

1 Einleitung¹

... wir wissen, daß *Schlüsselqualifikationen* nicht direkt erwerbbar oder gar vermittelbar sind, sondern der Weg zu ihnen über den mühsamen Aufbau einer *breiten und gut vernetzten Wissensbasis* in spezifischen Wissensdomänen führt, die auch den Ausgangspunkt für die Übertragung erworbenen Wissens in andere Anwendungsbereiche darstellen. Die *Mathematik* und die Naturwissenschaften sind solche Wissensdomänen (BAUMERT & LEHMANN, 1997, S. 18, eigene Hervorhebung).

In einer Zeit, in der Wissenschaft und Technik immer mehr an Bedeutung gewinnen und die Einflussnahme auf unsere Umwelt zunimmt, ist die Fähigkeit zu einem Denken in komplexen Systemen notwendiger denn je. Solche Systeme zeichnen sich durch ein Beziehungsgefüge aus, sie stellen ein Netzwerk von miteinander in Verbindung stehenden und sich gegenseitig beeinflussenden Faktoren dar.

Die Mathematik als Unterrichtsfach kann eine zentrale Rolle bei der Förderung des Denkens in systemischen Zusammenhängen, des vernetzten Denkens, spielen. Hierbei muss das konzeptuelle Verständnis besonders geschult werden.

Genau in diesem Bereich weisen aber die Mathematikleistungen deutscher Schüler Defizite auf, wie die *Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - The Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS, 1996), die unter dem Dach der „International Association for the Evaluation of Educational Achievement“ (IEA) in 45 Staaten durchgeführt wurde, zeigt (BAUMERT & LEHMANN, 1997, S. 56).

Für den Unterricht in deutschen Schulen belegen Begleitstudien von TIMSS in den Klassenstufen 7 und 8, dass hier - verglichen mit dem erfolgreicheren Unterricht in Japan - „das selbständige aktive Problemlösen, das inhaltliche, nicht-standardisierte Argumentieren sowie das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt zu kurz kommen“ (TÖRNER, BLUM & WULFTANGE, Erklärung der Fachverbände DMV², GDM³,

¹ **Hinweis:** Aus Gründen der Lesbarkeit wird in der vorliegenden Arbeit auf die doppelte Nennung von männlicher und weiblicher Form verzichtet.

² DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG E.V.

³ GESELLSCHAFT DER DIDAKTIK DER MATHEMATIK

MNU¹, 19. Februar 1997). Die Ergebnisse des dritten Teils der TIMS-Studie, TIMSS-3, in der u.a. die mathematischen Schülerleistungen in den Abschlussjahren 12 und 13 der Sekundarstufe II gemessen wurden, bekräftigen dieses Urteil. Auch scheinen im deutschen Mathematikunterricht „ein wiederholendes und vertiefendes Wiederaufgreifen weiter zurückliegender Stoffe und deren Vernetzung“ ebenfalls „zu kurz [zu] kommen“ (TÖRNER, BLUM & WULFTANGE, Erklärung der Fachverbände DMV, GDM, MNU, 21. Mai 1998).

Nicht zuletzt aufgrund der Ergebnisse von TIMSS wird in Deutschland die Forderung nach einer besseren Vernetzung mathematischer Lerninhalte immer lauter. Zwecks ihrer erfolgreichen Erfüllung müssen für unsere Gesellschaft und unser Bildungssystem gangbare Wege erst gefunden werden.

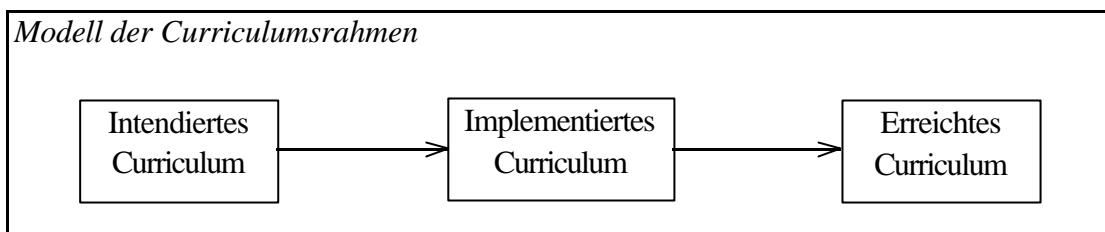
Eine Untersuchung der Vernetzung mathematischer Inhalte, ihrer Präsentation im Unterricht, der Art und Weise wie Schüler Vernetzungen von Unterrichtsinhalten begreifen, behalten und diese Kenntnisse bei Problemlösungsprozessen anwenden, erscheint vor oben dargestelltem Hintergrund nicht nur sinnvoll, sondern auch notwendig.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Verfolgung von Vernetzungen bei ihrer Übertragung durch Lehr- und Lernprozesse aus dem Unterrichtsstoff Mathematik auf die kognitive Ebene von Schülern zwecks Lokalisierung und Präzisierung von Defiziten.

Mathematische Inhalte als Gegenstand von Lehr- und Lernprozessen basieren auf Vorgaben von Richtlinien und Lehrplänen sowie Inhalten von Schulbüchern und Unterrichtsmaterialien, dem sog. *intendierten Curriculum*; ihnen gehören vorgesehene Unterrichtsinhalte samt deren Vernetzungen an. Diese werden durch Unterricht schließlich in den Wissensbestand von Schülern, das sog. *erreichte Curriculum*, transferiert. Das Bindeglied zwischen dem Unterrichtsstoff und dem Wissen, das Schüler erwerben, ist der Lehrer als Vermittler. Er bestimmt die im Unterricht umgesetzten Lerninhalte, das sog. *implementierte Curriculum*. Damit sind durch die Rahmen des intendierten Curriculums, des implementierten Curriculums und des erreichten Curriculums drei wesentliche Schnitte in den Lehr- und Lernprozessen gegeben. Diese Überlegungen führten zum Modell der Curriculumsrahmen, das der TIMS-Studie (und vorher bereits der Zweiten

¹ DEUTSCHER VEREIN ZUR FÖRDERUNG DES MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS E.V.

Internationalen Mathematikstudie - The Second International Mathematics Study SIMS¹) zugrunde lag:



Die *Curriculumsrahmen* bieten sich als *Kontrollinstanzen* zur Verfolgung von Vernetzungen mathematischer Objekte in Lehr- und Lernprozessen an. Sie werden in der vorliegenden Arbeit als zentrales Hilfsmittel und damit als Teil einer Modellierung zur Untersuchung von Vernetzungen eingesetzt.

Eine weitere verwendete Modellierung beruht auf der in der vorliegenden Arbeit gegebenen begrifflichen Fundierung des allenthalben recht vage gebrauchten Begriffs „Vernetzung“. Sie verwendet graphische Darstellungen zur Repräsentation von Vernetzungen und dient als Hilfsmittel zur (vergleichenden) Erhebung von Vernetzungen.

Die Arbeit stellt nach einem theoretischen Teil eine exemplarische Untersuchung vor. Hier werden fachsystematische Vernetzungen sowie Modellvernetzungen (i.e. bestimmte anwendungsbezogene Vernetzungen) zu einem speziellen Unterrichtsthema fokussiert, diese Vernetzungen in den drei Curriculumsrahmen erhoben und damit qualitative Ergebnisse bzgl. Vernetzungen in den einzelnen Curriculumsrahmen und ihrer Übertragung von einem Rahmen zum nächsten geliefert. Defizite bzgl. Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen werden sichtbar. Folgenden Fragen wird im einzelnen nachgegangen:

1. *Welche fachsystematischen Vernetzungen und welche Modellvernetzungen sind zum betrachteten Thema in den drei Curriculumsrahmen zu finden?*
2. *Welche Veränderungen der Vernetzungen treten bei der Übertragung aus dem Rahmen des intendierten Curriculums über den Rahmen des implementierten Curriculums hin zum Rahmen des erreichten Curriculums auf?*

¹ Die SIM-Studie wurde Anfang der 80er Jahre in 22 Ländern durchgeführt mit dem Ziel ein internationales Portrait mathematischer Ausbildung zu erstellen. Insbesondere wurden Curricula für Mathematik, Unterrichtspraxen sowie Schülerwissen vergleichend untersucht. (Vgl. ROBITAILLE, 1990.)

Die Inhalte der einzelnen Kapitel der vorliegenden Arbeit werden nachfolgend kurz wiedergegeben.

Kapitel 2 gibt einen Überblick über das Forschungsthema Vernetzung in der fachdidaktischen Diskussion. Es zeigt sich, dass dieses Thema keineswegs neu ist. Der Begriff „Vernetzung“ wurde zwar erst in den 70er Jahren geprägt, sinnverwandte Begriffe durchziehen jedoch die mathematikdidaktische Literatur. So werden zunächst Vernetzungen im Mathematikunterricht aus dem Blickwinkel der Mathematikgeschichte betrachtet. Weiterhin wird die Bedeutung von Vernetzungen aus psychologischer Sicht, insbesondere in der heutigen Zeit, herausgestellt. Eine Auslese verschiedener Stellungnahmen und Erklärungen zu Curricula zeigt, dass Mängel im Vernetzungsbereich immer wieder erkannt und beklagt wurden. Schließlich werden Ergebnisse der TIMS-Studie vorgestellt, die Defizite bzgl. Vernetzungen im Mathematikunterricht offenbar werden lassen; Defizite, die Handlungsbedarf aufzeigen. Letzteres wird auch in vielfachen Forderungen u.a. namhafter Fachverbände aufgegriffen, wodurch die vorliegende Arbeit rechtfertigt und motiviert ist.

Die Forderung nach einer besseren Vernetzung mathematischer Lerninhalte durch Unterricht wird immer wieder vielfach erhoben, der Begriff der Vernetzung jedoch kaum näher präzisiert. Eine begriffliche Fundierung erweist sich als nötig und wird in *Kapitel 3* für den Fokus „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ herausgearbeitet. Es wird herauskristallisiert, dass vernetzten Systemen eine Graphenstruktur zugrunde liegt, wobei Vernetzungen durch Kantenmengen von Graphen und damit durch Relationen mathematisch modelliert werden. Zur inhaltlichen Charakterisierung von Vernetzungen, die im Mathematikunterricht generiert werden, dienen als Fundgrube Dialoge rund um den Satz des Pythagoras. Es wird zwischen Vernetzungen innerhalb der Mathematik selbst und Vernetzungen von Mathematik mit nichtmathematischen Bereichen unterschieden und beide Vernetzungsarten inhaltlich weiter untergliedert. Nach einer ausführlichen Diskussion wird eine zusammenfassende Aufstellung einer entsprechenden Kategorisierung von relevanten Vernetzungen für den Mathematikunterricht gegeben. Schließlich wird noch auf statische und dynamische Aspekte des Vernetzungswissens eingegangen und diese mit den Begriffen des deklarativen bzw. prozeduralen Wissens in Bezug gebracht.

Im *Kapitel 4* werden Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen betrachtet. Zunächst wird auf die kognitive Dimension eingegangen; es werden Theorien und Modelle vorgestellt, die zur Beschreibung der Genese, Speicherung und Aktivierung von Vernetzungen dienlich sind und vor dem Hintergrund dieser theoretischen Basis

einige Anmerkungen zu Vernetzungen der einzelnen Kategorien zusammengetragen. Ferner wird auf unbewusste Vernetzungen Bezug genommen.

Im Weiteren beschränkt sich die Arbeit auf die Betrachtung einiger Vernetzungen aus dem innermathematischen Bereich (einiger fachsystematischer Vernetzungen sowie einiger anwendungsbezogener Vernetzungen, speziell Modellvernetzungen) und auf Modellvernetzungen von und mit außermathematischen Anwendungen.

Das Modell der Curriculumsrahmen wird als Ansatz zur Spezifizierung von Vernetzungen mit seinen Grenzen und Möglichkeiten diskutiert. Es dient als Grundlage für die in Kapitel 8 vorgestellte empirische Untersuchung.

Des Weiteren werden einige erste Daten zu Existenz und Umfang fachsystematischer Vernetzungen sowie anwendungsbezogener Vernetzungen in Lehr- und Lernprozessen auf der Grundlage der Rahmenkonzeption angegeben.

Als spezielles Thema für eine empirische Untersuchung ist in der vorliegenden Arbeit das der linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I ausgesucht worden. *Kapitel 5* liefert eine fachlich-epistemologische Analyse des Themas (reduziert auf einen für Schulunterricht in der Sekundarstufe I zugänglichen Umfang) speziell hinsichtlich der inhärenten fachsystematischen Vernetzungen und anwendungsbezogenen Vernetzungen; sie dient als fachlicher Bezugsrahmen für die Untersuchung.

Im *Kapitel 6* werden die Forschungsfragen für die durchgeführte empirische Untersuchung formuliert und das Untersuchungsdesign beschrieben. Die Untersuchung wurde an zwei Gymnasien und einer Gesamtschule im Großraum Dortmund in Nordrhein-Westfalen durchgeführt. Beteiligt waren die Schüler sechs verschiedener Klassen bzw. Kurse und ihre Lehrer.

Im *Kapitel 7* werden Methoden zur Datenerfassung bzgl. Vernetzungen (speziell fachsystematischer Vernetzungen sowie Modellvernetzungen) in den drei Curriculumsrahmen diskutiert und die Auswahl bzw. Entwicklung und Spezifizierung der Methoden für die durchgeführte empirische Untersuchung vorgestellt.

Kapitel 8 stellt die empirische Untersuchung mit den gewonnenen Ergebnissen zu Vernetzungen in Curriculumsrahmen rund um den Themenkomplex der linearen Gleichungssysteme in der Sekundarstufe I vor. Als Vernetzungen werden hierbei entsprechend der Eingrenzungen durch die Forschungsfragen nur fachsystematische Vernetzungen und Modellvernetzungen berücksichtigt.

Im *Kapitel 9* schließlich erfolgt eine Diskussion auf der Grundlage der Untersuchungsergebnisse. Diese liefern Hinweise für Ansätze zu einer möglichen Verbesserung des Mathematikunterrichts im Hinblick auf einen erfolgreicherer Aufbau von Vernetzungen im Schülerwissen, die hier ausgeführt werden.

Ferner werden offene Fragen herausgestellt. Defizite beim Lernen von Vernetzungen müssen noch breiter und detaillierter erhoben werden zwecks Bereitstellung einer Informationsbasis für eine Umgestaltung von Unterricht. Es ist zu klären, inwiefern Unterrichtselemente, die in anderen Ländern erfolgreich eingesetzt werden bzw. wurden, auch in Deutschland zu einer Verbesserung von Unterricht beitragen können. Eine allumfassende Theorie, in der das Phänomen „Vernetzungen“ abgehandelt und adäquat erfasst wird, existiert (derzeit) nicht; neue didaktische Konzepte können nur auf der Basis von Einzelaspekten verschiedener Theorien entwickelt werden. Die Art der Darbietung von Vernetzungen im Unterricht muss überdacht und neue Wege müssen erprobt werden.