

# Beste einseitige $L^1$ -Approximation mit Quasi-Blending-Funktionen

Vom Fachbereich 11/Mathematik der  
Gerhard-Mercator-Universität Duisburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation  
von

John Klinkhammer  
aus  
Köln

Referent: Prof. Dr. Werner Haußmann (Duisburg)  
Korreferent: Prof. Dr. Hans-Bernd Knoop (Duisburg)

Tag der mündlichen Prüfung: 02.05.2001

# Inhalt

Einleitung .....	1
1. Grundlagen und Bezeichnungen .....	5
2. Allgemeine Sätze zur Charakterisierung .....	15
bester $L^1$ -Approximation	
3. Bivariate Hermite-Interpolation mit .....	22
Quasi-Blending-Funktionen	
4. Kubaturformeln für Quasi-Blending-Funktionen .....	32
5. Beste einseitige $L^1$ -Approximation mit .....	53
Quasi- $B^{m,1}$ -Funktionen	
Symbolverzeichnis .....	55
Literaturverzeichnis .....	57

# Einleitung

Ausgangspunkt der in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen ist der folgende Satz über beste einseitige  $L^1$ -Approximation auf dem Einheitsquadrat  $I^2 := [-1, 1] \times [-1, 1]$ :

**Satz A** [D. Dryanov, W. Haußmann, P. Petrov, 13] *Es sei  $f \in C^{1,1}(I^2)$  eine Funktion mit  $f^{(1,1)} \geq 0$ . Dann besitzt  $f$  genau eine beste einseitige  $L^1$ -Approximation  $h^*$  von oben bezüglich der Menge*

$$B := \{h \in C^{1,1}(I^2) : h(x, y) = u(x) + v(y); u, v \in C^1(I)\},$$

d.h. es gilt  $h^* \geq f$  und

$$\|f - h^*\|_1 \leq \|f - h\|_1 \quad \text{für alle } h \in B \text{ mit } h \geq f.$$

Die Funktion  $h^*$  ist charakterisiert durch die folgende Hermite-Interpolationsbedingung:

$$\begin{aligned} h^*|_{\Delta^*} &= f|_{\Delta^*}, \\ (\nabla h^*)|_{\Delta^*} &= (\nabla f)|_{\Delta^*} \end{aligned}$$

mit

$$\Delta^* := \{(x, y) \in I^2 : x = y\}.$$

$\Delta^*$  ist eine *kanonische Punktmenge* für das oben formulierte Approximationsproblem, d.h.  $\Delta^*$  ist unabhängig von der zu approximierenden Funktion  $f$ .

Der oben definierte Funktionenraum  $B$  ist ein Spezialfall der Räume der *Blending-Funktionen*

$$B^{m,n}(I^2) := \{h \in C^{m,n}(I^2) : h^{(m,n)} = 0\},$$

denn es gilt offenbar  $B = B^{1,1}(I^2)$ .

Obiger Satz legt die Frage nahe, inwieweit ein entsprechendes Resultat bei einseitiger  $L^1$ -Approximation bezüglich allgemeinerer Räume von Blending-Funktionen gilt. Ein erster Schritt in diese Richtung wurde ebenfalls von

D. Dryanov, W. Haußmann und P. Petrov durchgeführt, die in [14] zeigten, daß beste einseitige  $L^1$ -Approximation auf  $I^2$  bezüglich des Funktionenraumes  $B^{2,1}(I^2)$  durch Interpolation auf einer *V-förmigen kanonischen Punktmenge* charakterisiert ist. Dieses Ergebnis ist einerseits bereits deutlich komplizierter zu beweisen als der in Satz A beschriebene Fall, gibt aber andererseits Anlaß zu der Erwartung, daß entsprechende Charakterisierungssätze auch für Blending-Räume höherer Ordnung gelten könnten.

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, diesen Problemkreis zu behandeln und analoge Charakterisierungen für beste einseitige bivariate  $L^1$ -Approximation durch Blending-Räume höherer Ordnung zu erzielen.

Dabei ergaben sich *zwei neue Aspekte*, die in den Fällen der besten einseitigen  $L^1$ -Approximation mittels  $B^{1,1}$ - bzw.  $B^{2,1}$ -Funktionen nicht auftraten.

Erstens werden die *kanonischen Punktmenge*n bei der besten einseitigen  $L^1$ -Approximation mit Blending-Funktionen höherer Ordnung wesentlich komplizierter, und sind ab dem Fall  $B^{3,1}$  *nicht mehr stückweise geradlinig*.

Zweitens erweist sich, daß die Räume von Blending-Funktionen nicht adäquat sind (ebenfalls ab dem Fall  $B^{3,1}$ ). Wir werden daher Räume sogenannter *Quasi-Blending-Funktionen* einführen.

Waren bei der einseitigen  $L^1$ -Approximation durch  $B^{1,1}$ - bzw.  $B^{2,1}$ -Funktionen die kanonischen Punktmenge noch zu "erraten", so bedarf es ab dem Fall der einseitigen  $L^1$ -Approximation durch  $B^{3,1}$ -Funktionen einer *systematischeren Methode*, um die kanonischen Punktmenge zu bestimmen. Zu diesem Zweck werden wir Hilfsmittel aus der *Überlagerungstheorie* heranziehen (vgl. dazu etwa O. Forster [16] oder H. Schubert [24]). Damit gelingt es uns die eindeutige Lösbarkeit eines nichtlinearen Gleichungssystems nachzuweisen, dessen Lösungsvarietät gerade kanonische Punktmenge liefert. Mit Hilfe der so gefundenen kanonischen Punktmenge werden wir Sätze zur Charakterisierung bester einseitiger  $L^1$ -Approximation bezüglich Räumen von Quasi-Blending-Funktionen auf  $I^2$  beweisen.

Dazu benötigen wir jeweils die Lösbarkeit einer Interpolationsaufgabe vom Hermite-Typ, eine zugehörige Fehlerformel mit definitem Vorzeichen, um die Einseitigkeit der Approximation sicherzustellen, sowie eine Kubaturformel auf der jeweiligen Interpolationsmenge. Diese Ergebnisse werden in den Abschnitten 3 und 4 hergeleitet. Auf der Basis dieser Resultate können wir dann in Abschnitt 5 die gewünschten Approximationssätze für einseitige  $L^1$ -Approximation beweisen.

Wir erwähnen an dieser Stelle, daß wir die Ergebnisse nur für die einseitige

Approximation *von oben* beweisen, da sich die entsprechenden Resultate für die einseitige Approximation *von unten* durch naheliegende Modifikationen ergeben.

Das Auftreten von *kanonischen Punktmengen* bei einseitiger, aber auch bei nicht-restringierter  $L^1$ -Approximation hat eine lange Geschichte (siehe etwa die Arbeit von W. Haußmann und K. Zeller [20]). Das erste Ergebnis in dieser Richtung dürfte der Satz von Markov sein, der die beste  $L^1$ -Approximation an eine Funktion  $f \in C^m([-1, 1])$  mit  $f^{(m)} \geq 0$  aus dem Raum  $\Pi_{m-1}$  der Polynome vom Grad  $\leq m - 1$  durch die Lagrange-Interpolation an den Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms  $U_m$  zweiter Art vom Grad  $m$  charakterisiert. Wir erhalten also hier die kanonischen Punkte

$$x_\mu := \cos\left(\frac{m+1-\mu}{m+1}\pi\right) \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

(siehe etwa R. A. DeVore, G. G. Lorentz [12] oder G. G. Lorentz [21]).

Bei *einseitiger*  $L^1$ -Approximation von Funktionen  $f \in C^m([-1, 1])$  mit  $f^{(m)} \geq 0$  bezüglich  $\Pi_{m-1}$  erhält man die beste Approximation durch (verallgemeinerte) *Hermite-Interpolation* an den kanonischen Punkten, die in diesem Fall aus den Nullstellen des *Jacobi-Polynoms*  $P_k^{(\alpha, \beta)}$  vom Grad  $k$  bestehen, mit

$\alpha = \beta = 0$  (*Gauß-Knoten*) für  $m = 2k$  und einseitiger Approximation von unten,

$\alpha = \beta = 1$  (*Lobatto-Knoten*) für  $m = 2k + 2$  und einseitiger Approximation von oben,

$\alpha = 0, \beta = 1$  (*Radau-Knoten*) für  $m = 2k + 1$  und einseitiger Approximation von unten,

$\alpha = 1, \beta = 0$  (*Radau-Knoten*) für  $m = 2k + 1$  und einseitiger Approximation von oben.

Dabei wird in den Randpunkten  $\pm 1$  jeweils nur der Funktionswert interpoliert (siehe R. Bojanić und R. A. DeVore [5]; zur Definition der Jacobi Polynome vgl. Szegö [27]).

Für weitere Details und Fortentwicklungen im Fall der univariaten  $L^1$ -Approximation verweisen wir auf die Bücher von D. Braess [8] und A. Pinkus [22].

Im Fall der nicht-restringierten bivariaten  $L^1$ -Approximation mit Blending-Funktionen treten sogenannte *Blending-Gitter* als kanonische Punktmengen auf (vergleiche W. Haußmann und K. Zeller [19]); dies gilt auch bei einseitiger

$L^1$ -Approximation durch spezielle Klassen von Blending-Funktionen (vgl. die Arbeit von B. D. Bojanov, D. P. Dryanov, W. Haußmann und G. P. Nikolov [6]). Allerdings zeigt Satz A, daß Blending-Gitter im allgemeinen nicht die "richtigen" kanonischen Punktmengen sind.

Nichtrestringierte  $L^1$ -Approximation auf Kugeln im  $\mathbb{R}^n$  mittels harmonischer bzw. polyharmonischer Funktionen führt auf konzentrische Sphären als kanonische Punktmengen ([2], [4], [17], [18] und [28]).

Schließlich erwähnen wir die Arbeit von D. H. Armitage, S. J. Gardiner, W. Haußmann und L. Rogge [3] über beste einseitige  $L^1$ -Approximation mit harmonischen Funktionen. Hier werden beste einseitige *harmonische*  $L^1$ -Approximationen  $u^* \in \{u \in C(\overline{B}) : \Delta u = 0\}$ ,  $B := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ , an eine Funktion  $f \in C(\overline{B})$  dadurch charakterisiert, daß der Nullpunkt (der bekanntlich Knoten einer Kubaturformel für harmonische Funktionen ist) von der Menge, an der  $u^*$  die Funktion  $f$  interpoliert, "eingeschlossen" wird. Beachtlich ist hier, daß dieser Satz beste einseitige harmonische  $L^1$ -Approximationen an eine *beliebige Funktion*  $f \in C(\overline{B})$  charakterisiert.

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. W. Haußmann (Duisburg), für seine Unterstützung während der Durchführung meiner Forschung herzlich bedanken. Er stand mir stets mit Ratschlägen und Informationen zur Seite, ohne die diese Arbeit nicht in dieser Form entstanden wäre. Herrn Prof. Dr. H.-B. Knoop (Duisburg) danke ich für die Übernahme des Korreferats.

# 1. Grundlagen und Bezeichnungen

In diesem ersten Abschnitt werden wir einige Ergebnisse zusammenstellen, auf die wir in den späteren Paragraphen zurückgreifen werden. Insofern dient dieser Teil der Arbeit als Referenz für die verwendeten Notationen und Begriffe. Da es sich vornehmlich um wohlbekanntere Aussagen handelt, werden wir an den meisten Stellen auf Beweise verzichten und geben entsprechende Quellen an, in denen die Details nachgelesen werden können.

## Allgemeine Bezeichnungen

Für einen topologischen Raum  $X$  bezeichnen wir mit

$$C(X) := \{f: X \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$$

den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $X$ .

Da wir uns vorwiegend mit bivariaten Funktionen beschäftigen, wollen wir eine für diese Situation praktische Notation einführen. Ist  $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $X \subset \mathbb{R}^2$  und  $(x_0, y_0) \in X$  ein innerer Punkt von  $X$ , so setzen wir für  $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(m,n)}(x_0, y_0) := \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0)$$

sofern die entsprechenden partiellen Ableitungen existieren.

Für eine offene Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^2$  und  $m, n \in \mathbb{N}_0$  setzen wir

$$C^{m,n}(X) := \{f \in C(X) : f^{(\mu,\nu)} \in C(X) \text{ für } 0 \leq \mu \leq m; 0 \leq \nu \leq n\},$$

sowie

$$C^{m,n}(\overline{X}) := \{f \in C^{m,n}(X) : f^{(\mu,\nu)} \in C(\overline{X}) \text{ für } 0 \leq \mu \leq m; 0 \leq \nu \leq n\}.$$

Von besonderem Interesse sind für uns die Räume von *Blending-Funktionen*, die man als Verallgemeinerung der Polynome in einer Veränderlichen ansehen kann. Wir definieren daher für eine offene Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^2$  und  $m, n \in \mathbb{N}_0$

$$B^{m,n}(X) := \{h \in C^{m,n}(X) : h^{(m,n)} = 0\},$$

sowie

$$B^{m,n}(\overline{X}) := C^{m,n}(\overline{X}) \cap B^{m,n}(X).$$

Für einen Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  bezeichnen wir für  $1 \leq p \leq \infty$  mit  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Äquivalenzklassen von  $\mathcal{A}$ -meßbaren Funktionen  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\|f\|_p := \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leq p < \infty),$$

bzw.

$$\|f\|_{\infty} := \inf\{\alpha > 0 : \mu(\{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > \alpha\}) = 0\} < \infty.$$

Falls klar ist von welchem Maßraum die Rede ist, schreiben wir einfach  $L^p(\Omega)$ . Insbesondere im Fall  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gehen wir stets von der Spur der Borelschen  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^n$  in  $\Omega$  und dem darauf eingeschränkten Lebesgueschen Maß aus.

## Univariate Hermite-Interpolation

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wollen wir in dieser Arbeit beste einseitige  $L^1$ -Approximation mittels (Quasi-)Blending-Funktionen durch *bivariate Hermite-Interpolation* auf kanonischen Punktmenge charakterisieren. Im dritten Abschnitt werden wir dazu eine entsprechende Theorie entwickeln. Dafür benötigen wir die wichtigsten Tatsachen und Zusammenhänge aus dem Gebiet der univariaten Hermite-Interpolation. Insbesondere werden wir die Restglieddarstellungen für univariate Hermite-Interpolation heranziehen, um entsprechende Fehlerformeln für die bivariate Hermite-Interpolation zu erhalten. Die hier vorgestellten Aussagen können z.B. in den Büchern von B. D. Bojanov, H. A. Hakopian und A. A. Sahakian [7], L. L. Schumaker [25] oder H. Werner und R. Schaback [29] nachgelesen werden.

Es sei  $[a, b]_{\neq} \subset \mathbb{R}$  und  $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_M \leq b$ . Dann besteht die Menge  $\{x_1, \dots, x_M\}$  aus  $m \leq M$  verschiedenen Punkten  $a \leq \xi_1 < \dots < \xi_m \leq b$ . Wir setzen

$$k_{\mu} := \#\{r : x_r = \xi_{\mu}\} \quad (1 \leq \mu \leq m),$$

und definieren für  $1 \leq \mu \leq m$ ,  $0 \leq \kappa \leq k_{\mu} - 1$  die *Hermite-Grundfunktionen* durch

$$H_{\mu\kappa}(x; x_1, \dots, x_M) := \frac{1}{\kappa!} \frac{\omega(x)}{(x - \xi_{\mu})^{k_{\mu} - \kappa}} \sum_{r=0}^{k_{\mu} - 1 - \kappa} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} \left( \frac{(x - \xi_{\mu})^{k_{\mu}}}{\omega(x)} \right)_{x=\xi_{\mu}} (x - \xi_{\mu})^r$$



mit

$$\omega(x) = \omega(x; x_1, \dots, x_M) := \prod_{j=1}^M (x - x_j).$$

Dann bilden die Polynome  $(H_{\mu\kappa}(\cdot; x_1, \dots, x_M))_{\substack{1 \leq \mu \leq m \\ 0 \leq \kappa \leq k_\mu - 1}}$  eine Basis von  $\Pi_{M-1}$  mit der Eigenschaft

$$H_{\mu\kappa}^{(l)}(\xi_j; x_1, \dots, x_M) = \delta_{j\mu} \delta_{l\kappa} \quad (1 \leq j \leq m; 0 \leq l \leq k_j - 1).$$

Insbesondere erhalten wir für  $k_1 = \dots = k_m = 1$  die sogenannten *Lagrange-Grundfunktionen*

$$\ell_\mu(x; x_1, \dots, x_m) = H_{\mu 0}(x; x_1, \dots, x_m) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \mu}}^m \frac{x - x_k}{x_\mu - x_k}.$$

Für eine Funktion  $f \in C^{K-1}([a, b])$ ,  $K := \max_{1 \leq \mu \leq m} k_\mu$  ist das *Hermite-Interpolationspolynom*

$$(Hf)(x; x_1, \dots, x_M) := \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=0}^{k_\mu-1} f^{(\kappa)}(\xi_\mu) H_{\mu\kappa}(x; x_1, \dots, x_M)$$

das eindeutig bestimmte Polynom  $p \in \Pi_{M-1}$  mit der Eigenschaft

$$p^{(\kappa)}(\xi_\mu) = f^{(\kappa)}(\xi_\mu) \quad (1 \leq \mu \leq m; 0 \leq \kappa \leq k_\mu - 1).$$

Die Zuordnung

$$C^{K-1}([a, b]) \ni f \mapsto (Hf)(\cdot; x_1, \dots, x_M) \in \Pi_{M-1}$$

definiert einen linearen Operator auf  $C^{K-1}([a, b])$ , den sogenannten *Hermite-Interpolationsoperator*.

Die *dividierten Differenzen* bieten eine elegante Möglichkeit den Interpolationsfehler darzustellen. Zur Erinnerung formulieren wir daher:

**Definition 1.1** Es sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_M \leq b$ . Sind dann  $a \leq \xi_1 < \dots < \xi_m \leq b$  die  $m$  paarweise verschiedenen Punkte der Menge  $\{x_1, \dots, x_M\}$  und ist

$$k_\mu := \#\{r : x_r = \xi_\mu\} \quad (1 \leq \mu \leq m),$$

so definieren wir für  $f_1, \dots, f_M \in C^{K-1}([a, b])$ ,  $K := \max_{1 \leq \mu \leq m} k_\mu$

$$M \begin{pmatrix} f_1 \cdots f_M \\ x_1 \cdots x_M \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} f_1(\xi_1) & \cdots & f_M(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k_1-1)}(\xi_1) & \cdots & f_M^{(k_1-1)}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(\xi_m) & \cdots & f_M(\xi_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(k_m-1)}(\xi_m) & \cdots & f_M^{(k_m-1)}(\xi_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times M},$$

sowie

$$D \begin{pmatrix} f_1 \cdots f_M \\ x_1 \cdots x_M \end{pmatrix} := \det M \begin{pmatrix} f_1 \cdots f_M \\ x_1 \cdots x_M \end{pmatrix}.$$

Für eine Funktion  $f \in C^{K-1}([a, b])$  heißt

$$[x_1, \dots, x_M; f] := \frac{D \begin{pmatrix} \pi_0 \cdots f \\ x_1 \cdots x_M \end{pmatrix}}{D \begin{pmatrix} \pi_0 \cdots \pi_{M-1} \\ x_1 \cdots x_M \end{pmatrix}},$$

mit  $\pi_j: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^j \in \mathbb{R}$ , die *dividierte Differenz von  $f$  bezüglich der Knoten  $x_1, \dots, x_M$* .

Die dividierte Differenz  $[x_1, \dots, x_M; f]$  liefert gerade den Höchstkoeffizienten des Hermite-Interpolationspolynoms  $(Hf)(\cdot; x_1, \dots, x_M)$ .

Ist  $f \in C^{M-1}([a, b])$ , so hat man für die dividierte Differenz auch folgende Darstellung

$$[x_1, \dots, x_M; f] = \int_{\Delta_{M-1}} f^{(M-1)} \left( x_1 + \sum_{\mu=1}^{M-1} t_\mu (x_{\mu+1} - x_1) \right) dt_1 \dots dt_{M-1}$$

mit

$$\Delta_{M-1} := \left\{ (t_1, \dots, t_{M-1}) \in [0, 1]^{M-1} : \sum_{\mu=1}^{M-1} t_\mu \leq 1 \right\}.$$

Anhand dieser Gleichung sehen wir, daß die dividierte Differenz einer Funktion  $f \in C^{M-1}([a, b])$  eine stetige Funktion bezüglich der Knoten  $x_1, \dots, x_M$  ist.

Ferner haben wir für  $f \in C^{K-1}([a, b])$  und  $x \in [a, b] \setminus \{x_1, \dots, x_M\}$  folgende Restglieddarstellung

$$f(x) - (Hf)(x; x_1, \dots, x_M) = [x, x_1, \dots, x_M; f]\omega(x; x_1, \dots, x_M).$$

Mit Hilfe dieser Formel sind wir dazu in der Lage, eine weitere Restgliedformel zu gewinnen, sofern die Funktion  $f$  hinreichend glatt ist.

Dazu sei  $f \in C^M([a, b])$ . Dann gilt nach dem Satz von Taylor

$$f(x) = \underbrace{\sum_{\mu=0}^{M-1} \frac{f^{(\mu)}(a)}{\mu!} (x-a)^\mu}_{=:(T_{M-1}f)(x)} + \underbrace{\frac{1}{(M-1)!} \int_a^b f^{(M)}(s) (x-s)_+^{M-1} ds}_{=:(\rho_{M-1}f)(x)}.$$

Wir wenden nun auf beiden Seiten dieser Gleichung den Hermite-Interpolationsoperator an. Dann erhalten wir daraus wegen

$$(Hq)(\cdot; x_1, \dots, x_M) = q \quad (q \in \Pi_{M-1})$$

folgende Formel

$$\begin{aligned} & (Hf)(x; x_1, \dots, x_M) - (T_{M-1}f)(x) \\ &= \frac{1}{(M-1)!} \int_a^b f^{(M)}(s) \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=0}^{k_\mu-1} \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} (x-s)_+^{M-1} \Big|_{x=\xi_\mu} H_{\mu\kappa}(x) ds \\ &= \frac{1}{(M-1)!} \int_a^b f^{(M)}(s) \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=0}^{k_\mu-1} \frac{(M-1)!}{(M-1-\kappa)!} (\xi_\mu - s)_+^{M-1-\kappa} H_{\mu\kappa}(x) ds. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die sogenannte *Restgliedformel von Peano*

$$f(x) - (Hf)(x; x_1, \dots, x_M) = \int_a^b f^{(M)}(s) K(s, x; x_1, \dots, x_M) ds$$

mit dem *Peano-Kern*

$$\begin{aligned} K(s, x; x_1, \dots, x_M) &:= \frac{(x-s)_+^{M-1}}{(M-1)!} - \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=0}^{k_\mu-1} \frac{(\xi_\mu - s)_+^{M-1-\kappa}}{(M-1-\kappa)!} H_{\mu\kappa}(x) \\ &= \frac{1}{(M-1)!} [x, x_1, \dots, x_M; (\cdot - s)_+^{M-1}] \omega(x; x_1, \dots, x_M) \\ &= \frac{1}{(M-1)!} B_{M-1}(s; x, x_1, \dots, x_M) \omega(x; x_1, \dots, x_M). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir wie üblich mit  $B_{M-1}(\cdot; x_1, \dots, x_{M+1})$  den  $B$ -Spline der Ordnung  $M - 1$  bezüglich der Knoten  $x_1, \dots, x_{M+1} \in \mathbb{R}$ .

Im Fall  $k_1 = \dots = k_m = 1$  läßt sich der Peano-Kern auch folgendermaßen schreiben:

$$K(s, x; x_1, \dots, x_m) = \sum_{\mu=1}^m \frac{(x-s)_+^{m-1} - (x_\mu - s)_+^{m-1}}{(m-1)!} \ell_\mu(x; x_1, \dots, x_m).$$

Bis hierher haben wir die für unsere weiteren Untersuchungen wesentlichen Ergebnisse der univariaten Interpolationstheorie zusammengestellt. Wir wenden uns nun einem Teilgebiet der Topologie zu.

## Überlagerungen

Im vierten Abschnitt werden wir zeigen, daß sich die kanonischen Punktmen­gen für das Problem der besten einseitigen  $B^{m,1}$ -Approximation durch Systeme algebraischer Gleichungen charakterisieren lassen. Mit Hilfe der Überlagerungstheorie können wir die Lösbarkeit der oben erwähnten Gleichungssysteme und damit die Existenz kanonischer Punktmen­gen sicherstellen. Daher werden wir die von uns benötigten Grundlagen dieser Theorie im folgenden kurz darstellen. Die Beweise zu den folgenden Aussagen der Überlagerungstheorie kann man etwa in O. Forster [16] oder auch H. Schubert [24] nachlesen.

**Definition 1.2** Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $p: Y \longrightarrow X$  heißt *Überlagerungsabbildung*, oder kurz *Überlagerung*, wenn  $p$  stetig, offen und diskret ist.

Ein Punkt  $y \in Y$  heißt *Verzweigungspunkt* von  $p$ , wenn es keine Umgebung  $V \subset Y$  von  $y$  gibt, so daß  $p|_V$  injektiv ist. Eine Überlagerung heißt *unverzweigte Überlagerung*, wenn sie keine Verzweigungspunkte besitzt.

**Lemma 1.3** *Es seien  $X, Y$  topologische Räume. Dann ist  $p: Y \longrightarrow X$  genau dann eine unverzweigte Überlagerung, wenn  $p$  lokal-topologisch ist, d.h. zu jedem  $y \in Y$  gibt es eine offene Umgebung  $V \subset Y$  von  $y$  und eine offene Umgebung  $U \subset X$  von  $p(y)$ , so daß  $p|_V: V \longrightarrow U$  ein Homöomorphismus ist.*

**Definition 1.4** Es seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $p: Y \rightarrow X$  heißt *unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung*, wenn es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subset X$  von  $x$  und eine Familie  $(V_j)_{j \in J}$  paarweise disjunkter offener Teilmengen von  $Y$  gibt, so daß gilt

$$(i) \quad p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

(ii)  $p|_{V_j}: V_j \rightarrow U$  ist für jedes  $j \in J$  ein Homöomorphismus.

**Bemerkung** Offensichtlich ist eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung  $p: Y \rightarrow X$  lokal-topologisch, also eine unverzweigte Überlagerung im Sinne von Definition 1.2.

**Lemma 1.5** *Es seien  $X, Y$  Hausdorff-Räume,  $X$  kurvenzusammenhängend und  $p: Y \rightarrow X$  eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung. Dann sind für je zwei Punkte  $x_1, x_2 \in X$  die Mengen  $p^{-1}(x_1)$  und  $p^{-1}(x_2)$  gleichmächtig.*

**Bemerkung** Wir bezeichnen die Mächtigkeit der Menge  $p^{-1}(x)$ ,  $x \in X$  als *Blätterzahl* der Überlagerung  $p$ .

**Definition 1.6** Es seien  $X, Y$  lokal-kompakte Hausdorff-Räume und  $f: X \rightarrow Y$  stetig.  $f$  heißt *eigentlich*, wenn  $f^{-1}(K)$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subset Y$  kompakt in  $X$  ist.

**Bemerkung** Jede eigentliche Abbildung ist abgeschlossen, d.h. Bilder abgeschlossener Teilmengen sind selbst wieder abgeschlossen. Ist der Raum  $X$  kompakt, so ist jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  eigentlich.

**Lemma 1.7** *Es seien  $X, Y$  lokal-kompakte Hausdorff-Räume und  $p: Y \rightarrow X$  eine eigentliche Überlagerung. Dann gilt*

(i) *Für jedes  $x \in X$  ist die Menge  $p^{-1}(x)$  endlich.*

(ii) *Ist  $X$  zusammenhängend, dann ist  $p$  surjektiv.*

(iii) *Ist  $p$  eine unverzweigte Überlagerung, dann ist  $p$  eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung.*

Die Ergebnisse in [13] und [14] legten die Vermutung nahe, daß es sich bei den kanonischen Punktmengen stets um Graphen von Überlagerungsabbildungen

$\varphi: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$  handeln könnte. Daher werden wir solche speziellen Überlagerungen nun etwas genauer untersuchen.

**Lemma 1.8** *Es sei  $\varphi: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$  eine Überlagerungsabbildung. Dann gibt es ein  $m \in \mathbb{N}$  und  $m + 1$  Punkte  $-1 = x_0 < \dots < x_m = 1$ , sowie ein  $\eta \in \{-1, 1\}$ , so daß gilt*

- (i)  $\varphi(x_\mu) = \eta(-1)^\mu \quad (0 \leq \mu \leq m)$ ,
- (ii)  $\varphi$  bildet für jedes  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  das Intervall  $[x_{\mu-1}, x_\mu]$  homöomorph auf  $[-1, 1]$  ab.

**Beweis:** Da  $[-1, 1]$  zusammenhängend ist und  $\varphi([-1, 1]) \subset [-1, 1]$  sowohl offen, als auch abgeschlossen in  $[-1, 1]$  ist, folgt  $\varphi([-1, 1]) = [-1, 1]$ , d.h.  $\varphi$  ist surjektiv. Ferner sind die beiden nichtleeren Mengen  $A_1 := \varphi^{-1}(\{1\})$  und  $A_{-1} := \varphi^{-1}(\{-1\})$  diskret in der kompakten Menge  $[-1, 1]$  und damit endlich. Es seien  $-1 \leq x_0 < \dots < x_m \leq 1$  mit  $m \in \mathbb{N}$  die Punkte von  $A := A_{-1} \cup A_1$ .

*Behauptung:* Sind  $-1 \leq \xi_1 < \xi_2 \leq 1$  zwei Punkte mit  $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2)$ , dann gilt  $]\xi_1, \xi_2[ \cap A \neq \emptyset$ .

*Beweis der Behauptung:* Angenommen  $]\xi_1, \xi_2[ \cap A = \emptyset$ , d.h. es gilt  $|\varphi(x)| < 1$  für alle  $x \in ]\xi_1, \xi_2[$ . Dann ist  $\varphi(]\xi_1, \xi_2[)$  eine offene zusammenhängende Teilmenge von  $] - 1, 1[$ , d.h. es gilt  $\varphi(]\xi_1, \xi_2[) = ]a, b[$  mit  $-1 \leq a < b \leq 1$ . Wegen  $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2)$  folgt daraus  $\varphi([\xi_1, \xi_2]) = [a, b[$  oder  $\varphi([\xi_1, \xi_2]) = ]a, b]$  oder  $\varphi([\xi_1, \xi_2]) = ]a, b[$ , im Widerspruch dazu, daß die stetige Funktion  $\varphi$  auf  $[\xi_1, \xi_2]$  sowohl ihr Minimum, als auch ihr Maximum annimmt.

Mit der gleichen Argumentation beweist man, daß  $x_0 = -1$  und  $x_m = 1$  sein muß, da die Intervalle  $[-1, x_0[$  und  $]x_m, 1]$  offen in  $[-1, 1]$  sind.

Daraus folgt nun sofort  $\varphi(x_{\mu-1}) = -\varphi(x_\mu)$  und damit (i).

Ferner ist die stetige Abbildung  $\varphi|_{[x_{\mu-1}, x_\mu]}: [x_{\mu-1}, x_\mu] \longrightarrow [-1, 1]$  nach (i) und dem Zwischenwertsatz surjektiv und nach obiger Behauptung auch injektiv und damit ein Homöomorphismus.

□

**Bemerkung** In Anlehnung an den in der Bemerkung zu Lemma 1.5 definierten Begriff, wollen wir die eindeutig bestimmte Zahl  $m \in \mathbb{N}$  aus dem vorangegangenen Lemma 1.8 die *Blätterzahl* der Überlagerung  $\varphi$  nennen und  $\varphi$  als  $m$ -blättrige Überlagerung bezeichnen. Dies ist dadurch gerechtfertigt, daß die Punkte  $x_1 < \dots < x_{m-1}$  gerade die Verzweigungspunkte der Überlagerung  $\varphi$

sind. Setzt man also  $Y := ]-1, 1[ \setminus \{x_1, \dots, x_{m-1}\}$ , so ist  $\varphi|_Y: Y \longrightarrow ]-1, 1[$  eine eigentliche und unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung, besitzt also eine wohldefinierte endliche Blätterzahl, die mit  $m$  übereinstimmt.

Das folgende Lemma stellt noch einige einfache Eigenschaften von Überlagerungen  $\varphi: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$  zusammen. Von besonderer Bedeutung ist hierbei die Aussage über das Vorzeichenverhalten von  $[-1, 1]^2 \ni (x, y) \mapsto y - \varphi(x)$ , da diese Funktion nachher in der Fehlerformel für die Hermite-Interpolation mit Quasi-Blending-Funktionen eine wesentliche Rolle spielt (siehe Abschnitt 3).

**Lemma 1.9** *Es sei  $\varphi: [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$  eine  $m$ -blättrige Überlagerung und  $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$ , sowie  $\eta \in \{-1, 1\}$  gegeben, so daß gilt*

$$\varphi(x_\mu) = \eta(-1)^\mu \quad ; \quad 0 \leq \mu \leq m.$$

Ferner sei

$$\begin{aligned} \varphi_\mu &:= \varphi|_{[x_{\mu-1}, x_\mu]}: [x_{\mu-1}, x_\mu] \longrightarrow [-1, 1] \\ \psi_\mu &:= \varphi_\mu^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow [x_{\mu-1}, x_\mu] \end{aligned} \quad (1 \leq \mu \leq m).$$

Dann gilt

- (i)  $\eta(-1)^\mu \varphi_\mu$  und  $\eta(-1)^\mu \psi_\mu$  sind für jedes  $\mu \in \{1, \dots, m\}$  streng monoton wachsend.
- (ii) Für alle  $t \in ]-1, 1[$  gilt  $-1 < \psi_1(t) < \dots < \psi_m(t) < 1$ .
- (iii) Für alle  $x, t \in [-1, 1]$  gilt

$$\text{sign}(t - \varphi(x)) = \eta(-1)^{m+1} \text{sign}(\omega(x; \psi_1(t), \dots, \psi_m(t))).$$

**Beweis:** Die Aussagen (i) und (ii) sind trivial. Zum Beweis von (iii) sei  $|t| < 1$  und  $\xi_\mu := \psi_\mu(t)$  für  $\mu = 1, \dots, m$ . Nach (ii) gilt dann  $-1 =: \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_m < \xi_{m+1} := 1$ . Ist nun  $0 \leq k \leq m$  dann gilt für  $\xi_k < x \leq x_k$

$$\eta(-1)^k t = \eta(-1)^k \varphi(\xi_k) \stackrel{(i)}{<} \eta(-1)^k \varphi(x)$$

und für  $x_k \leq x < \xi_{k+1}$

$$\eta(-1)^{k+1} t = \eta(-1)^{k+1} \varphi(\xi_{k+1}) \stackrel{(i)}{>} \eta(-1)^{k+1} \varphi(x),$$

also insgesamt

$$\eta(-1)^k(t - \varphi(x)) < 0 \quad ; \quad x \in ]\xi_k, \xi_{k+1}[.$$

Daraus folgt für  $x \in ]\xi_k, \xi_{k+1}[$

$$\text{sign}(t - \varphi(x)) = \eta(-1)^{k+1} = \eta(-1)^{m+1} \text{sign}(\omega(x; \psi_1(t), \dots, \psi_m(t)))$$

und damit die Behauptung für  $|t| < 1$ . Der Fall  $|t| = 1$  ist wiederum klar.

□



## 2. Allgemeine Sätze zur Charakterisierung bester $L^1$ -Approximation

Bevor wir konkret auf das Problem der besten *einseitigen*  $L^1$ -Approximation eingehen, wollen wir zunächst die allgemeine Fragestellung der Bestapproximation erläutern und exemplarisch einige Ergebnisse vorstellen.

Das Problem der besten Approximation besteht in der Aufgabe, zu einem gegebenen Element  $f$  eines normierten  $\mathbb{K}$ -Vektorraumes  $X$  durch Elemente aus einer nichtleeren Teilmenge  $M \subset X$  optimal zu approximieren, d.h. wir suchen ein  $u^* \in M$  mit der Eigenschaft

$$\|f - u^*\| = E(f, M) := \inf_{u \in M} \|f - u\|.$$

Jeder Punkt  $u^* \in M$ , der diese Relation erfüllt, heißt beste Approximation an  $f$  in  $M$ .

Die zentralen Fragen hinsichtlich des Problems der besten Approximation lauten:

- (1) Existenz,
- (2) Eindeutigkeit,
- (3) Charakterisierung.

In der obigen, sehr allgemein formulierten Situation sind präzise Aussagen zur Existenz bzw. Eindeutigkeit kaum möglich. Vielmehr muß man zur Behandlung der allgemeinen Existenzfrage einschränkende Bedingungen an die Menge  $M$  stellen (z.B. Kompaktheit, endlichdimensionaler Unterraum), wogegen zur Diskussion der Eindeutigkeitsfrage die zugrundeliegende Norm gewisse Forderungen erfüllen muß (z.B. strikte oder gleichmäßige Konvexität). Zu solch allgemeinen Fragestellungen siehe etwa G. G. Lorentz [21] oder I. Singer [26].

Wie der Titel dieser Arbeit bereits ahnen läßt, konzentrieren wir uns hier vornehmlich mit der Charakterisierung der besten Approximation. Im Zuge

dessen werden wir aber auch für eine recht große Klasse von zu approximierenden Funktionen sowohl Existenz- als auch Eindeutigkeitsaussagen bereitstellen (siehe Satz 5.1 und Folgerung 5.2). Der zentrale Charakterisierungssatz in der allgemeinen Situation ist das folgende *Kolmogorov-Kriterium* (siehe D. Braess [8] oder I. Singer [26]):

**Satz** *Es sei  $X$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $C$  eine nichtleere konvexe Teilmenge von  $X$  und  $f \in X \setminus \overline{C}$ . Dann ist  $u^* \in C$  genau dann eine beste Approximation an  $f$  in  $C$ , wenn es ein  $\ell \in X'$  gibt, so daß gilt*

- (1)  $\|\ell\| = 1,$
- (2)  $\ell(f - u^*) = \|f - u^*\|,$
- (3)  $\operatorname{Re} \ell(u - u^*) \leq 0 \quad (u \in C).$

Aus dieser allgemeinen Aussage läßt sich sofort eine Folgerung für den Fall der  $L^1$ -Approximation deduzieren:

**Folgerung** *Es sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum,  $C$  eine nichtleere konvexe Teilmenge von  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  und  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \setminus \overline{C}$ . Dann ist  $u^* \in C$  genau dann eine beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $C$ , wenn es ein  $\psi \in L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  gibt, so daß gilt*

- (1)  $\|\psi\|_\infty = 1,$
- (2)  $(f - u^*)\psi = |f - u^*| \quad \mu\text{-fast überall},$
- (3)  $\int_{\Omega} (u - u^*)\psi \, d\mu \leq 0 \quad (u \in C).$

Diese Folgerung deutet bereits darauf hin, daß Interpolation und beste  $L^1$ -Approximation eng miteinander zusammenhängen. Denn der dritte Punkt obiger Folgerung ist ja im wesentlichen eine Bedingung an das Vorzeichenverhalten von  $f - u^*$  und an die Struktur der Menge, auf der  $u^*$  die Funktion  $f$  interpoliert.

Unser besonderes Interesse gilt den sogenannten *kanonischen Punktmenge*n (siehe auch [8], [20]). Darunter verstehen wir eine Teilmenge  $Z \subset \Omega$ , die die Eigenschaft hat, daß für eine (möglichst große) Klasse  $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  die

beste Approximation aus  $C$  an  $f \in \mathcal{F}$  durch Interpolation an  $f$  auf der Menge  $Z$  charakterisiert ist.

Zur Charakterisierung bester *einseitiger* Approximation ist das Kolmogorov-Kriterium unzureichend, da die Satzaussage in diesem Fall im wesentlichen die Definition wiedergibt (indem man  $\psi = 1$  setzt). In diesem Abschnitt werden wir daher zunächst ein Theorem formulieren, das uns ein probateres Hilfsmittel zur Behandlung der besten einseitigen  $L^1$ -Approximation in die Hand gibt (Satz 2.1). Die anschließenden Folgerungen dienen der Verwendung in späteren Abschnitten.

**Bezeichnungen** Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $U$  ein Unterraum von  $C(K)$ . Dann setzen wir für  $f \in C(K)$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f, U) &:= \{u \in U : u \geq f\}, \\ \mathcal{L}(f, U) &:= \{u \in U : u \leq f\}.\end{aligned}$$

Ferner bezeichnen wir die entsprechenden Approximationskonstanten durch

$$\begin{aligned}\overline{E}(f, U) &:= \inf_{u \in \mathcal{U}(f, U)} \|f - u\|_1, \\ \underline{E}(f, U) &:= \inf_{u \in \mathcal{L}(f, U)} \|f - u\|_1.\end{aligned}$$

Eine Funktion  $u^* \in \mathcal{U}(f, U)$  (bzw.  $u_* \in \mathcal{L}(f, U)$ ) mit der Eigenschaft

$$\|f - u^*\|_1 = \overline{E}(f, U) \quad (\text{bzw. } \|f - u_*\|_1 = \underline{E}(f, U))$$

heißt *beste einseitige  $L^1$ -Approximation an  $f$  von oben* (bzw. *unten*) bzgl.  $U$ , oder auch *beste einseitige  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, U)$*  (bzw.  $\mathcal{L}(f, U)$ ).

Weiterhin setzen wir für eine Funktion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$Z(f) := \{x \in M : f(x) = 0\}.$$

Obwohl wir die Theoreme stets für den Fall der einseitigen Approximation von oben formulieren werden, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß sämtliche Aussagen entsprechend auch für die einseitige Approximation von unten gültig sind.

Das folgende Theorem stellt die Basis für das Studium bester einseitiger  $L^1$ -Approximation dar. Wie das Kolmogorov-Kriterium, bzw. dessen Spezialisierung auf die  $L^1$ -Approximation, stellt der folgende Satz den Zusammenhang zwischen bester  $L^1$ -Approximation und Interpolation her. Für endlichdimensionale Unterräume  $U \subset C(K)$  findet man dieses Kriterium bereits in dem Buch von A. Pinkus [22, S. 103ff]. Die hier vorgestellte Verallgemeinerung geht auf D. H. Armitage und S. J. Gardiner [1] zurück.

**Satz 2.1** [D. H. Armitage, S. J. Gardiner, 1] *Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $U$  ein Unterraum von  $C(K)$  der die konstanten Funktionen enthält. Ferner sei  $f \in C(K)$  und  $u^* \in \mathcal{U}(f, U)$ .*

*Dann sind äquivalent:*

- (i)  $u^*$  ist eine beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, U)$ .
- (ii) Für jede Funktion  $u \in U$  mit der Eigenschaft  $u|_{Z(f-u^*)} \geq 0$  folgt

$$\int_K u \, dx \geq 0.$$

- (iii) Es existiert ein positives reguläres Borel-Maß  $\mu$  auf  $Z(f - u^*)$ , so daß gilt

$$\int_{Z(f-u^*)} u \, d\mu = \int_K u \, dx \quad (u \in U).$$

**Bemerkung** In der obigen Formulierung von Satz 2.1 haben wir, im Gegensatz zur Formulierung der Aussage in [1], die *Regularität* des Maßes  $\mu$  aus 2.1.(iii) explizit hervorgehoben, da wir diese Eigenschaft an späterer Stelle noch brauchen werden (siehe etwa Folgerung 2.3). Tatsächlich ergibt sich die Regularität von  $\mu$  implizit aus dem in [1] vorgeführten Beweis aufgrund der Kompaktheit von  $Z(f - u^*)$ .

Aus dem vorangegangenen Satz können wir nun einige einfache Folgerungen ziehen. Mit Hilfe dieser Aussagen werden wir dann später in Abschnitt 5 die gewünschten Charakterisierungssätze beweisen (siehe Satz 5.1 und Folgerung 5.2).

**Folgerung 2.2** *Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $U$  ein Unterraum von  $C(K)$  der die konstanten Funktionen enthält. Ferner sei  $f \in C(K)$  und  $u^* \in \mathcal{U}(f, U)$  eine beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, U)$ .*

*Ist dann  $g \in C(K)$  und  $v^* \in \mathcal{U}(g, U)$  eine Funktion mit*

$$g|_{Z(f-u^*)} = v^*|_{Z(f-u^*)},$$

*dann ist  $v^*$  eine beste einseitige  $L^1$ -Approximation an  $g \in \mathcal{U}(g, U)$ .*

**Beweis:** Nach Satz 2.1 existiert ein positives Borel-Maß  $\mu$  auf  $Z := Z(f - u^*)$ , so daß gilt

$$\int_Z u \, d\mu = \int_K u \, dx \quad (u \in U).$$

Damit folgt für alle  $v \in \mathcal{U}(g, U)$  wegen  $v|_Z \geq g|_Z = v^*|_Z$

$$\|v^* - g\|_1 = \int_Z v^* d\mu - \int_K g dx \leq \int_Z v d\mu - \int_K g dx = \|v - g\|_1.$$

□

**Bemerkung** Folgerung 2.2 ist insbesondere dann nützlich, wenn man bereits für gewisse Funktionen  $f \in C(K)$  deren beste einseitige  $L^1$ -Approximation  $u^*$  bestimmt hat und auf der zugehörigen Menge  $Z := Z(f - u^*)$  ein Interpolationsoperator bezüglich  $U$  definiert ist. In diesem Fall kann man nämlich anhand einer Interpolationsfehlerformel häufig Kriterien für die Einseitigkeit der interpolierenden Funktion ablesen (z. B. bei der Hermite-Interpolation). Für jede Funktion  $g \in C(K)$ , die ein solches Kriterium erfüllt, ist dann die interpolierende Funktion bereits eine beste einseitige  $L^1$ -Approximation.

Die folgende Aussage kann man in vielen Fällen dazu heranziehen, um die Eindeutigkeit der besten einseitigen  $L^1$ -Approximation sicherzustellen.

**Folgerung 2.3** *Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $U$  ein Unterraum von  $C(K)$  der die konstanten Funktionen enthält. Ferner sei  $f \in C(K)$ ,  $u^* \in \mathcal{U}(f, U)$  und  $\mu$  ein reguläres Borel-Maß auf  $Z := Z(f - u^*)$ , so daß gilt*

$$\int_Z u d\mu = \int_K u dx \quad (u \in U).$$

*Ist dann  $\tilde{u} \in \mathcal{U}(f, U)$  eine weitere beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, U)$ , so folgt*

$$\text{supp } \mu \subset Z(f - \tilde{u}).$$

**Beweis:** Wegen

$$\int_K u^* - f dx = \|u^* - f\|_1 = \|\tilde{u} - f\|_1 = \int_K \tilde{u} - f dx$$

folgt

$$\int_Z f d\mu = \int_Z u^* d\mu = \int_K u^* dx = \int_K \tilde{u} dx = \int_Z \tilde{u} d\mu,$$

also  $\int_Z \tilde{u} - f \, d\mu = 0$ .

Nun ist  $\mu$  regulär und es gilt  $0 \leq (\tilde{u} - f)|_Z \in C(Z)$ . Daher muß  $\tilde{u} - f$  auf dem Träger von  $\mu$  verschwinden, d.h. es gilt  $\text{supp } \mu \subset Z(f - \tilde{u})$ .

□

Bei Fragen der Charakterisierung kann es manchmal hilfreich sein, den Unterraum geeignet zu vergrößern und dort nach besten Approximationen zu suchen und mit deren Hilfe das Ausgangsproblem anzugehen.

**Folgerung 2.4** *Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $U$  ein Unterraum von  $C(K)$  der die konstanten Funktionen enthält. Ferner sei auch  $V$  ein Unterraum von  $C(K)$ , so daß gilt  $U \subset V \subset \overline{(U, \|\cdot\|_\infty)}$ . Ist dann  $u^* \in \mathcal{U}(f, U)$  eine beste  $L^1$ -Approximation an  $f \in C(K)$  in  $\mathcal{U}(f, U)$ , dann gilt*

$$\|f - u^*\|_1 = \overline{E}(f, V).$$

**Beweis:** Nach Satz 2.1 existiert ein positives Borel-Maß  $\mu$  auf  $Z := Z(f - u^*)$  mit der Eigenschaft

$$\int_Z u \, d\mu = \int_K u \, dx \quad (u \in U).$$

Wegen der Dichtheit von  $U$  in  $V$  folgt daraus sofort

$$\int_Z v \, d\mu = \int_K v \, dx \quad (v \in V).$$

Damit folgt für alle  $v \in \mathcal{U}(f, V)$

$$\|f - u^*\|_1 = \int_Z f \, d\mu - \int_K f \, dx \leq \int_Z v \, d\mu - \int_K f \, dx = \|f - v\|_1.$$

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts notieren wir noch eine Aussage, die darauf hinweist, daß im Falle der einseitigen Approximation die Interpolation vom

Lagrangeschen Typ nicht mehr ausreicht, sondern daß sich zwangsläufig Interpolationsprobleme vom Hermiteschen Typ ergeben.

**Lemma 2.5** *Es sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $U$  ein Unterraum von  $C(K)$ . Ferner sei  $f \in C^1(K)$  und  $u^* \in \mathcal{U}(f, U)$  eine stetig differenzierbare beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, U)$ .*

*Dann gilt*

$$\overset{\circ}{K} \cap Z(f - u^*) \subset \overset{\circ}{K} \cap Z(\nabla f - \nabla u^*).$$

**Beweis:** Die Nullstellen von  $f - u^*$  sind Extremalstellen. Daher muß der Gradient an den inneren Extrema verschwinden.

□

### 3. Bivariate Hermite–Interpolation mit Quasi–Blending–Funktionen

In diesem Abschnitt wenden wir uns dem Studium der bivariaten Hermite–Interpolation auf Graphen  $m$ –blättriger Überlagerungen zu. Um Wiederholungen zu vermeiden, sei im folgenden  $\varphi: I \rightarrow I$ ,  $I := [-1, 1]$  stets eine  $m$ –blättrige Überlagerung und  $-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$ ,  $\eta \in \{-1, 1\}$  sowie  $\psi_\mu: [-1, 1] \rightarrow [x_{\mu-1}, x_\mu]$ ,  $1 \leq \mu \leq m$  wie in Lemma 1.9. Ferner setzen wir  $\Psi := (\psi_1, \dots, \psi_m)$ .

#### Quasi– $B^{m,1}$ –Funktionen

Für die Interpolation auf Graphen  $m$ –blättriger Überlagerungen  $\varphi$  ist der Raum

$$B^{m,1}(I^2) := \{p \in C^{m,1}(I^2) : p^{(m,1)} = 0\}$$

der  $B^{m,1}$ –Blending–Funktionen unzureichend. Die Funktion

$$f: I^2 \ni (x, y) \mapsto x^m g(y) \in \mathbb{R}$$

besitzt nämlich im allgemeinen keine Interpolierende in  $B^{m,1}(I^2)$  bezüglich des Graphen  $\Gamma_\varphi$ , falls  $m \geq 3$  und  $g \in C^1(I) \setminus C^2(I)$  ist (siehe Beispiel 3.7).

Für unsere Zwecke definieren wir daher den Raum der *Quasi– $B^{m,1}$ –Funktionen* bestehend aus allen Funktionen  $h \in C^{0,1}(I^2)$ , für die bei beliebigem  $y \in I$  die Funktion  $I \ni x \mapsto h^{(0,1)}(x, y)$  ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $m - 1$  ist, also

$$QB^{m,1}(I^2) := \{h \in C^{0,1}(I^2) : h^{(0,1)}(\cdot, y) \in \Pi_{m-1} \text{ für alle } y \in I\}.$$

Ist  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  und  $-1 \leq \xi_1 < \dots < \xi_m \leq 1$ , dann gilt für alle  $(x, y) \in I^2$

$$(1) \quad h^{(0,1)}(x, y) = \sum_{\mu=1}^m h^{(0,1)}(\xi_\mu, y) \ell_\mu(x; \xi_1, \dots, \xi_m).$$



Daraus erhalten wir

$$(2) \quad h(x, y) = h(x, -1) + \sum_{\mu=1}^m (h(\xi_\mu, y) - h(\xi_\mu, -1)) \ell_\mu(x; \xi_1, \dots, \xi_m).$$

Mittels dieser Darstellung sehen wir sofort, daß es zu jeder Funktion  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  Funktionen  $a_0, \dots, a_{m-1} \in C^1(I^2)$  und  $b \in C(I)$  gibt, so daß gilt

$$(3) \quad h(x, y) = b(x) + \sum_{\mu=0}^{m-1} a_\mu(y) x^\mu \quad ((x, y) \in I^2).$$

Diese Darstellung ist natürlich nicht eindeutig. Umgekehrt ist jede Funktion von der Form (3) in  $QB^{m,1}(I^2)$ . Ferner folgt aus (3) zusammen mit dem Weierstraßschen Approximationssatz

$$B^{m,1}(I^2) \underset{\neq}{\subset} QB^{m,1}(I^2) \underset{\neq}{\subset} \overline{(B^{m,1}(I^2), \|\cdot\|_\infty)}.$$

## Bivariate Hermite–Interpolation

Wir wollen nun die oben eingeführten Quasi- $B^{m,1}$ -Funktionen dazu benutzen, um hinreichend glatte Funktionen auf Graphen  $m$ -blättriger Überlagerungen zu interpolieren.

Ist  $\varphi: I \rightarrow I$  eine  $m$ -blättrige Überlagerung, so bezeichnen wir den Graphen von  $\varphi$  mit  $\Gamma_\varphi$ , d.h.

$$\Gamma_\varphi := \{(x, y) \in I^2 : x \in I; y = \varphi(x)\}.$$

Für eine Funktion  $f \in C^{m,1}(I^2)$  suchen wir eine Funktion  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  mit der Eigenschaft

$$(4) \quad h|_{\Gamma_\varphi} = f|_{\Gamma_\varphi} \quad \text{und} \quad h^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi} = f^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi}.$$

Zunächst halten wir fest, daß die Lösung dieses Problems eindeutig bestimmt ist:

**Lemma 3.1** *Die lineare Abbildung*

$$\Lambda: QB^{m,1}(I^2) \ni h \mapsto (h|_{\Gamma_\varphi}, h^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi}) \in C(\Gamma_\varphi) \times C(\Gamma_\varphi)$$

*ist injektiv.*

**Beweis:** Es sei  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  gegeben, so daß gilt  $\Lambda(h) = 0$ . Für jedes  $y \in ]-1, 1[$  ist die Funktion  $q_y: [-1, 1] \ni x \mapsto h^{(0,1)}(x, y)$  ein Polynom mit  $\text{grad } q_y \leq m - 1$  und

$$q_y(\psi_\mu(y)) = 0 \quad (1 \leq \mu \leq m).$$

Wegen  $\psi_1(y) < \dots < \psi_m(y)$  folgt daher  $q_y = 0$  und damit  $h^{(0,1)} = 0$ . Demnach ist die Funktion  $h_x: [-1, 1] \ni y \mapsto h(x, y)$  für jedes  $x \in [-1, 1]$  konstant und wegen  $h_x(\varphi(x)) = h(x, \varphi(x)) = 0$  verschwindet  $h_x$  identisch. Daraus folgt die Behauptung. □

Die grundlegende Idee zur Konstruktion der Lösung von (4) drängt sich durch die zweite Gleichung von (4) auf. Demnach ist nämlich  $I \ni x \mapsto h^{(0,1)}(x, t)$  für jedes  $t \in ]-1, 1[$  die Lagrange-Interpolation an  $I \ni x \mapsto f^{(0,1)}(x, t)$  auf der *variablen* Knotenmenge  $\varphi^{-1}(\{t\}) = \{\psi_1(t), \dots, \psi_m(t)\}$ , d.h. für jedes  $x \in I$  muß

$$(5) \quad h^{(0,1)}(x, t) = \sum_{\mu=1}^m f^{(0,1)}(\psi_\mu(t), t) \ell_\mu(x; \Psi(t)) = (Hf^{(0,1)}(\cdot, t))(x; \Psi(t))$$

sein. Die Lösung von (4) ergibt sich daher durch Integration von Gleichung (5) bezüglich der Variablen  $t$  innerhalb geeigneter Grenzen. Diese Überlegungen präzisiert folgender

**Satz 3.2** *Zu jeder Funktion  $f \in C^{m,1}(I^2)$  gibt es genau eine Quasi- $B^{m,1}$ -Funktion  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  mit der Eigenschaft*

$$h|_{\Gamma_\varphi} = f|_{\Gamma_\varphi} \quad \text{und} \quad h^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi} = f^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi}.$$

*Es gilt für alle  $(x, y) \in I^2$*

$$f(x, y) - h(x, y) = \int_{\varphi(x)}^y (Rf)(x, t) \omega(x; \Psi(t)) dt$$

mit

$$Rf: I^2 \ni (x, y) \mapsto \int_{\Delta_m} f^{(m,1)} \left( x + \sum_{\mu=1}^m s_\mu (\psi_\mu(y) - x), y \right) ds_1 \dots ds_m \in \mathbb{R}$$

und  $\Delta_m := \{(s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m : \sum_{\mu=1}^m s_\mu \leq 1\}$ .

**Beweis:** Die Eindeutigkeit folgt sofort aus Lemma 3.1. Für  $f \in C^{m,1}(I^2)$  ist die Funktion  $Rf$  stetig auf  $I^2$  und es gilt für  $(x, y) \in I^2$

$$\begin{aligned} (Rf)(x, y) \omega(x; \Psi(y)) &= [x, \psi_1(y), \dots, \psi_m(y); f^{(0,1)}(\cdot, y)] \omega(x; \Psi(y)) \\ &= f^{(0,1)}(x, y) - (Hf^{(0,1)}(\cdot, y))(x; \Psi(y)). \end{aligned}$$

Demnach ist

$$h: I^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) - \int_{\varphi(x)}^y (Rf)(x, t) \omega(x; \Psi(t)) dt \in \mathbb{R}$$

stetig auf  $I^2$  und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung partiell differenzierbar bzgl.  $y$  mit

$$h^{(0,1)}(x, y) = (Hf^{(0,1)}(\cdot, y))(x; \Psi(y)) \quad ((x, y) \in I^2).$$

Daraus folgt sofort  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  und

$$h^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi} = f^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi}.$$

Die Beziehung

$$h|_{\Gamma_\varphi} = f|_{\Gamma_\varphi}$$

sowie die Restglieddarstellung folgen sofort aus der Definition von  $h$ .

□

**Bemerkung** Für eine Funktion  $f \in C^{m,1}(I^2)$  bezeichnen wir die in Satz 3.2 konstruierte Lösung  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  des Interpolationsproblems (4) mit  $H_\varphi^{m,1}f$ , d.h. wir setzen

$$H_\varphi^{m,1}f: I^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) - \int_{\varphi(x)}^y (Rf)(x, t) \omega(x; \Psi(t)) dt$$

mit

$$Rf: I^2 \ni (x, y) \mapsto \int_{\Delta_m} f^{(m,1)} \left( x + \sum_{\mu=1}^m s_\mu (\psi_\mu(y) - x), y \right) ds_1 \dots ds_m \in \mathbb{R}.$$

Die Zuordnung

$$H_\varphi^{m,1}: C^{m,1}(I^2) \ni f \mapsto H_\varphi^{m,1} f \in QB^{m,1}(I^2)$$

definiert offensichtlich einen linearen Operator. Für eine Funktion  $f \in C^{m,1}(I^2)$  haben wir folgende weiteren Darstellungen von  $H_\varphi^{m,1} f$

$$\begin{aligned} (H_\varphi^{m,1} f)(x, y) &= f(x, y) - \int_{\varphi(x)}^y (Rf)(x, t) \omega(x; \Psi(t)) dt \\ &= f(x, \varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^y f^{(0,1)}(x, t) - (Rf)(x, t) \omega(x; \Psi(t)) dt \\ &= f(x, \varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^y (Hf^{(0,1)}(\cdot, t))(x; \Psi(t)) dt \\ &= f(x, \varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^y \sum_{\mu=1}^m f^{(0,1)}(\psi_\mu(t), t) \ell_\mu(x; \Psi(t)) dt, \end{aligned}$$

wobei die Existenz des Integrals in der letzten Gleichung dadurch sichergestellt ist, daß der Integrand für  $t \rightarrow \pm 1$  stetig in das Hermite-Interpolationspolynom bezüglich der Knoten  $\Psi(\pm 1)$  übergeht.

**Folgerung 3.3** *Zu jeder Funktion  $f \in C^{m,1}(I^2)$  gibt es höchstens eine  $B^{m,1}$ -Funktion  $h \in B^{m,1}(I^2)$  mit der Eigenschaft*

$$h|_{\Gamma_\varphi} = f|_{\Gamma_\varphi} \quad \text{und} \quad h^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi} = f^{(0,1)}|_{\Gamma_\varphi}.$$

*Im Falle der Existenz gilt*

$$h = H_\varphi^{m,1} f.$$

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus Lemma 3.1 und der Beziehung  $B^{m,1}(I^2) \subset QB^{m,1}(I^2)$ .

□

**Satz 3.4** Es sei  $f \in C^{m,1}(I^2)$  und  $f^{(m,1)} \geq 0$ . Dann gilt folgende Beziehung:

$$(-1)^{m+1} \eta(f - H_\varphi^{m,1} f) \geq 0.$$

**Beweis:** Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 3.2 gilt für  $(x, y) \in I^2$

$$\begin{aligned} & f(x, y) - (H_\varphi^{m,1} f)(x, y) \\ &= (y - \varphi(x)) \int_0^1 (Rf)(x, \varphi(x) + t(y - \varphi(x))) \omega(x; \Psi(\varphi(x) + t(y - \varphi(x)))) dt. \end{aligned}$$

Nach Definition von  $Rf$  und wegen  $f^{(m,1)} \geq 0$  gilt  $Rf \geq 0$ . Nach Lemma 1.9 gilt weiter für jedes  $t \in [0, 1]$

$$\text{sign } \omega(x; \Psi(\varphi(x) + t(y - \varphi(x)))) = \eta(-1)^{m+1} \text{sign } t(y - \varphi(x)).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.

□

Bei der Blending-Interpolation auf Blending-Gittern läßt sich der zugehörige Peano-Kern des Interpolationsoperators als Produkt von Peano-Kernen univariater Interpolationsoperatoren darstellen. Wir wollen im nun folgenden Satz zeigen, daß dies auch für den Operator  $H_\varphi^{m,1}$  gilt.

**Satz 3.5** Für alle  $f \in C^{m,1}(I^2)$  gilt

$$f(x, y) - (H_\varphi^{m,1} f)(x, y) = \int_{I^2} f^{(m,1)}(s, t) K_\varphi^{m,1}(s, t; x, y) ds dt$$

mit

$$K_\varphi^{m,1}(s, t; x, y) := \frac{1}{(m-1)!} B_{m-1}(s; x, \Psi(t)) B_0(t; y, \varphi(x)) \omega(x; \Psi(t)) \omega(y; \varphi(x)).$$

**Beweis:** Es sei  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^{m,n}(I^2)$ , dann erhalten wir durch koordinatenweise Taylorentwicklung im Punkt  $x_0 = y_0 = -1$  für alle  $(x, y) \in I^2$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{f^{(\mu,0)}(x_0, y)}{\mu!} (x - x_0)^\mu + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(0,\nu)}(x, y_0)}{\nu!} (y - y_0)^\nu \\ &\quad - \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{f^{(\mu,\nu)}(x_0, y_0)}{\mu! \nu!} (x - x_0)^\mu (y - y_0)^\nu + \rho_{m,n}(x, y) \end{aligned}$$

mit

$$\rho_{m,n}(x, y) = \frac{1}{(m-1)!(n-1)!} \int_{I^2} f^{(m,n)}(s, t) (x-s)_+^{m-1} (y-t)_+^{n-1} ds dt.$$

Insbesondere erhalten wir also für  $n = 1$

$$f(x, y) = \underbrace{\sum_{\mu=0}^{m-1} \frac{f^{(\mu,0)}(x_0, y) - f^{(\mu,0)}(x_0, y_0)}{\mu!} (x-x_0)^\mu + f(x, -1) + \rho_{m,1}(x, y)}_{\in B^{m,1}(I^2) \subset QB^{m,1}(I^2)}.$$

Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} f(x, y) - (H_\varphi^{m,1} f)(x, y) &= \rho_{m,1}(x, y) - (H_\varphi^{m,1} \rho_{m,1})(x, y) \\ &= \int_{\varphi(x)}^y (R\rho_{m,1})(x, t) \omega(x; \Psi(t)) dt \\ &= \int_{-1}^1 (R\rho_{m,1})(x, t) \omega(x; \Psi(t)) ((y-t)_+^0 - (\varphi(x)-t)_+^0) dt \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \rho_{m,1}^{(0,1)}(x, t) - \left( H\rho_{m,1}^{(0,1)}(\cdot, t) \right) (x; \Psi(t)) \right\} B_0(t; y, \varphi(x)) \omega(y; \varphi(x)) dt. \end{aligned}$$

Nun gilt für  $|t| < 1$

$$\begin{aligned} \rho_{m,1}^{(0,1)}(x, t) - \left( H\rho_{m,1}^{(0,1)}(\cdot, t) \right) (x; \Psi(t)) &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{-1}^1 f^{(m,1)}(s, t) \left( (x-s)_+^{m-1} - \sum_{\mu=1}^m (\psi_\mu(t) - s)_+^{m-1} \ell_\mu(x; \Psi(t)) \right) ds \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{-1}^1 f^{(m,1)}(s, t) B_{m-1}(s; x, \psi_1(t), \dots, \psi_m(t)) ds \omega(x; \Psi(t)). \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung

□

**Bemerkung** Aufgrund der Tatsache, daß  $B$ -Splines stets nichtnegativ sind, kann man analog zu Satz 3.4 zeigen, daß der Peano-Kern  $K_\varphi^{m,1}$  zum Operator  $H_\varphi^{m,1}$  definites Vorzeichen hat.

Es ergibt sich nun natürlich die Frage, ob die in Satz 3.2 konstruierte interpolierende Quasi- $B^{m,1}$ -Funktion möglicherweise eine höhere Differenzierbarkeitsordnung besitzt. Setzt man voraus, daß die zugrundeliegende Überlagerung zwischen den Verzweigungspunkten glatt ist, so läßt sich tatsächlich folgendes zeigen:

**Satz 3.6** *Es sei  $\varphi: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  eine  $m$ -blättrige Überlagerung, so daß  $\varphi|_{[x_{\mu-1}, x_\mu]}$  für  $1 \leq \mu \leq m$  stetig differenzierbar ist. Ferner sei  $f \in C^{m,1}(I^2)$ . Dann ist die Funktion  $h := H_\varphi^{m,1} f$  in  $C^{1,1}(I^2)$  und es gilt*

$$h|_{\Gamma_\varphi} = f|_{\Gamma_\varphi} \quad \text{und} \quad (\nabla h)|_{\Gamma_\varphi} = (\nabla f)|_{\Gamma_\varphi}.$$

Für  $m \geq 2$  gilt sogar  $h \in C^{2,1}(I^2)$ .

**Beweis:** Nach Satz 3.2 gilt zunächst  $h \in C^{0,1}(I^2)$  und  $h^{(0,1)} \in C^{\infty,0}(I^2)$ . Wir definieren

$$G: I^2 \ni (x, y) \mapsto (Rf)(x, y)\omega(x; \Psi(y)) \in \mathbb{R}.$$

Dann ist  $G = f^{(0,1)} - h^{(0,1)} \in C^{m,0}(I^2)$  (siehe Beweis zu Satz 3.2) und es gilt nach Voraussetzung und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$  und  $y \in I$

$$\begin{aligned} h^{(1,0)}(x, y) &= f^{(1,0)}(x, y) + G(x, \varphi(x))\varphi'(x) - \int_{\varphi(x)}^y G^{(1,0)}(x, t) dt \\ (*) \quad &= f^{(1,0)}(x, y) - \int_{\varphi(x)}^y G^{(1,0)}(x, t) dt. \end{aligned}$$

Daher ist  $h^{(1,0)}$  stetig fortsetzbar auf  $I^2$ , d.h.  $h \in C^{1,0}(I^2)$  und damit insgesamt stetig partiell differenzierbar mit

$$(\nabla h)|_{\Gamma_\varphi} = (\nabla f)|_{\Gamma_\varphi}.$$

Desweiteren entnehmen wir obiger Gleichung, daß  $h^{(1,0)}$  bzgl.  $y$  stetig partiell differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial}{\partial y} h^{(1,0)} = \frac{\partial}{\partial x} h^{(0,1)} = f^{(1,1)} - G^{(1,0)},$$

also  $h \in C^{1,1}(I^2)$ .

Ist nun  $m \geq 2$ , dann folgt für  $1 \leq \mu \leq m$  wegen  $\psi_\mu(\varphi(x_\mu)) = \psi_{\mu+1}(\varphi(x_\mu))$

$$\begin{aligned} G^{(1,0)}(x_\mu, \varphi(x_\mu)) &= f^{(1,1)}(x_\mu, \varphi(x_\mu)) - h^{(1,1)}(x_\mu, \varphi(x_\mu)) \\ &= \frac{d}{dx} \left( f^{(0,1)}(x, \varphi(x_\mu)) - h^{(0,1)}(x, \varphi(x_\mu)) \right)_{x=x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx} \left( f^{(0,1)}(x, \varphi(x_\mu)) - (Hf^{(0,1)}(\cdot, \varphi(x_\mu)))(x, \Psi(\varphi(x_\mu))) \right)_{x=x_\mu} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (\*) erhalten wir für  $x \in ]-1, 1[ \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$  und  $y \in I$  durch weiteres Ableiten zunächst

$$h^{(2,0)}(x, y) = f^{(2,0)}(x, y) + G^{(1,0)}(x, \varphi(x))\varphi'(x) - \int_{\varphi(x)}^y G^{(2,0)}(x, t) dt.$$

Wegen  $G^{(1,0)}(x_\mu, \varphi(x_\mu)) = 0$  für  $1 \leq \mu \leq m$  ist  $h^{(2,0)}$  stetig fortsetzbar auf  $I^2$  und damit in  $C^{2,1}(I^2)$ .

□

Das folgende Beispiel zeigt, daß man im allgemeinen keine höhere Differenzierbarkeitsordnung, erwarten kann, als die in Satz 3.6 garantierte.

**Beispiel 3.7** Es sei  $m \geq 3$  und  $g \in C^1(I)$ . Dann ist die Funktion

$$f: I^2 \ni (x, y) \mapsto x^m g(y) \in \mathbb{R}$$

in  $C^{m,1}(I^2)$  und es gilt

$$f^{(m,1)}(x, y) = m! g'(y) \quad ((x, y) \in I^2).$$

Ist nun  $\varphi: I \rightarrow I$  wie in Satz 3.6 und  $h := H_\varphi^{m,1} f \in QB^{m,1}(I^2)$  die in Satz 3.2 konstruierte Interpolierende an  $f$ , dann gilt

$$h(x, y) = x^m g(y) - \int_{\varphi(x)}^y g'(t) \omega(x; \Psi(t)) dt.$$



Daraus folgt

$$\begin{aligned} h^{(1,0)}(x, y) &= mx^{m-1}g(y) - \int_{\varphi(x)}^y g'(t) \frac{\partial}{\partial x} \omega(x; \Psi(t)) dt \\ &= mx^{m-1}g(y) - \sum_{\mu=1}^m \int_{\varphi(x)}^y g'(t) \omega_{\mu}(x; \Psi(t)) dt. \end{aligned}$$

mit

$$\omega_{\mu}(x; \xi) := -\frac{\partial}{\partial \xi_{\mu}} \omega(x; \xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \mu}}^m (x - \xi_j).$$

Demnach erhalten wir für  $x_{k-1} \leq x \leq x_k$

$$\begin{aligned} h^{(2,0)}(x, y) &= m(m-1)x^{m-2}g(y) + \sum_{\mu=1}^m g'(\varphi(x)) \omega_{\mu}(x; \Psi(\varphi(x))) \varphi'(x) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^m \int_{\varphi(x)}^y g'(t) \frac{\partial}{\partial x} \omega_{\mu}(x; \Psi(t)) dt \\ &= m(m-1)x^{m-2}g(y) + g'(\varphi(x)) \omega_k(x; \Psi(\varphi(x))) \varphi'(x) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^m \int_{\varphi(x)}^y g'(t) \frac{\partial}{\partial x} \omega_{\mu}(x; \Psi(t)) dt. \end{aligned}$$

Daraus ersehen wir sofort, daß für  $g \in C^1(I) \setminus C^2(I)$  die Funktion  $h^{(2,0)}$  im allgemeinen keine weitere partielle Ableitung bezüglich der Variablen  $x$  besitzt.

## 4. Kubaturformeln für Quasi-Blending-Funktionen

Die Resultate in den Arbeiten [13] und [14] beruhen zu einem erheblichen Teil auf den Kubaturformeln

$$\int_{I^2} p(x, y) dx dy = \int_1^1 p(s, s) ds$$

für Funktionen  $p \in B^{1,1}(I^2)$ , bzw.

$$\int_{I^2} q(x, y) dx dy = \int_1^1 q(s, 2|s| - 1) ds$$

für  $q \in B^{2,1}(I^2)$ . Man kann leicht nachrechnen, daß diese Kubaturformeln auch noch für Funktionen aus dem Raum  $QB^{m,1}(I^2)$ ,  $m \in \{1, 2\}$  gültig sind. Wir haben also für diese beiden Fälle Kubaturformeln, deren *Knotenmengen* (d.h. die Träger der Maße auf den rechten Seiten der Gleichungen) jeweils Graphen  $m$ -blättriger Überlagerungen  $\varphi_m: I \rightarrow I$  sind und die für Funktionen aus  $QB^{m,1}(I^2)$  exakt sind.

Wir wollen in diesem Abschnitt diskutieren, inwieweit sich obiger Sachverhalt für  $m \geq 3$  verallgemeinern läßt. Wir zeigen insbesondere, daß es zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  und  $\eta \in \{-1, 1\}$  (Bezeichnungen wie in Lemma 1.9) höchstens eine  $m$ -blättrige Überlagerung  $\varphi_{m,\eta}: I \rightarrow I$  gibt, so daß gilt

$$\int_{I^2} h(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 h(s, \varphi_{m,\eta}(s)) ds \quad (h \in QB^{m,1}(I^2)).$$

Diese wird charakterisiert durch ein polynomielles Gleichungssystem, dessen explizite Lösung bereits für "kleine"  $m \in \mathbb{N}$  verhältnismäßig schwer zu bestimmen ist. Wir werden dies anhand der Beispiele am Ende dieses Abschnitts illustrieren.

Wie bereits im letzten Abschnitt, haben  $\eta \in \{-1, 1\}$ ,  $-1 =: x_0 < x_1 < \dots < x_m := 1$  und  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$  für eine  $m$ -blättrige Überlagerung  $\varphi: I \rightarrow I$  dieselbe Bedeutung wie in Lemma 1.9.

Bevor wir die nächste Aussage formulieren, wollen wir noch folgende Konvention vereinbaren:

Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $a_0, \dots, a_{m+1} \in \mathbb{R}$  setzen wir

$$\sum_{\mu=0}^{m+1} {}''a_{\mu} := \frac{a_0}{2} + \frac{a_{m+1}}{2} + \sum_{\mu=1}^m a_{\mu}$$

**Lemma 4.1** *Es sei  $\varphi: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  eine  $m$ -blättrige Überlagerung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  $\int_{I^2} h(x, y) dx dy = 2 \int_{-1}^1 h(s, \varphi(s)) ds \quad (h \in QB^{m,1}(I^2)),$
- (ii)  $\int_{-1}^1 (\text{sign}(t - \varphi(x)) - t)x^{j-1} dx = 0 \quad (1 \leq j \leq m; |t| < 1),$
- (iii)  $\sum_{\mu=0}^{m+1} {}''(-1)^{\mu} \psi_{\mu}^j(t) = \frac{1 - (-1)^j}{2} \eta t \quad (1 \leq j \leq m; |t| < 1).$

Dabei setzen wir  $\psi_0 = -1$  und  $\psi_{m+1} = 1$ .

**Beweis:** Für jede Quasi- $B^{m,1}$ -Funktion  $h \in QB^{m,1}(I^2)$  und  $(x, y) \in I^2$  gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$h(x, y) = h(x, \varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^y h^{(0,1)}(x, t) dt.$$

Daraus erhalten wir nach Integration beider Seiten über  $I^2$

$$\int_{I^2} h(x, y) dx dy = 2 \int_{-1}^1 h(x, \varphi(x)) dx + \int_{I^2} \left( \int_{\varphi(x)}^y h^{(0,1)}(x, t) dt \right) dx dy.$$

Nun gilt wir weiter

$$\begin{aligned}
& \int_{I^2} \left( \int_{\varphi(x)}^y h^{(0,1)}(x, t) dt \right) dx dy \\
&= \int_{I^2} \left( \int_{-1}^1 ((y-t)_+^0 - (\varphi(x)-t)_+^0) h^{(0,1)}(x, t) dt \right) dx dy \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((y-t)_+^0 - (\varphi(x)-t)_+^0) h^{(0,1)}(x, t) dy dt dx \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((1-t) - 2(\varphi(x)-t)_+^0) h^{(0,1)}(x, t) dt dx \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - 2(\varphi(x)-t)_+^0 - t) h^{(0,1)}(x, t) dx dt \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\text{sign}(t - \varphi(x)) - t) h^{(0,1)}(x, t) dx dt.
\end{aligned}$$

Also ist die Bedingung

$$f_j(t) := \int_{-1}^1 (\text{sign}(t - \varphi(x)) - t) x^{j-1} dx = 0 \quad (1 \leq j \leq m; |t| < 1)$$

auf jeden Fall hinreichend für (i). Um die Notwendigkeit dieser Bedingung einzusehen, nehmen wir an, daß es ein  $j \in \{1, \dots, m\}$  und ein  $\tau \in ]-1, 1[$  gibt, so daß gilt

$$|f_j(\tau)| > 0.$$

Aufgrund der Stetigkeit der Funktion  $] -1, 1[ \ni t \mapsto f_j(t)$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $t \in U := \{s \in ]-1, 1[: |s - \tau| < \delta\}$  gilt

$$|f_j(t)| > 0.$$

Wähle nun eine Funktion  $0 \leq g \in C(I)$  mit  $\text{supp } g \subset U$  und  $g(\tau) > 0$  und definiere

$$G: I \ni y \mapsto \int_{-1}^y g(t) dt$$

Dann ist  $h: I^2 \ni (x, y) \mapsto x^{j-1}G(y) \in \mathbb{R}$  in  $B^{m,1}(I^2) \subset QB^{m,1}(I^2)$  und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\text{sign}(t - \varphi(x)) - t) h^{(0,1)}(x, t) dx dt &= \int_U f_j(t) g(t) dt \\ &= \text{sign}(f_j(\tau)) \int_U |f_j(t)| g(t) dt \neq 0, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (i). Damit sind (i) und (ii) äquivalent.

Nun gilt weiter

$$\text{sign}(t - \varphi(x)) = \eta(-1)^{\mu+1} \quad (\psi_\mu(t) < x < \psi_{\mu+1}(t); 0 \leq \mu \leq m)$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (\text{sign}(t - \varphi(x)) - t) x^{j-1} dx &= \sum_{\mu=0}^m \eta(-1)^{\mu+1} \int_{\psi_\mu(t)}^{\psi_{\mu+1}(t)} x^{j-1} dx - t \frac{1 - (-1)^j}{j} \\ &= \frac{\eta}{j} \sum_{\mu=0}^m (-1)^{\mu+1} (\psi_{\mu+1}^j(t) - \psi_\mu^j(t)) - t \frac{1 - (-1)^j}{j} \\ &= \frac{2\eta}{j} \sum_{\mu=0}^{m+1} (-1)^\mu \psi_\mu^j(t) - t \frac{1 - (-1)^j}{j}. \end{aligned}$$

Damit sind auch (ii) und (iii) äquivalent.

□

Die gesuchte Überlagerung  $\varphi$  aus Lemma 4.1 durch die Eigenschaften (i) oder (ii) zu bestimmen ist offensichtlich schwierig, da  $\varphi$  hier nur implizit als Nullstelle eines nichtlinearen Funktionals, bzw. einer Familie nichtlinearer Funktionale auftaucht. Dagegen gibt Bedingung (iii) Anlaß zur Hoffnung, daß sich  $\varphi$  hieraus durch die zugehörigen Funktionen  $\psi_1, \dots, \psi_m$  bestimmen läßt. Zwar treten diese auch hier nur implizit als Lösungen eines polynomiellen Gleichungssystems auf,

jedoch können wir hierzu die praktischen Methoden der algebraischen Geometrie benutzen, um für gegebene  $m \in \mathbb{N}$  explizite Lösungen zu bestimmen (Gröbner-Basen, Buchberger-Algorithmus).

Zuvor werden wir allerdings noch zeigen, daß das Gleichungssystem (iii) stets reelle Lösungen besitzt:

**Satz 4.2** *Es sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\eta \in \{-1, 1\}$  und*

$$\Delta := \{\xi \in \mathbb{R}^m : -1 < \xi_1 < \dots < \xi_m < 1\}.$$

*Dann gibt es genau eine injektive reell-analytische Kurve*

$$\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m): I \longrightarrow \Delta$$

*mit der Eigenschaft*

$$\sum_{\mu=0}^{m+1} {}''(-1)^\mu \psi_\mu^j(t) = \frac{1 - (-1)^j}{2} \eta t \quad (1 \leq j \leq m; |t| < 1)$$

*mit  $\psi_0 = -1$ ,  $\psi_{m+1} = 1$ .*

*Ferner lösen die Komponentenfunktionen  $\psi_1, \dots, \psi_m$  das folgende Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} \psi'_k &= \frac{\eta(-1)^\mu}{2} \int_{-1}^1 \ell_\mu(x; \psi_1, \dots, \psi_m) dx & (1 \leq \mu \leq m). \\ \psi_\mu(0) &= \cos\left(\frac{m+1-\mu}{m+1}\pi\right) \end{aligned}$$

**Beweis:** Es genügt offenbar, die Aussage für  $\eta = (-1)^{m+1}$  zu beweisen. Ist nämlich  $\Psi: I \longrightarrow \Delta$  eine Lösung für  $\eta = (-1)^{m+1}$ , dann ist  $\tilde{\Psi}: I \ni t \mapsto \Psi(-t) \in \Delta$  offenbar eine Lösung für  $-\eta$  und umgekehrt. Ferner muß die Kurve  $\Psi$ , sofern sie existiert, trivialerweise injektiv sein.

Wir definieren für  $1 \leq j \leq m$

$$f_j: \overline{\Delta} \times [-1, 1] \ni (\xi, t) \mapsto \int_{-1}^1 (\text{sign}(\omega(x, \xi)) - t)x^{j-1} dx \in \mathbb{R}.$$

Mit  $\xi_0 := -1$  und  $\xi_{m+1} := 1$  gilt für  $(\xi, t) \in \overline{\Delta} \times [-1, 1]$

$$\begin{aligned}
f_j(\xi, t) &= \sum_{\mu=0}^m (-1)^{m+\mu} \int_{\xi_\mu}^{\xi_{\mu+1}} x^{j-1} dx - t \int_{-1}^1 x^{j-1} dx \\
&= \frac{(-1)^m}{j} \sum_{\mu=0}^m (-1)^\mu (\xi_{\mu+1}^j - \xi_\mu^j) - \frac{t}{j} (1 - (-1)^j) \\
&= \frac{(-1)^m}{j} \left( \sum_{\mu=1}^{m+1} (-1)^{\mu+1} \xi_\mu^j + \sum_{\mu=0}^m (-1)^{\mu+1} \xi_\mu^j \right) - \frac{t}{j} (1 - (-1)^j) \\
&= \frac{2}{j} \left( (-1)^{m+1} \sum_{\mu=0}^{m+1} (-1)^\mu \xi_\mu^j - \frac{1 - (-1)^j}{2} t \right).
\end{aligned}$$

Für  $(\xi, t) \in \Delta \times ]-1, 1[$  erhalten wir daraus

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k}(\xi, t) = 2(-1)^{m+k+1} \xi_k^{j-1} \quad (1 \leq j; k \leq m)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\det \left( \frac{\partial f_j}{\partial \xi_k}(\xi, t) \right)_{1 \leq j, k \leq m} &= 2^m (-1)^{\frac{3}{2}m(m+1)} \det(\xi_k^{j-1})_{1 \leq j, k \leq m} \\
&= 2^m (-1)^{\frac{3}{2}m(m+1)} \prod_{1 \leq q < p \leq m} (\xi_p - \xi_q) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ferner ist  $\xi^{(0)} \in \Delta$  definiert durch

$$\xi_\mu^{(0)} := \cos \left( \frac{m+1-\mu}{m+1} \pi \right)$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$f_j(\xi, 0) = 0 \quad (1 \leq j \leq m)$$

in  $\Delta$  (vgl. R. A. DeVore, G. G. Lorentz [12] oder T. J. Rivlin [23]). Also ist nach dem Hauptsatz für implizite Funktionen die algebraische Varietät

$$M := \{(\xi, t) \in \Delta \times ]-1, 1[: f_j(\xi, t) = 0; 1 \leq j \leq m\}$$

eine 1–dimensionale Mannigfaltigkeit und die Projektion

$$p: M \ni (\xi, t) \mapsto t \in ] - 1, 1[$$

lokal topologisch.

Wir wollen nun zeigen, daß  $p$  eine eigentliche Abbildung ist, d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt. Sei dazu  $K_0 \subset ] - 1, 1[$  kompakt und  $K_1 := p^{-1}(K_0)$ . Ist  $(\xi_\nu, t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K_1$ , dann ist  $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K_0$ , also gibt es eine konvergente Teilfolge, die gegen einen Punkt  $t_0 \in K_0$  konvergiert. Wir können o.B.d.A annehmen, daß bereits  $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  gegen  $t_0$  konvergiert. Die Folge  $(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt, daher gibt es eine konvergente Teilfolge  $(\xi_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen einen Punkt  $\xi_0 \in \overline{\Delta}$  konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit von  $f_1, \dots, f_m$  gilt

$$f_j(\xi_0, t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_j(\xi_{\nu_k}, t_{\nu_k}) = 0 \quad (1 \leq j \leq m).$$

Angenommen es gilt  $\xi_0 \in \partial\Delta$ . Sind dann  $-1 < x_1 < \dots < x_r < 1$  die Nullstellen ungerader Ordnung von  $\omega(x, \xi_0)$  im Intervall  $] - 1, 1[$ , so gilt  $r \leq m - 1$ . Damit ist

$$q_0(x) := \prod_{\rho=1}^r (x - x_\rho)$$

ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $m - 1$  und es gilt

$$\text{sign}(\omega(x, \xi_0))q_0(x) \geq 0 \quad (|x| \leq 1).$$

Wegen  $f_j(\xi_0, t_0) = 0$ ;  $1 \leq j \leq m$  folgt daher

$$\int_{-1}^1 (\text{sign}(\omega(x, \xi_0)) - t_0)q_0(x) dx = \int_{-1}^1 |q_0(x)| - t_0q_0(x) dx = 0$$

und wegen  $|t_0| < 1$  müßte  $q_0 = 0$  sein, im Widerspruch zur Definition von  $q_0$ .

Also ist  $\xi_0 \in \Delta$ , d.h.  $(\xi_0, t_0) \in K_1$ . Demnach ist  $K_1$  folgenkompakt und damit auch kompakt.

Die Projektion  $p$  ist also eine unverzweigte eigentliche Überlagerungsabbildung und damit nach Lemma 1.7.(ii) surjektiv, da  $] - 1, 1[$  zusammenhängend ist. Ferner hat  $p$  nach Lemma 1.5 und Lemma 1.7.(i) eine wohldefinierte endliche Blätterzahl, d.h. die Abbildung  $] - 1, 1[ \ni t \mapsto \#(p^{-1}(\{t\})) \in \mathbb{N}$  ist konstant. Nun gilt aber  $\#(p^{-1}(\{0\})) = 1$ . Damit ist  $p$  sogar ein Homöomorphismus.



Mit  $P: M \ni (\xi, t) \mapsto \xi \in \Delta$  definiere nun  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m) := P \circ p^{-1}$ . Dann ist  $\Psi$  reell-analytisch und es gilt

$$f_j(\Psi(t), t) = 0 \quad (1 \leq j \leq m; |t| < 1).$$

Durch Differentiation nach  $t \in ]-1, 1[$  erhalten wir daraus

$$2(-1)^{m+1} \sum_{\mu=1}^m (-1)^\mu \psi_\mu^{j-1} \psi'_\mu - \frac{1 - (-1)^j}{j} = 0 \quad (1 \leq j \leq m).$$

Bezeichnen wir nun für  $1 \leq k \leq m$  und  $\xi \in \Delta$  die Koeffizienten des  $k$ -ten Lagrange-Grundpolynoms  $\ell_k(\cdot; \xi)$  bzgl. der Monome mit  $s_{k,j}(\xi)$ , d.h.

$$\ell_k(x; \xi) = \sum_{j=1}^m s_{k,j}(\xi) x^{j-1},$$

so erhalten wir aus obiger Gleichung

$$\begin{aligned} 2(-1)^{m+k+1} \psi'_k &= 2(-1)^{m+1} \sum_{\mu=1}^m (-1)^\mu \ell_k(\psi_\mu; \Psi) \psi'_\mu \\ &= 2(-1)^{m+1} \sum_{j=1}^m \sum_{\mu=1}^m (-1)^\mu s_{k,j}(\Psi) \psi_\mu^{j-1} \psi'_\mu \\ &= \sum_{j=1}^m s_{k,j}(\Psi) \frac{1 - (-1)^j}{j} \\ &= \int_{-1}^1 \ell_k(x; \Psi) dx. \end{aligned}$$

Damit ist  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$  Lösung des Anfangswertproblems

$$2(-1)^{m+1+k} \psi'_k = \int_{-1}^1 \ell_k(x; \psi_1, \dots, \psi_m) dx \quad (1 \leq k \leq m).$$

$$\psi_k(0) = \cos\left(\frac{m+1-k}{m+1}\pi\right)$$

□

**Bemerkung** Nach dem vorangegangenen Satz 4.2 gibt es zu jedem  $m \in \mathbb{N}$  und  $\eta \in \{-1, 1\}$  höchstens eine  $m$ -blättrige Überlagerung  $\varphi: I \rightarrow I$ , die eine der drei äquivalenten Bedingungen (i)–(iii) erfüllt, d.h. deren Graph die Knotenmenge einer Kubaturformel für  $QB^{m,1}$ -Funktionen beschreibt.

**Folgerung 4.3** *Es sei  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m): I \rightarrow \Delta$  die nach Satz 4.2 eindeutig bestimmte reell-analytische Kurve mit*

$$\sum_{\mu=0}^{m+1} {}''(-1)^\mu \psi_\mu^j(t) = \frac{1 - (-1)^j}{2} \eta t \quad (1 \leq j \leq m; |t| < 1).$$

(i) Für  $m = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\psi_\mu(t) = -\psi_{m+1-\mu}(t) \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \eta} (\psi_{2\mu+1}(t) - \psi_{2\mu}(t)) = 0 \quad (0 \leq \mu \leq k),$$

$$\lim_{t \rightarrow -\eta} (\psi_{2\mu}(t) - \psi_{2\mu-1}(t)) = 0 \quad (1 \leq \mu \leq k).$$

(ii) Für  $m = 2k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\psi_\mu(-t) = -\psi_{m+1-\mu}(t) \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \eta} (\psi_{2\mu+1}(t) - \psi_{2\mu}(t)) = 0 \quad (0 \leq \mu \leq k - 1),$$

$$\lim_{t \rightarrow -\eta} (\psi_{2\mu}(t) - \psi_{2\mu-1}(t)) = 0 \quad (1 \leq \mu \leq k).$$

**Beweis:** Wie im Beweis zu Satz 4.2 setzen wir o.B.d.A  $\eta = (-1)^{m+1}$  voraus. Dann gilt für alle  $p \in \Pi_{m-1}$

$$\begin{aligned} & (-1)^m \int_{-1}^1 ((\text{sign } \omega(x; -\Psi(t))) - (-1)^m t) p(-x) dx \\ &= \int_{-1}^1 ((\text{sign } (\omega(x; \Psi(t)))) - t) p(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 4.2 folgt daher

$$\psi_\mu(t) = -\psi_{m+1-\mu}(t) \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

falls  $m$  gerade ist, und

$$\psi_\mu(-t) = -\psi_{m+1-\mu}(t) \quad (1 \leq \mu \leq m)$$

falls  $m$  ungerade ist. Ferner folgen aus

$$\sum_{\mu=0}^{m+1} {}''(-1)^\mu \psi_\mu(t) = (-1)^{m+1} t$$

die Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^k (\psi_{2\mu}(t) - \psi_{2\mu-1}(t)) = 1 + (-1)^{m+1} t$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$  und

$$\sum_{\mu=0}^k (\psi_{2\mu+1}(t) - \psi_{2\mu}(t)) = 1 + t$$

falls  $m = 2k$ , sowie

$$\sum_{\mu=0}^{k-1} (\psi_{2\mu+1}(t) - \psi_{2\mu}(t)) = 1 - t$$

falls  $m = 2k - 1$ . Damit folgen die anderen Behauptungen.

□

**Bemerkung** Folgerung 4.3 verdeutlicht, daß die Komponentenfunktionen der Kurve  $\Psi$  paarweise "zusammenlaufen"; insbesondere erhalten wir daraus

$$\lim_{t \rightarrow \eta} \psi_m(t) = -\lim_{t \rightarrow \eta} \psi_1(t) = 1,$$

falls  $m$  gerade und

$$\lim_{t \rightarrow -\eta} \psi_m(t) = -\lim_{t \rightarrow \eta} \psi_1(t) = 1,$$

falls  $m$  ungerade.

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\bigcup_{\mu=1}^m \overline{\psi_\mu(\cdot) - 1, 1] = [-1, 1].$$

Dafür, daß sich aus den Komponentenfunktionen  $\psi_1, \dots, \psi_m$  der Lösungskurve  $\Psi$  aus Satz 4.2 eine  $m$ -blättrige Überlagerung  $\varphi: I \rightarrow I$  konstruieren läßt, ist notwendig und hinreichend, daß gilt

$$(*) \quad \lambda_\mu(\Psi(t)) \geq 0 \quad (|t| < 1; 1 \leq \mu \leq m)$$

mit

$$\lambda_\mu(\xi) := \int_{-1}^1 \ell_\mu(x; \xi) dx \quad (1 \leq \mu \leq m; \xi \in \Delta).$$

Die Notwendigkeit folgt sofort aus Lemma 1.9.(i) und Satz 4.2.

Ist andererseits  $(*)$  erfüllt, dann ist  $\eta(-1)^\mu \psi_\mu$  nach Satz 4.2 streng monoton wachsend (da  $\psi_\mu$  analytisch ist). Damit läßt sich  $\psi_\mu$  stetig nach  $I$  fortsetzen mit

$$x_{2\mu} := \lim_{t \rightarrow \eta} \psi_{2\mu}(t) = \lim_{t \rightarrow \eta} \psi_{2\mu+1}(t) \quad \left(0 \leq \mu \leq \left[\frac{m}{2}\right]\right),$$

bzw.

$$x_{2\mu-1} := \lim_{t \rightarrow -\eta} \psi_{2\mu-1}(t) = \lim_{t \rightarrow -\eta} \psi_{2\mu}(t) \quad \left(1 \leq \mu \leq \left[\frac{m+1}{2}\right]\right).$$

Demnach wird durch

$$\varphi(x) := \psi_\mu^{-1}(x) \quad (x_{\mu-1} \leq x \leq x_\mu; 1 \leq \mu \leq m)$$

eine  $m$ -blättrige Überlagerung  $\varphi: I \rightarrow I$  mit den Eigenschaften aus Lemma 1.9 definiert.

**Bezeichnung:** Für  $m \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir mit  $\Psi_m = (\psi_{1m}, \dots, \psi_{mm})$  diejenige Lösung des Gleichungssystems aus Lemma 4.1.(iii) mit  $\eta = (-1)^m$  (vgl. Satz 3.4).

**Beispiele 4.4** Wir werden nun anhand von Beispielen vorführen, wie man die Funktionen  $\psi_{1m}, \dots, \psi_{mm}$  durch lösen des Gleichungssystems aus Lemma 4.1.(iii) erhalten kann. Für  $1 \leq m \leq 4$  bereitet dies noch keine großen Probleme. Ab  $m \geq 5$  ist aber bereits ein erheblicher Rechenaufwand notwendig.

Zur Lösung des Gleichungssystems haben wir ab dem Fall  $m = 3$  mit Hilfe des *Buchberger-Algorithmus* eine *Gröbner-Basis* des von den beteiligten Polynomen erzeugten Ideals bestimmt (siehe etwa [10]). Dabei haben wir auf der Menge der Monome  $\{\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_m^{\alpha_m} : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m\}$  in den Unbestimmten  $\xi_1, \dots, \xi_m$

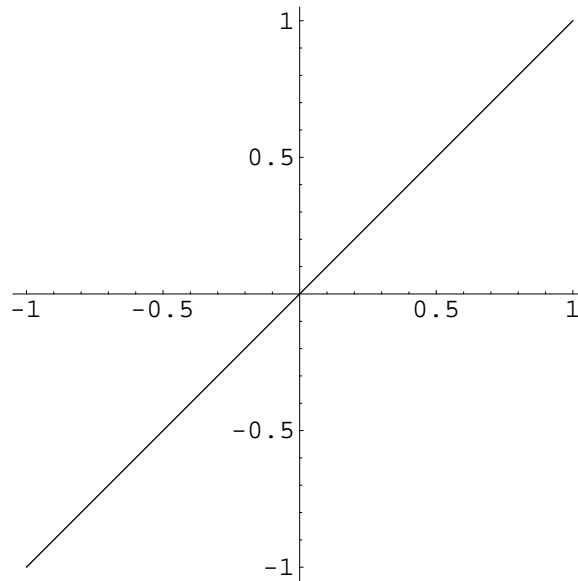
stets die lexikographische Ordnung benutzt; diese ist eindeutig festgelegt durch die Definition

$$\xi_1 < \dots < \xi_m$$

und

$$\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_m^{\alpha_m} < \xi_1^{\beta_1} \dots \xi_m^{\beta_m} \quad \text{für } \alpha_1 + \dots + \alpha_m < \beta_1 + \dots + \beta_m.$$

(1) Für  $m = 1$  erhalten wir ohne Probleme  $\psi_{11}: I \ni t \mapsto t \in I$  und damit  $\varphi_1 = \psi_{11}$ , also das Resultat aus [13].



(2) Für  $m = 2$  lautet das Gleichungssystem aus Lemma 4.1

$$-\xi_1 + \xi_2 = 1 + t$$

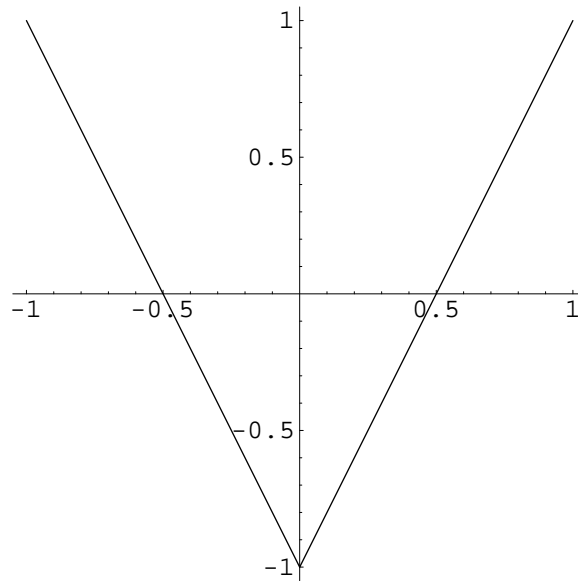
$$-\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0.$$

Daraus erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$\psi_{12}: I \ni t \mapsto -\frac{1+t}{2} \in [-1, 0]$$

$$\psi_{22}: I \ni t \mapsto \frac{1+t}{2} \in [0, 1],$$

also  $\varphi_2: I \ni x \mapsto 2|x| - 1 \in I$ . Auch hier stimmt unser Resultat mit dem aus [14] überein.



(3) Das Gleichungssystem für  $m = 3$  hat folgende Gestalt

$$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = t$$

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$$

$$\xi_1^3 - \xi_2^3 + \xi_3^3 = t.$$

Durch Umformung erhalten wir daraus

$$\xi_3^2 - 2\frac{t}{3}\xi_3 + \frac{3}{2} \left( \left( \frac{t}{3} \right)^2 - \frac{1}{3} \right) = \left( \xi_3 - \frac{t}{3} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{t}{3} \right)^2 \right) = 0$$

$$\xi_3 + \xi_1 - 2\frac{t}{3} = 0$$

$$\xi_2 + \frac{t}{3} = 0.$$

Demnach ergibt sich

$$\psi_{13}: I \mapsto \frac{t}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left( \frac{t}{3} \right)^2} \in \left[ -1, -\frac{1}{3} \right],$$

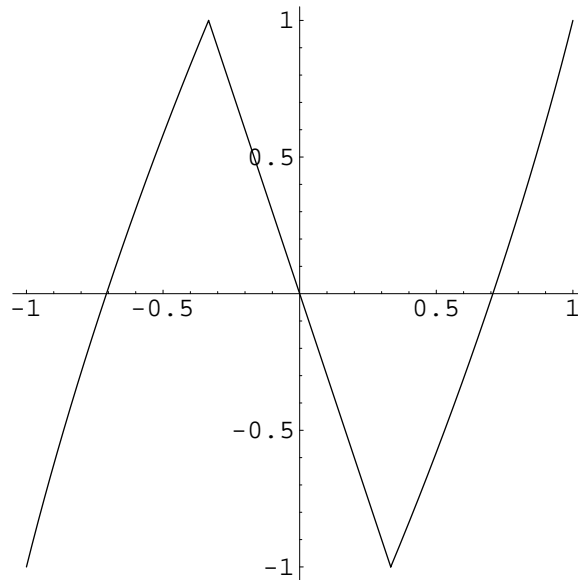
$$\psi_{23}: I \mapsto -\frac{t}{3} \in \left[ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right],$$

$$\psi_{33}: I \mapsto \frac{t}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \left( \frac{t}{3} \right)^2} \in \left[ \frac{1}{3}, 1 \right].$$

Die zugehörige Überlagerung lautet daher

$$\varphi_3: I \ni x \mapsto \begin{cases} 2x + \sqrt{3 - 2x^2} & ; -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ -3x & ; -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 2x - \sqrt{3 - 2x^2} & ; \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \in I$$

In diesem Fall besteht die kanonische Punktmenge also nicht mehr ausschließlich aus zusammengesetzten Streckenzügen, sondern auch aus algebraischen Kurven höherer Ordnung.



(4) Für  $m = 4$  haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 &= 1 + t \\ -\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_4^2 &= 0 \\ -\xi_1^3 + \xi_2^3 - \xi_3^3 + \xi_4^3 &= 1 + t \\ -\xi_1^4 + \xi_2^4 - \xi_3^4 + \xi_4^4 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Durch Umformung erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}\xi_4^2 - 2\frac{1+t}{4}\xi_4 + \frac{4}{3}\left(\left(\frac{1+t}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \xi_4 + \xi_2 - 2\frac{1+t}{4} &= 0 \\ \xi_3^2 + 2\frac{1+t}{4}\xi_3 + \frac{4}{3}\left(\left(\frac{1+t}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \xi_3 + \xi_1 + 2\frac{1+t}{4} &= 0.\end{aligned}$$

Für die erste und die dritte Gleichung erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}\left(\xi_4 - \frac{1+t}{4}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1+t}{4}\right)^2\right) &= 0 \\ \left(\xi_3 + \frac{1+t}{4}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1+t}{4}\right)^2\right) &= 0\end{aligned}$$

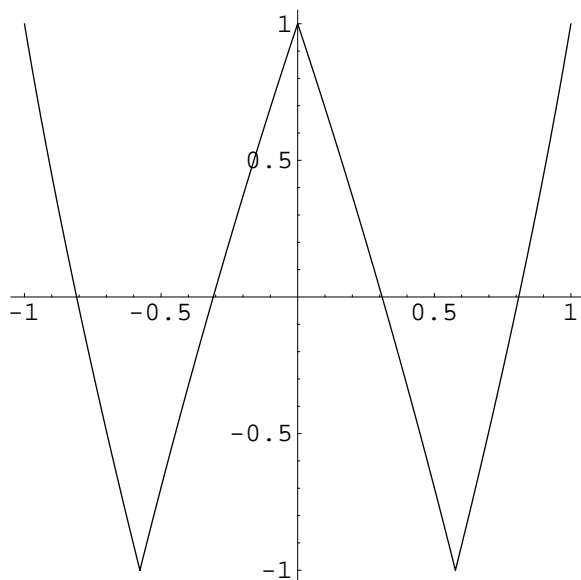
Damit folgt

$$\begin{aligned}\psi_{14}: I &\mapsto -\frac{1+t}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{4}\right)^2} \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ \psi_{24}: I &\mapsto \frac{1+t}{4} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{4}\right)^2} \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right], \\ \psi_{34}: I &\mapsto -\frac{1+t}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{4}\right)^2} \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right], \\ \psi_{44}: I &\mapsto \frac{1+t}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{4}\right)^2} \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right].\end{aligned}$$



Die zugehörige kanonische Punktmenge ist demnach der Graph der Abbildung

$$\varphi_4: I \ni x \mapsto \begin{cases} -3x - 1 - \sqrt{4 - 3x^2} & ; -1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 3x - 1 + \sqrt{4 - 3x^2} & ; -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 0 \\ -3x - 1 + \sqrt{4 - 3x^2} & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 3x - 1 - \sqrt{4 - 3x^2} & ; \frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1 \end{cases} \in I$$



(5) Das nächste Beispiel ist schon etwas komplizierter; zunächst formen wir das algebraische Gleichungssystem wieder in ein äquivalentes System um.

Es ist

$$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 + \xi_5 = t$$

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2 + \xi_5^2 = 1$$

$$\xi_1^3 - \xi_2^3 + \xi_3^3 - \xi_4^3 + \xi_5^3 = t$$

$$\xi_1^4 - \xi_2^4 + \xi_3^4 - \xi_4^4 + \xi_5^4 = 1$$

$$\xi_1^5 - \xi_2^5 + \xi_3^5 - \xi_4^5 + \xi_5^5 = t$$

äquivalent zu

$$\xi_5^3 - 3\frac{t}{5}\xi_5^2 + \frac{15}{4}\left(\left(\frac{t}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right)\xi_5 - \frac{25}{12}\left(\frac{t}{5}\right)^3 + \frac{13}{12}\left(\frac{t}{5}\right) = 0$$

$$\xi_5^2 + \xi_5\xi_3 + \xi_3^2 - 3\frac{t}{5}\xi_5 - 3\frac{t}{5}\xi_3 + \frac{15}{4}\left(\left(\frac{t}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) = 0$$

$$\xi_5 + \xi_3 + \xi_1 - 3\frac{t}{5} = 0$$

$$\xi_4^2 + 2\frac{t}{5}\xi_4 + \frac{5}{4}\left(\left(\frac{t}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right) = 0$$

$$\xi_4 + \xi_2 + 2\frac{t}{5} = 0.$$

Man rechnet leicht durch Koeffizientenvergleich nach, daß die zweite und die dritte Gleichung gerade die Nullstellen des ersten Polynoms koppeln, und die letzte Gleichung entsprechend die Relation für die beiden Nullstellen des zweiten Polynoms darstellt. Demnach haben wir nach einer weiteren Vereinfachung des ersten und des vierten Polynoms nur noch sämtliche Nullstellen der beiden Polynome

$$\left(x - \frac{t}{5}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2\right)\left(x - \frac{t}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{5}\right)\left(1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{t}{5}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2\right) = 0$$

zu bestimmen und dieselben in der richtigen Reihenfolge durchzunummerieren. Zu diesem Zweck führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$y := \frac{t}{5},$$

$$z := x - y,$$

$$a := \frac{1}{4}(1 - y^2),$$

$$b := -\frac{1}{6}y(1 - y^2).$$

Danach lautet die erste Gleichung

$$z^3 - 3az = 2b.$$

Aus dem Ansatz  $z = u + v$  ergibt sich dann

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 3a(u + v) = u^3 + v^3 + 3(uv - a)(u + v) = 2b.$$

Daher reduziert sich unsere Aufgabe auf die Lösung des Systems

$$u^3 + v^3 = 2b$$

$$uv = a.$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit  $u^3$ , so erhalten wir eine quadratische Gleichung in  $u^3$ :

$$u^6 - 2bu^3 + a^3 = (u^3 - b)^2 - (b^2 - a^3) = 0.$$

Nun gilt

$$b^2 - a^3 = \frac{1}{64}(1 - y^2)^2 \left( \frac{25}{9}y^2 - 1 \right) < 0 \quad \text{für } t \leq 1.$$

Demnach erhalten wir

$$u^3 = b \pm i\sqrt{a^3 - b^2}.$$

Setze nun  $r := a^{3/2} > 0$  und  $\theta := \arccos \frac{b}{r}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{b}{r} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{a^3 - b^2}}{r}, \end{aligned}$$

also  $u = r^{1/3} \exp\left(\frac{i}{3}(\theta + 2l\pi)\right)$  mit  $0 \leq l \leq 2$ . Danach erhalten wir

$$\begin{aligned} z = u + v &= r^{1/3} \exp\left(\frac{i}{3}(\theta + 2l\pi)\right) + ar^{-1/3} \exp\left(-\frac{i}{3}(\theta + 2l\pi)\right) \\ &= 2\sqrt{a} \cos\left(\frac{\theta + 2l\pi}{3}\right) \\ &= 2\sqrt{a} \left( \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \cos\left(\frac{2l\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{3}\right) \sin\left(\frac{2l\pi}{3}\right) \right). \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich also

$$\psi_{15}: I \mapsto \frac{t}{5} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2} \left( \cos\left(\frac{\theta(t)}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta(t)}{3}\right) \right) \in \left[-1, \frac{-1 - \sqrt{6}}{5}\right],$$

$$\psi_{25}: I \mapsto -\frac{t}{5} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2} \in \left[\frac{-1 - \sqrt{6}}{5}, \frac{1 - \sqrt{6}}{5}\right],$$

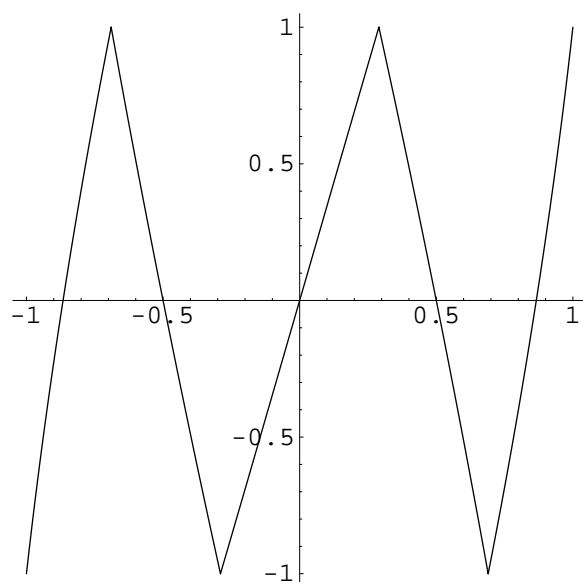
$$\psi_{35}: I \mapsto \frac{t}{5} + \sqrt{1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2} \cos\left(\frac{\theta(t)}{3}\right) \in \left[\frac{1 - \sqrt{6}}{5}, \frac{-1 + \sqrt{6}}{5}\right],$$

$$\psi_{45}: I \mapsto -\frac{t}{5} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2} \in \left[\frac{-1 + \sqrt{6}}{5}, \frac{1 + \sqrt{6}}{5}\right]$$

$$\psi_{55}: I \mapsto \frac{t}{5} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2} \left( \cos\left(\frac{\theta(t)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\theta(t)}{3}\right) \right) \in \left[\frac{1 + \sqrt{6}}{5}, 1\right].$$

mit

$$\theta: I \ni t \mapsto \arccos\left(-\frac{4}{3} \frac{\frac{t}{5}}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{5}\right)^2}}\right)$$



(6) Für den Fall  $m = 6$  haben wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
-\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 - \xi_5 + \xi_6 &= 1 + t \\
-\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 + \xi_4^2 - \xi_5^2 + \xi_6^2 &= 0 \\
-\xi_1^3 + \xi_2^3 - \xi_3^3 + \xi_4^3 - \xi_5^3 + \xi_6^3 &= 1 + t \\
-\xi_1^4 + \xi_2^4 - \xi_3^4 + \xi_4^4 - \xi_5^4 + \xi_6^4 &= 0 \\
-\xi_1^5 + \xi_2^5 - \xi_3^5 + \xi_4^5 - \xi_5^5 + \xi_6^5 &= 1 + t \\
-\xi_1^6 + \xi_2^6 - \xi_3^6 + \xi_4^6 - \xi_5^6 + \xi_6^6 &= 0.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir das äquivalente System

$$\begin{aligned}
\xi_6^3 - 3\frac{1+t}{6}\xi_6^2 + \frac{18}{5}\left(\left(\frac{1+t}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right)\xi_6 - \frac{9}{5}\left(\frac{1+t}{6}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(\frac{1+t}{6}\right) &= 0 \\
\xi_6^2 + \xi_4^2 + \xi_4\xi_6 - 3\frac{1+t}{6}\xi_6 - 3\frac{1+t}{6}\xi_4 + \frac{18}{5}\left(\left(\frac{1+t}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right) &= 0 \\
\xi_6 + \xi_4 + \xi_2 - 3\frac{1+t}{6} &= 0 \\
\xi_5^3 + 3\frac{1+t}{6}\xi_5^2 + \frac{18}{5}\left(\left(\frac{1+t}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right)\xi_5 + \frac{9}{5}\left(\frac{1+t}{6}\right)^3 - \frac{4}{5}\left(\frac{1+t}{6}\right) &= 0 \\
\xi_5^2 + \xi_3^2 + \xi_3\xi_5 + 3\frac{1+t}{6}\xi_5 + 3\frac{1+t}{6}\xi_3 + \frac{18}{5}\left(\left(\frac{1+t}{6}\right)^2 - \frac{1}{6}\right) &= 0 \\
\xi_5 + \xi_3 + \xi_1 + 3\frac{1+t}{6} &= 0.
\end{aligned}$$

Mit der gleichen Argumentation wie im Fall  $m = 5$  können wir uns auf die Bestimmung der Nullstellen des ersten und vierten Polynoms beschränken. Diese formen wir weiter um zu

$$\begin{aligned}
(x-y)^3 - \frac{3}{5}(1-y^2)(x-y) + \frac{1}{5}y(1-y^2) &= 0, \\
(x+y)^3 - \frac{3}{5}(1-y^2)(x+y) - \frac{1}{5}y(1-y^2) &= 0
\end{aligned}$$

mit  $y(t) := \frac{1+t}{6}$ . Wie im Fall  $m = 5$  erhalten wir daraus

$$\psi_{16}: I \mapsto -\frac{1+t}{6} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{6}\right)^2} \cos\left(\frac{\theta(t)}{3}\right) \in [-1, -\sqrt{\frac{3}{5}}],$$

$$\psi_{26}: I \mapsto \frac{1+t}{6} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{6}\right)^2} \cos\left(\frac{\theta(t) + 2\pi}{3}\right) \in [-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}],$$

$$\psi_{36}: I \mapsto -\frac{1+t}{6} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{6}\right)^2} \cos\left(\frac{\theta(t) + \pi}{3}\right) \in [-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0],$$

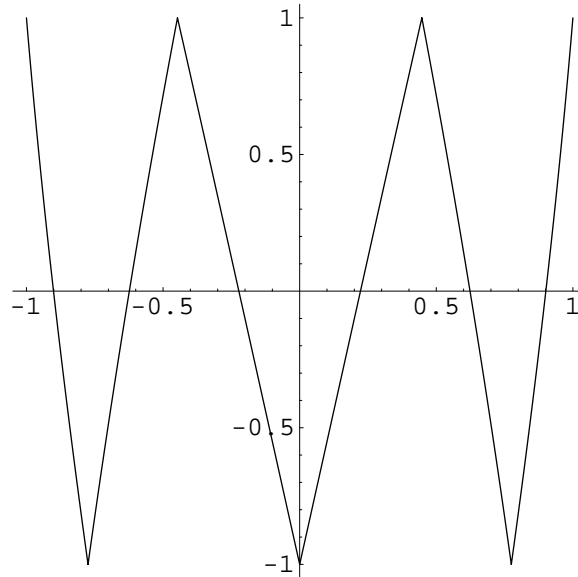
$$\psi_{46}: I \mapsto \frac{1+t}{6} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{6}\right)^2} \cos\left(\frac{\theta(t) + \pi}{3}\right) \in [0, \frac{1}{\sqrt{5}}],$$

$$\psi_{56}: I \mapsto -\frac{1+t}{6} - \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{6}\right)^2} \cos\left(\frac{\theta(t) + 2\pi}{3}\right) \in [\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}],$$

$$\psi_{66}: I \mapsto \frac{1+t}{6} + \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{6}\right)^2} \cos\left(\frac{\theta(t)}{3}\right) \in [\sqrt{\frac{3}{5}}, 1]$$

mit

$$\theta: I \ni t \mapsto \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} \frac{\frac{1+t}{6}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1+t}{6}\right)^2}}\right)$$



## 5. Beste einseitige $L^1$ -Approximation mit Quasi- $B^{m,1}$ -Funktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die in den vorangegangenen Paragraphen zusammengestellten Ergebnisse dazu benutzen, um die eingangs erwähnte Charakterisierung bester einseitiger  $L^1$ -Approximation mittels Quasi- $B^{m,1}$ -Funktionen zu beweisen.

**Satz 5.1** *Es sei  $1 \leq m \leq 6$ ,  $f \in C^{m,1}(I^2)$  und  $f^{(m,1)} \geq 0$ . Dann ist*

$$h^*: I^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) - \int_{\varphi_m(x)}^y (R_m f)(x, t) \omega(x; \Psi_m(t)) dt \in \mathbb{R}$$

mit

$$R_m f: I^2 \ni (x, y) \mapsto \int_{\Delta_m} f^{(m,1)} \left( x + \sum_{\mu=1}^m s_\mu (\psi_{\mu m}(y) - x), y \right) ds_1 \dots ds_m$$

und  $\Delta_m := \{(s_1, \dots, s_m) \in [0, 1]^m : \sum_{\mu=1}^m s_\mu \leq 1\}$  die eindeutig bestimmte beste  $L^1$ -Approximation an die Funktion  $f$  in  $\mathcal{U}(f, QB^{m,1}(I^2))$ . Für  $m \leq 2$  ist  $h^* \in B^{m,1}(I^2)$  und damit die beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, B^{m,1}(I^2))$ .

**Beweis:** Nach Satz 3.5 gilt  $h^* \in QB^{m,1}(I^2)$  und für alle  $x \in I$

$$h^*(x, \varphi_m(x)) = f(x, \varphi_m(x)) \quad \text{und} \quad (\nabla h^*)(x, \varphi_m(x)) = (\nabla f)(x, \varphi_m(x)).$$

Ferner gilt nach Definition von  $\varphi_m$  und Folgerung 3.4

$$h^* \geq f,$$

also  $h^* \in \mathcal{U}(f, QB^{m,1}(I^2))$ . Nach den Beispielen 4.4.(1)–4.4.(6) und Satz 2.1 ist  $h^*$  damit eine beste einseitige  $L^1$ -Approximation an  $f$  bezüglich  $QB^{m,1}(I^2)$ .

Ist  $h_0$  eine weitere beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, QB^{m,1}(I^2))$ , dann gilt nach Folgerung 2.3

$$h_0|_{\Gamma_{\varphi_m}} = f|_{\Gamma_{\varphi_m}}$$

und wegen  $h_0 \geq f$  folgt zudem

$$h_0^{(0,1)}|_{\Gamma_{\varphi_m}} = f^{(0,1)}|_{\Gamma_{\varphi_m}},$$

also nach Satz 3.2  $h_0 = h^*$ .

Für  $m \leq 2$  ist  $h^*$  nach Satz 3.6 in  $B^{m,1}(I^2)$  und damit eine beste  $L^1$ -Approximation an  $f$  in  $\mathcal{U}(f, B^{m,1}(I^2))$ . □

**Bemerkung** Aufgrund der Beispiele 4.4 ist  $h^*$  nach Satz 3.6 sogar in  $C^{2,1}(I^2)$ , also insbesondere stetig differenzierbar. Die beste einseitige  $L^1$ -Approximation an  $f \in C^{m,1}(I^2)$  mit  $f^{(m,1)} \geq 0$  in  $\mathcal{U}(f, QB^{m,1}(I^2))$  ist also für  $1 \leq m \leq 6$  die eindeutig bestimmte Lösung der Interpolationsaufgabe

$$(1) \quad h|_{\Gamma_{\varphi_m}} = f|_{\Gamma_{\varphi_m}} \quad \text{und} \quad (\nabla h)|_{\Gamma_{\varphi_m}} = (\nabla f)|_{\Gamma_{\varphi_m}}$$

in  $QB^{m,1}(I^2)$ .

**Folgerung 5.2** *Es sei  $1 \leq m \leq 6$ . Dann gibt es zu jeder Funktion  $f \in C^{m,1}(I^2)$  mit  $f^{(m,1)} \geq 0$  höchstens eine beste  $L^1$ -Approximation in  $\mathcal{U}(f, B^{m,1}(I^2))$ . Diese stimmt mit der besten  $L^1$ -Approximation in  $\mathcal{U}(f, QB^{m,1}(I^2))$  überein.*

**Beweis:** Dies ergibt sich unmittelbar aus Folgerung 2.4. □

**Bemerkung** Nach Folgerung 5.2 gibt es genau dann eine beste einseitige  $L^1$ -Approximation an  $f \in C^{m,1}(I^2)$ ,  $f^{(m,1)} \geq 0$  in  $\mathcal{U}(f, B^{m,1}(I^2))$ , wenn die Lösung der Interpolationsaufgabe (1) in  $B^{m,1}(I^2)$  ist.

Abschließend greifen wir nochmal das Beispiel aus dem dritten Abschnitt auf. Es sei  $m \geq 3$  und  $f: I^2 \ni (x, y) \mapsto x^m g(y)$  mit einer Funktion  $g \in C^1(I) \setminus C^2(I)$ , so daß gilt  $g' \geq 0$ . Dann ist  $f \in C^{m,1}(I^2)$  und es gilt  $f^{(m,1)} \geq 0$ . Nach Beispiel 3.7 ist die Funktion  $h^*$  aus Satz 5.1 dann in  $QB^{m,1}(I^2) \setminus B^{m,1}(I^2)$ , d.h.  $f$  besitzt keine beste  $L^1$ -Approximation in  $\mathcal{U}(f, B^{m,1}(I^2))$ .



# Symbolverzeichnis

$C(X)$	S. 5
$f^{(m,n)}$	S. 5
$C^{m,n}(X), C^{m,n}(\overline{X})$	S. 5
$B^{m,n}(X), B^{m,n}(\overline{X})$	S. 5f
$L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	S. 6
$\ f\ _p$	S. 6
$H_{\mu\kappa}(x; x_1, \dots, x_M)$	S. 6
$\omega(x; x_1, \dots, x_M)$	S. 7
$\ell_\mu(x; x_1, \dots, x_M)$	S. 7
$(Hf)(x; x_1, \dots, x_M)$	S. 7
$[x_1, \dots, x_M; f]$	S. 8
$\mathcal{U}(f, U), \mathcal{L}(f, U)$	S. 17
$\overline{E}(f, U), \underline{E}(f, U)$	S. 17
$Z(f)$	S. 17
$QB^{m,1}(I^2)$	S. 22

$\Gamma_\varphi$	S. 23
$H_\varphi^{m,1}$	S. 25
$K_\varphi^{m,1}$	S. 27
$\Psi_m$	S. 42
$\varphi_m$	S. 43ff

# Literaturverzeichnis

1. D. H. Armitage, S. J. Gardiner, *Best one-sided  $L^1$ -approximation by harmonic and subharmonic functions*. Advances in Multivariate Approximation, Math. Res. **107**, 43–56, Berlin 1999.
2. D. H. Armitage, S. J. Gardiner, W. Haußmann, L. Rogge, *Characterization of best harmonic and superharmonic  $L^1$ -approximants*. J. Reine Angew. Math. **478**, 1–15 (1996).
3. D. H. Armitage, S. J. Gardiner, W. Haußmann, L. Rogge, *Best one-sided  $L^1$ -approximation by harmonic functions*. Manuscripta Math. **96**, 181–194 (1998).
4. D. H. Armitage, W. Haußmann, K. Zeller, *Best Harmonic and Polyharmonic Approximation*. International Conference on Approximation and Optimization (Romania), Cluj–Napoca, (1996).
5. R. Bojanić, R. A. DeVore, *On polynomials of best one sided approximation*. Enseignement Math. (2) **1**, 139–164 (1966).
6. B. D. Bojanov, D. P. Dryanov, W. Haußmann, G. P. Nikolov, *Best one-sided  $L^1$ -approximation by blending functions*. Advances in Multivariate Approximation, Math. Res. **107**, 85–106, Berlin 1999.
7. B. D. Bojanov, H. A. Hakopian, A. A. Sahakian, *Spline Functions and Multivariate Interpolations*. Kluwer, Dordrecht 1993.
8. D. Braess, *Nonlinear Approximation Theory*. Springer, Berlin 1980.
9. H. Brass, *Quadraturverfahren*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1977.
10. B. Buchberger, *Gröbner bases and applications*. Cambridge University Press, Cambridge 1998.
11. E. W. Cheney, *Multivariate Approximation Theory: Selected Topics*. SIAM, Philadelphia 1986.
12. R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*. Springer, Berlin 1993.
13. D. Dryanov, W. Haußmann, P. Petrov, *Best one-sided  $L^1$ -approximation of bivariate functions by sums of univariate ones*. Arch. Math. (Basel) **40**, 125–131 (2000).

14. D. Dryanov, W. Haußmann, P. Petrov, *Best one-sided  $L^1$ -approximation by  $B^{2,1}$ -blending functions*. Recent Progress in Multivariate Approximation, Internat. Ser. Numer. Math. **137**, 115–134, Birkhäuser, Basel 2001.
15. L. Fox, I. B. Parker, *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*. Oxford University Press, Oxford 1968.
16. O. Forster, *Riemannsche Flächen*. Springer, Berlin 1977.
17. M. Goldstein, W. Haußmann, L. Rogge, *On the mean value property of harmonic functions and best harmonic  $L^1$ -approximation*. Trans. Amer. Math. Soc. **305**, 505–515 (1988).
18. W. Haußmann, L. Wehrend, K. Zeller, *Mean value theorems and best  $L^1$ -approximation*. Approximation by Solutions of Partial Differential Equations (B. Fuglede et al., eds.), 93–102, Kluwer, Dordrecht 1992.
19. W. Haußmann, K. Zeller, *Blending interpolation and best  $L^1$ -approximation*. Arch. Math. (Basel) **40**, 545–552 (1983)
20. W. Haußmann, K. Zeller, *Canonical Point Sets in Multivariate Constructive Function Theory*, Israel Mathematical Conference Proceedings, Vol. 11, 1997.
21. G. G. Lorentz, *Approximation of functions*, Chelsea Publ., New York 1986.
22. A. Pinkus, *On  $L^1$ -approximation*. Cambridge University Press, Cambridge 1989.
23. T. J. Rivlin, *The Chebyshev polynomials*. Wiley Interscience, New York 1974.
24. H. Schubert, *Topologie*. B. G. Teubner, Stuttgart 1964.
25. L. L. Schumaker, *Spline Funktionen: Basic Theory*. Wiley Interscience, New York 1981.
26. I. Singer, *Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces*. Springer, Berlin 1970.
27. G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*. AMS Colloquium Publications, Providence 1939
28. L. B. Wehrend, *Integralmittel und beste  $L^1$ -Approximation*. Dissertation, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, 1995
29. H. Werner, R. Schaback, *Praktische Mathematik*. Springer, Berlin 1972.