

# Anhang A

## Der MOS-Transistor in schwacher Inversion

Die Grenzen des Arbeitsbereiches Schwache Inversion lassen sich in bezug auf das Oberflächenpotential  $\psi_s$  für  $U_{ds} > 0$  wie folgt angeben [7, Seite 88]:

$$U_{sb} + \Phi_f < \psi_s < U_{sb} + 2\Phi_f \quad (\text{A.1})$$

Die physikalische Bedeutung dieser Grenzen ergibt sich aus der Konzentration frei beweglicher Minoritätsladungsträger an der Oberfläche des Halbleiters. An der unteren Grenze des Arbeitsbereiches ist diese gleich der Eigenleitungskonzentration  $n_i$ , an der oberen Grenze für einen n-Kanal Transistor gleich der Störstellenkonzentration  $N_A$ .

Im folgenden wird die Herleitung der in der Fachliteratur zu findenden Stromgleichungen für den Arbeitsbereich der schwachen Inversion in ihren wichtigsten Schritten erläutert. Die Herleitung beginnt mit einer grundlegenden Beziehung für die über den Kanalquerschnitt gemittelte Diffusionsstromdichte. Es gilt (Ficksches Gesetz):

$$S_{\text{diff}} = qD_n \frac{dn_I(l)}{dl}.$$

Dabei bezeichnet  $n_I(l)$  die mittlere räumliche Dichte der Inversionsladungen in einem Kanalquerschnitt an der Position  $l$  entlang des Kanals und  $D_n$  die Diffusionskonstante für Elektronen im Halbleiter. Wird eine entlang des Kanals konstante Stromdichte, beziehungsweise eine von Source nach Drain linear abfallende Ladungsträgerdichte, vorausgesetzt, so ergibt sich daraus für den Drainstrom:

$$I_d = -\frac{W}{L} D_n (Q'_s - Q'_d). \quad (\text{A.2})$$

$Q'_s$  und  $Q'_d$  bezeichnen die flächenbezogene Inversionsladung am Source-Ende beziehungsweise am Drain-Ende des Kanals. Zur Bestimmung der noch unbekanntenen Flächenla-

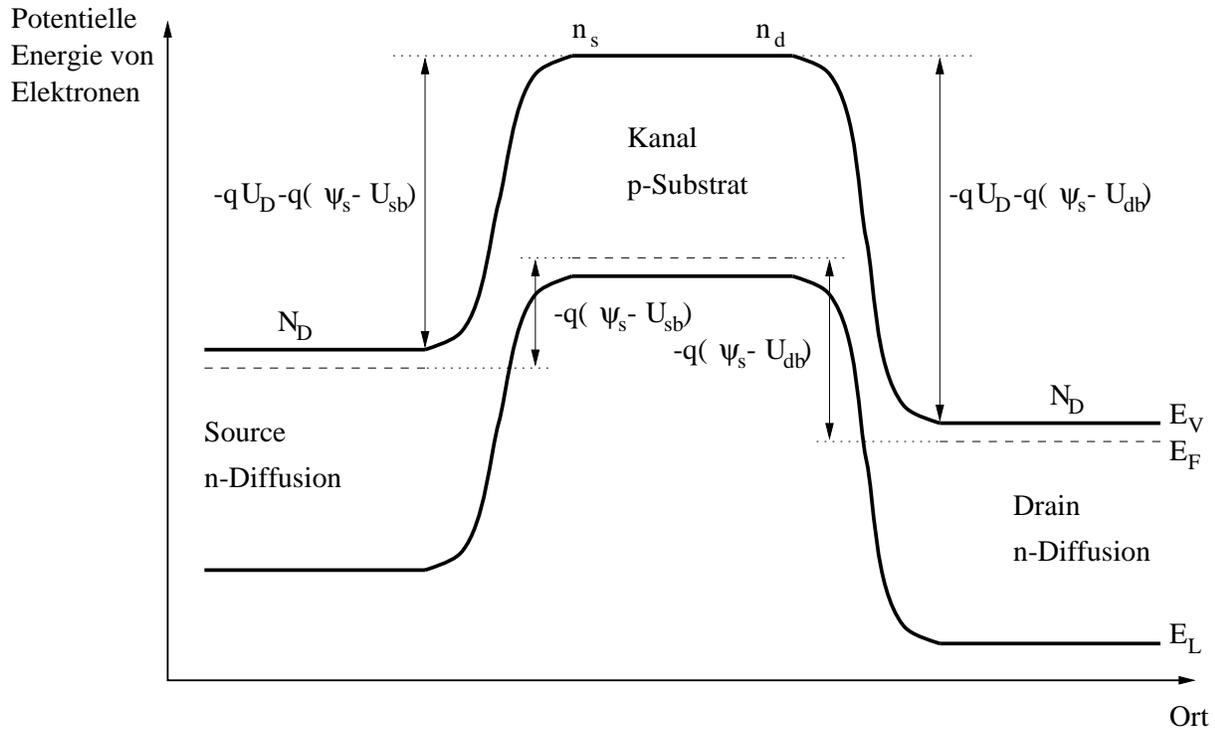


Abbildung A.1: Bänderdiagramm eines n-Kanal MOS-Transistors in schwacher Inversion

undungsdichten betrachten wir zunächst das in Abbildung A.1 dargestellte Bänderdiagramm eines n-Kanal MOS-Transistors in schwacher Inversion. Es zeigt die potentielle Energie von Elektronen entlang eines Transistor-Querschnittes. Entsprechend den Gesetzmäßigkeiten der Boltzmann-Statistik<sup>1</sup> sind dann die räumlichen Ladungsdichten an der Halbleiteroberfläche am Source- beziehungsweise am Drain-Ende des Kanals gegeben durch

$$n_s = N_D e^{U_D/U_T} e^{(\psi_s - U_{sb})/U_T}$$

beziehungsweise

$$n_d = N_D e^{U_D/U_T} e^{(\psi_s - U_{db})/U_T}.$$

Diese Gleichungen verdeutlichen den Ursprung der exponentiellen Abhängigkeit des Drainstromes von den Potentialen an den Klemmen des Transistors.  $U_D$  bezeichnet die Diffusionsspannung des source- beziehungsweise drainseitigen pn-Überganges.  $N_D$  bezeichnet die Donatordichte im Source- beziehungsweise Drain-Diffusionsgebiet. Die

<sup>1</sup>Die Wahrscheinlichkeit, daß ein einzelnes Elektron eine Potentialbarriere der Höhe  $\Delta W_{\text{pot}} = W_{\text{pot},2} - W_{\text{pot},1}$  überwinden kann, ist gegeben durch  $P = e^{-\Delta W_{\text{pot}}/kT}$ . Damit gilt für die mit den entsprechenden Energieniveaus korrespondierenden Elektronenkonzentrationen die Beziehung  $n_2 = n_1 e^{-\Delta W_{\text{pot}}/kT}$ . Berücksichtigt man, daß das Potential mit der potentiellen Energie eines Elektrons über  $W_{\text{pot}} = -q\phi$  verknüpft ist, so ergibt sich schließlich mit  $U_T = kT/q$  der im folgenden wichtige Zusammenhang  $n_2 = n_1 e^{(\phi_2 - \phi_1)/U_T}$ .

Berechnung von  $Q'_s$  und  $Q'_d$  erfordert im Prinzip als zusätzlichen Schritt die Integration der räumlichen Inversions-Ladungsdichte in der Richtung senkrecht zur Halbleiteroberfläche. Hierauf wird sehr ausführlich in [7] eingegangen. Dort finden sich als Ergebnis der Berechnungen auf Seite 137 die Beziehungen

$$Q'_s = -\frac{\gamma C'_{\text{ox}}}{2\sqrt{\psi_s}} U_T e^{-2\Phi_f/U_T} e^{(\psi_s - U_{\text{sb}})/U_T} \quad (\text{A.3})$$

und

$$Q'_d = -\frac{\gamma C'_{\text{ox}}}{2\sqrt{\psi_s}} U_T e^{-2\Phi_f/U_T} e^{(\psi_s - U_{\text{db}})/U_T}. \quad (\text{A.4})$$

Der erste Term ( $\sqrt{\psi_s}$  im Nenner) beschreibt die vom Oberflächenpotential abhängige effektive Ausdehnung der Inversionsschicht. Der zweite exponentielle Term beschreibt entsprechend der Boltzmann-Statistik den Einfluß der source- bzw. drainseitigen Potentialbarriere auf die Ladungsträgerkonzentration am jeweiligen Kanalende. Einsetzen in Gleichung A.2 mit  $D_n = \mu_n U_T$  ergibt die Stromgleichung für den MOS-Transistor in schwacher Inversion:

$$I_d = \mu_n C'_{\text{ox}} \frac{W}{L} U_T^2 \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_s}} e^{(\psi_s - 2\Phi_f)/U_T} (e^{-U_{\text{sb}}/U_T} - e^{-U_{\text{db}}/U_T}). \quad (\text{A.5})$$

Setzt man hier aus Gleichung A.1 die obere Grenze von  $\psi_s$  für den Arbeitsbereich ein, so ergibt sich unter der Voraussetzung  $U_{\text{ds}} \gg U_T$  der maximale Drainstrom in schwacher Inversion:

$$I_{\text{max}} = \mu_n C'_{\text{ox}} \frac{W}{L} U_T^2 \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{\text{sb}} + 2\Phi_f}}. \quad (\text{A.6})$$

Mit für einen n-Kanal Transistor typischen Werten und  $U_{\text{sb}} = 0\text{V}$  ergibt sich ein maximaler Drainstrom von  $I_{\text{d,max}} \approx 20\text{nA } W/L$ .

Da das Oberflächenpotential  $\psi_s$  nur über das Gatepotential  $U_{\text{gb}}$  eingestellt werden kann, muß noch ein funktionaler Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen angegeben werden. Aus [7, Seite 60] erhält man

$$\begin{aligned} U_{\text{gb}} &\approx U_{\text{FB}} + \psi_s + \gamma\sqrt{\psi_s}, \\ \psi_s &\approx \left( -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + U_{\text{gb}} - U_{\text{FB}}} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$U_{\text{FB}}$  bezeichnet die sogenannte Flachbandspannung. Dabei handelt es sich um diejenige Spannung zwischen Gate und Bulk, die den Halbleiter unterhalb der Gate-Elektrode in einen elektrisch neutralen Zustand versetzt. Abbildung A.2 zeigt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem Oberflächenpotential  $\psi_s$  und der Gate-Bulk Spannung  $U_{\text{gb}}$ .

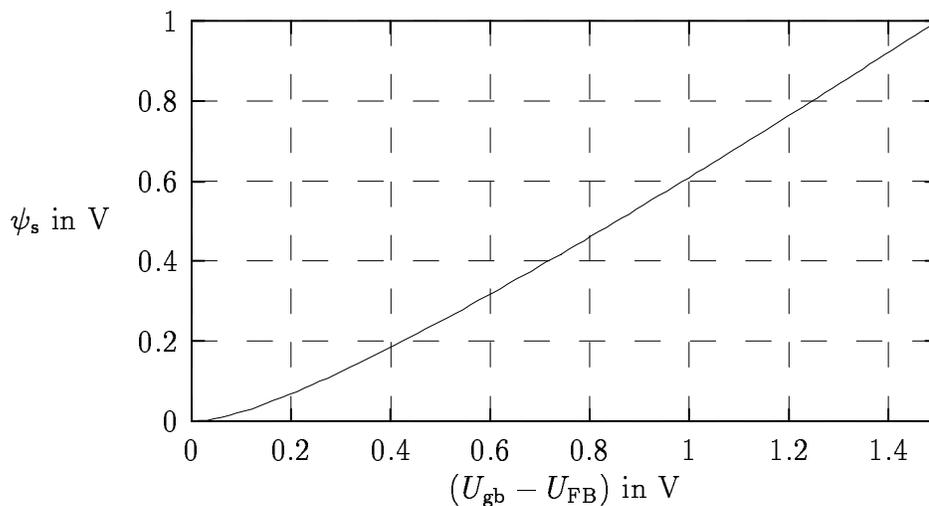


Abbildung A.2: Das Oberflächenpotential als Funktion des Gatepotentials

Mit Hilfe der Gleichungen A.5 und A.7 kann der Drainstrom im Prinzip für jede Kombination von Klemmenpotentialen berechnet werden (vorausgesetzt der MOS-Transistor arbeitet in schwacher Inversion). Der resultierende funktionale Zusammenhang ist jedoch noch recht unübersichtlich und daher für Handrechnungen ungeeignet.

Eine erste Vereinfachung ergibt sich daraus, daß die Variation von  $\sqrt{\psi_s}$  bei einer Änderung des Gate-Potentials gegenüber der drastischen Variation von  $e^{\psi_s/U_T}$  vernachlässigt werden kann. Über den gesamten Arbeitsbereich der schwachen Inversion variiert der Wurzelterm je nach Source-Potential maximal um den Faktor  $\sqrt{2}$ , während der Exponentialterm um  $e^{\Phi_f/U_T} \approx 10^6$  variiert. Es ist daher üblich, im Wurzelterm das Oberflächenpotential durch seinen Wert in der Mitte des Arbeitsbereiches, also durch

$$\psi_0 = U_{sb} + 1.5 \Phi_f, \quad (\text{A.8})$$

zu ersetzen. Einsetzen in Gleichung A.5 ergibt die etwas vereinfachte Beziehung

$$I_d \approx \mu_n C'_{ox} \frac{W}{L} U_T^2 \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{sb} + 1.5 \Phi_f}} e^{(\psi_s - 2\Phi_f)/U_T} (e^{-U_{sb}/U_T} - e^{-U_{db}/U_T}). \quad (\text{A.9})$$

Um eine Vereinfachung des Exponentialtermes zu erzielen, wird der Verlauf von  $\psi_s(U_{sb})$  um einen Arbeitspunkt in der Mitte des Arbeitsbereiches linearisiert. Dieses Vorgehen ist üblich [7, 101], da die Steigung von  $\psi_s(U_{gb})$  über dem Arbeitsbereich in guter Näherung konstant ist (siehe Abbildung A.2). Der Kehrwert der Ableitung im besagten Arbeitspunkt wird mit  $n$ , dem sogenannten „weak inversion slope factor“ bezeichnet, und es

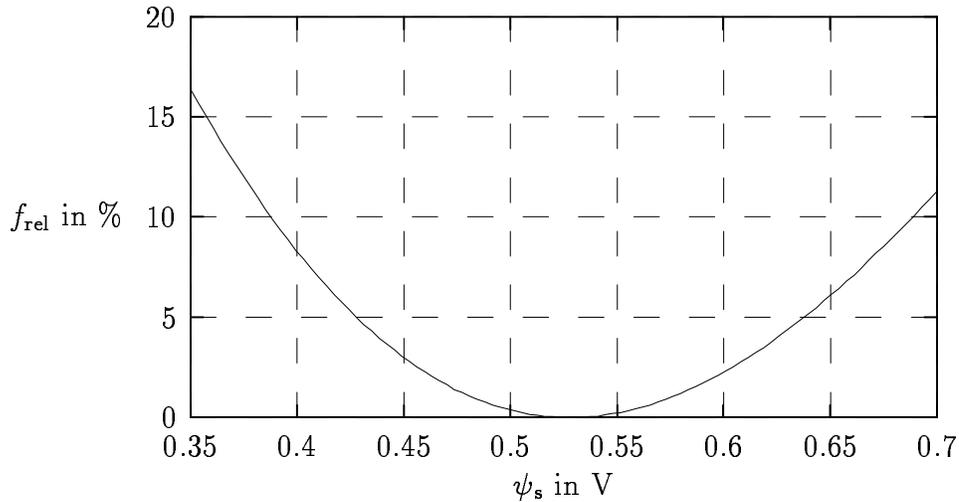


Abbildung A.3: Die relative Abweichung des Drainstromes als Funktion des Oberflächenpotentials für  $\psi_0 = 1.5\Phi_f$

gilt:

$$n = \left. \frac{dU_{\text{gb}}}{d\psi_s} \right|_{\psi_s=\psi_0} = 1 + \frac{\gamma}{2\sqrt{\psi_0}}. \quad (\text{A.10})$$

Für Änderungen der Gate-Bulk Spannung  $\Delta U_{\text{gb}}$ , die in schwacher Inversion eine Änderung des Oberflächenpotentials  $\Delta\psi_s$  hervorrufen, gilt  $\Delta\psi_s = \Delta U_{\text{gb}}/n$ , womit in der Nähe des Arbeitspunktes  $(U_{\text{gb},0}, \psi_0)$  das Oberflächenpotential durch eine Taylor-Reihenentwicklung erster Ordnung approximiert werden kann:

$$\tilde{\psi}_s = \psi_0 + \frac{U_{\text{gb}} - U_{\text{gb},0}}{n}. \quad (\text{A.11})$$

Mit Hilfe der Gleichungen A.7 und A.8 ergibt sich die Gate-Bulk Spannung im Arbeitspunkt zu

$$U_{\text{gb},0} = U_{\text{FB}} + U_{\text{sb}} + 1.5\Phi_f + \gamma\sqrt{U_{\text{sb}} + 1.5\Phi_f}. \quad (\text{A.12})$$

Der für den Arbeitsbereich der schwachen Inversion unter Berücksichtigung dieser Vereinfachung berechnete Drainstrom weicht vom tatsächlichen Strom um den Faktor  $\alpha = e^{(\tilde{\psi}_s - \psi_s)/U_T}$  ab. Die relative Abweichung des Drainstromes ist dann gegeben durch  $f_{\text{rel}} = 1 - \alpha$ . Abbildung A.3 zeigt den Verlauf des relativen Fehlers als Funktion des Oberflächenpotentials für ein Source-Potential von 0V. Wie dem Diagramm entnommen werden kann, ist die aufgrund der zweiten Vereinfachung auftretende relative Abweichung

des Drainstromes vernachlässigbar klein gegenüber den beim Durchfahren des Arbeitsbereiches auftretenden absoluten Änderungen des Drainstromes (Faktor  $10^6$ ). Definiert man die Schwellenspannung in schwacher Inversion entsprechend [7, Seite 139] zu

$$U_{t,wi} = U_{FB} + 1.5 \Phi_f + \gamma \sqrt{U_{sb} + 1.5 \Phi_f}, \quad (\text{A.13})$$

so erhält man mit den Gleichungen A.8, A.11 und A.12 für das Oberflächenpotential

$$\tilde{\psi}_s = U_{sb} + 1.5 \Phi_f + \frac{U_{gs} - U_{t,wi}}{n}. \quad (\text{A.14})$$

Einsetzen in Gleichung A.9 ergibt zunächst

$$I_d \approx \underbrace{\mu_n C'_{ox} U_T^2}_{I_0} \frac{\gamma}{2\sqrt{U_{sb} + 1.5 \Phi_f}} e^{\frac{-0.5 \Phi_f}{U_T}} \frac{W}{L} e^{\frac{U_{gs} - U_{t,wi}}{n U_T}} e^{\frac{U_{sb}}{U_T}} \left( e^{\frac{-U_{sb}}{U_T}} - e^{\frac{-U_{db}}{U_T}} \right)$$

und damit schließlich die in der Fachliteratur [8, 102] für den Arbeitsbereich Schwache Inversion häufig angegebene Stromgleichung

$$I_d \approx I_0 \frac{W}{L} e^{\frac{U_{gs} - U_{t,wi}}{n U_T}} \left( 1 - e^{-\frac{U_{ds}}{U_T}} \right) \quad (\text{A.15})$$

Die bisher für den Arbeitsbereich der schwachen Inversion verwendete Definition der Schwellenspannung weicht von der für den Arbeitsbereich der starken Inversion üblichen Definition [103], gegeben durch,

$$U_t \approx U_{FB} + 2\Phi_f + \gamma \sqrt{2\Phi_f + U_{sb}}, \quad (\text{A.16})$$

ab. Der Grund hierfür ist, daß zugunsten einer möglichst guten Approximation des Drainstromes die Linearisierung der  $U_{gb}, \psi_s$ -Kennlinie um einen Arbeitspunkt in der Mitte des Arbeitsbereiches durchgeführt wurde. Wird unter Inkaufnahme eines größeren Fehlers ein Arbeitspunkt an der oberen Grenze des Arbeitsbereiches gewählt, so stimmt die Schwellenspannung mit dem üblicherweise für den Arbeitsbereich der starken Inversion gegebenen Wert überein, und man erhält unter Berücksichtigung von Gleichung A.6

$$I_d \approx I_{\max} e^{\frac{U_{gs} - U_t}{n U_T}} \left( 1 - e^{-\frac{U_{ds}}{U_T}} \right). \quad (\text{A.17})$$

Abbildung A.4 zeigt die durch die Approximation des Exponentialtermes auftretende relative Abweichung des Drainstromes für den Arbeitspunkt  $\psi_0 = 2\Phi_f$ .

Für  $U_{ds} \gg U_T$  wird der Term  $e^{-\frac{U_{ds}}{U_T}}$  gegenüber 1 vernachlässigbar klein. Der MOS-Transistor arbeitet dann in Sättigung, und Gleichung A.17 kann vereinfacht werden zu

$$I_d \approx I_{\max} e^{\frac{U_{gs} - U_t}{n U_T}}. \quad (\text{A.18})$$

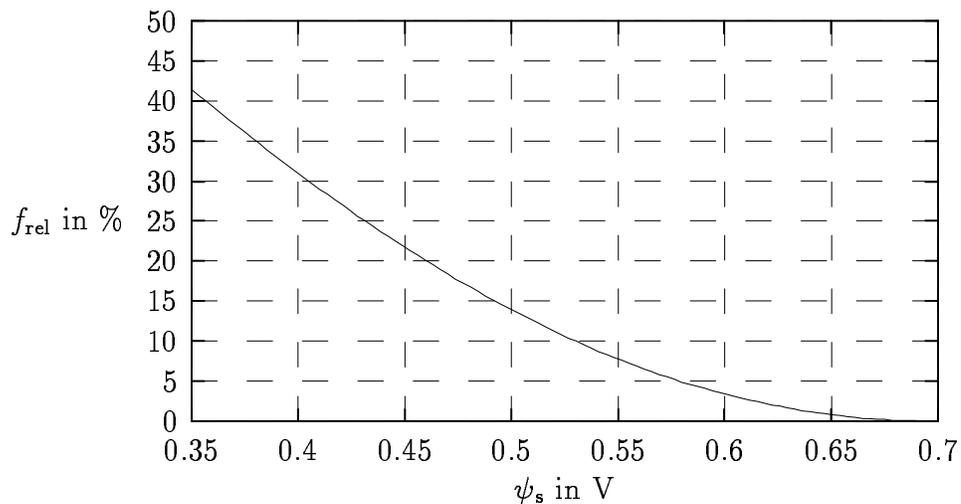


Abbildung A.4: Die relative Abweichung des Drainstromes als Funktion des Oberflächenpotentials für  $\psi_0 = 2\Phi_f$

Bei der Anwendung dieser Gleichung muß die Abhängigkeit von  $I_{\text{max}}$ ,  $n$  und  $U_t$  vom Source-Potential entsprechend den Gleichungen A.6, A.10 und A.16 bedacht werden. Gleichung A.17 eignet sich daher in erster Linie zur Modellierung der Abhängigkeit des Drainstromes von der Gate-Source Spannung für ein festes Source-Potential. Soll dagegen für ein festes Gate-Potential die Abhängigkeit des Drainstromes vom Source-Potential modelliert werden, so empfiehlt sich die Verwendung der Gleichung A.5. In ihr ist nur der eine Exponentialterm  $e^{-U_{\text{sb}}/U_T}$  vom Source-Potential abhängig.