricht zu wenig durchgeführt ist; ich will das durch einige Einzelheiten belegen, ... :
>
> a) Das *Projizieren und Zeichnen* räumlicher Figuren, das gewiß etwas äußerst Wichtiges ist, kommt im heutigen geometrischen Unterricht nicht recht zur Geltung. Es wird wohl äußerlich dem Lehrgang angeheftet, aber nicht innerlich mit ihm verschmolzen. ...
>
> b) Die *Geometrie und Arithmetik* hält man auf der Schule gewöhnlich unnatürlich getrennt voneinander; ein lehrreiches Beispiel ist die ... *Behandlung der Proportionen*, die man zuerst arithmetisch und dann - häufig gar noch ohne Bezugnahme auf den vorangegangenen Lehrgang - in geometrischer Form durchnimmt.
>
> c) Die *analytische Geometrie* mit dem Grundsatz, daß eine Funktion $y = f(x)$ eine Kurve darstellt, ist gewiß der Auffassung der Knaben schon auf früher Stufe zugänglich, und sie könnte und sollte von da an den ganzen geometrischen Unterricht durchdringen. Statt dessen wird sie als neuer getrennter Aufbau auf die fertige Geometrie aufgesetzt, ...

In der Schulmathematik misst KLEIN dem *Funktionsbegriff* als *verbindendem Element* eine fundamentale Bedeutung zu. In einem Vortrag „über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts" an höheren Schulen erläutert er (KLEIN, 1904, S. 15):

> Ein großer Teil des mathematischen Unterrichts an den oberen Klassen, ich will einmal sagen: der theoretische Teil, bietet noch immer eine Nebeneinanderstellung an sich interessanter aber isolierter Kapitel, die einigermaßen zufällig ausgewählt scheinen. Ein klares Verständnis der mathematischen Bestandteile unser heutigen Kultur wird dadurch nur in sehr indirekter Weise angebahnt. Diese Bestandteile ruhen ganz wesentlich auf dem Funktionsbegriff und seiner Ausgestaltung nach geometrischer und analytischer Seite. Und also ergibt sich mit Notwendigkeit die Thesis, ... daß nämlich der Funktionsbegriff in zweckmäßiger Ausgestaltung in den Mittelpunkt des theoretisch-mathematischen Unterrichts zu rücken ist.

Die „*Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens*" prägt entsprechend die MERANER PLÄNE (GUTZMER, 1905, als Quelltext in MU 6/80, S. 53-62), die 1905 von einer durch die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte eingesetzten

Kommission vorgelegt wurden und bis in die 60er Jahre den gymnasialen Mathematikunterricht maßgeblich bestimmten (vgl. z.B. SCHUPP, 1988, S. 5; INHETVEEN, 1976, S. 154).

Weitere grundlegende *Vernetzungsaspekte*, die in den MERANER PLÄNEN zur ausdrücklichen Geltung kommen und ebenfalls den Einfluss KLEIN's erkennen lassen, sind (GUTZMER, 1905, als Quelltext in MU 6/80, S. 53):

> überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. Ferner ... auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen.

Die traditionelle Aufteilung des mathematischen Unterrichtsstoffes in die Teilgebiete Rechnen bzw. Arithmetik und Raumlehre/Geometrie bleibt dabei im Wesentlichen erhalten.

Die MERANER PLÄNE von 1905 wurden 1922 durch den Deutschen Ausschuß für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (DAMNU) einer Neubearbeitung unterzogen. Die dadurch hervorgegangenen Lehrplanvorschläge (REVIDIERTE MERANER LEHRPLÄNE DES DAMNU, 1922, als Quelltext in MU 6/80, S. 63-80) stehen „in allen wesentlichen Richtungen mit den Meraner Plänen im Einklang“ (S. 63). Eine stärkere Berücksichtigung erfährt der *Anwendungsbezug* der Mathematik und die Aufgabe der „*Erziehung zum funktionalen Denken*“ wird noch ausgeweitet:

> Der Erziehung zum funktionalen Denken ... wird in höherem Maße als früher dadurch Rechnung getragen, daß ausgesprochenermaßen auf den oberen Stufen bis zu den Elementen der Infinitesimalrechnung fortgeschritten wird und daß dementsprechend die Funktionsbetrachtungen der voraufgehenden Stufen schärfer auf dieses Ziel eingestellt sind. ...
> Es ist ... in dem ... Plan ... auf die Beziehungen zur Wirklichkeit und auf die praktischen Anwendungen der Mathematik mehr Nachdruck als früher gelegt und auch das funktionale Denken in den Dienst dieser Aufgabe gestellt worden. (S. 64-65)

Als „allgemeines Lehrziel“ wird formuliert (S. 66):

> Erarbeitung und Aneignung von sicheren mathematischen Kenntnissen in solchem Zusammenhang und Umfang, daß der Schüler den Gesamteindruck einer geordneten, aus sich aufbaubaren, für viele Wissenszweige und die Verhältnisse des praktischen Lebens verwendbaren Wissenschaft enthält.

Weitere spezielle im Unterricht aufzubauende Vernetzungen der Mathematik mit kulturhistorischen Aspekten findet man in den methodischen Bemerkungen (S. 77, eigene Hervorhebung):

> Die Geschichte der Mathematik ist, wo es angängig erscheint, bei der Entwicklung der Lehraufgaben ebenso wie bei der Aufgabenstellung zu berücksichtigen. Der *Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung* ist dabei nach Möglichkeit hervorzukehren.

Die revidierten Meraner Lehrpläne des DAMNU von 1922 lagen schließlich den RICHERT'schen *Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens* aus dem Jahre 1925 (RICHERT, 1925) zugrunde. In ihnen fand die Reform des Mathematikunterrichts, die Anfang des 20. Jahrhunderts einsetzte, ihren vorläufigen Abschluss. Ein Auszug wesentlicher Anmerkungen Vernetzungen betreffend ist nachfolgend gegeben (RICHERT, 1925, Methodische Bemerkungen, S. 130-139):

> Der Lehrstoff ist dahin zu sichten, daß nur solche Sätze und Verfahren, die für den inneren Zusammenhang und für die praktische Anwendung Wert haben, im Unterricht erarbeitet werden. ...
> Angewandte Aufgaben sollen der Wirklichkeit entnommen sein und zu praktisch wertvollen Ergebnissen führen. Durch Berücksichtigung der anderen Unterrichtsfächer und der Umwelt des Schülers sind die Anwendungen für sachliche Belehrung nutzbar zu machen, besonders über die Erscheinungen des wirtschaftlichen Lebens. ... In den Anwendungen ist engste Verknüpfung mit der Heimatkunde anzustreben. ...
> Die Geschichte der Mathematik ist grundsätzlich im Unterricht zu berücksichtigen, bei der Entwicklung des Lehrstoffs ebenso wie bei der Aufgabenstellung. Der Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung ist dabei nach Möglichkeit hervorzuheben. ...
> Die geometrischen Kenntnisse sind, besonders bei der Aufgabenstellung, in lebendige Beziehung zu den Anwendungen zu bringen. ...
> Zwischen der Mathematik und den übrigen Unterrichtsfächern ist die Herstellung möglichst vieler Verbindungen anzustreben. ...
> Zu allen Naturwissenschaften steht die Mathematik in engster Beziehung. Der Unterricht hat anzuzeigen, daß die Sicherheit naturwissenschaftlicher Einsicht mit der Herrschaft der Mathematik über die Naturgesetze wächst. ...
> Die Beziehungen der bildenden Kunst zur Geometrie und die Bedeutung der Perspektive als Grundlage der Malerei sind an geeigneten Beispielen im mathematischen Unterricht zu erläutern.

Erst Ende der 50er Jahre des 20. Jahrhunderts setzten erneut nachhaltige Reformbestrebungen den Mathematikunterricht betreffend ein. Eine Modernisierung des gymnasialen Mathematikunterrichts wurde gefordert; dessen wesentliches Ziel war die Anpassung der Schulmathematik an die mittlerweile stark veränderte Fachwissenschaft (STEINER, 1959[1]; vgl. auch BLUM & TÖRNER, 1983, S. 187).

[1] STEINER kritisiert in seiner Arbeit „Das moderne mathematische Denken und die Schulmathematik" von 1959 fundiert und umfassend die damals vorhandene Diskrepanz zwischen Mathematik als Wissenschaft und Schulmathematik. Er zeigt die Notwendigkeit einer Reform des Mathematikunterrichts auf, begründet die Ziele der Reform, entwickelt Ideen für die Neugestaltung

Auslösend war der Sputnik-Schock von 1957, der Befürchtungen aufkommen ließ, man gerate politisch-ökonomisch ins Hintertreffen, aber auch die Hoffnung, dem könne man durch eine Modernisierung des Bildungswesens, vor allem im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich, entgegentreten (vgl. SCHUPP, 1988, S. 9).

Wegweisend für die Unterrichtsreform wurde die Idee, die „tragenden Begriffe, die für die moderne mathematische Denkweise selbst kennzeichnend sind, zu *Leitbegriffen des Unterrichts* [zu] machen. Es sind dies vor allem die Begriffe *Menge, Struktur, Abbildung*“[1] (STEINER, 1965, S. 91; vgl. auch STEINER, 1959). STEINER (1965, S. 91) führt dazu aus:

> Bei aller Vielseitigkeit hält sich die heutige Mathematik nämlich in einem erstaunlich durchsichtigen, einheitlichen begrifflichen Rahmen, der im wesentlichen durch die Stichworte Menge, Struktur, Abbildung bezeichnet wird. Grob vereinfachend können wir sagen: Überall in der Mathematik - auch im Bereich der Anwendungen - werden *Mengen* von Objekten erfaßt, denen eine bestimmte konkrete Struktur aufgeprägt ist. Zusammenhänge zwischen solchen *strukturierten Mengen* können mit Hilfe von *Abbildungen* hergestellt werden.

Die inhaltlichen Festlegungen der Reform erfolgten im NÜRNBERGER RAHMENPLAN DER MNU von 1965 und in den durch sie beeinflussten *KMK-Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen* aus dem Jahre 1968[2].

Im NÜRNBERGER RAHMENPLAN (MU, 3/66, S. 96-97) wird ausgeführt:

> Die neuere Entwicklung der mathematischen Wissenschaft hat vereinheitlichende Vorstellungen hervorgebracht, die den inneren Zusammenhang zwischen den verschiedenen mathematischen Teilgebieten hervortreten und auch die Beziehungen zu den Anwendungen prinzipiell verständlich werden lassen. Die Mathematik beschäftigt sich mit strukturierten Gebilden, d.h. mit bestimmten Mengen von Objekten und den auf ihnen definierten Strukturen. ...
> Diese Auffassung der wissenschaftlichen Mathematik gibt auch dem mathematischen Schulunterricht ein neues Verhältnis zu seinem Inhalt. Auch in ihm kommt es wesentlich darauf

---

des Unterrichts und prägt damit zugleich entscheidend die didaktische Forschung für zwei Jahrzehnte in der Bundesrepublik Deutschland (VOLLRATH, 1988, S. 8-9).

[1] Prägend für das Erscheinungsbild der modernen Mathematik war der Ansatz von NICOLAS BOURBAKI. Hinter dem Namen BOURBAKI verbirgt sich eine Gruppe von (ständig wechselnden) französischen Mathematikern, deren Namen geheim gehalten werden. Seit 1938 handeln sie die Mathematik in einem äußerst umfangreichen Sammelwerk ab; allein in den Jahren 1939 bis 1965 erschienen 31 Bände. Das Werk ist gekennzeichnet durch strenge Axiomatik, Logistik, Begriffsklarheit und Allgemeingültigkeit (vgl. z.B. Das große Fischer Lexikon, 1975), und wurde von der Hoffnung getragen, dass die Betonung von Struktur eine erhebliche Denkökonomie bewirkt (vgl. BOYER, 1985, S. 675).

[2] KULTUSMINISTERKONFERENZ vom 3.10.1968. *Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen*.

> an, die jeweils zugrunde liegenden Objektbereiche als Mengen zu erfassen, auf ihnen gegebene Strukturen herauszuarbeiten.

In den KMK-Richtlinien werden dann entsprechende Forderungen an den Mathematikunterricht gestellt (MESCHKOWSKI, 1969, S. 484):

> Die Modernisierung des Mathematikunterrichts verlangt eine Zusammenschau der verschiedenen Teilgebiete unter übergreifenden Gesichtspunkten, z.B. der Durchdringung von Algebra und Geometrie. Tragende Grundbegriffe wie Menge, Abbildung und Struktur (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum) müssen an geeigneter Stelle immer wieder verdeutlicht werden. ...
> Die Einsicht in mathematische Strukturen und die Beherrschung der zugehörigen Kalküle müssen praktische Anwendungen einschließen. ... In den Aufgaben und Übungen müssen moderne Anwendungsgebiete bevorzugt werden.

Bei der Auflistung der einzelnen Lerninhalte im Lehrplan der KMK-Richtlinien findet das Wort „*Zusammenhang*“ eine besonders häufige Verwendung, was auf einen hohen Stellenwert von Vernetzungen hinweist. Die im Plan herausgestellten Zusammenhänge beschreiben aber fast ausschließlich innermathematische Vernetzungen; es fehlt nahezu jeder Hinweis auf außermathematische Anwendungsgebiete.

Die durch die KMK-Richtlinien ausgelöste „Welle der Strenge“, gekennzeichnet durch eine übertriebene fachbezogene Verwissenschaftlichung des Unterrichts (vgl. BLUM & TÖRNER, 1983, S. 191) und gleichzeitige Vernachlässigung anschaulicher Bezüge lieferte Ansatzpunkte zu heftiger Kritik.

Zum Stichwort „*Beziehungshaltigkeit*“ schreibt FREUDENTHAL (1973, S. 75-77):

> Es ist an und für sich ein gesunder Standpunkt, daß man nicht isolierte Brocken, sondern kohärentes Material lernen soll. Was zusammenhängt, lernt sich besser und wird besser behalten. Nur muß man den Zusammenhang recht verstehen. ...
> Man hat Zusammenhänge *innerhalb* der Mathematik konstruiert, um einheitliche Mathematik zu unterrichten, aber man hat es auf Kosten der Zusammenhänge der Mathematik mit Nichtmathematischem getan, ohne sich zu fragen, ob diese nicht natürlicher und wichtiger seien. ...
> Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muß man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muß sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das - ich meine die Wirklichkeit - ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt, und wenn es erst scheinbar zusammenhanglose Elemente der Mathematik sein mögen, so erfordert es Zeit und Reifung, die Beziehungen zwischen ihnen zustande zu bringen.

Diese Forderung FREUDENTHALS wurde als „*Prinzip der Beziehungshaltigkeit*“ von WITTMANN (1981, S. 149) in seinem Buch „Grundfragen des Mathematikunterrichts“ aufgenommen.

Seit etwa Mitte der 70er Jahre lässt sich ein internationaler Trend zur stärkeren Berücksichtigung des Wirklichkeitsbezuges der Mathematik im Unterricht verzeichnen sowie rückläufige Tendenzen im Hinblick auf formale Strenge (vgl. SCHUPP, 1988, S. 9-10).

FÜHRER (1997, S. 112) warnt jedoch vor einer Überbetonung der Anwendungsbezüge:

> Es ist für jeden mathematisch Gebildeten offensichtlich, daß die Herleitung des mathematischen Schulstoffs aus alltäglichen oder naiv zugänglichen Anwendungsinteressen nur gelegentlich gelingen kann und daß die Legitimation der üblichen Sekundarstufenmathematik allein aus solchen Interessen unsinnige Vorstellungen von der Mathematik und ihrer gesellschaftlichen Bedeutung bestärken würde.

Entsprechend empfiehlt FÜHRER (1997, S. 112) eine „gemäßigt anwendungsfreundliche Grundsatzposition“:

> Der Mathematikunterricht soll - unter anderem - Anwendungsbezüge aufzeigen und erklären.

Unabhängig von der Unterschiedlichkeit mathematischer Vernetzungen, sowohl fachintern als auch mit der außermathematischen Wirklichkeit, und den verschiedenen sich daraus ergebenden möglichen Akzentuierungen formuliert WITTMANN (1981, S. 77) zwei grundsätzliche didaktische Prinzipien Vernetzungen betreffend, das *Integrationsprinzip* und das *Prinzip des Lernens in Zusammenhängen*:

> Das Individuum kann mit der Umwelt umso erfolgreicher in Wechselwirkung treten, je vollständiger und mobiler seine Erkenntnisse (Schemata) in Beziehungsnetzen integriert und organisiert sind. *Man hat daher im Unterricht auf die Schaffung von Beziehungsnetzen und Sinnzusammenhängen hinzuarbeiten* (Integrationsprinzip).
> Die Integration soll bereits bei der Erarbeitung einer Erkenntnis einsetzen (*Prinzip des Lernens in Zusammenhängen*).

Als methodische Vorgehensweise, Unterricht transparent zu strukturieren, fordert FÜHRER (1997, S. 86), dass die zahllosen Einzelheiten, die die Lehrpläne füllen, als durchsichtige Konsequenz *weniger* Grundgedanken dargestellt werden.

> Diese wenigen Grundgedanken müssen eine möglichst weitreichende, wenn nicht gar eine die Schulmathematik und Grundzüge der Mathematik im Großen überdeckende *organisierende Potenz* haben.

Eine seiner grundlegenden Thesen für den Mathematikunterricht lautet daher (S. 86):

> Der Mathematikunterricht muß vom Lehrer um wenige beziehungsreiche Grundgedanken konzentriert werden. Sie sind den Schülern im Laufe der Schulzeit zunehmend bewußter und in ihrer Vielschichtigkeit deutlicher zu machen. („Spiralprinzip“)

Obige Ausführungen zeigen, dass Vernetzungen im Mathematikunterricht in den vergangenen Jahrzehnten in Deutschland insgesamt ein hoher Stellenwert beigemessen wurde; es unterscheiden sich jedoch die jeweiligen Akzentuierungen der unterschiedlichen Arten von Vernetzungen und ferner Ansichten bzgl. methodischer Vorgehensweisen im Unterricht.

2.2 Vernetzungen im Mathematikunterricht – ein international erhobenes Unterrichtsziel

Über die Bedeutung der Vernetzung mathematischer Inhalte als wichtiges Unterrichtsziel besteht international ein breiter Konsens.

So erhob das NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) Vernetzungen zum Thema seines Jahrbuchs 1995, das unter dem Titel *Connecting Mathematics across the Curriculum* herausgegeben wurde. Die Einleitung des Jahrbuchs (S. VII) beginnt mit den Worten:

> One of the four cornerstones of the NCTM *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* asserts that connecting mathematics to other mathematics, to other subjects of the curriculum, and to the everyday world is an important goal of school mathematics. Among recent reports calling for reform in mathematics education, there is widespread consensus that mathematics must be made accessible to all students, that it must be presented as a connected discipline rather than a set of discrete topics, and that it must be learned in meaningful contexts that connect mathematics to other subjects and to the interests and experience of students.

Die Auswertungen der TIMS-Studie zeigen, dass speziell auch unter Lehrern weitgehend Einigkeit darüber besteht, mathematische Themen in mehr als nur einer Repräsentation für Schüler erfahrbar zu machen, wodurch die Idee der Mathematik als Netzwerk von Konzepten und Prozeduren verstärkt wird (BEATON et al., 1996, S. 138):

> There was nearly complete agreement by teachers across countries, however, that more than one representation should be used in teaching a mathematics topic. In only Hungary and Thailand did fewer than 80% of the eight-grade students have teachers that agreed with this approach. … Also, using data in different formats reinforces the idea of mathematics as a network of interconnected concepts and procedures.

Die neue internationale PISA 2000[1]-Studie untersucht in der Domäne Mathematik den Ertrag schulischer Ausbildung an „mathematical literacy", wörtlich wie folgt

[1] PISA steht für „Programme for International Student Assessment" – ein Programm zur zyklischen Erfassung basaler Kompetenzen der nachwachsenden Generation, das von der Organisation für wirtschaftliche Zusammenarbeit und Entwicklung (OECD) durchgeführt und von allen Mitgliedsstaaten gemeinschaftlich getragen und verantwortet wird (vgl. z.B. ARTELT, BAUMERT,

definiert (ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT (OECD), 2000, S. 10):

> The capacity to identify, to understand, and to engage in mathematics and make well-founded judgements about the role that mathematics plays, as needed for an individual's current and future private life, occupational life, social life with peers and relatives, and life as a constructive, concerned and reflective citizen.

Durch dieses Konstrukt der „mathematical literacy" werden Vernetzungen zu einem zentralen Untersuchungselement der PISA-Studie, wie durch OECD (1999, S. 48) betont wird:

> ... for OECD/PISA, interconnections and common ideas are central elements.

Die Realisierung erfolgt durch den Aspekt der „big ideas" als eine der beiden Hauptkomponenten, auf denen die Organisation des PISA-OECD-Frameworks aufbaut. Unter den „big ideas" sind miteinander stark vernetzte mathematische Konzepte verstanden, die unter einem gemeinsamen übergeordneten Gesichtspunkt gesehen werden können (vgl. NEUBRAND, 1999, S. 22). Sie haben „den Vorteil, dass sie die Mathematik nicht in verschiedene separierte Themengebiete wie Algebra oder Geometrie aufspalten, sondern fachgebietsübergreifend mathematische Ideen realisieren"; sie bedingen Vernetzungen zwischen mathematischen Gebieten (NEUBRAND, 1999, S. 23).

Die „NCTM Principles and Standards for School Mathematics 2000" führen Vernetzungen („Connections") als einer von zehn „standards" auf. Es wird herausgestellt, dass das mathematische Verständnis von Schülern tiefer und nachhaltiger ist, wenn die Schüler mathematische Ideen verbinden können; ferner, dass ein Unterricht, der die Vernetztheit mathematischer Ideen betont, zudem die Nützlichkeit von Mathematik für Schüler erfahrbar macht (S. 64).

Der „Connections Standard" wird hier für alle Jahrgangsstufen von der Vorschule bis zur 12. Klasse definiert und entsprechende Unterrichtsempfehlungen bzw. –anweisungen werden ausgeführt, sowohl in inhaltlicher als auch in methodischer Hinsicht. Es werden drei zentrale Lernziele bzgl. Vernetzungen angegeben, auf die Unterrichtsprogramme („Instructional Programs") einer jeden Schulstufe

---

KLIEME, NEUBRAND, PRENZEL, SCHIEFELE, SCHNEIDER, SCHÜMER, STANAT, TILLMANN, WEIß, 2001). Die PISA-Studie ist eine international standardisierte Leistungsmessung, die von den Teilnehmerstaaten gemeinsam entwickelt wurde. Teilnehmer waren 32 Staaten, davon 28 Mitgliedsstaaten der OECD, die Zielpopulation waren 15-jährige Schüler. PISA erfasst drei Bereiche: Lesekompetenz (Reading Literacy), mathematische Grundbildung (Mathematical Literacy) und naturwissenschaftliche Grundbildung (Scientific Literacy).

ausgerichtet sein sollten (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 2000, S. 64):

> Instructional Programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to -
>
> - recognize and use connections among mathematical ideas;
> - understand how mathematical ideas interconnect and build on one another to produce a coherent whole;
> - recognize and apply mathematics in contexts outside of mathematics.

Das Wissen, das Schüler hiernach erwerben sollen, ist nicht zuletzt Grundlage für ein erfolgreiches mathematisches Problemlösen (siehe Abschnitt 2.3).

2.3 Vernetztes Denken und mathematisches Problemlösen – die psychologische Dimension

Eine fundamentale Bedeutung der Vernetzungsthematik für den Mathematikunterricht ist darin begründet, dass nur durch ein wirkliches Erschließen der Vernetzungen mathematischer Inhalte sowohl fachintern als auch mit außermathematischen Anwendungen Schülern das Lösen komplexerer Probleme gelingen kann.

> In the NCTM *Standards*, mathematical connections are characterized as problem-solving "tools". (HODGSON, 1995, S. 13-14)

Mathematisches Problemlösen wiederum ist ein integraler Bestandteil von Mathematiklernen. (In den „NCTM Principles and Standards for School Mathematics 2000" wird „problem solving" als einer der „standards" aufgeführt.)

Folgerichtig hebt KIEßWETTER (1993) Vernetzung als unverzichtbare, zentrale Leitidee für jedweden Mathematikunterricht hervor. Er führt aus, dass und welche Vernetzungen für das mathematische Problemlösen unentbehrlich sind (S. 5):

> Unverzichtbar sind Vernetzungen der Wissenselemente, von Verhaltens- und Handlungsmusterbausteinen, von sozialen und motivationalen Einbindungen mit- und untereinander in der Mathematik, wenn man diese primär als produktiven Prozeß versteht, bei dem es ja u.a. um die Lösung von Problemen geht. Beim Problemlösen werden vom erfolgreichen Bearbeiter vor allem zwei Vernetzungen benutzt. Das ist zum einen der Abruf eines zum Problem passenden Netzes von Wissensbausteinen aus dem Langzeitgedächtnis ins Arbeitsgedächtnis. Und da ist zum anderen die Gewinnung von weiteren Informationen und deren Vernetzung durch heuristische Strategien für die Weiterarbeit dieses Arbeitsgedächtnisses.

ZIMMERMANN (1991) weist allerdings darauf hin, dass – nicht nur in Deutschland – die Fähigkeit zum Denken in Zusammenhängen durch Problemlöseprozesse im Mathematikunterricht zu wenig geschult wird. Er führt aus, dass die Behandlung vernetzungsreicher „offener Probleme" im Mathematikunterricht eher eine Ausnahme ist. Einen Hauptgrund sieht er in der derzeitigen Organisation des Schulsystems mit den üblichen Methoden und Formen der Leistungskontrolle. Es werden, insbesondere für schriftliche Prüfungen, geschlossene Aufgaben und ergebnisorientierte Auswertungen bevorzugt, wodurch eher ein lineares Denken gefördert wird (S. 41).

Das Verstehen von Zusammenhängen ist indes nicht nur für das Lösen mathematischer Aufgaben von Bedeutung, es ist vielmehr Grundlage für jedes erfolgreiche vernetzte Denken. Mit diesem jedoch haben Menschen offenbar Schwierigkeiten (DÖRNER,1989[1]).

Der Begriff *„vernetztes Denken"* geht auf VESTER zurück, der das Wort „vernetzt" als neues und prägnantes Adjektiv in den Titel seiner 1978 eröffneten Wanderausstellung „Unsere Welt - ein vernetztes System" aufnahm. VESTER machte in zahlreichen Veröffentlichungen und Reden darauf aufmerksam, dass die Wirklichkeit geprägt ist durch systemische Zusammenhänge, dass einzelne Systemelemente wie auch ganze Systeme miteinander zu schillernden Wirkungsgefügen verflochten sind und ein Verstehen dieser Beziehungen und entsprechendes Denken in systemischen Zusammenhängen in unserer hoch technologisierten Welt von besonderer Bedeutung sind (siehe VESTER, 1990, 1995). Entsprechend fordert VESTER (1999, S. 18) in seinem Buch „Die Kunst vernetzt zu denken":

> Das vernetzte Denken müßte in Schule und Weiterbildung ab sofort einen angemessenen Platz finden. Denn in Zukunft werden diejenigen von uns, die darin nicht ausgebildet sind, mit Sicherheit noch größere Probleme haben, das Mosaik der realen Wechselwirkungen zu interpretieren und mit ihren Spielregeln zurechtzukommen.

Die Mathematik als Unterrichtsfach kann wesentlich für die *Förderung des vernetzten Denkens*, also des Denkens in systemischen Zusammenhängen, sein. Dies

[1] DÖRNER berichtet in seinem Buch „Logik des Misslingens" (1989) über Beobachtungen von Fehlern, die Menschen beim Umgang mit komplexen, vernetzten Systemen machen und arbeitet Ursachen für diese Fehler heraus. Ohne auf Details einzugehen, seien hier die von ihm genannten Hauptursachen kurz aufgelistet:

- die Langsamkeit des menschlichen Denkens; die Tatsache, dass „unser bewußtes Denken hübsch Schritt für Schritt von sich geht, „eins nach dem anderen", und nur wenige Informationen pro Zeiteinheit verarbeiten kann" (Hieraus resultieren Ökonomietendenzen, denen Menschen durch Anwendung verschiedener Strategien nachkommen, die allerdings auch zur Ursache von Unzulänglichkeiten und Denkfehlern werden können.),
- die Tendenz zur Bewahrung eines positiven Bildes von der eigenen Kompetenz und Handlungsfähigkeit, die eine sehr große Rolle als Determinante der Richtung und des Ablaufs von Denkprozessen zu spielen scheint,
- die relativ geringe Geschwindigkeit, in der neues Material in das Speichersystem des menschlichen Gedächtnisses hineingebracht werden kann (geringe „Zuflusskapazität"),
- die Fixierung der Aufmerksamkeit auf die gerade aktuellen Probleme, was zu Auslassungen im Denkprozess führt.

Inwiefern sich diese Erkenntnisse speziell auf das Denken im vernetzten System Mathematik übertragen lassen, müsste genauer untersucht werden.

beruht zum einen darauf, dass sich die Mathematik als ein Gebilde vielfältig miteinander verbundener, verknüpfter, also vernetzter Inhalte darstellt. Die einzelnen Vernetzungen können zudem auch noch unterschiedlicher Natur sein, je nachdem in welcher Relation einzelne mathematische Objekte zueinander stehen (vgl. Kapitel 3.3). Zum anderen ist es durch die Mathematik möglich, auf einer Abstraktionsebene komplexe Systeme zu beschreiben, wodurch die Mathematik in einem engen Zusammenhang mit der außermathematischen Wirklichkeit steht. Systemische Zusammenhänge werden im Zuge der Mathematisierung auf Teile des Netzwerkes der Mathematik übertragen und umgekehrt; dabei entspricht jeder „Übertragung“ eine Vernetzung der mathematischen Ebene mit der Wirklichkeitsebene.

Im Unterricht erfahren die Schüler einen Bruchteil des mathematischen Netzwerkes und seiner Verbindungen zu anderen Wissensbereichen. Die Tragweite dieser Wissensgrundlagen, die Bedeutung ihres richtigen Verständnisses und ihrer Anwendung geben und gaben wiederholt Anlass zu Forderungen nach einer besseren Vernetzung mathematischer Inhalte im Unterricht.

2.4 Vernetzungen im Mathematikunterricht - Stellungnahmen und Erklärungen zu Curricula

Bereits in älteren *Stellungnahmen der DMV* wird die Herstellung von Zusammenhängen, das Erfahren der Beziehungshaltigkeit der Mathematik als eine zentrale Forderung an den Unterricht gestellt.

So wird in der *Denkschrift zum Mathematikunterricht am Gymnasium von 1976*[1] das Herausarbeiten struktureller Zusammenhänge in den verschiedenen Schulstufen und in verschiedenen Unterrichtsgebieten verlangt und deren Bedeutung u.a. zur Erkennung von Querverbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten und für das Lösen von Problemen herausgestellt.

> Die Beschäftigung mit abstrakten mathematischen Strukturen dient nicht nur dazu, die Vielzahl mathematischer Objekte und Ergebnisse zu ordnen, sondern auch dazu, neue Erkenntnisse für die Lösung konkreter Probleme zu liefern. ... Strukturelle Zusammenhänge sollten bei der Behandlung konkreter mathematischer Sachverhalte in den verschiedenen Schulstufen und in verschiedenen Unterrichtsgebieten herausgearbeitet werden ... das Erkennen und Ausnutzen struktureller Beziehungen [ist] wichtiger ... als das Führen von Beweisen in einer axiomatisch vorgegebenen Struktur ... Durch eine an konkreten mathematischen Fragestellungen orientierte Beschäftigung mit strukturellen Zusammenhängen werden darüber hinaus Querverbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten sichtbar. Das ist notwendig, damit Mathematik nicht als bloße Addition isolierter Teile erscheint.

Es wird als unbedingt notwendig erachtet, dass „Schüler Mathematik nicht ausschließlich als "reine" Mathematik erfahren, sondern Verständnis für die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Mathematik entwickeln“.

In der Beschreibung der Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten, die von jedem Abiturienten erwartet werden, wird ausgeführt:

> Die Aufzählung einzelner Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten darf nicht zu dem Mißverständnis verleiten, daß der Mathematikunterricht bloß aus deren Einübung besteht und sich in der Vermittlung isolierter Wissenselemente erschöpft; vielmehr müssen diese innerhalb sinnvoller Zusammenhänge und Problemstellungen erarbeitet werden.

---

[1] DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG E.V. *Denkschrift (1976). Zum Mathematikunterricht an Gymnasien*. Herausgegeben von Heinz BAUER. <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/> (27.08.98).

In der *Denkschrift der DMV von 1979 zur Lehrerausbildung*[1] werden Defizite in der Lehrerausbildung, die zum großen Teil im Bereich der Vernetzungen mathematischer Inhalte liegen, aufgezeigt. Es wird darauf hingewiesen, dass Lehramtskandidaten „nicht selten ein falsches oder zumindest schiefes Bild der Mathematik" in ihre Berufspraxis mitnehmen und ihre Einstellungen später auch auf den Schulunterricht übertragen. Wiederholt wird die Forderung nach einer verstärkten Verdeutlichung von Verbindungen mathematischer Inhalte erhoben.

> Es sollten ..., wo immer möglich historische Bezüge und klassische Problemstellungen in der Mathematik aufgewiesen und vertieft werden. Von hieraus ergeben sich Beziehungen der Mathematik zu anderen Fächern ...
>
> [Es] sollten ... einsemestrige **Einführungsvorlesungen** konzipiert werden, die inhaltlich abgerundet sind und möglichst viele Querverbindungen zu anderen Gebieten aufzeigen. ... Während der gesamten mathematischen Ausbildung sollten die Verbindungen der Mathematik zu anderen Fächern (insbesondere den Natur- und Wirtschaftswissenschaften) in einsichtiger Weise herausgestellt werden. An einigen wichtigen Stellen sollte sich der Lehramtskandidat mit Anwendungsproblemen der Mathematik beschäftigt und näher vertraut gemacht haben. ...
>
> Der Nutzen der linearen Algebra für die Analysis muß schon in den Anfängervorlesungen deutlich werden. ...
>
> Besonders fruchtbar für die lineare Algebra ... sind die Beziehungen zur analytischen Geometrie. ... Hierbei sollte ein Student das lebendige Wechselspiel zwischen geometrischer Anschauung und präzisem algebraischem Formalismus kennenlernen. In späteren Teilen der Vorlesung ... sollten auch Querverbindungen [zur Analysis] ... immer wieder hervorgehoben werden ...
>
> Die Algebra hat sich stets in engem Kontakt zu anderen mathematischen Disziplinen entwickelt ... Gelegentliche Hinweise darauf sind für Studenten höchst nützlich.
>
> Eine für Lehramtskandidaten geeignete Vorlesung über Topologie sollte sich zum Ziel setzen, Bezüge zwischen Analysis, Geometrie und Algebra sichtbar werden zu lassen.
>
> Vorlesungen [über Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse] geben ... die Gelegenheit, die zahlreichen Querverbindungen der Stochastik zu anderen Gebieten der Mathematik, insbesondere zur Analysis, aufzuzeigen.

Auch 20 Jahre später stehen nun die beklagten Mängel bezüglich Vernetzungen wieder auf der Tagesordnung, wie TIMSS belegt (vgl. Abschnitt 2.5). Die Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrern muss entsprechend verbessert bzw. verstärkt werden.

In der Weiterentwicklung der Denkschrift der DMV von 1979 zur Lehrerausbildung, der *DMV/GDM-Denkschrift zur Lehrerbildung* 2001[2], wird

---

[1] DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG E.V. *Denkschrift (Juli 1979). Zur Ausbildung von Studierenden des gymnasialen Lehramts im Fach Mathematik.* Herausgegeben von H. WITTING. <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/> (27.08.98).

[2] DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG E.V.; GESELLSCHAFT DER DIDAKTIK DER MATHEMATIK. Gernot STROTH, Günter TÖRNER, Rudolf SCHARLAU für die DMV; Werner BLUM, Kristina REISS für die GDM. Februar 2001. *Denkschrift zur Lehrerbildung der DMV/GDM.*

hervorgehoben, dass sich die Mathematik immer mehr zu einer Schlüssel- und Querschnittswissenschaft entwickelt, dass sie vermehrt in Bereiche anderer Wissenschaften, der Industrie, der Wirtschaft und des täglichen Lebens eindringt. Insbesondere wird daher die These vertreten, dass der Vermittlung von mathematischen Anwendungsfeldern auch im Lehramtsstudiengang eine wesentliche Bedeutung zukommt. Neben einschlägigen Seminaren etwa zur Modellierung in den Ingenieur- oder Sozialwissenschaften werden Industriepraktika als Ergänzung vorgeschlagen. Ferner wird gefordert, dass Hochschulen geeignete Programme für die Fort- und Weiterbildung von Lehrern anbieten; als Schwerpunkte werden insbesondere Bereiche der Anwendung von Mathematik sowie Modellbildung herausgestellt.

Vorschläge zur Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und –lehrern für das Lehramt an Gymnasien in Deutschland. <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/archiv/memoranda/lehrer.html>. (25.02.2002).

2.5 TIMSS - Ergebnisse, Erklärungshypothesen und Forderungen

Die dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie, TIMSS, hat deutschen Schülern sowohl in den Klassenstufen 7 und 8 als auch in den Jahrgängen 12 und 13 der Sekundarstufe II *defizitäre Mathematikleistungen* bescheinigt. Am Ende der 8. Jahrgangsstufe liegen danach die deutschen Schülerleistungen in Mathematik nahe am internationalen Mittelwert. Dies entspricht einem Fähigkeitsniveau, auf dem mathematische Routineverfahren, die Unterrichtsstoff der 6. bis 8. Jahrgangsstufe sind, einigermaßen sicher ausgeführt werden können. Dieses Leistungsniveau erreichen die deutschen Schüler in einem sechs bis zwölf Monate höheren Lebensalter als die Schüler der übrigen 11 Länder der Mittelgruppe, die auf demselben Leistungsniveau liegen. Die Schüler der Mehrzahl der nord-, ost- und westeuropäischen TIMSS-Teilnehmerstaaten gehören im Fach Mathematik einer leistungsstärkeren Gruppe an als deutsche Schüler. Die Mathematikleistungen der internationalen Spitzengruppe, die von asiatischen Ländern gebildet wird, liegen für deutsche Schüler in unerreichbarer Höhe. Diese Schülerleistungen stehen für ein qualitativ anderes Niveau mathematischen Verständnisses.

Diese alarmierenden Ergebnisse werfen sofort die Frage nach den *Gründen* auf. Hierfür kann man mit Hilfe von TIMSS einige Antworten finden bzw. begründete Erklärungshypothesen entwickeln. Eine ganze Reihe der vielfältigen denkbaren Ursachen zur Begründung der äußerst stark differierenden Mathematikleistungen im 7. und 8. Jahrgang von Schülern der TIMSS-Teilnehmerstaaten wurden in der Studie auf einen Zusammenhang mit der gemessenen Schülerleistung hin überprüft.

Die nächstliegende Vermutung ist, eine Begründung zur Klärung von Leistungsunterschieden der einzelnen Länder in möglicherweise sehr unterschiedlichen Mathematik-Curricula zu finden. Es zeigt sich jedoch, dass es ein internationales Kerncurriculum des Mathematikunterrichts in der Mittelstufe bezüglich einzelner zu behandelnden Inhalte gibt. Es besteht ein großer Konsens in Fragen über erforderliche mathematische Kompetenzen und über generelle Prinzipien der Stoffauswahl. Dazu zählen vor allem mathematisches Problemlösen, der verständige Umgang mit mathematischen Symbolen, Begriffen und Modellen sowie mathematisches Denken in inner- und außermathematischen Konzepten (BAUMERT & LEHMANN, 1997, S. 60). Die große curriculare Übereinstimmung der TIMSS-Teilnehmerstaaten gestattete es, eine sehr aussagekräftige Leistungsvergleichsstudie anzustellen, lässt aber gleichzeitig über die hohen festgestellten Leistungsunterschiede der Länder staunen.

„Die Muster der deskriptiven Ergebnisse“ von TIMSS „sprechen dafür, systematische Erklärungen für substantielle Leistungsunterschiede im Bereich *genereller Wertschätzung von schulischem Lernen und elterlicher Unterstützungsleistungen* und in der *Gestaltung des Fachunterrichts selbst* zu suchen“ (BAUMERT & LEHMANN, 1997, S. 89, eigene Hervorhebung).

Nach BAUMERT und LEHMANN (1997, S. 19) wird durch TIMSS deutlich, dass die für unterschiedliche Leistungsentwicklung verantwortlichen *Faktoren des Unterrichts* weniger die jeweils eingesetzten Sozialformen sind, „sondern vielmehr die *Aufgabenstellung* und die im Bearbeitungsvorgang *ausgelösten kognitiven Prozesse*“ (eigene Hervorhebung).

Dies geht auch aus einer Begleitstudie zu TIMSS hervor, die die drei Länder Deutschland, Japan und USA intensiviert vergleicht. Sie zeigt, dass Japans Schüler denselben Stoff variationsreicher und mathematisch anspruchsvoller durchnehmen. Während im deutschen Mathematikunterricht Konzepte entwickelt werden, die auf eine einzige Lösung hinführen, ist japanischer Mathematikunterricht ein Problemlöseunterricht mit oftmals offenen Aufgabenstellungen, die unterschiedliche Lösungen zulassen. In den Übungsphasen werden in Deutschland Aufgaben gelöst, die denen im Unterricht besprochenen ähnlich sind, in Japan sind die Übungsaufgaben auf neue Anwendungskontexte übertragene Aufgaben. Auch ist in Japan der gesamte Unterricht in sich *enger vernetzt* (BAUMERT & LEHMANN, 1997, S. 215ff).

Ob Unterrichtselemente, die der TIMSS-Studie zufolge in anderen Ländern erfolgreich eingesetzt werden, auch in Deutschland zu ähnlich positiven Ergebnissen führen würden, ist angesichts unterschiedlicher länderspezifischer Kulturen und anderen Bildungssystemen mit ganz anderen Leistungsanforderungen fraglich.

Um „zu einem für unsere Gesellschaft gangbaren erfolgreichen Mathematikunterricht“ zu gelangen, bedarf es deshalb „besonderer Anstrengungen in mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit“ (TÖRNER, BLUM & WULFTANGE, ERKLÄRUNG DER FACHVERBÄNDE DMV, GDM, MNU, 19. Februar 1997).

Insbesondere müssen wir mehr über den Bereich des konzeptuellen Verständnisses in der Mathematik, der nach TIMSS den zentralen Schwachpunkt deutscher Schüler ausmacht (BAUMERT & LEHMANN, 1997, S. 56), erfahren. NEUBRAND, NEUBRAND und SIBBERNS (1998, S. 26) führen aus, dass nach TIMSS deutsche Schüler eher dann Schwierigkeiten haben, eine Aufgabe zu lösen,

- wenn die flexible Verbindung über mehrere Sachgebiete hinweg erforderlich ist, z.B. von geometrischen Fragestellungen zu Berechnungen,
- wenn mehrere Schritte miteinander zu kombinieren sind, um eine Aufgabe zu lösen,
- wenn unterschiedliche Aspekte eines Gegenstands gleichzeitig angesprochen sind,
- wenn Umgang mit Ungewohntem verlangt wird, z.B. Begriffe nicht in vertrauten Kontexten stehen,
- wenn komplexere Modellierungen erwartet werden.

Die Ergebnisse von TIMSS bewirkten somit ein Anprangern u.a. des Defizits im Bereich der Vernetzungen durch alle namhaften deutschen mathematisch-naturwissenschaftliche Fachverbände.

So heißt es in der *Stellungnahme der DMV im Rahmen der Anhörung zu TIMSS bei der Kultusministerkonferenz am 26./27.06.1997 in Bonn*[1] zur Lage der Mathematik in Deutschland:

> ...einige negative Fakten sind ... unschwer zu benennen ... :
> - mangelnde Kohärenz des gesamten Curriculums im *erlebten* Unterricht; der kumulative Charakter mathematischen Wissens wird nicht deutlich;
> - Vernachlässigung von vielschichtigen Problemlöseansätzen zugunsten rein technischer Aspekte; ...

Unter den Vorschlägen für Maßnahmen zur Verbesserung der Situation wird ausgeführt:

> Es ist ein Anliegen der DMV, daß die Fortschritte der Mathematik facettenreicher in den Unterricht eingebracht werden. ... Die DMV beobachtet mit Sorge, daß die Mathematik im Unterricht oft nur als ein formalistisches Regelsystem präsentiert wird.

In der *Erklärung der Fachverbände DMV, GDM, MNU vom 19.02.1997*[2] wird formuliert:

> Zu kurz kommen [im Mathematikunterricht in Deutschland] insbesondere das selbständige, aktive Problemlösen, das inhaltliche, nicht-standardisierte Argumentieren sowie das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt.

Die Richtung, in die sich der Unterricht verändern muss, wird mit einigen Schlagwörtern angedeutet:

---

[1] TÖRNER (Hrsg.). Stellungnahme der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im Rahmen der Anhörung zu TIMSS bei der Kultusministerkonferenz am 26./27.6.1997 in Bonn. <http://www.uni-duisburg.de/FB11/PRESSE/DMV970626.html>. (23.11.97).

[2] TÖRNER, DMV; BLUM, GDM; WULFTANGE, MNU. 19.02.1997. *Erklärung der Fachverbände DMV, GDM, MNU.* Duisburg, Kassel, Hannover. <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/DMV/> (23.11.97).

> Mehr selbständiges und aktives Mathematiktreiben, mehr fachübergreifendes Lernen, mehr inhaltliches Argumentieren, mehr kooperatives Problemlösen und systematisches Wiederaufgreifen, ja Ausbauen von behandelten Inhalten in neuen Zusammenhängen.

In einer weiteren *Erklärung der Fachverbände DMV, GDM, MNU vom 21.05.1998*[1] wird zusätzlich ausgeführt:

> Eine zu häufig nur additive Aneinanderreihung der Inhalte leistet einem Schubladendenken in der Mathematik Vorschub. Auf diese Weise werden die zu Sicherheit im mathematischen Umgang notwendigen Wiederholungs-, Vertiefungs- und Vernetzungseffekte beim Schüler nicht gefördert ...

In der gemeinsamen *Erklärung der Fachverbände MNU, MNFT*[2]*, GDNÄ*[3]*, DMV, VDBiol*[4]*, GDCh*[5]*, DPG*[6]*, AFNM*[7]*, GDM, GDCP*[8] *vom Mai 1998 „Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung an der Schwelle zu einem neuen Jahrhundert“*[9] wird unter der Bedeutung der mathematischen und naturwissenschaftlichen Bildung angemerkt:

> Mit seinem Blick auf die *Vernetzung* naturwissenschaftlicher, technischer, ökologischer, ökonomischer und demografischer Zusammenhänge leistet der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung eines grundlegenden Verständnisses aktueller und langfristiger Probleme. Die Mathematik und die Naturwissenschaften schaffen damit auch Grundlagen für eine rationale Diskussion von Werte-Entscheidungen. (Eigene Hervorhebung)

---

[1] TÖRNER, DMV; BLUM, GDM; WULFTANGE, MNU. 21.05.1998. *Wieder schlechte Noten für den Mathematikunterricht in Deutschland - Anlaß und Chance für einen Aufbruch - Erklärung der Fachverbände DMV / GDM / MNU zu den Ergebnissen der internationalen Mathematikstudie TIMSS-3*. Duisburg, Kassel, Hannover. <http:// www. mathematik. uni-bielefeld. de/ DMV/ archiv/ memoranda/ timss3. html> (27.08.98).

[2] MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHER FAKULTÄTENTAG

[3] GESELLSCHAFT DEUTSCHER NATURFORSCHER UND ÄRZTE

[4] VERBAND DEUTSCHER BIOLOGEN

[5] GESELLSCHAFT DEUTSCHER CHEMIKER

[6] DEUTSCHE PHYSIKALISCHE GESELLSCHAFT

[7] ARBEITSGEMEINSCHAFT FACHDIDAKTIK DER NATURWISSENSCHAFTEN UND DER MATHEMATIK

[8] GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER CHEMIE UND PHYSIK

[9] ASSELBORN, MNU; BERG, MNFT; GANTEN, GDNÄ; HOFFMANN, DMV; DAUMER, VDBiol; MEYER-GALOW, GDCh; BRADSHAW, DPG; SCHMIDT, AFNM; BLUM, GDM; SCHÖN, GDCP. Mai 1998. *Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung an der Schwelle zu einem neuen Jahrhundert*. Bonn. <http://www.dpg-physik.de/veroef/bildung.html>. (27.08.98).

Es wird ferner im Hinblick auf ein nachhaltig erfolgreiches Lernen und Lehren in Mathematik und in den naturwissenschaftlichen Fächern ausgeführt:

> ... zur Unterrichtsgestaltung [gehören]:
>
> - selbständige und aktive Beschäftigung mit den Unterrichtsgegenständen,
> - inhaltliches Argumentieren und Problemlösen,
> - systematisches Wiederaufgreifen und *Vernetzen* von Inhalten.
>
> Das im letzten Punkt verlangte *Vernetzen* enthält dabei sowohl das Herstellen innerfachlicher Beziehungen wie auch die Anbindung mathematischer bzw. naturwissenschaftlicher Themen an Alltags- und Umwelterfahrungen; dieses fachübergreifende Lernen hat auf allen Schulstufen seinen sinnvollen Platz. (Eigene Hervorhebung)

In Bezug auf die Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung wird gefordert:

> Sowohl in der fachwissenschaftlichen wie in der fachdidaktischen Ausbildung müssen in Zukunft von Seiten der Hochschulen verstärkt fachübergreifende Lehrinhalte berücksichtigt und angeboten werden, damit die Lehrer das *vernetzte Denken* selbst erlernen, das sie später an die Schüler vermitteln sollen. (Eigene Hervorhebung)

Immer wieder neu wird die Forderung erhoben, dass fachbezogene Veranstaltungen für Lehramtsstudierende ein breites Überblickswissen an Stelle von unzusammenhängenden Vertiefungen/Spezialisierungen ermöglichen sollten, ferner wird auf die Notwendigkeit einer stärkeren Anwendungsorientierung hingewiesen (vgl. *Bericht der von der KMK eingesetzten „*GEMISCHTE KOMMISSION LEHRERBILDUNG*" vom Oktober 1999 zu „Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland"*[1]*; Brief des ersten Vorsitzenden des MNU, Wolfgang Asselborn, an den Präsidenten der Ständigen Konferenz der Kultusminister, 2000*[2]*; Denkschrift zur Lehrerbildung der DMV/GDM vom Februar 2001 „Vorschläge zur Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und –lehrern für das Lehramt an Gymnasien in Deutschland"*[3]*;* ROSS & KAISER, 2001, S. 515).

---

[1] Von der KMK eingesetzten „GEMISCHTE KOMMISSION LEHRERBILDUNG". Oktober 1999. Zusammenfassung in 10 Punkten des Berichts an die KMK von REICHEL: *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland*.
<http://wmax04.mathematik.uni-wuerzburg.de/~gdm/Stellungnahmen/index.htm>. (08.09.2001).

[2] ASSELBORN (erster Vorsitzende des MNU). 2000. *Brief an den Präsidenten der Ständigen Konferenz der Kultusminister*.
<http://wmax04.mathematik.uni-wuerzburg.de/~gdm/Stellungnahmen/index.htm>. (08.09.2001).

[3] STROTH, TÖRNER, SCHARLAU für die DMV; BLUM, REISS für die GDM. Februar 2001. *Denkschrift zur Lehrerbildung der DMV/GDM. Vorschläge zur Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und –lehrern für das Lehramt an Gymnasien in Deutschland*.
<http://wmax04.mathematik.uni-wuerzburg.de/~gdm/Stellungnahmen/index.htm>. (08.09.2001).

Nach TIMSS scheint nicht nur die Fachwelt aufzuhorchen. Ein dringender Handlungsbedarf wird deutlich, zumal die erkannten Defizite existentielle Schlüsselqualifikationen für unsere Wirtschaft und Gesellschaft betreffen. Der Ruf nach einer besseren Vernetzung mathematischer Inhalte ist indes, wie im Abschnitt 2.4 angeführt, nicht neu. Man muss sich fragen, wieso ob der bestandenen Forderungen nach einer besser vernetzten Darstellung der Lerninhalte dennoch unbefriedigende Schülerleistungen festgestellt werden müssen. Ist man den erhobenen Forderungen vielleicht nicht oder nicht in ausreichendem Maße nachgekommen? Welche Schwachstellen in den Lehr- und Lernprozessen führen zu den verzeichneten Mängeln?

Bevor wir diesen Fragen nachgehen können, müssen wir jedoch etwas mehr über den allenthalben recht vage gebrauchten Begriff „Vernetzung“ wissen. Wir müssen uns über *Vernetzungsarten und Vernetzungsmuster* sowohl auf der *Ebene des Unterrichtsstoffes Mathematik* als auch auf der *kognitiven Ebene* von Lernenden Klarheit verschaffen.