

# Konforme Gradientenvektorfelder auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten

Vom Fachbereich 11/Mathematik der  
Gerhard-Mercator-Universität—Gesamthochschule Duisburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Markus Becker

aus

Duisburg

Referent: Prof. Dr. W. Kühnel  
Korreferent: Prof. Dr. U. Dierkes

Tag der mündlichen Prüfung: 16.10.1998

## Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	1
<b>Kapitel 1: Der Satz von Liouville im pseudo-Euklidischen Raum</b> .....	4
Der Satz von Liouville für $\mathbb{R}_k^n$ .....	10
Der Satz von Liouville für $Q_k^n$ .....	16
Abwickelbare Mannigfaltigkeiten; Satz von Kuiper .....	16
Zeitorientierung auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten .....	17
<b>Kapitel 2: Die lokale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld</b> .....	20
<b>Kapitel 3: Die globale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld</b> .....	37
3.1 Das Gerüst der Mannigfaltigkeit $M$ .....	37
3.2 Benachbarte kritische Punkte .....	39
3.3 Konstruktion von Abwicklungsabbildungen .....	45
3.4 Abwickelbare Mannigfaltigkeiten .....	48
3.5 Konforme Klassifikation .....	52
3.6 Zwei weitere globale Sätze .....	60
<b>Kapitel 4: Beispiele</b> .....	67
Charakterisierung der Gerüste und Konstruktion von Mannigfaltigkeiten .....	67
Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit konformen Gradientenfeldern mit genau einer Nullstelle .....	71

Lokal konform flache Lorentz-Metriken auf dem $\mathbb{R}^n$ .....	73
Die universelle Überlagerung von $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .....	75
<b>Anhang: Analytische Hilfsmittel</b> .....	<b>81</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>96</b>

## Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die globale konforme Struktur der Lorentz-Mannigfaltigkeiten zu bekommen, auf denen ein konformes Gradientenvektorfeld mit mindestens einer Nullstelle existiert. Dabei ist eine Lorentz-Mannigfaltigkeit eine  $n$ -dimensionale pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, ( $n \geq 3$ ), deren Metrik die Signatur  $(1, n - 1)$  hat, d.h. einen negativen und  $n - 1$  positive Eigenwerte. Die Mannigfaltigkeit ist also nicht notwendig vierdimensional. Ein Vektorfeld heißt konform, wenn sein (lokaler) Fluß aus (lokalen) konformen Diffeomorphismen besteht.

Für vollständige (und zusammenhängende) Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist die Frage durch Tashiro [Ta], Bourguignon [Bo], und Kerbrat [Ke1] beantwortet worden:

Ein nicht identisch verschwindendes konformes Gradientenvektorfeld hat höchstens zwei Nullstellen. Hat das Vektorfeld zwei Nullstellen, so ist die Mannigfaltigkeit konform diffeomorph zur Standardsphäre, hat es eine Nullstelle, so ist die Mannigfaltigkeit zum Euklidischen Raum oder zum Hyperbolischen Raum konform diffeomorph und falls es keine Nullstelle hat zu einem Produkt  $I \times \tilde{M}$ ,  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $\tilde{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Der Satz zeigt, daß ein Unterschied zwischen konformen Gradientenvektorfeldern mit und ohne Nullstellen besteht. Im ersten Fall gibt es bis auf konforme Diffeomorphismen nur drei vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die ein solches Vektorfeld zulassen. Alle drei sind überdies lokal konform flach. Im zweiten Fall gibt es unendlich viele nicht konform äquivalente vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten und unter diesen auch nicht konform flache.

Diesen Unterschied kann man außer an den Nullstellen noch an einer anderen, tiefer liegenden, Eigenschaft der Vektorfelder festmachen: ein konformes Vektorfeld heißt *wesentlich*, wenn es kein isometrisches Vektorfeld ist bzgl. jeder zur Ausgangsmetrik konformen Metrik. Andernfalls heißt es *unwesentlich*. Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind konforme Gradientenvektorfelder mit Nullstellen wesentlich und ohne Nullstellen unwesentlich.

Ist nun ein wesentliches konformes Vektorfeld vollständig, so ist, wegen der erzeugten 1-Parameter Untergruppe, die konforme Gruppe der Mannigfaltigkeit *wesentlich*, d.h. keine Untergruppe der Isometriegruppe bzgl. einer Metrik aus der konformen Klasse. Also ist, kurz aber ungenau gesagt, die konforme Gruppe "wesentlich" größer als die Isometriegruppe. Nach einem Satz von Alekseevskii ([A1], siehe auch [Le], [Ob], [Laf] für den kompakten Fall) ist die konforme Gruppe wesentlich nur für den Euklidischen Raum und die Standardsphäre. Konforme Gradientenfelder mit Nullstellen sind auch auf pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten wesentlich und deuten auf eine "große" konforme Gruppe hin.

Im Gegensatz zum Riemannschen Fall gibt es aber für indefinite Metrik abzählbar unendlich viele konform nicht äquivalente Mannigfaltigkeiten mit solchen Vektorfeldern. Alle Mannigfaltigkeiten sind aber lokal konform flach. Kühnel und Rademacher [KR1]

fanden für jede natürliche Zahl  $N \geq 1$  (einschließlich  $N = \infty$ ) Beispiele von konformen Gradientenvektorfelder mit genau  $N$  (isolierten) Nullstellen. Für die Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , konstruierten sie abzählbar viele Standardmannigfaltigkeiten, die alle möglichen konformen Typen der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten mit vollständigen konformen Gradientenvektorfeldern umfassen. Der konforme Typ ist, bis auf eine evtl. Zweideutigkeit, durch die Anzahl der Nullstellen bestimmt.

Die Konstruktion der Standardmannigfaltigkeiten beschrieben sie durch lineare Graphen. In dieser Arbeit über Lorentz-Mannigfaltigkeiten treten an ihre Stelle 3-reguläre Graphen. Jeder Lorentz-Mannigfaltigkeit mit einem konformen Gradientenfeld wird ein solcher Graph, in dieser Arbeit *Gerüst* genannt, zugeordnet.

Da das Gerüst ein 3-regulärer Graph ist, können Zyklen im Gerüst auftreten. Das bedeutet, daß die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit nicht mehr einfach zusammenhängend ist. Dies behindert globale Konstruktionen wie z.B. die Konstruktion einer Abwicklung, d.i. eine konforme Immersion  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  von der Mannigfaltigkeit  $M$  in die Standardquadratik  $Q_1^n$ , (vgl. S. 11 ff). Außerdem treten Mannigfaltigkeiten mit verschiedenen Gerüsten auf, die diffeomorph zueinander sind. Als Beispiel werden im vierten Kapitel unendlich viele lokal konform flache Lorentz-Strukturen auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^n$  konstruiert, die paarweise nicht konform diffeomorph sind.

Falls die Mannigfaltigkeit abwickelbar ist, und nach dem Satz von Kuiper ist sie dies, falls sie einfach zusammenhängend ist, definieren wir mit Hilfe gewisser Abwicklungen zwei zusätzliche Daten für das Gerüst. Zum einen eine Zeitorientierung und zum anderen eine Gewichtung. Die Zeitorientierung des Gerüstes beschreibt eine Zeitorientierung der Mannigfaltigkeit und die Gewichtung mißt die (Un-) Vollständigkeit des Vektorfeldes.

Das so erweiterte Gerüst ist in vielen Fällen eine vollständige konforme Invariante. Es gilt die folgende zentrale Aussage (Sätze 3.1 und 3.2):

Gegeben seien zwei abwickelbare und geodätisch vollständige Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit je einem konformen Gradientenvektorfeld mit mindestens einer Nullstelle.

Sind die Gerüste mit den zwei zusätzlichen Daten Zeitorientierung und Gewichtung isomorph, so sind die Mannigfaltigkeiten konform diffeomorph.

Sind umgekehrt die Mannigfaltigkeiten konform diffeomorph und ist für eine Mannigfaltigkeit das Bild einer Abwicklung gleich  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ , so sind die Gerüste mit den zusätzlichen Daten Zeitorientierung und Gewichtung isomorph.

Die zusätzliche Voraussetzung über das Bild einer Abwicklung ist für sehr viele Mannigfaltigkeiten erfüllt (s. S. 60).

Das zentrale Ergebnis wird auf die universelle Überlagerung nicht notwendig abwickelbarer Lorentz-Mannigfaltigkeiten angewendet und man erhält für weitere Mannigfaltigkeiten, daß das Gerüst eine konforme Invariante ist.

Die Standardräume konstanter Schnittkrümmung sind abwickelbar, erfüllen aber nicht die Voraussetzung über das Bild einer Abwicklung. Mit den entwickelten Methoden lassen sich auch hier die zeitorientierten und gewichteten Gerüste als vollständige konforme Invarianten nachweisen.

Desgleichen lassen sich alle Mannigfaltigkeiten, die ein Gradientenfeld mit genau einer Nullstelle tragen, konform klassifizieren.

Die Resultate gelten in angepaßter Form auch für den Fall der Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , und führen hier zu einer, bis auf den Fall zweier Nullstellen, vollständigen konformen Klassifikation. In der Arbeit wird hierauf nur in Anmerkungen hingewiesen.

Noch kurz zum Aufbau der Arbeit. Im einleitenden Kapitel wird der grundlegende Satz von Liouville für den pseudo-Euklidischen Raum  $\mathbb{R}_k^n$  (also beliebige Signatur) und die Standardquadrik  $Q_k^n$  hergeleitet. Er ist nötig für die Konstruktion von Abwicklungen, dem der erste Teil des dritten Kapitels gewidmet ist. Eine abwickelbare Mannigfaltigkeit ist notwendig lokal konform flach. Diese notwendige Eigenschaft wird im zweiten Kapitel nachgewiesen. Als Vorbereitung dazu wird gezeigt, daß die Metrik um jede Nullstelle des Vektorfeldes in Polarkoordinaten ein warped-product ist. Im zweiten Teil von Kapitel 3 werden dann die zentralen Sätze der Arbeit (Sätze 3.1 und 3.2) sowie weitere globale Resultate bewiesen. Im vierten Kapitel werden zunächst die Graphen charakterisiert, die als Gerüste auftreten. Dadurch gewinnt man die oben schon erwähnten lokal konform flachen Lorentz-Strukturen auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Sodann werden die Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenvektorfeld mit genau einer Nullstelle klassifiziert. Zum Abschluß wird gezeigt, daß der universellen Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  als Gerüst der universelle 3-reguläre Baum zugeordnet werden kann. Deshalb kann jede einfach zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit mit einem konformen Gradientenvektorfeld mit mindestens einer Nullstelle konform in diese universelle Überlagerung eingebettet werden. Im Anhang befinden sich technische Hilfssätze.

Zum Schluß möchte ich mich bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Wolfgang Kühnel, für die geduldige Begleitung der Arbeit und die vielen hilfreichen Diskussionen bedanken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. Klaus-Werner Wiegmann, der mir eine Mitarbeiterstelle in seinem Fachgebiet zur Verfügung stellte.

## Kapitel 1: Der Satz von Liouville im pseudo-Euklidischen Raum

In diesem ersten Kapitel beweisen wir den Satz von Liouville für den pseudo-Euklidischen Raum  $\mathbb{R}_k^n$  und geben seine Verallgemeinerung für die "konforme Kompaktifizierung" von  $\mathbb{R}_k^n$  an. Dabei erhalten wir gleichzeitig eine Darstellung der konformen Diffeomorphismen dieser Kompaktifizierung durch orthogonale Abbildungen des  $\mathbb{R}_{k+1}^{n+2}$ . Zum Schluß gehen wir auf abwickelbare Mannigfaltigkeiten und die Zeitorientierung von Lorentz-Mannigfaltigkeiten in diesem Zusammenhang ein.

Alle Aussagen dieses Kapitels sind schon seit langem bekannt (vgl. [CK], [doC], [Du], [Ha], [Ku]). Wir benutzen sie wesentlich in dieser Arbeit. Da aber die Beweise auf viele Arbeiten verteilt sind und zum Teil Lücken aufweisen, gehen wir hier ausführlicher auf sie ein.

Für  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , bezeichne  $\mathbb{R}_k^n$  den reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  versehen mit dem pseudo-Euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := - \sum_{i=1}^k x_i y_i + \sum_{j=k+1}^n x_j y_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist nicht degeneriert und hat die Signatur  $(k, n - k)$ . Man kann nun in bekannter Weise  $\mathbb{R}_k^n$  zu einer (flachen) pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit machen, indem man jeden Tangentialraum  $T_x \mathbb{R}_k^n$  mit  $\mathbb{R}_k^n$  identifiziert und mit der Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  versieht. Diese pseudo-Riemannsche Metrik bezeichnen wir mit  $g_0$ . In den natürlichen Koordinaten hat man

$$g_0(x) = (g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n} = (\epsilon_i \delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit  $\epsilon_1 = \dots = \epsilon_k = -1$  und  $\epsilon_{k+1} = \dots = \epsilon_n = +1$ .

Eine auf  $U \subset \mathbb{R}_k^n$ ,  $U$  offen, definierte  $C^\infty$ -Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$  heißt konform, wenn  $f^*(g_0) = \sigma \cdot g_0$  für eine reelle, positive Funktion  $\sigma$  auf  $U$ . Dabei ist  $f^*(g_0)$  der pull-back von  $g_0$  unter  $f$ . Für die folgende Rechnung ist es zweckmäßig,  $f^*(g_0) = 1/\rho^2 \cdot g_0$  zu schreiben. Mit  $df$  bezeichnen wir die Ableitung (Jacobi-Matrix) von  $f$ .

**Lemma 1.1** (vgl. [CK], Lemma 5)

Ist  $n \geq 3$  und  $U \subset \mathbb{R}_k^n$ ,  $U$  offen und zusammenhängend, sowie  $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$  zwei konforme lokale Diffeomorphismen und gilt für einen Punkt  $x_0 \in U$

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) \quad \text{und} \quad d\varphi_1(x_0) = d\varphi_2(x_0)$$

und weiter für die konformen Faktoren  $\rho_i$ , d.h.  $\varphi_i^*(g_0) = 1/\rho_i^2 \cdot g_0$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$d\rho_1(x_0) = d\rho_2(x_0),$$

so ist  $\varphi_1 = \varphi_2$ . ( Wegen  $d\varphi_1(x_0) = d\varphi_2(x_0)$  gilt auch  $\rho_1(x_0) = \rho_2(x_0)$ . )

**Beweis:**

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$  ein beliebiger konformer lokaler Diffeomorphismus mit konformem Faktor  $1/\rho^2$ . Wir werden für  $f, df, \rho$  und  $d\rho$  ein System partieller Differentialgleichungen herleiten. Genauer: Wir drücken

$$\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}$$

durch

$$f = (f_1, \dots, f_n), \quad df = \left( \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \right)_{1 \leq \nu, i \leq n}, \quad \rho \quad \text{und} \quad d\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$$

aus.

Man hat

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} \cdot \epsilon_\nu = \frac{1}{\rho^2} g_{ij} \quad (1.1)$$

mit  $g_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij} = \text{const.}$  Nun leiten wir dies nach  $x_k$  ab:

$$\sum_{\nu=1}^n \left( \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} \cdot \epsilon_\nu + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \epsilon_\nu \right) = -\frac{2}{\rho^3} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot g_{ij}.$$

Vertauscht man die Indizes  $i, j, k$  zyklisch und bildet die Summe  $-(i, j, k) + (j, k, i) + (k, i, j)$ , so erhält man

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \epsilon_\nu &= \frac{2}{\rho^3} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_{jk} \right) \\ \Rightarrow \sum_{\nu, k=1}^n \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_\mu} \epsilon_\nu &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho^3} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_{jk} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_\mu}. \end{aligned}$$

Hierbei ist  $\left( \frac{\partial x_k}{\partial f_\mu} \right)$  die inverse Matrix von  $\left( \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \right)$ .

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_\mu = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho^3} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_{jk} \right) \frac{\partial x_k}{\partial f_\mu}$$

Aus Gl. (1.1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \epsilon_\mu &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho^2} g_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial f_\mu} = \frac{1}{\rho^2} \epsilon_i \frac{\partial x_i}{\partial f_\mu} \\ \Rightarrow \frac{\partial x_i}{\partial f_\mu} &= \rho^2 \epsilon_i \epsilon_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Daher



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_{jk} \right) \epsilon_k \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial x_k} \\
&= \frac{1}{\rho} \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial x_k} \epsilon_k \right) g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial x_j} \right).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Weiter

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(\rho f_\nu)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} f_\nu + \rho \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \\
&\stackrel{(1.2)}{=} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} f_\nu + \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell g_{ij}
\end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\partial^3(\rho f_\nu)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3 \rho}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f_\nu + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} + \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_\ell} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell + \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k \partial x_\ell} \epsilon_\ell \right) g_{ij}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung und der erste Term der rechten Seite symmetrisch in  $i, j$  und  $k$  sind, muß das gleiche für den Rest gelten:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} + \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_\ell} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell + \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k \partial x_\ell} \epsilon_\ell \right) g_{ij} \\
&= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} + \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_\ell} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell + \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_j \partial x_\ell} \epsilon_\ell \right) g_{ki}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Falls  $i, j$  und  $k$  paarweise verschieden sind, hat man also

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} \quad \nu = 1, \dots, n$$

oder vektoriell geschrieben  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_a} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_a}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_a} \right) \right) :$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Da  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  und  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  linear unabhängig sind, gilt

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{1.4}$$

Da  $n \geq 3$  existiert zu je zwei verschiedenen Indizes  $i$  und  $j$  ein von beiden verschiedener Index  $k$ . Also gilt die letzte Gleichung für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i \neq j$ .

Mit Gleichung (1.4) lautet (1.3) für  $i = j \neq k$  :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \epsilon_k \epsilon_i + \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k \partial x_\ell} \epsilon_\ell \epsilon_i = 0 .$$

Man hat

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k \partial x_\ell} \epsilon_\ell \epsilon_i &= \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell \epsilon_i \frac{1}{\rho} \left( \sum_{a=1}^n \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_a} \epsilon_a \right) g_{k\ell} - \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell} - \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \epsilon_i \left( \sum_{a=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_a} \epsilon_a \epsilon_k \epsilon_k \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell - \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \epsilon_\ell \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \epsilon_i \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \epsilon_\ell . \end{aligned}$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$\left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_k} \epsilon_k \epsilon_i - \frac{1}{\rho} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell \epsilon_i \right) \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} = 0 .$$

Da  $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \right) \neq 0$  ist, folgt

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} \epsilon_i + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_k} \epsilon_k = \frac{1}{\rho} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell .$$

Betrachten wir diese Gleichung für  $(i, k)$  und  $(j, k)$  mit  $i \neq k$  und  $j \neq k$ , so folgt durch Differenzbildung

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} \epsilon_i = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_j} \epsilon_j$$

und daher

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_i} \epsilon_i = \frac{1}{2\rho} \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell .$$

Zusammen mit (1.4) ergibt dies

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2\rho} \sum_{\ell=1}^n \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_\ell} \epsilon_\ell \right) g_{ij} .$$

Für  $f, df, \rho, d\rho$  hat man also folgendes partielle Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} &= y_{\nu,i} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x_i} &= z_i \\ \frac{\partial y_{\nu,i}}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho} \left( \sum_{k=1}^n (z_k y_{\nu,k} \epsilon_k) g_{ij} - z_j y_{\nu,i} - z_i y_{\nu,j} \right) \\ \frac{\partial z_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2\rho} \sum_{k=1}^n (z_k z_k \epsilon_k) g_{ij} .\end{aligned}$$

Nun erfüllen  $\varphi_1, \rho_1$  und  $\varphi_2, \rho_2$  dieses System und haben im Punkt  $x_0$  die gleichen Anfangswerte. Da  $U$  zusammenhängend ist, folgt  $\varphi_1 = \varphi_2$  (s. [Lau], S. 176 f.)  $\square$

### Bemerkungen:

- 1) Das Lemma läßt sich auf lokal konform flache Mannigfaltigkeiten übertragen:

Seien  $M$  und  $N$  zwei lokal konform flache pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Signatur  $(k, n - k)$ . Weiter seien  $U \subset M$  offen und zusammenhängend und  $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow N$  zwei konforme lokale Diffeomorphismen. Dann sind bzgl. konformer Koordinatensysteme von  $M$  und  $N$  die Abbildungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  konforme lokale Diffeomorphismen des  $\mathbb{R}_k^n$ . Mit Lemma 1.1 erkennt man, daß die Menge

$$\{p \in U \mid \varphi_1(p) = \varphi_2(p), d\varphi_1(p) = d\varphi_2(p), \rho_1(p) = \rho_2(p), d\rho_1(p) = d\rho_2(p)\}$$

offen ist. Zugleich ist sie abgeschlossen. Gibt es nun einen Punkt in dieser Menge, so ist sie gleich  $U$ .

- 2) Die Aussage des Lemmas gilt auch für konforme lokale Diffeomorphismen zwischen beliebigen Mannigfaltigkeiten (vgl. [CK], S. 330).

Man hat im  $\mathbb{R}_k^n$  die folgenden einfach zu beschreibenden konformen Diffeomorphismen (dabei ist jeweils der konforme Faktor, wie in Lemma 1.1 definiert, angegeben):

**Translationen:**  $T : x \mapsto x + t$ ,  $t \in \mathbb{R}_k^n$  fest,  $\rho \equiv 1$ .

**orthogonale Abbildungen:**  $A : x \mapsto Ax$ ,  $A \in \mathcal{O}(k, n - k)$  = Menge aller bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  orthogonalen Matrizen,  $\rho \equiv 1$ .

**Homothetien:**  $H : x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\rho \equiv \frac{1}{\lambda}$ .

**Sphäreninversionen:** Zunächst die Inversion an der Einheitskugel:

$$S : x \mapsto \frac{x}{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}_k^n \setminus \Gamma_k^n, \quad \Gamma_k^n := \{x \in \mathbb{R}_k^n \mid \langle x, x \rangle = 0\} = \text{Lichtkegel im } \mathbb{R}_k^n,$$

$$\rho(x) = \langle x, x \rangle, \quad \text{grad } \rho(x) = 2x. \quad (\text{Der Gradient ist bzgl. } g_0 \text{ gebildet.})$$

Die Rechnung, um den konformen Faktor von  $S$  zu bestimmen : Sei  $X \in T_x \mathbb{R}_k^n \cong \mathbb{R}_k^n$

$$dS|_x(X) = \frac{1}{\langle x, x \rangle} X - \frac{2}{\langle x, x \rangle^2} \langle x, X \rangle x$$

$$\Rightarrow \langle dS|_x(X), dS|_x(X) \rangle = \frac{1}{\langle x, x \rangle^2} \langle X, X \rangle - \frac{4 \langle x, X \rangle^2}{\langle x, x \rangle^3} + \frac{4 \langle x, X \rangle^2}{\langle x, x \rangle^4} \langle x, x \rangle$$

$$= \frac{1}{\langle x, x \rangle^2} \langle X, X \rangle$$

Ist der Mittelpunkt der Inversion nicht der Nullpunkt sondern der Punkt  $m$  und der Radius der Kugel, an der gespiegelt wird, nicht 1 sondern  $\sqrt{\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , so wird die Sphäreninversion durch die Formel

$$x \mapsto \lambda \frac{x - m}{\langle x - m, x - m \rangle} + m, \quad x \notin m + \Gamma_k^n$$

beschrieben. Diese Sphäreninversion ist die Komposition von  $x \mapsto x - m =: y$ ,  $y \mapsto S(y) =: z$ ,  $z \mapsto \lambda z =: w$  und  $w \mapsto w + m$ .

Es ist hier  $\rho(x) = \frac{1}{\lambda} \langle x - m, x - m \rangle$ ,  $\text{grad } \rho(x) = \frac{2}{\lambda} (x - m)$ .

Für später wollen wir in obiger Formel auch  $\lambda < 0$  zulassen. Das entspricht der Verkettung der obigen Inversion für  $-\lambda$  mit  $v \mapsto -v + 2m$ .

Die Fixpunktmenge der Inversion ist  $\{x \mid \langle x - m, x - m \rangle = \lambda\}$ . Für  $\lambda > 0$  ist das der raumartige Teil der Abstandskugel und für  $\lambda < 0$  der zeitartige Teil. Für die Begriffe "raumartig" und "zeitartig" siehe S. 23 unten.

Im indefiniten Fall, d.h. für  $1 \leq k \leq n-1$ , schreiben wir noch ausführlich die Komposition zweier Sphäreninversionen hin, wobei die Differenz der beiden Mittelpunkte lichtartig ist:

$$x \mapsto \frac{x}{\langle x, x \rangle} = y \quad \text{und} \quad y \mapsto \frac{y - b}{\langle y - b, y - b \rangle} + b, \quad b \in \Gamma_k^n$$

liefern komponiert

$$Q : x \mapsto \frac{x - \langle x, x \rangle b}{1 - 2 \langle x, b \rangle} + b, \quad \langle x, b \rangle \neq \frac{1}{2}, \quad \rho(x) = 1 - 2 \langle x, b \rangle, \quad \text{grad } \rho(x) = -2b.$$

Die Translationen vertauschen sich in folgender Weise mit allen anderen Abbildungen: Zu jeder Translation  $T$  und zu jeder orthogonalen Abbildung  $A$  bzw. Homothetie  $H$  existiert eine Translation  $\tilde{T}$  mit  $A \circ T = \tilde{T} \circ A$  bzw.  $H \circ T = \tilde{T} \circ H$ . Außerdem gibt es zu jeder Translation  $T$  und jeder Sphäreninversion  $S_1$  eine Translation  $\tilde{T}$  und eine Sphäreninversion  $\tilde{S}_1$  mit  $S_1 \circ T = \tilde{T} \circ \tilde{S}_1$ .

### Satz von Liouville

Sei  $n \geq 3$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}_k^n$ ,  $U \subset \mathbb{R}_k^n$  offen und zusammenhängend, ein konformer lokaler Diffeomorphismus. Dann läßt sich  $f$  schreiben als Komposition von Translationen, orthogonalen Abbildungen, Homothetien und Sphäreninversionen, wobei man mit höchstens einer Abbildung von jedem Typ auskommt mit Ausnahme der Sphäreninversionen. Von diesen braucht man evtl. zwei, aber auch nur im indefiniten Fall, d.h. für  $1 \leq k \leq n - 1$ .

#### Beweis:

Sei  $x_0 \in U$  fest. Mit den Translationen  $T : x \mapsto x - f(x_0)$ ,  $\tilde{T} : x \mapsto x + x_0$  und der Homothetie  $H : x \mapsto \rho_f(x_0) \cdot x$  ist

$$g := H \circ T \circ f \circ \tilde{T}$$

auf  $U - x_0$  definiert mit  $0 \in U - x_0$ ,  $g(0) = 0$ ,  $\rho_g(0) = 1$ , d.h.  $dg|_0 \in \mathcal{O}(k, n - k)$ .

#### 1. Fall: $\text{grad } \rho_g(0) = 0$

Setze  $A := dg|_0 \in \mathcal{O}(k, n - k)$ . Dann erfüllen  $g$  und  $A$  die Voraussetzungen von Lemma 1.1 im Punkt 0. Also

$$H \circ T \circ f \circ \tilde{T} = A \quad \text{in } U - x_0$$

oder

$$f = T^{-1} \circ H^{-1} \circ A \circ \tilde{T}^{-1} = \tilde{T} \circ H^{-1} \circ A \quad \text{in } U.$$

Wir betrachten in den folgenden zwei Fällen  $f$  und alle anderen Funktionen zunächst in einer kleinen Umgebung von  $x_0$ , wo die Sphäreninversionen, die wir einführen werden, definiert sind.

#### 2. Fall: $\text{grad } \rho_g(0) \in \mathbb{R}_k^n \setminus \Gamma_k^n$

Suche eine Sphäreninversion  $\tilde{S}$  die 0 als Fixpunkt hat und  $\text{grad } \rho_{\tilde{S}}(0) = \text{grad } \rho_g(0)$  erfüllt. Dazu muß der Mittelpunkt der Inversion auf der Geraden durch 0 mit Richtung  $\text{grad } \rho_g(0)$  liegen. Durch nachrechnen sieht man, daß

$$\tilde{S} : x \mapsto \lambda \frac{x - m}{\langle x - m, x - m \rangle} + m$$

mit  $m := 2/\langle \text{grad } \rho_g(0), \text{grad } \rho_g(0) \rangle \text{grad } \rho_g(0)$ ,  $\lambda := \langle m, m \rangle$  die Eigenschaften  $\tilde{S}(0) = 0$ ,  $\rho_{\tilde{S}}(0) = \frac{1}{\lambda} \langle m, m \rangle = 1$ ,  $\text{grad } \rho_{\tilde{S}}(0) = \frac{2}{\lambda}(-m) = \text{grad } \rho_g(0)$  hat. Insbesondere ist  $d\tilde{S}|_0$  eine orthogonale Abbildung. Mit  $A := dg|_0 \circ (d\tilde{S}|_0)^{-1}$  erfüllen

$$H \circ T \circ f \circ \tilde{T} \quad \text{und} \quad A \circ \tilde{S}$$

die Voraussetzungen von Lemma 1.1 im Nullpunkt. Also in einer Umgebung von Null

$$H \circ T \circ f \circ \tilde{T} = A \circ \tilde{S}$$

oder in einer Umgebung von  $x_0$

$$f = T^{-1} \circ H^{-1} \circ A \circ \tilde{S} \circ \tilde{T}^{-1} = \tilde{T} \circ H^{-1} \circ A \circ \tilde{S}. \quad (1.5)$$

**3. Fall:**  $\text{grad } \rho_g(0) \in \Gamma_k^n \setminus \{0\}$

Betrachte  $T_1 : x \mapsto x - b$  und  $R = T_1 \circ Q : x \mapsto \frac{x - \langle x, x \rangle b}{1 - 2\langle x, b \rangle}$ . Dann gilt  $R(0) = 0$ ,  $\rho_R(0) = 1 - 2\langle 0, b \rangle = 1$ ,  $\text{grad } \rho_R(0) = -2b$ .

Setze  $b := -\frac{1}{2} \text{grad } \rho_g(0)$  und  $A := dg|_0 \circ (dR|_0)^{-1} \in \mathcal{O}(k, n - k)$ .

Dann erfüllen  $H \circ T \circ f \circ \tilde{T}$  und  $A \circ R$  die Voraussetzungen von Lemma 1.1. Also

$$H \circ T \circ f \circ \tilde{T} = A \circ R = A \circ T_1 \circ Q$$

oder

$$\begin{aligned} f &= T^{-1} \circ H^{-1} \circ A \circ T_1 \circ Q \circ \tilde{T}^{-1} \\ &= \tilde{T} \circ H^{-1} \circ A \circ \tilde{Q} \end{aligned} \quad (1.6)$$

wobei  $\tilde{Q}$  wieder die Komposition zweier Sphäreninversionen ist.

Nun gilt die Gleichheit in (1.5) und (1.6) in einer Umgebung von  $x_0$  und dann nach Lemma 1.1 in der Zusammenhangskomponente des Durchschnitts von  $U$  und dem maximalen Definitionsbereich der jeweils rechten Seite in (1.5) und (1.6), die den Punkt  $x_0$  enthält. Wäre diese echt kleiner als  $U$ , so hätte sie Randpunkte in  $U$ . In diesen Randpunkten hat die jeweils rechte Seite einen Pol. Dann müßte aber auch  $f$  dort einen Pol haben, ein Widerspruch.  $\square$

Die Sphäreninversionen haben den Nachteil, daß sie nicht auf ganz  $\mathbb{R}_k^n$  definiert sind. Dies kann man beheben, wenn man zur "konformen Kompaktifizierung"  $Q_k^n$  von  $\mathbb{R}_k^n$  übergeht. Die im folgenden gegebene Einführung von  $Q_k^n$  stammt aus [CK].

Ist  $\pi : \mathbb{R}_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$  die kanonische Projektion, so ist  $Q_k^n := \pi(\Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\})$  eine Quadrik in  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ . Man definiert wie folgt eine Metrik auf  $Q_k^n$ . Sei  $S^{n+1}(\sqrt{2})$  die euklidische Sphäre vom Radius  $\sqrt{2}$  mit Mittelpunkt 0 in  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k^n &:= \Gamma_{k+1}^{n+2} \cap S^{n+1}(\sqrt{2}) = \left\{ x \in \mathbb{R}_{k+1}^{n+2} \mid \sum_{i=0}^k x_i^2 = 1 \wedge \sum_{j=k+1}^{n+1} x_j^2 = 1 \right\} \\ &= S^k(1) \times S^{n-k}(1) \subset \mathbb{R}_{k+1}^{k+1} \times \mathbb{R}_0^{n-k+1} = \mathbb{R}_{k+1}^{n+2}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^{n+2} = \{(x_0, \dots, x_{n+1}) \mid x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}\},$$

eine pseudo-Riemannsche Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}_{k+1}^{n+2}$ , deren Metrik  $h$  die Signatur  $(k, n - k)$  hat. Sie ist gleich dem metrischen Produkt  $S^k(1) \times S^{n-k}(1)$ , wobei  $S^k(1)$  das negative der positiv-definiten Standardmetrik und  $S^{n-k}(1)$  die Standardmetrik trägt.

$\pi_1 := \pi|_{\tilde{Q}_k^n} : \tilde{Q}_k^n \rightarrow Q_k^n$  ist eine zweiblättrige Überlagerung und die Decktransformationen  $\pm id$  sind Isometrien. Also existiert auf  $Q_k^n$  genau eine Metrik  $g_{n,k}$ , die  $\pi_1$  zu einer lokalen Isometrie macht.

Man hat die folgende konforme Einbettung von  $\mathbb{R}_k^n$  in  $Q_k^n$

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}_k^n &\rightarrow Q_k^n \\ x &\mapsto \pi((1 + \langle x, x \rangle, 2x, 1 - \langle x, x \rangle)) \end{aligned}$$

$i$  ist eine konforme, injektive Immersion und das Bild  $i(\mathbb{R}_k^n) = \{\pi(x_0, \dots, x_{n+1}) \mid (x_0, \dots, x_{n+1}) \in \Gamma_{k+1}^{n+2} \wedge x_0 + x_{n+1} \neq 0\}$  liegt dicht in  $Q_k^n$ .

Sei nun  $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ .  $A$  liefert eine Projektivität  $\phi_A$ , so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1} & \xrightarrow{\phi_A} & \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1} \end{array}$$

Da  $A$  den Lichtkegel  $\Gamma_{k+1}^{n+2}$  in sich überführt, bildet  $\phi_A$  die Quadrik  $Q_k^n$  auf sich ab. Also ist  $\phi_A|_{Q_k^n} : Q_k^n \rightarrow Q_k^n$  ein Diffeomorphismus. Wir bezeichnen diese eingeschränkte Abbildung auch mit  $\phi_A$ .

**Lemma 1.2** ([CK], Lemma 4)

Es ist

$$\phi_A : Q_k^n \rightarrow Q_k^n, \quad A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1),$$

ein konformer Diffeomorphismus.

**Beweis:**

Seien  $x \in \Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\}$ ,  $X, Y \in T_x(\Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\}) = \{Z \in \mathbb{R}_{k+1}^{n+2} \mid \langle x, Z \rangle = 0\}$  und

$n : \Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\} \rightarrow S(\sqrt{2})$ ,  $x \mapsto \sqrt{2} \frac{x}{\|x\|}$ ,  $\|x\| =$  euklidische Norm von  $x$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\pi^* g_{n,k} \Big|_x (X, Y) &= (\pi_1 \circ n)^* g_{n,k} \Big|_x (X, Y) \\
&= n^* (\pi_1^* g_{n,k}) \Big|_x (X, Y) \\
&= \pi_1^* g_{n,k} \Big|_{n(x)} (dn \Big|_x (X), dn \Big|_x (Y)) \\
&= h \Big|_{n(x)} (dn \Big|_x (X), dn \Big|_x (Y)) \\
&= \langle dn \Big|_x (X), dn \Big|_x (Y) \rangle \\
&= \left\langle \frac{\sqrt{2}}{\|x\|} X + \alpha x, \frac{\sqrt{2}}{\|x\|} Y + \beta x \right\rangle
\end{aligned}$$

für gewisse, nicht näher interessierende, Zahlen  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$= \frac{2}{\|x\|^2} \langle X, Y \rangle$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\phi_A^* g_{n,k} \Big|_{\pi(x)} (d\pi \Big|_x (X), d\pi \Big|_x (Y)) &= \pi^* (\phi_A^* g_{n,k}) \Big|_x (X, Y) \\
&= (\phi_A \circ \pi)^* g_{n,k} \Big|_x (X, Y) \\
&= (\pi \circ A)^* g_{n,k} \Big|_x (X, Y) \\
&= A^* (\pi^* g_{n,k}) \Big|_x (X, Y) \\
&= \pi^* g_{n,k} \Big|_{Ax} (AX, AY) \\
&= \frac{2}{\|Ax\|^2} \langle AX, AY \rangle \\
&= \frac{2}{\|Ax\|^2} \langle X, Y \rangle \\
&= \frac{\|x\|^2}{\|Ax\|^2} \pi^* g_{n,k} \Big|_x (X, Y) \\
&= \frac{\|x\|^2}{\|Ax\|^2} g_{n,k} \Big|_{\pi(x)} (d\pi \Big|_x (X), d\pi \Big|_x (Y))
\end{aligned}$$



Da  $d\pi|_x : T_x(\Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\}) \rightarrow T_{\pi(x)}Q_k^n$  surjektiv ist, folgt  $\phi_A^* g_{n,k} = \sigma \cdot g_{n,k}$  mit  $\sigma \circ \pi(x) = \frac{\|x\|^2}{\|Ax\|^2}$ .  $\square$

Im folgenden bezeichnet " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " das pseudo-Euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}_k^n$  und " $\cdot$ " dasjenige in  $\mathbb{R}_{k+1}^{n+2}$ .

Sei  $\mathbb{R}_k^n \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}_k^n$  eine Translation, orthogonale Abbildung, Homothetie oder die Sphäreninversion  $S$ . Jetzt kann man, vermöge der Einbettung  $i : \mathbb{R}_k^n \rightarrow Q_k^n$ ,  $f$  als Abbildung von einer Teilmenge von  $Q_k^n$  in  $Q_k^n$  auffassen. Wir setzen diese Abbildung nun auf ganz  $Q_k^n$  fort, indem wir ein  $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$  angeben, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{A} & \Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Q_k^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_k^n \\ i \uparrow & & \uparrow i \\ \mathbb{R}_k^n \supset U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}_k^n \end{array}$$

Für  $f : x \mapsto Bx + t$ ,  $B \in \mathcal{O}(k, n-k)$ ,  $t \in \mathbb{R}_k^n$ , wird das Diagramm kommutativ durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\langle t, t \rangle & \langle Be_1, t \rangle \dots \langle Be_n, t \rangle & \frac{1}{2}\langle t, t \rangle \\ t & B & t \\ -\frac{1}{2}\langle t, t \rangle & -\langle Be_1, t \rangle \dots -\langle Be_n, t \rangle & 1 - \frac{1}{2}\langle t, t \rangle \end{pmatrix}$$

Hierbei sind  $e_1, \dots, e_n$  die kanonischen Basisvektoren von  $\mathbb{R}^n$ .

*Begründung:* Es ist für alle  $x \in \mathbb{R}_k^n$

$$\begin{aligned} \phi_A \circ i(x) &= \phi_A \circ \pi(1 + \langle x, x \rangle, 2x, 1 - \langle x, x \rangle) \\ &= \pi \circ A(1 + \langle x, x \rangle, 2x, 1 - \langle x, x \rangle) \\ &= \pi \left( (1 + \frac{1}{2}\langle t, t \rangle)(1 + \langle x, x \rangle) + 2\langle Bx, t \rangle + \frac{1}{2}\langle t, t \rangle(1 - \langle x, x \rangle), \right. \\ &\quad \left. t(1 + \langle x, x \rangle) + 2Bx + t(1 - \langle x, x \rangle), \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2}\langle t, t \rangle(1 + \langle x, x \rangle) - 2\langle Bx, t \rangle + (1 - \frac{1}{2}\langle t, t \rangle)(1 - \langle x, x \rangle) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi(1 + \langle x, x \rangle + \langle t, t \rangle + 2\langle Bx, t \rangle, 2\langle Bx + t, Bx + t \rangle, 1 - \langle x, x \rangle - \langle t, t \rangle - 2\langle Bx, t \rangle) \\
&= \pi(1 + \langle Bx + t, Bx + t \rangle, 2\langle Bx + t, Bx + t \rangle, 1 - \langle Bx + t, Bx + t \rangle) \\
&= i(Bx + t)
\end{aligned}$$

Außerdem ist  $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ , denn für alle  $(x_0, x, x_{n+1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2}$  ist

$$\begin{aligned}
A(x_0, x, x_{n+1}) &= \left( x_0 + \frac{1}{2}\langle t, t \rangle(x_0 + x_{n+1}) + \langle Bx, t \rangle, \right. \\
&\quad \left. (x_0 + x_{n+1})t + Bx, \right. \\
&\quad \left. x_{n+1} - \frac{1}{2}\langle t, t \rangle(x_0 + x_{n+1}) - \langle Bx, t \rangle \right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A(x_0, x, x_{n+1}) \cdot A(x_0, x, x_{n+1}) &= - \left( x_0 + \frac{1}{2}\langle t, t \rangle(x_0 + x_{n+1}) + \langle Bx, t \rangle \right)^2 \\
&\quad + \langle (x_0 + x_{n+1})t + Bx, (x_0 + x_{n+1})t + Bx \rangle \\
&\quad + \left( x_{n+1} - \frac{1}{2}\langle t, t \rangle(x_0 + x_{n+1}) - \langle Bx, t \rangle \right)^2 \\
&= -x_0^2 - x_0\langle t, t \rangle(x_0 + x_{n+1}) - 2x_0\langle Bx, t \rangle \\
&\quad + (x_0 + x_{n+1})^2\langle t, t \rangle + 2(x_0 + x_{n+1})\langle Bx, t \rangle + \langle Bx, Bx \rangle \\
&\quad + x_{n+1}^2 - x_{n+1}\langle t, t \rangle(x_0 + x_{n+1}) - 2x_{n+1}\langle Bx, t \rangle \\
&= -x_0^2 + \langle Bx, Bx \rangle + x_{n+1}^2 \\
&= -x_0^2 + \langle x, x \rangle + x_{n+1}^2 \\
&= (x_0, x, x_{n+1}) \cdot (x_0, x, x_{n+1}) .
\end{aligned}$$

Für  $f : x \mapsto \lambda x$ ,  $\lambda > 0$ , macht die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda^2}{2} & 0 & \frac{1-\lambda^2}{2} \\ 0 & \lambda E_n & 0 \\ \frac{1-\lambda^2}{2} & 0 & \frac{1+\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$$

und für  $f : x \mapsto \frac{x}{\langle x, x \rangle}$  die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$$

das obige Diagramm kommutativ, wie eine analoge Rechnung zeigt.

Nun ist  $Q_k^n$  lokal konform flach, denn  $i : \mathbb{R}_k^n \rightarrow Q_k^n$  ist eine konforme Immersion und die Projektivitäten  $\phi_A$ ,  $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ , operieren transitiv auf  $Q_k^n$ .

Sei  $U \subset Q_k^n$  eine offene und zusammenhängende Menge und  $f : U \rightarrow Q_k^n$  ein konformer Diffeomorphismus. Sei  $x_0 \in U$ . Dann existieren  $A, B \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$  mit  $\phi_A(i(0)) = x_0$  und  $\phi_B(f(x_0)) = i(0)$ . Es ist dann  $\phi_B \circ f \circ \phi_A$  lokal um  $i(0)$  eine Abbildung von einer Teilmenge von  $i(\mathbb{R}_k^n) \cong \mathbb{R}_k^n$  in  $i(\mathbb{R}_k^n) \cong \mathbb{R}_k^n$ . Nach dem Satz von Liouville läßt sich diese Abbildung als Komposition von Translationen, orthogonalen Abbildungen, Homothetien und Sphäreninversionen schreiben. Da diese alle von der Form  $\phi_C$ ,  $C \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$  sind und  $\phi_{C_1} \circ \phi_{C_2} = \phi_{C_1 \cdot C_2}$  gilt,  $C_1, C_2 \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ , existiert ein  $D \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$  mit

$$\phi_B \circ f \circ \phi_A = \phi_D$$

lokal um  $i(0)$ . Nach Lemma 1.1 muß diese Gleichung dann auch auf  $\phi_A^{-1}(U)$  gelten. Daher auf  $U$

$$f = \phi_B^{-1} \circ \phi_D \circ \phi_A^{-1} = \phi_{B^{-1}DA^{-1}} .$$

Also läßt sich  $f$  zu einem globalen konformen Diffeomorphismus von  $Q_k^n$  fortsetzen. Diese Fortsetzung ist, wieder nach Lemma 1.1, eindeutig.

Damit hat man gleichzeitig gezeigt, daß alle globalen konformen Diffeomorphismen von  $Q_k^n$  von der Form  $\phi_A$ ,  $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ , sind. Man beachte, daß  $\phi_A = \phi_{-A}$ . Die konforme Gruppe von  $(Q_k^n, g_{n,k})$  ist isomorph zu  $\mathcal{O}(k+1, n-k+1)/\pm$ .

Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

### Satz von Liouville für $Q_k^n$

Jeder auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge  $U$  von  $Q_k^n$  definierte konforme lokale Diffeomorphismus  $f : U \rightarrow Q_k^n$  läßt sich eindeutig zu einem globalen konformen Diffeomorphismus von  $Q_k^n$  fortsetzen und die globalen konformen Diffeomorphismen sind genau die Projektivitäten von  $\mathbb{RP}^{n+1}$ , die von orthogonalen Abbildungen herrühren.

### Definition

Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  der Signatur  $(k, n-k)$  heißt **abwickelbar**, falls es eine konforme Immersion  $\delta : M \rightarrow Q_k^n$  gibt. Jede solche Abbildung  $\delta$  heißt eine **Abwicklung** von  $M$ .

Da  $Q_k^n$  lokal konform flach ist, muß notwendig jede abwickelbare Mannigfaltigkeit  $M$  auch lokal konform flach sein. Mit Hilfe des Satzes von Liouville für  $Q_k^n$  beweist man den

**Satz von Kuiper** (s. [Kui])

Jede einfach zusammenhängende lokal konform flache pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist abwickelbar.

Sei jetzt  $M$  eine, nicht notwendig einfach zusammenhängende, abwickelbare Mannigfaltigkeit und  $\delta : M \rightarrow Q_k^n$  eine Abwicklung. Dann gilt folgender Satz

**Satz 1.1**

Die Abwicklung  $\delta$  ist im wesentlichen eindeutig, d.h. ist  $\delta_1$  eine weitere Abwicklung von  $M$ , so gibt einen konformen Diffeomorphismus  $u$  von  $Q_k^n$  mit  $\delta_1 = u \circ \delta$ . Außerdem läßt sich jede auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge  $U$  von  $M$  definierte Abwicklung  $\delta_2 : U \rightarrow Q_k^n$  eindeutig zu einer Abwicklung von  $M$  fortsetzen.

**Beweis:**

Für eine kleine offene Menge  $V$  von  $M$  sind  $\delta|V$  und  $\delta_1|V$  Einbettungen. Daher ist  $\delta_1|V \circ (\delta|V)^{-1} : Q_k^n \supset \delta(V) \rightarrow Q_k^n$  ein konformer lokaler Diffeomorphismus. Nach dem Satz von Liouville existiert ein konformer Diffeomorphismus  $u$  von  $Q_k^n$ , so daß  $\delta_1|V \circ (\delta|V)^{-1} = u|_{\delta(V)}$  oder  $\delta_1|V = u \circ \delta|V$ . Nach Lemma 1.1 ist dann  $\delta_1 = u \circ \delta$ .

Nach Lemma 1.1 ist die Fortsetzung von  $\delta_2$  eindeutig. Ist  $V \subset U$  so klein, daß  $\delta_2|V$  und  $\delta|V$  Einbettungen sind, so erhält man analog zu oben einen globalen konformen Diffeomorphismus  $\bar{u}$  von  $Q_k^n$ , so daß

$$\delta_2|V = \bar{u} \circ \delta|V.$$

Nach Lemma 1.1 ist dann  $\delta_2 = \bar{u} \circ \delta|U$  und  $\bar{u} \circ \delta$  ist die gesuchte Abwicklung von  $M$ .  $\square$

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir den Begriff der Zeitorientierung auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten im Zusammenhang mit Abwicklungen behandeln.

Sei  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann zerfällt in jedem Tangentialraum  $T_pM$ ,  $p \in M$ , die Menge der zeitartigen Vektoren in zwei Kegel (vgl. auch S. 24/25). Zeichnet man in  $T_pM$  einen dieser Kegel aus, so spricht man von einer **Zeitorientierung** auf  $T_pM$ . Die Vektoren aus diesem ausgezeichneten Kegel sollen zeitartig-positiv heißen, die aus dem Gegenkegel zeitartig-negativ. Eine Zeitorientierung auf  $M$  ist nun die Auswahl eines Zeitkegels in jedem Tangentialraum  $T_pM$ ,  $p \in M$ , so daß diese ausgewählten Kegel in "stetiger Weise" von den Punkten  $p \in M$  abhängen. Dabei wird die stetige Abhängigkeit wie folgt definiert. Es gibt lokal um jeden Punkt der Mannigfaltigkeit ein zeitartiges Vektorfeld  $V$ , so daß für alle Punkte  $q$  im Definitionsbereich von  $V$  gilt:  $V(q) \in T_qM$  ist zeitartig-positiv.

Falls  $M$  zeitorientiert ist, kann man mittels einer Zerlegung der Eins ein auf ganz  $M$  definiertes zeitartig-positive Vektorfeld konstruieren. Hat man umgekehrt auf  $M$  ein überall

zeitartiges Vektorfeld  $V$  gegeben, so wird dadurch eine Zeitorientierung auf  $M$  definiert, wenn man für alle  $p \in M$  in  $T_p M$  den Zeitkegel auswählt, der  $V(p)$  enthält.

Falls eine (zusammenhängende) Lorentz-Mannigfaltigkeit zeitorientierbar ist, gibt es auf ihr offensichtlich genau zwei Zeitorientierungen.

Auf  $(\mathbb{R}_1^n, g_0)$  ist  $\frac{\partial}{\partial x^1}$  ein zeitartiges Vektorfeld. In dieser Arbeit betrachten wir immer die von diesem Vektorfeld erzeugte Zeitorientierung von  $\mathbb{R}_1^n$ .

Das Einheitstangentenvektorfeld von  $S^1$ ,  $S^1 \ni x = (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1) \in T_x S^1$ , aufgefaßt als Vektorfeld auf  $\tilde{Q}_1^n = S^1 \times S^{n-1}$ , ist ein zeitartiges Vektorfeld bzgl. der Metrik  $h$ . Dieses Vektorfeld ist invariant unter den Decktransformationen  $\pm \text{id}$  von  $\pi_1 : \tilde{Q}_1^n \rightarrow Q_1^n$ . Es induziert also ein zeitartiges Vektorfeld auf  $Q_1^n$ . Die davon erzeugte Zeitorientierung auf  $Q_1^n$  sei gleichfalls in dieser Arbeit immer betrachtet.

Ein konformer lokaler Diffeomorphismus  $F$  zwischen zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  heißt zeitorientierungstreu (zeitorientierungsumkehrend), wenn für alle Punkte  $p$  das Differential  $dF|_p$  den positiven Zeitkegel in  $T_p M$  auf den positiven (negativen) Zeitkegel in  $T_{F(p)} N$  abbildet. Ist die Mannigfaltigkeit  $M$  zusammenhängend, so ist jeder konforme lokale Diffeomorphismus  $F$  entweder zeitorientierungstreu oder zeitorientierungsumkehrend.

Mit  $\mathcal{O}^+(1, n-1)$  bezeichnen wir die Menge aller zeitorientierungstreuen orthogonalen Abbildungen  $A \in \mathcal{O}(1, n-1)$ . Jedes solche  $A$  bildet den positiven Zeitkegel in  $\mathbb{R}_1^n$  auf sich ab. Weiter sei  $\mathcal{O}^-(1, n-1) := \mathcal{O}(1, n-1) \setminus \mathcal{O}^+(1, n-1)$ .

Es ist die Sphäreninversion  $S : \mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n \rightarrow \mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n$ ,  $x \mapsto \frac{x}{\langle x, x \rangle}$ , ein zeitorientierungstreuer konformer Diffeomorphismus, denn für  $x = (x_1, \dots, x_n) \notin \Gamma_1^n$  ist

$$dS|_x \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x^1}}{\langle x, x \rangle} - \frac{2\langle x, \frac{\partial}{\partial x^1} \rangle}{\langle x, x \rangle^2} x$$

und

$$\begin{aligned} \langle dS|_x \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right), \frac{\partial}{\partial x^1} \rangle &= \frac{-1}{\langle x, x \rangle} - \frac{2\langle x, \frac{\partial}{\partial x^1} \rangle^2}{\langle x, x \rangle^2} = -\frac{\langle x, x \rangle + 2x_1^2}{\langle x, x \rangle^2} \\ &= -\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{\langle x, x \rangle^2} < 0, \end{aligned}$$

also liegt  $dS|_x \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)$  im gleichen Zeitkegel wie  $\frac{\partial}{\partial x^1}$  (s. [ON], S. 143, Nr. 29).

Gleichfalls ist die Einbettung  $i : \mathbb{R}_1^n \rightarrow Q_1^n$  zeitorientierungstreu:

$$\begin{aligned}
di|_0 \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right) &= \frac{d}{dt} i(te_1)|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \pi \left( (1-t^2, 2te_1, 1+t^2) \right) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \pi_1 \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2te_1}{1+t^2}, 1 \right) \Big|_{t=0} \\
&= d\pi_1|_{(1,0,1)}(0, 2e_1, 0)
\end{aligned}$$

und  $(0, 2e_1, 0) = (0, 2, 0, \dots, 0) \in T_{(1,0,1)}(S^1 \times S^{n-1}) = T_{(1,0)}S^1 \oplus T_{(0,\dots,0,1)}S^{n-1}$  ist das doppelte des oben betrachteten Einheitstangentenvektors an  $S^1$  im Punkt  $(1, 0)$ .

Neben  $i$  betrachten wir noch die Einbettung  $j := \phi_A \circ i$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2, n) ,$$

also

$$j(x) = \pi((1 + \langle x, x \rangle, 2x, \langle x, x \rangle - 1))$$

für alle  $x \in \mathbb{R}_1^n$ .

Es ist  $j = i \circ S$  auf  $\mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n$ , denn

$$\begin{aligned}
i \circ S(x) &= i \left( \frac{x}{\langle x, x \rangle} \right) = \pi \left( 1 + \left\langle \frac{x}{\langle x, x \rangle}, \frac{x}{\langle x, x \rangle} \right\rangle, 2 \frac{x}{\langle x, x \rangle}, 1 - \left\langle \frac{x}{\langle x, x \rangle}, \frac{x}{\langle x, x \rangle} \right\rangle \right) \\
&= \pi \left( 1 + \frac{\langle x, x \rangle}{\langle x, x \rangle^2}, 2 \frac{x}{\langle x, x \rangle}, 1 - \frac{\langle x, x \rangle}{\langle x, x \rangle^2} \right) \\
&= \pi(\langle x, x \rangle + 1, 2x, \langle x, x \rangle - 1) \\
&= j(x) .
\end{aligned}$$

Mit  $i$  und  $S$  ist auch  $j$  zeitorientierungstreu.

Sei nun  $M$  eine abwickelbare Lorentz-Mannigfaltigkeit und  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  eine Abwicklung. Mit dem konformen lokalen Diffeomorphismus  $\delta$  kann man unser oben betrachtetes zeitartige Vektorfeld auf  $Q_1^n$  zurückholen zu einem zeitartigen Vektorfeld auf  $M$ .  $\delta$  induziert auf diese Weise eine Zeitorientierung auf  $M$ . Insbesondere ist  $M$  zeitorientierbar.

## 2. Kapitel: Die lokale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld

Sei  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion mit konformem Gradienten auf der Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$ . Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, daß in einer relativ großen Umgebung eines jeden kritischen Punktes von  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  die Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  konform flach ist.

Zunächst beweisen wir zwei vorbereitende Lemmata. Das erste Lemma besagt, daß die Flußlinien von  $\text{grad } \psi$ , bis auf die Parametrisierung, Geodäten sind und das zweite hält fest, daß die kritischen Punkte von  $\psi$  diskret liegen. Die Herleitung der eigentlichen Aussage ist dann auf die drei folgenden Sätze verteilt. Zusammengefaßt sagen sie, daß die Metrik  $g$  um jeden kritischen Punkt in Polarkoordinaten ein "warped-product" ist, für das man recht leicht einen konformen Diffeomorphismus in den pseudo-Euklidischen Raum angeben kann.

Sei also  $(M, g)$  eine  $n$ -dimensionale zusammenhängende pseudo-Riemannsche  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit,  $n \geq 3$ , deren Metrik  $g$  die Signatur  $(1, n-1)$  hat (Lorentz-Mannigfaltigkeit). Alle auftretenden Funktionen und Vektorfelder seien unendlich oft differenzierbar.  $\nabla$  bezeichne den Levi-Civita-Zusammenhang,  $R$  den  $(1, 3)$ -Krümmungstensor und  $\text{Ric}$  den  $(0, 2)$ -Ricci-Tensor von  $(M, g)$ . Für Vektorfelder  $X, Y, Z$  auf  $M$  hat man:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ \text{Ric}(X, Y) &= \text{Spur}(Z \mapsto R(Z, X)Y) \end{aligned}$$

Ein Vektorfeld  $V$  auf  $M$  heißt konform, wenn der (lokale) Fluß von  $V$  aus konformen (lokalen) Diffeomorphismen besteht. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Lie-Ableitung von  $g$  in Richtung  $V$  ein Vielfaches von  $g$  ist, d.h. es gibt eine Funktion  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$L_V g = 2\lambda g \tag{2.1}$$

Ist  $V$  geschlossen, d.h. die 1-Form  $g(V, \cdot)$  geschlossen oder gleichwertig  $X \mapsto \nabla_X V$  symmetrisch bzgl.  $g$ , so ist für je zwei Vektorfelder  $X$  und  $Y$  auf  $M$ :

$$L_V g(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) = 2g(\nabla_X V, Y)$$

In diesem Fall ist (2.1) äquivalent zu

$$\nabla_X V = \lambda X \tag{2.2}$$

für alle Vektorfelder  $X$  auf  $M$ .

Schreibt man  $V$  lokal als Gradient einer Funktion  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U \subset M$  offen, also  $V = \text{grad } \psi$ , so ist (2.2) auf  $U$  äquivalent zu

$$\nabla^2 \psi = \lambda g \tag{2.3}$$

$\nabla^2 \psi$  bezeichnet dabei den  $(0, 2)$ -Hesstensor von  $\psi$ .

**Lemma 2.1** ([Ke2], Prop. 1)

Sei  $V$  ein geschlossenes konformes Vektorfeld auf  $M$ ,  $\nabla_X V = \lambda X$  für alle Vektorfelder  $X$  auf  $M$ , und  $c : [0; a) \rightarrow M$  eine Geodäte in  $M$  mit  $V(c(0)) = k \cdot \dot{c}(0)$  für ein  $k \in \mathbb{R}$ . Setze  $\Lambda_c(t) := \int_0^t \lambda(c(s)) ds$ . Dann gilt für  $t \in [0; a)$

$$V(c(t)) = (k + \Lambda_c(t))\dot{c}(t).$$

**Beweis:**

Sei  $(E_1(t), \dots, E_n(t))$  ein paralleles  $ON$ -Bein längs  $c$ . Dann ist  $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n c_i E_i(t)$ ,

$0 \leq t < a$ , mit festen Zahlen  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Weiter ist  $V(c(t)) = \sum_{i=1}^n v_i(t) E_i(t)$ ,  $0 \leq t < a$ , mit Funktionen  $v_i : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Es ist  $v_i(0) = kc_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Nun gilt mit dem induzierten Zusammenhang  $\frac{\nabla}{dt}$  längs  $c$  (s. [ON], S. 65)

$$\frac{\nabla}{dt} V(c(t)) = \sum_{i=1}^n \dot{v}_i(t) E_i(t)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} V(c(t)) &= \nabla_{\dot{c}(t)} V = \lambda(c(t)) \dot{c}(t) \\ \Rightarrow \dot{v}_i(t) &= \lambda(c(t)) c_i & 1 \leq i \leq n \\ \Rightarrow v_i(t) &= (k + \Lambda_c(t)) c_i & 1 \leq i \leq n \\ \Rightarrow V(c(t)) &= (k + \Lambda_c(t)) \dot{c}(t) \end{aligned}$$

□

**Bemerkungen:**

- 1) Anschaulich besagt das Lemma folgendes: Ist das geschlossene konforme Vektorfeld  $V$  in einem Punkt parallel zu einer Geodäten, so ist es in jedem Punkt der Geodäten parallel zu ihr. Oder anders: Die Flußlinien von  $V$  sind, bis auf Umparametrisierung, Geodäten.
- 2) Ist  $V(c(0)) = 0$ , so ist  $V(c(t)) = \Lambda_c(t)\dot{c}(t)$ . Falls noch  $V = \text{grad } \psi$  gilt, ist

$$\frac{d^2}{dt^2} \psi(c(t)) = \nabla^2 \psi(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \lambda(c(t)) g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)).$$

Dann ist mit  $\psi_c(t) := \psi \circ c(t)$  für  $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \neq 0$



$$\begin{aligned}
\lambda(c(t)) &= \frac{1}{g(\dot{c}, \dot{c})} \psi_c''(t) \\
\Rightarrow \Lambda_c(t) &= \frac{1}{g(\dot{c}, \dot{c})} (\psi_c'(t) - \psi_c'(0)) \\
&= \frac{1}{g(\dot{c}, \dot{c})} \psi_c'(t) \\
\Rightarrow \text{grad } \psi(c(t)) &= \frac{1}{g(\dot{c}, \dot{c})} \psi_c'(t) \dot{c}(t)
\end{aligned}$$

**Lemma 2.2** ([Ke2], Prop. 2)

Ist  $V \neq 0$  ein geschlossenes konformes Vektorfeld auf  $M$ ,  $\nabla_X V = \lambda X$  für alle Vektorfelder  $X$  auf  $M$ , so gilt für  $p \in M$

$$V(p) = 0 \Rightarrow \text{div } V(p) = n \cdot \lambda(p) \neq 0.$$

Insbesondere sind die Nullstellen von  $V$  isoliert.

**Beweis:**

Aus  $\nabla_X V = \lambda X$  für alle Vektorfelder  $X$  auf  $M$  folgt  $\text{div } V = n \cdot \lambda$ .

Für Vektorfelder  $X, Y$  auf  $M$  gilt

$$\begin{aligned}
R(X, Y)V &= \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_{[X, Y]} V \\
&= \nabla_X(\lambda Y) - \nabla_Y(\lambda X) - \lambda[X, Y] \\
&= X(\lambda)Y + \lambda \nabla_X Y - Y(\lambda)X - \lambda \nabla_Y X - \lambda[X, Y] \\
&= X(\lambda)Y - Y(\lambda)X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \operatorname{Ric}(X, V) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(R(E_i, X)V, E_i) \\
&E_1, \dots, E_n \text{ ON-Basis bzgl. } g, \quad g(E_i, E_j) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad \epsilon_i = \pm 1 \\
&= \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(E_i(\lambda)X - X(\lambda)E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \epsilon_i E_i(\lambda)g(X, E_i) - \sum_{i=1}^n \epsilon_i X(\lambda)g(E_i, E_i) \\
&= \left( \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(X, E_i)E_i \right) (\lambda) - nX(\lambda) \\
&= X(\lambda) - nX(\lambda) \\
&= (1 - n)X(\lambda)
\end{aligned}$$

Sei nun  $p \in M$  mit  $V(p) = 0$ .

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall mit  $0 \in I$ ,  $c : I \rightarrow M$  eine Geodäte mit  $c(0) = p$  und  $\Lambda_c$  die Funktion aus Lemma 2.1. Dann erfüllt  $\Lambda_c$  die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\Lambda_c''(t) &= \frac{d}{dt} \lambda(c(t)) = \dot{c}(t)(\lambda) = \frac{1}{1-n} \operatorname{Ric}(\dot{c}(t), V(c(t))) \\
&= \frac{\Lambda_c(t)}{1-n} \operatorname{Ric}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)).
\end{aligned}$$

Es ist  $\Lambda_c(0) = 0$ . Falls noch  $\Lambda_c'(0) = \lambda(c(0)) = \lambda(p) = 0$  gilt, so verschwindet  $\Lambda_c$  identisch und zwar für alle Geodäten  $c$  die durch  $p$  führen. Also verschwindet  $V$  in einer ganzen Umgebung von  $p$ .

Daher ist  $A := \{q \in M \mid V(q) = 0\} \cap \{q \in M \mid \lambda(q) = 0\}$  offen und, da  $V$  und  $\lambda$  stetig sind, abgeschlossen. Da  $V \neq 0$  und  $M$  zusammenhängend ist, muß  $A$  die leere Menge sein. Also ist  $\lambda(p) \neq 0$ .

Lägen beliebig nahe bei  $p$  weitere Nullstellen von  $V$ , so hätte man  $\Lambda_c(0) = \Lambda_c(1) = 0$  für gewisse Geodäten  $c : [0, 1] \rightarrow M$  mit beliebig kleinem  $\dot{c}(0)$  (klein bzgl. der Topologie in  $T_p M$ ), die  $p$  mit diesen Nullstellen verbinden (da  $V(c(t)) = \Lambda_c(t)\dot{c}(t)$ ). Für diese Geodäten  $c$  hat dann  $\Lambda_c' = \lambda \circ c$  eine Nullstelle zwischen 0 und 1. Also hat  $\lambda$  beliebig nahe bei  $p$  Nullstellen. Dann muß auch  $\lambda(p) = 0$  sein, ein Widerspruch.  $\square$

Im folgenden benötigen wir Polarkoordinaten in den Tangentialräumen  $T_p M$ .

Sei dazu  $V$  ein  $n$ -dimensionaler ( $n \geq 3$ ) reeller Vektorraum mit einer nicht-degenerierten symmetrischen Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  der Signatur  $(1, n-1)$ . Ein Vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , heißt raumartig, lichtartig oder zeitartig, je nachdem  $\langle v, v \rangle > 0$ ,  $\langle v, v \rangle = 0$  oder  $\langle v, v \rangle < 0$  ist.

Mit  $\Gamma$  bezeichnen wir den Lichtkegel von  $V$  :  $\Gamma := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\}$ . Es ist  $S(+1) := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = +1\}$  zusammenhängend, wo hingegen  $S(-1) := \{v \in V \mid \langle v, v \rangle = -1\}$  aus zwei Komponenten besteht. Wählt man eine dieser Komponenten aus, wir bezeichnen sie mit  $S^\circ(-1)$ , so entspricht das der Auswahl eines Zeitkegels, d.h. wir haben implizit eine Zeitorientierung auf  $V$  und können von zeitartig-positiven und zeitartig-negativen Vektoren reden.

Setze  $\Sigma := S(+1) \cup S^\circ(-1)$ .

Ordnen wir einem  $v \in V \setminus \Gamma$  in Polarkoordinaten eine "Länge"  $r$  und eine "Richtung"  $x \in \Sigma$  zu, so soll immer  $v = r \cdot x$  gelten. Dies wird durch folgende Definition gewährleistet:

$$\text{für } \langle v, v \rangle > 0 \text{ sei} \quad r := \sqrt{\langle v, v \rangle} \text{ und } x := \frac{v}{r} \in S(+1)$$

für  $\langle v, v \rangle < 0$  und  $v$  zeitartig-positiv sei

$$r := \sqrt{|\langle v, v \rangle|} \text{ und } x := \frac{v}{r} \in S^\circ(-1)$$

für  $\langle v, v \rangle < 0$  und  $v$  zeitartig-negativ sei

$$r := -\sqrt{|\langle v, v \rangle|} \text{ und } x := \frac{v}{r} \in S^\circ(-1).$$

Der Definitionsbereich der Polarkoordinaten ist dann die Menge

$$\mathcal{D} := \mathbb{R}_+ \times S(+1) \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times S^\circ(-1).$$

Weiter definieren wir

$$U^+(r) := \{v \in V \mid 0 < \langle v, v \rangle < r^2\}, \quad 0 < r \leq \infty$$

$$U^-(r) := \{v \in V \mid -r^2 < \langle v, v \rangle < 0 \wedge v \text{ zeitartig-positiv}\}, \quad 0 < r \leq \infty$$

$$U^-(r) := \{v \in V \mid -r^2 < \langle v, v \rangle < 0 \wedge v \text{ zeitartig-negativ}\}, \quad -\infty \leq r < 0$$

und

$$U(r_1, r_2, r_3) := \Gamma \cup U^+(r_1) \cup U^-(r_2) \cup U^-(r_3)$$

für  $0 < r_1, r_2 \leq \infty$ ,  $-\infty \leq r_3 < 0$ .

Wie den pseudo-Euklidischen Raum  $\mathbb{R}_1^n$  kann man auch  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  als pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit betrachten.

Sei nun  $v \in V \setminus \Gamma$  und  $(r, x) \in \mathcal{D}$  die Polarkoordinaten von  $v$ . Sei  $X \in T_x \Sigma \subset T_x V \cong V$ . Für  $(\partial_r, X) \in T_r \mathbb{R} \oplus T_x \Sigma \cong T_{(r,x)} \mathcal{D}$  identifiziere

$$\partial_r \Big|_{(r,x)} \text{ mit } x \Big|_v \in T_v V \cong V$$

und

$$X|_{(r,x)} \text{ mit } r \cdot X|_v \in T_v V \cong V.$$

Von nun an soll der Index  $(r, x)$  auf Polarkoordinaten und der Index  $v = r \cdot x$  auf die Identifikation  $T_v V \cong V$  hinweisen.

Im folgenden Satz denken wir uns in  $V := T_p M$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle := g_p$ , Polarkoordinaten eingeführt.

**Satz 2.1** (vgl. [Ta], [Kü], [KR1])

Sei  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine nicht-konstante Funktion, die die Differentialgleichung  $\nabla^2 \psi = \lambda g$  auf  $M$  erfüllt und  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $\psi$  sowie  $\exp_p$  auf ganz  $T_p M$  definiert. Dann gilt

- 1) Die Funktionen  $\tilde{\psi} := \psi \circ \exp_p$  und  $\tilde{\lambda} := \lambda \circ \exp_p$  hängen, in Polarkoordinaten  $(r, x)$  betrachtet, nur von  $r$  ab, solange  $x$  in  $S(+1)$  oder in  $S^\circ(-1)$  variiert. Man kann daher definieren

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\eta(r) &:= \tilde{\psi}(r \cdot x) \\ \tilde{\lambda}_\eta(r) &:= \tilde{\lambda}(r \cdot x) \end{aligned}, \quad \eta := \langle x, x \rangle$$

- 2) Die zurückgeholte Metrik  $\tilde{g} := \exp_p^*(g)$  hat in Polarkoordinaten die Gestalt

$$\tilde{g}|_{(r,x)} = \eta dr^2 + \frac{\tilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\tilde{\psi}''_\eta(0)^2} g_\eta|_x,$$

solange  $\tilde{\psi}'_\eta(r)$  nicht Null wird, d.h.

$$(r, x) \in \tilde{A}_p := \left\{ (r_1, x_1) \in \mathcal{D} \mid \begin{array}{l} \tilde{\psi}'_\eta(t) \neq 0 \quad \forall t \in ]0, r_1] \quad \text{falls } r_1 > 0 \text{ ist, bzw.} \\ \forall t \in [r_1, 0[ \quad \text{falls } r_1 < 0, \quad \eta = \langle x_1, x_1 \rangle \end{array} \right\}$$

Dabei ist  $g_\eta$  die Standardmetrik auf  $S(\eta)$ , d.h. die von  $g_p$  auf der Untermannigfaltigkeit  $S(\eta)$  induzierte Metrik der konstanten Schnittkrümmung  $\eta$ .

**Beweis:**

zu 1) : Sei  $X \in T_x \Sigma$  beliebig.

Wähle dazu eine Kurve  $c : I \rightarrow \Sigma$  mit  $c(0) = x$ ,  $\dot{c}(0) = X$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} X|_{(r,x)} \tilde{\psi} &= \frac{d}{dt} \psi \circ \exp_p(r \cdot c(t))|_{t=0} \\ &= g(\text{grad } \psi|_{\exp_p(r \cdot x)}, d\exp_p|_{r \cdot x}(r \cdot X)) \end{aligned}$$

Da  $p$  kritischer Punkt von  $\psi$  ist, ist nach Lemma 2.1  $\text{grad } \psi$  kollinear zu den Tangenten aller von  $p$  ausgehenden Geodäten, d.h.

$$\text{grad } \psi \Big|_{\exp_p(r \cdot x)} \parallel d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(x).$$

Nach dem Gauß-Lemma ist dann

$$X \Big|_{(r,x)} \tilde{\psi} = 0.$$

Also ist  $\tilde{\psi}_\eta(r) := \tilde{\psi}(r \cdot x)$ ,  $\eta = \langle x, x \rangle$ , wohldefiniert.

Da  $r \mapsto \exp_p(r \cdot x)$  eine Geodäte ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} \psi(\exp_p(r \cdot x)) &= \nabla^2 \psi(d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(x), d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(x)) \\ &= \lambda(\exp_p(r \cdot x)) g(d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(x), d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dr^2} \tilde{\psi}_\eta(r) &= \tilde{\lambda}(r \cdot x) \langle x, x \rangle \\ \Rightarrow \quad \tilde{\psi}_\eta''(r) &= \eta \tilde{\lambda}(r \cdot x) \\ \Rightarrow \quad \tilde{\lambda}(r \cdot x) &= \eta \tilde{\psi}_\eta''(r) =: \tilde{\lambda}_\eta(r) \end{aligned}$$

zu 2) : Zunächst wissen wir nur, daß  $\tilde{g}$  ein symmetrischer  $(0, 2)$ -Tensor auf  $T_p M$  ist. Ob  $\tilde{g}$  auf  $\tilde{A}_p$  nicht degeneriert ist, d.h. eine Metrik definiert, ist unbekannt. Insbesondere können wir (noch) nicht von dem zugeordneten Levi-Civita-Zusammenhang reden. Stattdessen benutzen wir den durch  $\nabla$  induzierten Zusammenhang längs Abbildungen in die Mannigfaltigkeit  $M$ . Deshalb fällt der folgende Beweis etwas technischer aus.

Es gilt  $\tilde{g} \Big|_{(r,x)}(\partial_r, \partial_r) = \langle x, x \rangle = \eta$  nach Definition der Exponentialabbildung.

Weiter ist  $\tilde{g} \Big|_{(r,x)}(\partial_r, X) = 0$  für alle  $X \in T_x \Sigma$  nach dem Gauß-Lemma.

Nun bestimmen wir  $\tilde{g} \Big|_{(r,x)}(X, X)$  für  $X \in T_x \Sigma$ .

Sei dazu wieder  $c : I \rightarrow \Sigma$  eine Kurve mit  $c(0) = x$ ,  $\dot{c}(0) = X$ . Betrachte die 2-Parameter-Schar

$$c(r, s) := \exp_p(r \cdot c(s)).$$

Man hat

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial r}(r, s) = \frac{\nabla}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial s}(r, s).$$

Dabei ist

$$\frac{\partial c}{\partial r}(r, s) = d\exp_p \Big|_{r \cdot c(s)}(c(s))$$

$$\frac{\partial c}{\partial s}(r, s) = d\exp_p \Big|_{r \cdot c(s)}(r \cdot \dot{c}(s))$$

$$\frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) = d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(r \cdot X) .$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \tilde{g} \Big|_{(r,x)}(X, X) &= \frac{d}{dr} g \Big|_{\exp_p(r \cdot x)}(d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(r \cdot X), d\exp_p \Big|_{r \cdot x}(r \cdot X)) \\ &= \frac{d}{dr} g \Big|_{\exp_p(r \cdot x)} \left( \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) \right) \\ &= 2g \Big|_{\exp_p(r \cdot x)} \left( \frac{\nabla}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) \right) \\ &= 2g \Big|_{\exp_p(r \cdot x)} \left( \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial c}{\partial r}(r, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) \right) . \end{aligned}$$

Nach der Bemerkung 2) zu Lemma 2.1 ist

$$\text{grad } \psi \Big|_{\exp_p(r \cdot c(s))} = \eta \tilde{\psi}'_\eta(r) d\exp_p \Big|_{r \cdot c(s)}(c(s)) = \eta \tilde{\psi}'_\eta(r) \frac{\partial c}{\partial r}(r, s) .$$

Also solange  $\tilde{\psi}'_\eta(r) \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \tilde{g} \Big|_{(r,x)}(X, X) &= 2g \Big|_{\exp_p(r \cdot x)} \left( \frac{1}{\eta \tilde{\psi}'_\eta(r)} \frac{\nabla}{\partial s} \text{grad } \psi \Big|_{\exp_p(r \cdot c(s))} \Big|_{s=0}, \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) \right) \\ &= \frac{2}{\eta \tilde{\psi}'_\eta(r)} g \Big|_{\exp_p(r \cdot x)} \left( \nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}(r, 0)} \text{grad } \psi, \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) \right) \\ &= \frac{2}{\eta \tilde{\psi}'_\eta(r)} \nabla^2 \psi \left( \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) \right) \\ &= \frac{2}{\eta \tilde{\psi}'_\eta(r)} \lambda \circ \exp_p(r \cdot x) g \Big|_{\exp_p(r \cdot x)} \left( \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0), \frac{\partial c}{\partial s}(r, 0) \right) \\ &= 2 \frac{\tilde{\psi}''_\eta(r)}{\tilde{\psi}'_\eta(r)} \tilde{g} \Big|_{(r,x)}(X, X) . \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \frac{1}{(\tilde{\psi}'_\eta(r))^2} \tilde{g}|_{(r,x)}(X, X) &= -\frac{2\tilde{\psi}''_\eta(r)}{(\tilde{\psi}'_\eta(r))^3} \tilde{g}|_{(r,x)}(X, X) \\ &\quad + \frac{1}{(\tilde{\psi}'_\eta(r))^2} 2 \frac{\tilde{\psi}''_\eta(r)}{\tilde{\psi}'_\eta(r)} \tilde{g}|_{(r,x)}(X, X) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit kann man definieren

$$g^*|_x(X, X) := \frac{\tilde{\psi}''_\eta(0)^2}{\tilde{\psi}'_\eta(r)^2} \tilde{g}|_{(r,x)}(X, X)$$

für alle  $r$  zwischen 0 und der ersten Nullstelle von  $\tilde{\psi}'_\eta$  rechts (oder links) von 0. Also

$$\tilde{g}|_{(r,x)} = \eta dr^2 + \frac{\tilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\tilde{\psi}''_\eta(0)^2} g^*|_x$$

Man beachte  $\tilde{\psi}''_\eta(0) = \eta\tilde{\lambda}(0) = \eta\lambda(p) \neq 0$ . Außerdem müßte man für den Fall  $x \in S^\circ(-1)$  zwischen zwei Metriken  $g^*_+$  und  $g^*_-$  unterscheiden, je nachdem  $r > 0$  oder  $r < 0$  ist. Da aber, wie sich jetzt gleich herausstellt, beide gleich der Standardmetrik auf  $S^\circ(-1)$  sind, verzichten wir darauf.

Nun ist bekanntlich  $d\exp_p|_0 : T_0T_pM \cong T_pM \longrightarrow T_pM$  die identische Abbildung. Also  $\tilde{g}|_0 = g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . Daher gilt für alle  $X, Y \in T_x\Sigma \subset T_xT_pM \cong T_pM$

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \tilde{g}|_0(X, Y) = \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{g}|_{r,x}(X, Y) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \tilde{g}|_{(r,x)} \left( \frac{1}{r}X, \frac{1}{r}Y \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\tilde{\psi}''_\eta(0)^2} \frac{1}{r^2} g^*|_x(X, Y) \\ &= g^*|_x(X, Y) \end{aligned}$$

d.h.  $g^*$  ist die Standardmetrik  $g_\eta$  auf  $S(\eta)$ . □

Ziel der folgenden Überlegungen ist der

**Satz 2.2**

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.1. Weiter sei  $\Gamma_p$  der Lichtkegel in  $T_pM$ ,  $\tilde{B}_p := \tilde{A}_p \cup \Gamma_p$ ,  $B_p := \exp_p(\tilde{B}_p)$ . Dann ist

$$\exp_p|_{\tilde{B}_p} : \tilde{B}_p \rightarrow B_p$$

ein Diffeomorphismus.

Wir bestimmen zunächst  $\tilde{g}|_z$  für  $z \in \Gamma_p$  aus der Grenzwertdarstellung

$$\tilde{g}|_z = \lim_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in \tilde{A}_p}} \tilde{g}|_y$$

Sei dazu  $V \in T_pM$  und  $y \in \tilde{A}_p$ .

Seien  $(r, x)$  die Polarkoordinaten von  $y$  und  $V|_y$  habe in Polarkoordinaten die Darstellung  $(\alpha \partial_r, X) \in T_{(r,x)}\mathcal{D}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$V|_y = \alpha x + rX$$

Dabei ist

$$\alpha = \eta \langle V, x \rangle = \frac{\eta}{r} \langle V, y \rangle, \quad \eta = \langle x, x \rangle$$

und

$$rX = V - \alpha x = V - \frac{\eta}{r^2} \langle V, y \rangle y \quad .$$

Daher

$$\begin{aligned} \tilde{g}|_y(V, V) &= \eta \alpha^2 + \frac{\tilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\tilde{\psi}''_\eta(0)^2} \langle X, X \rangle \\ &= \frac{\eta}{r^2} \langle V, y \rangle^2 + \frac{\tilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\tilde{\psi}''_\eta(0)^2} \frac{1}{r^2} \left( \langle V, V \rangle - \frac{2\eta}{r^2} \langle V, y \rangle^2 + \frac{1}{r^4} \langle V, y \rangle^2 \langle y, y \rangle \right) \end{aligned}$$

Mit  $\chi_\eta(r) := \frac{\tilde{\psi}'_\eta(r)}{\tilde{\psi}''_\eta(0) \cdot r}$  folgt

$$\tilde{g}|_y(V, V) = \chi_\eta^2(r) \langle V, V \rangle + \frac{\eta}{r^2} (1 - \chi_\eta^2(r)) \langle V, y \rangle^2$$

Da  $\tilde{\psi}$  auf  $T_pM$  existiert, muß nach Lemma A5 (S. 88)  $(\tilde{\psi}_+, \tilde{\psi}_-) \in \mathcal{F}$  sein. Mit dieser Information berechnet man mit Hilfe der Regel von l'Hospital und mit Lemma A2, S. 83,



$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow 0} \chi_\eta(r) &= 1 \\
\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1 - \chi_\eta^2(r)}{r^2} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-2\chi_\eta(r)\chi'_\eta(r)}{2r} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{\chi'_\eta(r)\chi'_\eta(r) + \chi_\eta(r)\chi''_\eta(r)}{1} \\
&= -\frac{\tilde{\psi}_\eta^{(4)}(0)}{3\tilde{\psi}_\eta''(0)} =: \bar{\chi}_\eta
\end{aligned}$$

Also

$$\tilde{g}|_z(V, V) = \langle V, V \rangle - \eta\bar{\chi}_\eta \langle V, z \rangle^2$$

oder

$$\tilde{g}|_z(V, W) = \langle V, W \rangle - \eta\bar{\chi}_\eta \langle V, z \rangle \langle W, z \rangle \quad \text{für alle } V, W \in T_p M. \quad (2.4)$$

Nun sieht man leicht, daß  $\tilde{g}|_z$  nicht degeneriert ist:

$$\begin{aligned}
&\tilde{g}|_z(V, W) = 0 && \forall W \in T_p M \\
\Rightarrow &\tilde{g}|_z(V, W) = 0 && \forall W \in z^\perp \subset T_p M \\
\stackrel{(2.4)}{\Rightarrow} &\langle V, W \rangle = 0 && \forall W \in z^\perp \\
\Rightarrow &V \in z^{\perp\perp} = \mathbb{R} \cdot z \\
\Rightarrow &\exists \mu \in \mathbb{R} : V = \mu \cdot z \\
\stackrel{(2.4)}{\Rightarrow} &\tilde{g}|_z(V, W) = \langle V, W \rangle = 0 && \forall W \in T_p M \\
\Rightarrow &V = 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist damit  $\tilde{g}$  auf  $\tilde{B}_p = \tilde{A}_p \cup \Gamma_p$  nicht degeneriert. Daher muß  $\exp_p$  auf  $\tilde{B}_p$  eine Immersion sein. Jetzt zeigen wir noch, daß  $\exp_p|_{\tilde{B}_p}$  injektiv ist.

Es ist in  $\tilde{A}_p$

$$\text{grad } \tilde{\psi}|_{(r,x)} = \eta\tilde{\psi}'_\eta(r)\partial_r$$

und für  $z \in \Gamma_p$

$$\begin{aligned}
\text{grad } \tilde{\psi} \Big|_z &= \lim_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in \tilde{A}_p}} \text{grad } \tilde{\psi} \Big|_y \\
&= \lim_{\substack{y \rightarrow z \\ y = r \cdot x}} \text{grad } \tilde{\psi} \Big|_{r \cdot x} \\
&= \lim_{\substack{y \rightarrow z \\ y = r \cdot x}} \frac{\eta \tilde{\psi}'_\eta(r)}{r} \cdot y \\
&= \eta \tilde{\psi}''_\eta(0) \cdot z
\end{aligned}$$

Da  $\exp_p : (\tilde{B}_p, \tilde{g}) \rightarrow (B_p, g)$  eine lokale Isometrie ist, gilt

$$d\exp_p(\text{grad } \tilde{\psi}) = \text{grad } \psi .$$

Seien nun  $y_1, y_2 \in \tilde{B}_p$  mit  $\exp_p(y_1) = \exp_p(y_2) =: q$ .

Es ist  $\tilde{\psi}|_{\Gamma_p} \equiv \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}_\pm(0)$ . Wegen  $\tilde{\psi}'_\eta(r) \neq 0$  falls  $(r, x) \in \tilde{A}_p$ ,  $\langle x, x \rangle = \eta$ , und  $\tilde{\psi}''_\pm(0) = -\tilde{\psi}''_\mp(0) \neq 0$  wächst  $\tilde{\psi}|_{\tilde{A}_p}$  streng in raumartiger Richtung und fällt streng in den beiden zeitartigen Richtungen oder umgekehrt.

Da  $\tilde{\psi}(y_1) = \psi(q) = \tilde{\psi}(y_2)$  sind also  $y_1, y_2 \in \Gamma_p$  oder  $y_1, y_2$  raumartig oder  $y_1, y_2$  zeitartig.

**1. Fall:**  $y_1, y_2 \in \Gamma_p$

Betrachte die Geodäten  $c_i : t \mapsto \exp_p(t \cdot y_i)$   $i = 1, 2$ .

Es ist

$$\begin{aligned}
\text{grad } \psi \Big|_q &= d\exp_p \Big|_{y_i} (\eta \tilde{\psi}''_\eta(0) y_i) \\
&= \eta \tilde{\psi}''_\eta(0) d\exp_p \Big|_{y_i} (y_i) \\
&= \eta \tilde{\psi}''_\eta(0) \dot{c}_i(1) \quad i = 1, 2 \\
\Rightarrow \quad \dot{c}_1(1) &= \dot{c}_2(1) \quad (\text{und } c_1(1) = c_2(1) = q) \\
\Rightarrow \quad c_1 &= c_2 \\
\Rightarrow \quad y_1 &= \dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0) = y_2.
\end{aligned}$$

**2. Fall:**  $y_1, y_2$  raumartig oder  $y_1, y_2$  zeitartig

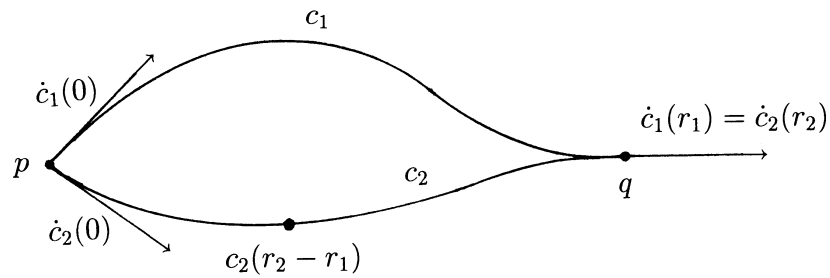
Dann existieren  $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ ,  $x_1, x_2 \in S(\eta)$ ,  $\eta = \text{sign} \langle y_1, y_1 \rangle = \text{sign} \langle y_2, y_2 \rangle$  mit  $r_1 \cdot x_1 = y_1$ ,  $r_2 \cdot x_2 = y_2$ . (Im zeitartigen Fall sind  $(r_i, x_i)$  nicht notwendig die Polarkoordinaten von  $y_i$ ,  $i = 1, 2$ .) Betrachte die Geodäten  $c_i : t \mapsto \exp_p(t \cdot x_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Es ist wieder

$$\begin{aligned}
\text{grad } \psi \Big|_q &= d\exp_p \Big|_{y_i} (\eta \tilde{\psi}'_\eta(\pm r_i)(\pm x_i)) \\
&= \eta \tilde{\psi}'_\eta(\pm r_i)(\pm \dot{c}_i(r_i)) \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Da  $\dot{c}_1(r_1)$  und  $\dot{c}_2(r_2)$  Einheitsvektoren sind folgt

$$\dot{c}_1(r_1) = \dot{c}_2(r_2) \quad \text{oder} \quad \dot{c}_1(r_1) = -\dot{c}_2(r_2)$$

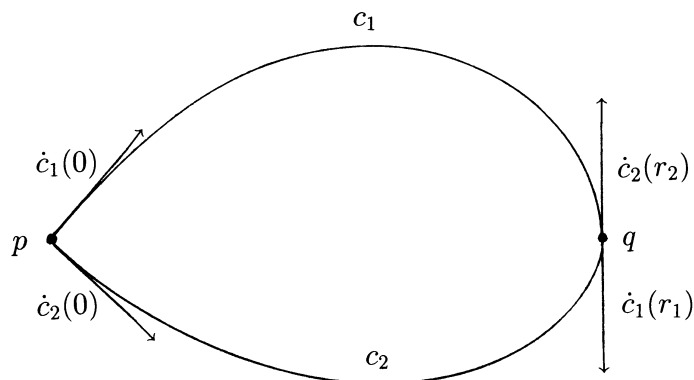
**1. Unterfall:**  $\dot{c}_1(r_1) = \dot{c}_2(r_2)$



Dann sind die Geodäten  $t \mapsto c_1(r_1 - t)$  und  $t \mapsto c_2(r_2 - t)$  gleich. O.E. sei  $r_1 \leq r_2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} p &= c_1(0) = c_2(r_2 - r_1) \\ \Rightarrow 0 &= \text{grad } \psi \Big|_p = \pm \eta \tilde{\psi}'_\eta(\pm(r_2 - r_1)) \dot{c}_2(r_2 - r_1) \\ \Rightarrow r_1 &= r_2 \\ \Rightarrow c_1 &= c_2 \\ \Rightarrow x_1 &= \dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0) = x_2 \\ \Rightarrow y_1 &= r_1 \cdot x_1 = r_2 \cdot x_2 = y_2. \end{aligned}$$

**2. Unterfall:**  $\dot{c}_1(r_1) = -\dot{c}_2(r_2)$



Betrachte die Geodäte, die entsteht, wenn man zuerst  $c_1$  durchläuft und dann  $c_2$  rückwärts:

$$c : t \mapsto \begin{cases} c_1(t) & , \quad 0 \leq t \leq r_1 \\ c_2(r_1 + r_2 - t) & , \quad r_1 \leq t \leq r_1 + r_2 . \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \psi \circ c(0) &= \psi \circ c(r_1 + r_2) \\ \Rightarrow \exists r \in ]0, r_1 + r_2[: & \quad (\psi \circ c)'(r) = 0 . \end{aligned}$$

Wegen

$$(\psi \circ c)'(r) = \begin{cases} \tilde{\psi}'_{\eta}(\pm r) & , \quad 0 < r \leq r_1 \\ -\tilde{\psi}'_{\eta}(\pm(r_1 + r_2 - r)) & , \quad r_1 \leq r \leq r_1 + r_2 \end{cases}$$

erhält man einen Widerspruch zu  $(\pm r_i, \pm x_i) \in \tilde{A}_p$ ,  $i = 1, 2$ .

Damit ist Satz 2.2 bewiesen. □

Was bedeutet nun  $\tilde{\psi}'_{\eta}(r_0) = 0$ ?

Nach der Bemerkung zu Lemma 2.1 gilt in allen Punkten  $\exp_p(r_0 \cdot x)$ ,  $x \in \Sigma$ ,  $\langle x, x \rangle = \eta$ ,

$$\text{grad } \psi \Big|_{\exp_p(r_0 \cdot x)} = \eta \tilde{\psi}'_{\eta}(r_0) \cdot d\exp_p \Big|_{r_0 \cdot x}(x) = 0 .$$

Da die kritischen Punkte von  $\psi$  isoliert liegen (Lemma 2.2), werden alle Punkte  $r_0 \cdot x$ ,  $x \in \Sigma$ ,  $\langle x, x \rangle = \eta$  durch  $\exp_p$  auf einen einzigen (kritischen) Punkt abgebildet. Ist  $r_0$  die erste Nullstelle von  $\tilde{\psi}'_{\eta}$  rechts oder links von Null, so nennen wir diesen kritischen Punkt einen zu  $p$  in raumartiger ( $\eta = +1$ ) oder zeitartiger ( $\eta = -1$ ) Richtung **benachbarten kritischen Punkt**, wobei man im zeitartigen Fall noch genauer zwischen zeitartig-positiver Richtung ( $r_0 > 0$ ) und zeitartig-negativer Richtung ( $r_0 < 0$ ) unterscheiden kann.

### Satz 2.3

Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Satz 2.1, S. 25. Dann ist die zurückgeholte Metrik

$$\tilde{g} = \exp_p^*(g) = \eta dr^2 + \frac{\tilde{\psi}'_{\eta}(r)^2}{\tilde{\psi}''_{\eta}(0)^2} g_{\eta}$$

auf  $\tilde{B}_p = \tilde{A}_p \cup \Gamma_p$  konform flach.

**Beweis:**

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\tilde{g} \Big|_{(r,x)} = \eta dr^2 + f_{\eta}^2(r) g_{\eta} \Big|_x , \quad (r, x) \in \tilde{A}_p ,$$

mit  $f_\eta(r) := \frac{\tilde{\psi}'_\eta(r)}{\tilde{\psi}''_\eta(0)}$ . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\rho'_\eta(r) = \frac{\rho_\eta(r)}{f_\eta(r)}.$$

Nun ist  $f_\eta(0) = 0$ ,  $f'_\eta(0) = 1$ . Daher ist

$$\rho_\eta(r) := r \cdot \exp\left(\int_0^r h_\eta(\xi) d\xi\right) \quad \text{mit} \quad h_\eta(\xi) := \frac{1}{f_\eta(\xi)} - \frac{1}{\xi}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung und zwar die mit

$$\rho_\eta(0) = 0 \quad \text{und} \quad \rho'_\eta(0) = 1.$$

Man beachte dabei, daß  $f_\eta$  auf ganz  $\mathbb{R}$ , jedoch  $h_\eta$  und  $\rho_\eta$  nur zwischen den ersten Nullstellen von  $f_\eta$  links und rechts der Null definiert sind, falls es überhaupt solche Nullstellen gibt.

$h_\eta$  ist in diesem Bereich, insbesondere in Null, unendlich oft differenzierbar:

$$\begin{aligned} h_\eta(r) &= \frac{1}{f_\eta(r)} - \frac{1}{r} = \frac{r - f_\eta(r)}{r \cdot f_\eta(r)} = \frac{1 - \frac{f_\eta(r)}{r}}{r \cdot \frac{f_\eta(r)}{r}} \\ &= \frac{1}{\frac{f_\eta(r)}{r}} \cdot \frac{1 - \frac{f_\eta(r)}{r}}{r} \end{aligned}$$

$r \mapsto \frac{f_\eta(r)}{r}$  ist glatt auf  $\mathbb{R}$  mit Wert 1 für  $r = 0$  nach Lemma A2. Wiederum nach Lemma A2 ist dann  $r \mapsto \frac{1 - \frac{f_\eta(r)}{r}}{r}$  glatt auf  $\mathbb{R}$ .

Es ist auf dem Definitionsbereich von  $\rho_\eta$

$$\rho_\eta(r) > 0 \quad \text{für} \quad r > 0 \quad \text{und} \quad \rho_\eta(r) < 0 \quad \text{für} \quad r < 0$$

und wegen  $f_\eta(0) = 0$ ,  $f'_\eta(0) = 1$  gleichfalls auf dem Definitionsbereich von  $\rho_\eta$

$$f_\eta(r) > 0 \quad \text{für} \quad r > 0 \quad \text{und} \quad f_\eta(r) < 0 \quad \text{für} \quad r < 0.$$

Die Differentialgleichung liefert dann  $\rho'_\eta(r) > 0$  für alle  $r$  des Definitionsbereiches.

Daher wird in Polarkoordinaten durch  $(r, x) \mapsto (\rho_\eta(r), x)$ ,  $\eta = \langle x, x \rangle$ , ein Diffeomorphismus  $K_p$  von  $\tilde{A}_p$  in  $T_p M$  definiert. Dieser ist ein konformer Diffeomorphismus von  $(\tilde{A}_p, \tilde{g})$  in  $(T_p M, g_p)$ :

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= \eta dr^2 + f_\eta^2(r) g_\eta \\
&= \eta \frac{d\rho^2}{\rho_\eta'(r)^2} + f_\eta^2(r) g_\eta \\
&= \eta \frac{f_\eta^2(r)}{\rho_\eta^2(r)} d\rho^2 + f_\eta^2(r) g_\eta \\
&= \frac{f_\eta^2(r)}{\rho_\eta^2(r)} (\eta d\rho^2 + \rho^2 g_\eta) \\
&= \frac{f_\eta^2(r)}{\rho_\eta^2(r)} g_p
\end{aligned}$$

Die Frage ist nun, ob sich  $K_p$  zu einem Diffeomorphismus auf  $\tilde{B}_p = \tilde{A}_p \cup \Gamma_p$  fortsetzen läßt. Wenn ja, ist aus Stetigkeitsgründen  $K_p : \tilde{B}_p \rightarrow T_p M$  ein konformer Diffeomorphismus zwischen  $\tilde{B}_p$  und  $K_p(\tilde{B}_p)$ .

Nun ist für  $y = r \cdot x \in \tilde{A}_p$ :

$$K_p(y) = K_p(r \cdot x) = \rho_\eta(r) \cdot x = \frac{\rho_\eta(r)}{r} \cdot y .$$

Nach Lemma A6, S. 91, ist

$$\left( \frac{\rho_+(r)}{r}, \frac{\rho_-(r)}{r} \right) \in \mathcal{F} .$$

Also läßt sich die Funktion  $\kappa : \tilde{A}_p \ni y = r \cdot x \mapsto \frac{\rho_\eta(r)}{r}$  nach Lemma A5 zu einer glatten Funktion auf  $\tilde{B}_p$  fortsetzen. Daher läßt sich auch  $K_p : y \mapsto \kappa(y) \cdot y$  auf  $\tilde{B}_p$  glatt fortsetzen. Die Fortsetzungen bezeichnen wir wieder mit  $\kappa$  und  $K_p$ .

Es ist für  $z \in \Gamma_p$  :

$$\kappa(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\rho_\eta(r)}{r} = 1$$

und

$$K_p(z) = \kappa(z) \cdot z = z. \tag{2.5}$$

Weiter ist für  $V \in T_z T_p M \cong T_p M$  :

$$\begin{aligned}
dK_p|_z(V) &= \kappa(z)V + d\kappa|_z(V)z \\
&= V + d\kappa|_z(V)z
\end{aligned}$$

Also ist  $dK_p|_z$  injektiv, denn

$$\begin{aligned}
dK_p|_z(V) = 0 &\Rightarrow V + d\kappa|_z(V)z = 0 \\
&\Rightarrow V \in \mathbb{R} \cdot z \\
&\Rightarrow d\kappa|_z(V) = 0 \quad (\text{da } \kappa \text{ konstant längs } \Gamma_p) \\
&\Rightarrow dK_p|_z(V) = V = 0.
\end{aligned}$$

Also ist  $K_p : \tilde{B}_p \rightarrow T_pM$  eine Immersion und wegen (2.5) injektiv.  $\square$

Wie sieht nun das Bild  $K_p(\tilde{B}_p)$  aus?

Es ist  $\tilde{B}_p = U(r_1, r_2, r_3) \subset T_pM$  für gewisse  $0 < r_1, r_2 \leq \infty$  und  $-\infty \leq r_3 < 0$ . Nach Konstruktion von  $K_p$  ist dann  $K_p(\tilde{B}_p) = U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) \subset T_pM$  mit

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1 &= \lim_{r \rightarrow r_1} \rho_+(r) \\
\bar{r}_2 &= \lim_{r \rightarrow r_2} \rho_-(r) \\
\bar{r}_3 &= \lim_{r \rightarrow r_3} \rho_-(r)
\end{aligned}$$

Wie groß  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$  werden, hängt i.a. von  $\psi$  ab. In zwei Fällen aber müssen sie unendlich sein.

Im ersten Fall hat  $\psi'_\eta$  oder gleichwertig  $f_\eta$  eine Nullstelle in  $r_i, |r_i| < \infty, i = 1, 2$  oder  $3$ , d.h. es gibt in der entsprechenden Richtung einen zu  $p$  benachbarten kritischen Punkt von  $\psi$ . Dann hat  $h_\eta(r) = \frac{1}{f_\eta(r)} - \frac{1}{r}$  bei  $r = r_i$  einen Pol mindestens der Ordnung 1. Daher

$$\lim_{r \rightarrow r_i} \int_0^r h_\eta(\xi) d\xi = +\infty$$

also

$$\lim_{r \rightarrow r_i} \rho_\eta(r) = \lim_{r \rightarrow r_i} r \exp\left(\int_0^r h_\eta(\xi) d\xi\right) = \pm\infty.$$

Nun zum zweiten Fall. Das Vektorfeld  $\text{grad } \tilde{\psi}|_{(r,x)} = \eta \tilde{\psi}'_\eta(r) \partial_r = \eta \tilde{\psi}''_\eta(0) f_\eta(r) \partial_r$  geht unter der Abbildung  $K_p : (r, x) \mapsto (\rho_\eta(r), x)$  über in

$$\begin{aligned}
\eta \tilde{\psi}''_\eta(0) f_\eta(r) \rho'_\eta(r) \partial_\rho &= \eta \tilde{\psi}''_\eta(0) f_\eta(r) \frac{\rho_\eta(r)}{f_\eta(r)} \partial_\rho \\
&= \eta \tilde{\psi}''_\eta(0) \rho_\eta(r) \partial_\rho
\end{aligned}$$

d.h. in das Ortsvektorfeld bis auf den Faktor  $\eta \tilde{\psi}''_\eta(0)$ .

Hat nun  $\tilde{\psi}'_\eta$  links oder rechts von Null keine Nullstelle, (das entsprechende  $r_i$  also gleich  $\pm\infty$ ), so ist  $\bar{r}_i$  gleich  $\pm\infty$ , wenn das Vektorfeld  $\text{grad } \tilde{\psi}$  in dieser Richtung vollständig ist.

## Kapitel 3: Die globale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld

In diesem Kapitel sei  $(M, g)$  stets eine zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion auf  $M$ . Es bezeichne  $Cr(\psi)$  die Menge der kritischen Punkte von  $\psi$ .  $M$  und  $\psi$  haben noch die folgenden Eigenschaften:

- (i) Der Gradient von  $\psi$  ist ein konformes Vektorfeld, d.h. es gibt eine Funktion  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla^2 \psi = \lambda g$ .
- (ii)  $\psi$  hat mindestens einen kritischen Punkt.
- (iii)  $M$  ist  $Cr(\psi)$ -vollständig, d.h. für alle  $p \in Cr(\psi)$  ist  $\exp_p$  auf  $T_p M$  definiert und jeder Punkt von  $M$  läßt sich durch eine Geodäte mit einem kritischen Punkt von  $\psi$  verbinden.

Diese Eigenschaften von  $M$  und  $\psi$  werden als Eigenschaft (\*) im folgenden zitiert. Manchmal sagen wir auch kurz "M hat die Eigenschaft (\*)" ohne die Funktion  $\psi$  zu erwähnen. Nach Lemma 6.2. in [KR1] ist jede geodätisch vollständige Mannigfaltigkeit  $M$   $Cr(\psi)$ -vollständig.

### 3.1 Das Gerüst der Mannigfaltigkeit $M$

Ein **Gerüst** von  $M$  (genauer: ein Gerüst von  $M$  zusammen mit der Funktion  $\psi$ ) ist ein Graph  $\mathcal{G}$ , der aus Ecken und zwei Arten von Kanten besteht, raumartigen Kanten ("+"-Kanten) und zeitartigen Kanten ("-"-Kanten), so daß gilt:

- (i) Die Ecken von  $\mathcal{G}$  stehen in eindeutiger Beziehung zu den kritischen Punkten von  $\psi$  (in Zeichen  $E \sim p$ ,  $E$  Ecke von  $\mathcal{G}$ ,  $p \in Cr(\psi)$ ).
- (ii) Von jeder Ecke  $E (\sim p)$  gehen drei Kanten aus, eine raumartige und zwei zeitartige. Diese stehen in eindeutiger Weise zum raumartigen und zu den beiden zeitartigen Kegeln in  $T_p M$  in Beziehung, und zwar die raumartige Kante zum raumartigen Kegel und die beiden zeitartigen Kanten zu den beiden zeitartigen Kegeln.
- (iii) Eine Kante soll genau dann zwei Ecken  $E_1 (\sim p_1)$  und  $E_2 (\sim p_2)$  verbinden, wenn die zugeordneten kritischen Punkte  $p_1$  und  $p_2$  zueinander benachbart sind in den durch die Kante gegebenen Richtungen in  $T_{p_1} M$  und  $T_{p_2} M$ .

Es kann vorkommen, daß zwei Ecken durch mehr als eine Kante verbunden werden und auch, daß eine Kante nur mit einer Ecke koinzidiert. Jede solche nur an einer Ecke hängende Kante heißt eine **freie Kante**.

Unter einem *Isomorphismus* zwischen zwei solchen Graphen versteht man eine Bijektion zwischen den Ecken und eine Bijektion zwischen den Kanten, so daß die Bijektion zwischen den Kanten nur Kanten auf Kanten der gleichen Art abbildet und zwei Ecken genau



dann mit einer Kante koinzidieren, wenn die Bilder der Ecken mit dem Bild der Kante koinzidieren.

Aufgrund der Beziehung der Ecken eines Gerüsts von  $M$  zu den kritischen Punkten von  $\psi$  sind je zwei Gerüste kanonisch isomorph. Deswegen reden wir ab sofort auch von *dem* Gerüst von  $M$ .

Man kann das Gerüst von  $M$  immer als Teilmenge von  $M$  realisieren:

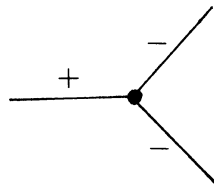
Die Ecken sollen die kritischen Punkte von  $\psi$  sein. Für je zwei benachbarte kritische Punkte wählen wir als verbindende Kante eine direkte geodätische Verbindung dieser Punkte. Als freie Kante an einem kritischen Punkt wählen wir einen geodätischen Strahl in  $M$  der entsprechenden Richtung, der von diesem Punkt ausgeht.

Für später halten wir die folgenden Eigenschaften der Graphen  $\mathcal{G}$  fest, die als Gerüste auftreten:

1. Der Graph  $\mathcal{G}$  hat nur abzählbar viele Ecken:

Die kritischen Punkte von  $\psi$  liegen isoliert. Es gibt daher nur abzählbar viele.

2. Jede Ecke des Graphen  $\mathcal{G}$  ist von folgendem Typ:



3. Der Graph  $\mathcal{G}$  ist zusammenhängend:

Sei  $\mathcal{E}$  die Menge der Ecken von  $\mathcal{G}$  und  $E_0 \in \mathcal{E}$ . Betrachte die Mengen

$$\mathcal{E}_1 := \{E \in \mathcal{E} \mid E \text{ ist mit } E_0 \text{ durch einen Kantenzug in } \mathcal{G} \text{ verbindbar}\}$$

$$\mathcal{E}_2 := \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1,$$

und

$$M_1 := \bigcup_{\substack{p \sim E \\ E \in \mathcal{E}_1}} B_p, \quad M_2 := \bigcup_{\substack{p \sim E \\ E \in \mathcal{E}_2}} B_p$$

( $B_p$  sind die Mengen aus Satz 2.2, S. 29)

Es ist  $B_{p_1} \cap B_{p_2} = \emptyset$  für alle  $p_1 \sim E_1 \in \mathcal{E}_1$  und  $p_2 \sim E_2 \in \mathcal{E}_2$ , denn für jedes  $q \in B_{p_1} \cap B_{p_2}$  führt die Geodäte durch  $q$  in Richtung  $\pm \text{grad } \psi|_q$  zu  $p_1$  und  $p_2$ . Falls also  $B_{p_1} \cap B_{p_2} \neq \emptyset$ , so ist  $p_1 = p_2$  oder  $p_1$  und  $p_2$  sind benachbarte kritische Punkte.

Also  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

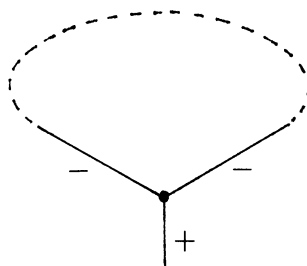
Da  $M$   $Cr(\psi)$ -vollständig ist, ist  $M_1 \cup M_2 = M$ .

$M_1$  und  $M_2$  sind offene Mengen,  $M$  zusammenhängend und  $M_1 \neq \emptyset$ . Also  $M_2 = \emptyset$ , d.h.  $\mathcal{E}_2 = \emptyset$  und  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ .

4. Jeder Zyklus im Graphen hat eine gerade Länge:

Jeder kritische Punkt von  $\psi$  ist eine Quelle oder Senke von  $\text{grad } \psi$  (vgl. das Beispiel  $\psi(x) = 1/2 \langle x, x \rangle$  in  $\mathbb{R}_1^n$ ,  $\text{grad } \psi(x) = x$ ) und in zwei benachbarten kritischen Punkten hat das Vektorfeld  $\text{grad } \psi$  eine Quelle und eine Senke.

5. In jedem Zyklus tritt mindestens einmal folgende Sequenz auf:



Denn die Funktion  $\psi$  kann längs eines Zykluses nicht nur wachsen und für das Wachstum von  $\psi$  in der Umgebung eines kritischen Punktes gibt es nur die zwei Möglichkeiten



Anmerkung: Im Fall der Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , hat  $\{x \in T_p M \mid \langle x, x \rangle = \pm 1\}$  nur zwei Komponenten und daher sieht jede Ecke so aus:



Das Gerüst ist dann in jedem Fall ein linearer Graph.

### 3.2 Benachbarte kritische Punkte

Seien  $p$  und  $q$  zwei benachbarte kritische Punkte von  $\psi$ . Um im folgenden die Bezeichnung nicht zu kompliziert werden zu lassen, beschränken wir uns auf den Fall, daß  $p$  und  $q$  in raumartiger Richtung benachbart sind.

Wir denken uns in  $T_p M$  und  $T_q M$  Polarkoordinaten eingeführt. Die zurückgeholte Metrik  $\exp_p^*(g)$  bzw.  $\exp_q^*(g)$  bezeichnen wir jetzt genauer mit  $\tilde{g}_p$  bzw.  $\tilde{g}_q$ . Seien  $\tilde{\psi}_{\pm, p}$ ,  $K_p$  und  $\tilde{\psi}_{\pm, q}$ ,  $K_q$  die Abbildungen aus den Sätzen 2.1 und 2.3 und  $r_0 > 0$  die erste positive Nullstelle von  $\tilde{\psi}'_{+, p}$  und  $\tilde{\psi}'_{+, q}$ . Weiter wählen wir irgend zwei orthogonale Abbildungen  $L_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  und  $L_q : T_q M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ .

Man hat dann folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}_1^n & \supset & U^+(\infty) & \xrightarrow{u} & U^+(\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\
 L_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L_q \\
 T_p M & \supset & U^+(\infty) & \longrightarrow & U^+(\infty) & \subset & T_q M \\
 K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow K_q \\
 \tilde{B}_p & \supset & U^+(r_0) & \xrightarrow{(I)} & U^+(r_0) & \subset & \tilde{B}_q \\
 & & \exp_p \searrow & & \swarrow \exp_q & & \\
 & & & & M & & 
 \end{array}$$

Die Abbildung (I) ist eine Isometrie zwischen  $(U^+(r_0), \tilde{g}_p)$  und  $(U^+(r_0), \tilde{g}_q)$ . Daher ist  $u$  ein konformer Diffeomorphismus bzgl. des pseudo-Euklidischen Skalarproduktes.  $u$  bildet jeden von Null ausgehenden raumartigen Strahl auf einen ebensolchen ab, denn diese entsprechen in  $M$  den Flußlinien von  $p$  nach  $q$ .

Nun wenden wir den Satz von Liouville an, um  $u$  näher zu bestimmen. Demnach gibt es ein  $A \in \mathcal{O}(2, n)$ , so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_2^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}_2^{n+2} \setminus \{0\} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \\
 i \uparrow & & \uparrow i \\
 \mathbb{R}_1^n \supset U^+(\infty) & \xrightarrow{u} & U^+(\infty) \subset \mathbb{R}_1^n
 \end{array}$$

Sei  $x \in S(+1) \subset \mathbb{R}_1^n$ . Dann wird der Strahl  $\{r \cdot x \mid r > 0\}$  durch  $u$  auf einen Strahl  $\{\bar{r} \cdot y \mid \bar{r} > 0\}$ ,  $y \in S(+1)$ , abgebildet. Der Bewegung  $r \rightarrow 0$  entspricht die Bewegung  $\bar{r} \rightarrow \infty$ . Nun gilt mit den Bezeichnungen aus dem ersten Kapitel:

$$\begin{aligned}
\pi \circ A(1, 0, 1) &= \phi_A \circ \pi(1, 0, 1) \\
&= \phi_A \circ i(0) \\
&= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \phi_A \circ i(r \cdot x) \\
&= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} i \circ u(r \cdot x) \\
&= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} i(\bar{r} \cdot y) \\
&= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \pi(1 + \bar{r}^2 \langle y, y \rangle, 2\bar{r}y, 1 - \bar{r}^2 \langle y, y \rangle) \\
&= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \pi\left(\frac{1}{\bar{r}^2} + \langle y, y \rangle, \frac{2}{\bar{r}}y, \frac{1}{\bar{r}^2} - \langle y, y \rangle\right) \\
&= \pi(\langle y, y \rangle, 0, -\langle y, y \rangle)
\end{aligned}$$

d.h.  $A(1, 0, 1) = (a, 0, -a)$  für ein  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sei weiter

$$A(1, 0, -1) := (b, v, c), \quad b, c \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}_1^n$$

$$A(0, x, 0) := (\ell_1(x), w(x), \ell_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}_1^n, \ell_1, \ell_2 \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}), w \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}_1^n).$$

Da  $A$  orthogonal ist, gilt für alle  $x \in \mathbb{R}_1^n$ :

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 0, 1) \cdot (0, x, 0) = (a, 0, -a) \cdot (\ell_1(x), w(x), \ell_2(x)) \\
&= -a\ell_1(x) - a\ell_2(x) = -a(\ell_1(x) + \ell_2(x)) \\
\Rightarrow \ell_2(x) &= -\ell_1(x)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nochmals den Strahl  $\{r \cdot x \mid r > 0\}$ ,  $x \in S(+1)$ .

$$\begin{aligned}
i^{-1} \circ \phi_A \circ i(r \cdot x) &= i^{-1} \circ \pi \circ A(1 + \langle rx, rx \rangle, 2rx, 1 - \langle rx, rx \rangle) \\
&= i^{-1} \circ \pi \circ A((1, 0, 1) + 2r(0, x, 0) + r^2(1, 0, -1)) \\
&= i^{-1} \circ \pi((a, 0, -a) + 2r(\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) + r^2(b, v, c)) \\
&= \frac{1}{r^2(b+c)}(r^2v + 2rw(x)) \\
&= \frac{1}{r(b+c)}(rv + 2w(x))
\end{aligned}$$

Da  $i^{-1} \circ \phi_A \circ i(r \cdot x) = u(r \cdot x) = \bar{r}(r) \cdot y$ ,  $\forall r > 0$ , müssen  $v$  und  $w(x)$  Vielfache von  $y$  sein.

*Annahme:*  $v \neq 0$ .

Dann ist  $v$  raumartig und es gilt

$$\forall x \in S(+1) \quad \exists \vartheta(x) \in \mathbb{R} : w(x) = \vartheta(x) \cdot v$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= (1, 0, -1) \cdot (0, x, 0) = (b, v, c) \cdot (\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) \\ &= -b\ell_1(x) + \langle v, w(x) \rangle - c\ell_1(x) \\ &= -(b+c)\ell_1(x) + \vartheta(x)\langle v, v \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta(x) = \frac{b+c}{\langle v, v \rangle} \ell_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad A(0, x, 0) = (\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) = \ell_1(x) \cdot \left( 1, \frac{b+c}{\langle v, v \rangle} v, -1 \right) \quad \forall x \in S(+1)$$

Da  $\text{span}(S(+1)) = \mathbb{R}_1^n$  folgt

$$A(0, x, 0) = \ell_1(x) \left( 1, \frac{b+c}{\langle v, v \rangle} v, -1 \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n,$$

also  $\dim A(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) \leq 1$ . Widerspruch zu "A linearer Isomorphismus".

Mithin  $v = 0$ .

Weiter ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) = (b, 0, c) \cdot (b, 0, c) = -b^2 + c^2 \\ \Rightarrow \quad |b| &= |c|. \end{aligned}$$

$(1, 0, 1)$  und  $(1, 0, -1)$  sind linear unabhängig, also auch  $A(1, 0, 1) = (a, 0, -a)$  und  $A(1, 0, -1) = (b, 0, c)$ . Daher

$$\begin{aligned} A(1, 0, -1) &= (b, 0, b), \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \Rightarrow \quad -2 &= (1, 0, 1) \cdot (1, 0, -1) = (a, 0, -a) \cdot (b, 0, b) = -2ab \\ \Rightarrow \quad b &= 1/a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 0, -1) \cdot (0, x, 0) = (1/a, 0, 1/a) \cdot (\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) = -\frac{2}{a} \ell_1(x) \\ \Rightarrow \quad \ell_1(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad A(0, x, 0) &= (0, w(x), 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n. \end{aligned}$$

Damit ist  $w$  sogar aus  $\mathcal{O}(1, n-1)$  :

$$\begin{aligned} \langle w(x), w(y) \rangle &= (0, w(x), 0) \cdot (0, w(y), 0) \\ &= A(0, x, 0) \cdot A(0, y, 0) \\ &= (0, x, 0) \cdot (0, y, 0) \\ &= \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_1^n . \end{aligned}$$

Insgesamt

$$u(y) = i^{-1} \circ \phi_A \circ i(y) = a \frac{w(y)}{\langle y, y \rangle}, \quad y \in U^+(\infty) . \quad (3.1)$$

Im folgenden sei o.E. stets  $a > 0$ . Ist  $a < 0$ , so ist

$$u(y) = (-a) \frac{-w(y)}{\langle y, y \rangle}, \quad -w \in \mathcal{O}(1, n-1).$$

Also ist  $u$ , bis auf die orthogonale Abbildung  $w$  und die Homothetie  $y \mapsto ay$ , die Sphäreninversion  $S$ . Bei der Konstruktion einer Abwicklung von  $M$  in Abschnitt 3.3 werden uns die orthogonale Abbildung und die Homothetie stören. Deshalb fragen wir uns zuerst, woran es liegt, daß diese Abbildungen auftreten.

Die orthogonale Abbildung  $w$  liegt hier in der Willkür der Identifikationen  $T_p M \xrightarrow{L_p} \mathbb{R}_1^n$  und  $T_q M \xrightarrow{L_q} \mathbb{R}_1^n$  begründet. Ersetzt man  $L_q$  durch  $w^{-1} \circ L_q$ , so kann man sich in (3.1) auf den Fall  $w = \text{id}$  zurückziehen. Komplizierter wird es mit der Herkunft der Homothetie.

Um den Faktor  $a$  näher zu bestimmen, identifizieren wir  $T_p M$  und  $T_q M$  mit  $\mathbb{R}_1^n$  mittels der Abbildungen  $L_p$  und  $w^{-1} \circ L_q$ . Dann ist die Wechselabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1^n \xleftarrow{L_p} T_p M \supset U^+(r_0) & \longleftrightarrow & U^+(r_0) \subset T_q(M) \xrightarrow{w^{-1} \circ L_q} \mathbb{R}_1^n \\ & \exp_p \searrow & \swarrow \exp_q \\ & M & \end{array}$$

bzgl. Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}_1^n$  gegeben durch  $(r, x) \longleftrightarrow (r_0 - r, x)$ ,  $x \in S(+1)$ . Setze  $f_1(r) := \frac{\tilde{\psi}'_{+,p}(r)}{\tilde{\psi}''_{+,p}(0)}$ . Die Abbildung  $K_p$  wird auf  $U^+(r_0)$  durch  $(r, x) \mapsto (\rho_1(r), x)$  beschrieben. Analog definiert man  $f_2$  und  $\rho_2(r)$  bzgl. des Punktes  $q$ . Die Metrik  $\tilde{g}_p$  in  $U^+(r_0) \subset T_p M \cong \mathbb{R}_1^n$  ist gegeben durch

$$dr^2 + f_1^2(r)g_1$$

und die Metrik  $\tilde{g}_q$  in  $U^+(r_0) \subset T_q M \cong \mathbb{R}_1^n$  durch

$$dr^2 + f_2^2(r)g_1 .$$

Da  $(r, x) \longleftrightarrow (r_0 - r, x)$  eine Isometrie zwischen diesen beiden Metriken ist, folgt

$$f_1^2(r) = f_2^2(r_0 - r)$$

und weiter, da  $f_1$  und  $f_2$  positiv sind,

$$f_1(r) = f_2(r_0 - r).$$

Nun ist

$$\rho_i(r) = r \exp\left(\int_0^r h_i(\xi) d\xi\right)$$

mit  $h_i(\xi) = \frac{1}{f_i(\xi)} - \frac{1}{\xi}$ ,  $i = 1, 2$ . Die Abbildung  $u$  wird in Polarkoordinaten beschrieben durch  $(\rho_1, x) \mapsto (a/\rho_1, x) = (\rho_2, x)$ . Also

$$\begin{aligned} a &= \rho_1(r) \cdot \rho_2(r_0 - r) \\ \Rightarrow a &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\rho_1(r)}{r} \cdot r \cdot \rho_2(r_0 - r) \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot \rho_2(r_0 - r) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot (r_0 - r) \exp\left(\int_0^{r_0-r} h_2(\xi) d\xi\right) \\ &= r_0 \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \exp\left(\ln r + \int_0^{r_0-r} h_2(\xi) d\xi\right). \end{aligned}$$

Mit  $m(r) := \ln r + \int_0^{r_0-r} h_2(\xi) d\xi$  gilt

$$\begin{aligned} m'(r) &= \frac{1}{r} - h_2(r_0 - r) = \frac{1}{r} - \left( \frac{1}{f_2(r_0 - r)} - \frac{1}{r_0 - r} \right) = -\frac{1}{f_1(r)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r_0 - r} \\ m(r_0) &= \ln r_0 \\ \Rightarrow m(r) &= \ln r_0 + \int_{r_0}^r m'(\xi) d\xi = \ln r_0 + \int_r^{r_0} \left( \frac{1}{f_1(\xi)} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{r_0 - \xi} \right) d\xi \\ \Rightarrow a &= r_0^2 \cdot \exp\left(\int_0^{r_0} \left( \frac{1}{f_1(\xi)} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{r_0 - \xi} \right) d\xi\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Der Faktor  $a$  hängt also vom Verhalten der Funktion  $\psi$ , und damit der Metrik  $g$ , zwischen  $p$  und  $q$  ab, ausgedrückt durch die obige Formel.

### 3.3 Konstruktion von Abwicklungsabbildungen

Nach Satz 2.3 ist die Mannigfaltigkeit  $M$  lokal konform flach. Man kann sich also fragen, ob  $M$  abwickelbar ist, d.h. ob es eine konforme Immersion  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  gibt. Wenn ja, ist für jede offene Menge  $U \subset M$  die Abwicklung  $\delta$  schon eindeutig durch  $\delta|_U$  bestimmt und jede auf  $U$  definierte Abwicklung  $\delta_1 : U \rightarrow Q_1^n$  läßt sich eindeutig fortsetzen auf  $M$  (vgl. Satz 1.1).

Sei nun  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $\psi$ . Dann hat man auf  $B_p$  eine Abwicklung gegeben durch

$$B_p \xleftarrow{\exp_p} \tilde{B}_p \xrightarrow{K_p} T_p M \xrightarrow{L_p} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n .$$

Wie setzt sich diese nun fort? Zunächst setzen wir noch nicht voraus, daß  $M$  abwickelbar ist. Wir wollen nur untersuchen, wie weit man die so auf  $B_p$  definierte Abwicklung fortsetzen kann.

Sei dazu  $q$  ein zu  $p$  benachbarter kritischer Punkt und die verbindende Kante z.B. raumartig. Dann hat man folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_1^n & \supset & U^+(\infty) & \xrightarrow{y \mapsto a \frac{w(y)}{\langle y, y \rangle}} & U^+(\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\ L_p \circ K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L_q \circ K_q \\ \tilde{B}_p & \supset & U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) & \subset & \tilde{B}_q \end{array}$$

Ersetzt man hier  $L_q$  durch den konformen Isomorphismus

$$L'_q = \frac{1}{a} w^{-1} \circ L_q$$

so geht unser Diagramm über in folgendes

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_1^n & \supset & U^+(\infty) & \xrightarrow{y \mapsto \frac{y}{\langle y, y \rangle}} & U^+(\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\ L_p \circ K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_q \circ K_q \\ \tilde{B}_p & \supset & U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) & \subset & \tilde{B}_q \end{array}$$

Für die konforme Einbettung  $j : \mathbb{R}_1^n \rightarrow Q_1^n$  ist  $i = j \circ S$  auf  $\mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n$ .

Daher kann man, falls  $p$  und  $q$  nur durch eine Kante verbunden sind, die auf  $B_p$  gegebene Abwicklung fortsetzen auf  $B_p \cup B_q$  durch

$$B_q \xleftarrow{\exp_q} \tilde{B}_q \xrightarrow{K_q} T_q M \xrightarrow{L'_q} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n .$$

Dieses Verfahren kann man nun fortsetzen. Man geht, mit  $p$  beginnend, von einem kritischen Punkt  $q_1$  zu einem benachbarten Punkt  $q_2$  über, ändert die Abbildung  $L_{q_2}$  zu einem linearen konformen Isomorphismus  $L'_{q_2}$  ab, so daß die Wechselabbildung gerade  $S$  wird, und verwendet abwechselnd  $i$  und  $j$  zur Definition der Abwicklung.



Ist das Gerüst von  $M$  ein Baum, so erhält man auf diese Weise eine Abwicklung von  $M$ . Schwierigkeiten können nur dann auftreten, wenn das Gerüst Zyklen enthält (z.B. zwei benachbarte kritische Punkte, die durch zwei zeitartige Kanten verbunden sind).

Nehmen wir an, wir hätten die Konstruktion längs eines Zyklus durchgeführt, indem wir bei  $q_1$ , einer seiner Ecken, starteten und den Zyklus einmal durchlaufen hätten. Der letzte kritische Punkt vor  $q_1$  sei  $q_\ell$ . Dann ist o.E. die Abwicklung auf  $B_{q_1}$  und  $B_{q_\ell}$  festgelegt durch

$$B_{q_1} \xleftarrow{\exp_{p_1}} \tilde{B}_{q_1} \xrightarrow{L'_{q_1} \circ K_{q_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

und

$$B_{q_\ell} \xleftarrow{\exp_{q_\ell}} \tilde{B}_{q_\ell} \xrightarrow{L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n .$$

Das "o.E." bezieht sich auf die Einbettungen "i" und "j". Da der Zyklus eine gerade Länge hat, treten  $i$  und  $j$  auf. O.E. trete  $i$  in der ersten Zeile auf.

Ist nun die letzte Kante von  $q_\ell$  nach  $q_1$  raumartig, so hat man auf dem raumartigen Kegel in  $\mathbb{R}_1^n$  eine Wechselabbildung

$$\begin{array}{ccccc}
 & Q_1^n & & & Q_1^n \\
 & i \uparrow & & & \uparrow j \\
 \mathbb{R}_1^n & \supset U^+(\infty) & \xrightarrow{y \rightarrow \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}} & U^+(\infty) & \subset \mathbb{R}_1^n \\
 L'_{q_1} \circ K_{q_1} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell} \\
 \tilde{B}_{q_1} & \supset U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) & \subset \tilde{B}_{q_\ell} \\
 & \exp_{q_1} \searrow & & \swarrow \exp_{q_\ell} & \\
 & & M & & 
 \end{array}$$

$\alpha \in \mathbb{R}_+$  und  $\omega \in \mathcal{O}(1, n-1)$ .

Damit die Abwicklung auf  $\exp_{q_1}(U^+(r_0)) = \exp_{q_\ell}(U^+(r_0))$  eindeutig wird muß  $\alpha = 1$  und  $\omega = \text{id}$  sein. Trifft dies für jeden Zyklus zu, so erhält man auf die oben beschriebene Weise eine Abwicklung.

Was bedeutet es aber, wenn  $\alpha \neq 1$  oder  $\omega \neq \text{id}$  ist? Es entspricht  $\omega$  einem Twist. Diesen kann man auflösen ohne die Metrik  $g$  und die Funktion  $\psi$  zu ändern, da diese, auf  $U^+(r_0) \subset T_{q_1}M$  und  $U^+(r_0) \subset T_{q_\ell}M$ , eine  $\mathcal{O}(1, n-1)$ -Symmetrie haben. Dazu zerschneidet man  $M$  in der Mitte zwischen  $q_1$  und  $q_\ell$ , d.h. längs

$$\exp_{q_1} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right) = \exp_{q_\ell} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right)$$

und verklebt die Ränder neu mittels der Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
\exp_{q_1} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right) & \xleftarrow{\exp_{q_1}} - \frac{r_0}{2} S(+1) \xrightarrow{L'_{q_1} \circ K_{q_1}} & \mathbb{R}_1^n \\
& & \downarrow \alpha \cdot S \\
\exp_{q_\ell} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right) & \xleftarrow{\exp_{q_\ell}} - \frac{r_0}{2} S(+1) \xrightarrow{L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}} & \mathbb{R}_1^n
\end{array}$$

Die neue Wechselabbildung ist dann gegeben durch

$$\mathbb{R}_1^n \supset U^+(\infty) \xrightarrow{y \mapsto \alpha \frac{y}{\langle y, y \rangle}} U^+(\infty) \subset \mathbb{R}_1^n.$$

Den Faktor  $\alpha$  kann man nicht so kanonisch beheben. Z.B. könnte man die Metrik  $g$  und die Funktion  $\psi$  geeignet, aber willkürlich, zwischen  $q_1$  und  $q_\ell$  so abändern, daß in Gl. (3.2) der Faktor  $\alpha$  gleich 1 wird.

Ist die letzte verbindende Kante zeitartig, so wird die Situation etwas komplizierter. Man hat dann zwischen den positiven oder negativen Zeitkegeln die Wechselabbildung  $y \mapsto \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}$

$$\begin{array}{ccccc}
Q_1^n & & & & Q_1^n \\
i \uparrow & & & & \uparrow j \\
\mathbb{R}_1^n \supset U^-(\pm\infty) & \xrightarrow{y \mapsto \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}} & U^-(\pm\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\
L'_{q_1} \circ K_{q_1} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell} \\
\tilde{B}_{q_1} \supset U^-(\pm r_0) & \xrightarrow{(I)} & U^-(\pm r_0) & \subset & \tilde{B}_{q_\ell} \\
\exp_{q_1} \searrow & & & & \swarrow \exp_{q_\ell} \\
& & M & & 
\end{array} \tag{3.3}$$

Hierbei sind alle auftretenden Vorzeichen  $\pm$  unabhängig voneinander möglich. Damit die Abwicklung eindeutig wird, muß wieder  $\alpha = 1$  und  $\omega = \text{id}$  gelten. Da die Sphäreninversion  $y \mapsto \frac{y}{\langle y, y \rangle}$  die beiden Zeitkegel in  $\mathbb{R}_1^n$  miteinander vertauscht, muß dann in der zweiten Zeile des obigen Diagramms der links auftretende Zeitkegel der Gegenkegel des rechts auftretenden Zeitkegels sein.

Für  $\omega \neq \text{id}$  könnte aber in der zweiten Zeile links und rechts der gleiche Zeitkegel auftreten. Dann vertauscht die orthogonale Abbildung  $\omega$  gleichfalls die Zeitkegel, d.h.  $\omega$  ist nicht zeitorientierungstreu. In diesem Fall ist die Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  nicht zeitorientierbar. Denn sonst wählen wir für  $M$  eine Zeitorientierung und o.B.d.A. sei dann

$$B_{q_1} \xleftarrow{\exp_{q_1}} - \tilde{B}_{q_1} \xrightarrow{L'_{q_1} \circ K_{q_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n \tag{3.4}$$

ein zeitorientierungstreuer konformer Diffeomorphismus. Diese Eigenschaft vererbt sich bei der Konstruktion der Abwicklung auf

$$B_{q_\ell} \xleftarrow{\exp_{q_\ell}} \tilde{B}_{q_\ell} \xrightarrow{L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n, \quad (3.5)$$

denn ein konformer lokaler Diffeomorphismus zwischen zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeiten ist entweder zeitorientierungstreu oder zeitorientierungsumkehrend.

Nun ist für alle  $\bar{q} \in Cr(\psi)$  die Exponentialabbildung  $\exp_{\bar{q}} : (\tilde{B}_{\bar{q}}, \tilde{g}_{\bar{q}}) \longrightarrow (B_{\bar{q}}, g)$  eine Isometrie und wir wählen in  $(\tilde{B}_{\bar{q}}, \tilde{g}_{\bar{q}})$  als Zeitorientierung die durch  $\exp_{\bar{q}}$  zurückgeholte Zeitorientierung von  $B_{\bar{q}} \subset M$ .

Da  $i, j : \mathbb{R}_1^n \rightarrow Q_1^n$  zeitorientierungstreu sind, sind in (3.4) und (3.5)  $L'_{q_1} \circ K_{q_1}$  und  $L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}$  zeitorientierungstreu.

Weiter ist mit den oben gewählten Zeitorientierungen in  $(\tilde{B}_{\bar{q}}, \tilde{g}_{\bar{q}}), \bar{q} \in Cr(\psi)$ , die Wechselabbildung (I) in Diagramm (3.3) zeitorientierungstreu.

Also ist die Wechselabbildung  $y \mapsto \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}$  zeitorientierungstreu. Da  $y \mapsto \alpha \frac{y}{\langle y, y \rangle}$  zeitorientierungstreu ist, muß dann auch  $\omega$  zeitorientierungstreu sein, ein Widerspruch.

Ist  $\omega$  zeitorientierungstreu, so kann man wie oben bei der raumartigen Kante den "Twist"  $\omega$  beheben, da  $g$  und  $\psi$  eine  $\mathcal{O}^+(1, n-1)$ -Symmetrie um  $q_1$  und  $q_\ell$  haben.

Man beachte, daß im Fall der raumartigen Kante zum "Enttwisten" nicht notwendig  $\omega \in \mathcal{O}^+(1, n-1)$  sein muß, da auch  $\omega \in \mathcal{O}^-(1, n-1)$  die Abstandssphäre  $S(+1)$  in sich überführt. Also kann man durch das "Enttwisten" an einer raumartigen Kante in einem Zyklus auch das "nicht-zeitorientierbar sein" längs dieses Zykluses beheben, was an einer zeitartigen Kante so nicht geht.

### 3.4. Abwickelbare Mannigfaltigkeiten

Sei jetzt  $M$  abwickelbar und ausgehend von einem kritischen Punkt  $p$  von  $\psi$  nach dem Verfahren des letzten Abschnitts eine Abwicklung  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  konstruiert. Man hat dann für jeden kritischen Punkt  $q$  von  $\psi$  einen konformen linearen Isomorphismus  $L'_q : T_q M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ , ( $L'_p = L_p$ ), so daß für benachbarte kritische Punkte die Wechselabbildung zwischen den auftretenden raumartigen oder zeitartigen Kegeln des  $\mathbb{R}_1^n$  die Sphäreninversion  $S$  ist. Die Abwicklung  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  ist auf  $B_q$  gegeben durch

$$B_q \xleftarrow{\exp_q} \tilde{B}_q \xrightarrow{K_q} T_q M \xrightarrow{L'_q} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{*} Q_1^n \quad (3.6)$$

wobei "\*" für  $i$  oder  $j$  steht, je nachdem ob  $q$  im Gerüst von  $M$  einen geraden oder ungeraden Abstand von  $p$  hat.

$\delta$  induziert eine Zeitorientierung auf  $M$ . Diese Zeitorientierung induziert kanonisch auf jedem Tangentialraum  $T_q M$ ,  $q \in M$ , aufgefaßt als Lorentz-Mannigfaltigkeit mit der pseudo-Euklidischen Metrik  $g_q$ , eine Zeitorientierung. Dazu betrachtet man einen zeitartigen Vektor  $V_q \in T_q M$  als zeitartiges Vektorfeld auf  $T_q M$ , das dann die (kanonische) Zeitorientierung induziert. (In diesem Fall wollen wir im folgenden immer die Polarkoordinaten in  $T_q M$  so einführen, daß  $S^0(-1)$  im positiven Zeitkegel liegt.)

Man beachte folgendes: Auf  $\tilde{B}_q \subset T_q M$ ,  $q \in Cr(\psi)$ , betrachten wir die Metrik  $\tilde{g}_q = \exp_q^*(g)$  und die mit  $\exp_q$  zurückgeholte Zeitorientierung von  $M$ . Diese sind zu unterscheiden von den gleichen Begriffen des pseudo-Euklidischen Raumes  $T_q M$ .

Es ist für  $q \in Cr(\psi)$  die konforme Immersion  $K_q : (\tilde{B}_q, \tilde{g}_q) \longrightarrow (T_qM, g_q)$  zeitorientierungstreu, denn

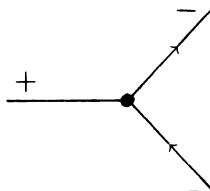
$$dK_q|_0 = \text{id}|_{T_qM} \quad \text{und} \quad d\exp_q|_0 = \text{id}|_{T_qM}$$

modulo der Identifikation  $T_0T_qM \cong T_qM$ . ( Für  $dK_q|_0$  siehe Kapitel 2, Seite 36 ) Also ist die Abbildung  $L'_q : T_qM \longrightarrow \mathbb{R}_1^n$  zeitorientierungstreu.

Nun kann man mit Hilfe der Abwicklung  $\delta$  das Gerüst von  $M$  um zwei Daten ergänzen. Zum einen um eine *Zeitorientierung* und zum anderen um eine *Gewichtung*, d.h. eine "Länge" für jede freie Kante.

**Definition** ( Zeitorientierung und Gewichtung )

Eine **Zeitorientierung** auf dem Gerüst von  $M$  ist die Zuordnung einer Richtung zu jeder zeitartigen Kante, so daß es um jeder Ecke wie folgt aussieht:



Mit jeder Zeitorientierung ist auch die Zuordnung, die jeder zeitartigen Kante die Gegenrichtung der ursprünglichen Richtung zuordnet, eine Zeitorientierung: die **inverse Zeitorientierung**. Zeitorientierung und inverse Zeitorientierung werden als im wesentlichen gleich angesehen.

Eine **Gewichtung**  $\mathcal{L}$  des Gerüstes ist eine Zuordnung, die jeder freien Kante  $\mathcal{K}$  eine "Länge"  $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ , d.i. eine Zahl aus  $]0, +\infty]$ , zuordnet. Zwei Gewichtungen  $\mathcal{L}_1$  und  $\mathcal{L}_2$  heißen im wesentlichen gleich, falls es eine positive reelle Zahl  $a$  und einen kritischen Punkt  $p$  gibt, so daß für alle freien Kanten  $\mathcal{K}$  an  $p$  und an Ecken die von  $p$  einen geraden Abstand haben gilt  $\mathcal{L}_2(\mathcal{K}) = a \cdot \mathcal{L}_1(\mathcal{K})$  und für die übrigen freien Kanten  $\tilde{\mathcal{K}}$   $\mathcal{L}_2(\tilde{\mathcal{K}}) = \frac{1}{a} \mathcal{L}_1(\tilde{\mathcal{K}})$ .

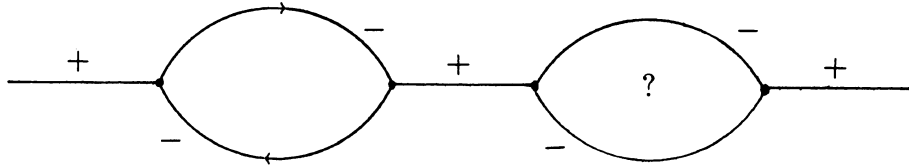
Dem positiven und dem negativen Zeitkegel in  $T_qM$ ,  $q \in Cr(\psi)$ , entspricht im Gerüst je eine zeitartige Kante, die von  $q$  ausgeht. Betrachtet man diese Kanten zusammen als eine zeitartige Geodäte in  $M$ , die durch  $q$  führt, so hat diese eine Durchlaufrichtung, die sie zu einer zeitartig-positiven Kurve macht. Diese Durchlaufrichtung induziert je eine Richtung auf den beiden zeitartigen Kanten. Die Richtung der zum positiven Zeitkegel gehörenden Kante weist von  $q$  weg, die der anderen Kante auf  $q$  hin.

Auf diese Weise erhält man eine Zeitorientierung des Gerüstes. Die inverse Zeitorientierung des Gerüstes entspricht der inversen Zeitorientierung auf  $M$ . Diese wird z.B. von der Abwicklung erzeugt, die man erhält, wenn man in Abschnitt 3.3 mit  $L'_p = A \circ L_p$ ,  $A \in \mathcal{O}^-(1, n-1)$ , anstelle von  $L_p$  startet.

Im Gegensatz zur Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es auf dem Gerüst von  $M$  im allgemeinen mehr als zwei Zeitorientierungen, denn eine Zeitorientierung auf dem Gerüst ist nicht durch die Wahl einer Richtung für eine zeitartige Kante festgelegt. Sie setzt sich von

dieser nur längs des maximalen Kantenzuges, der nur aus zeitartigen Kanten besteht und diese Kante enthält, eindeutig fort. Über davon durch raumartige Kanten getrennte zeitartige Kanten kann man keine Aussage aufgrund der Richtung der einen zeitartigen Kante machen.

Beispiel:



Nun zur Gewichtung: Für jeden kritischen Punkt  $q$  ist  $U_q := L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q) \subset \mathbb{R}_1^n$  von der Form  $U(r_1(q), r_2(q), r_3(q))$ . Zu einer freien Kante, die am Punkt  $q$  hängt, gehört ein raumartiger oder zeitartiger Kegel in  $T_qM$  und diesem entspricht unter  $L'_q \circ K_q$  ein Kegel in  $\mathbb{R}_1^n$ . Als Länge dieser Kante wählen wir die zu diesem Kegel gehörende Zahl  $|r_i(q)| \in ]0; \infty]$ .

Wie ändern sich diese Längen, wenn man mit der Abwicklung in einem anderen kritischen Punkt als  $p$  gestartet wäre, oder, was etwas allgemeiner ist, in  $p$  mit einem anderen konformen Isomorphismus  $L''_p$  anstelle von  $L_p$  gestartet wäre?

Es ist  $L''_p = a \cdot A \circ L_p$  für ein  $a \in \mathbb{R}_+$ , und  $A \in \mathcal{O}(1, n - 1)$ . Wir beschränken uns auf den Fall, daß  $A \in \mathcal{O}^+(1, n - 1)$  ist. Im anderen Fall wird zusätzlich noch die Zeitorientierung umgekehrt.

Nun ist  $L''_p \circ K_p(\tilde{B}_p) = a U_p = U(ar_1(p), ar_2(p), ar_3(p))$ . Also werden die Längen von freien Kanten am Punkt  $p$  mit  $a$  multipliziert.

Sei nun  $q$  ein zu  $p$  benachbarter kritischer Punkt. Damit die Wechselabbildungen (I) in folgenden Diagrammen (\* steht für  $i$  oder  $j$ )

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Q_1^n & & & & \\
 & & * \uparrow & & & & \\
 & & \mathbb{R}_1^n \supset U^+(+\infty) & \xrightarrow{(I)} & U^+(+\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 a \cdot A \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{(II)} \\
 & & \mathbb{R}_1^n \supset U^+(+\infty) & \xrightarrow{S} & U^+(+\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 L_p \circ K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_q \circ K_q \\
 & & \tilde{B}_p \supset U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) \subset \tilde{B}_q & & 
 \end{array}$$

(falls  $p$  und  $q$  längs einer raumartigen Kante benachbart sind)

bzw.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Q_1^n & & & & \\
 & & * \uparrow & & & & \\
 & & \mathbb{R}_1^n \supset U^-(\pm\infty) & \xrightarrow{\text{(I)}} & U^-(\mp\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 a \cdot A \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{(II)} \\
 & & \mathbb{R}_1^n \supset U^-(\pm\infty) & \xrightarrow{S} & U^-(\mp\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 L_p \circ K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_q \circ K_q \\
 & & \tilde{B}_p \supset U^-(\pm r_0) & \longrightarrow & U^-(\mp r_0) \subset \tilde{B}_q & & 
 \end{array}$$

(falls  $p$  und  $q$  längs einer zeitartigen Kante benachbart sind)

wieder  $S$  wird, man also in bekannter Weise eine Abwicklung konstruieren kann, muß man die Abbildung (II) als  $\frac{1}{a}A$  wählen, denn

$$(S \circ aA)(x) = \frac{aA(x)}{\langle aA(x), aA(x) \rangle} = \frac{1}{a} \frac{A(x)}{\langle x, x \rangle} = \left( \frac{1}{a}A \circ S \right)(x)$$

Mithin muß man  $L'_q$  durch  $L''_q := \frac{1}{a}A \circ L'_q$  ersetzen. Die Längen der freien Kanten am Punkt  $q$  werden also mit  $\frac{1}{a}$  multipliziert.

So fortfahrend erkennt man: Die Längen der freien Kanten an Ecken mit geradem bzw. ungeradem Abstand zu  $p$  werden mit  $a$  bzw.  $\frac{1}{a}$  multipliziert. Die beiden Gewichtungen sind also im wesentlichen gleich.

Nun konstruieren wir noch eine konforme Mannigfaltigkeit  $M_\delta$ , die die Konstruktion von  $\delta$  widerspiegelt.

Dazu wählen wir zu jedem kritischen Punkt  $q$  von  $\psi$  eine Kopie von  $U_q = L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q) = U(r_1(q), r_2(q), r_3(q)) \subset \mathbb{R}_1^n$  und verkleben diese "Bausteine" für benachbarte kritische Punkte an den entsprechenden raumartigen oder zeitartigen Kegeln mit der Sphäreninverson  $S$  zusammen. So erhalten wir die Mannigfaltigkeit  $M_\delta$  mit einer lokal konform flachen Struktur (Möbiusstruktur), d.h. man hat einen Atlas, dessen Übergangsabbildungen konforme lokale Diffeomorphismen des  $\mathbb{R}_1^n$  sind.

Wichtig ist, daß wir zur Konstruktion von  $M_\delta$  nur das Gerüst von  $M$  mit den zwei zusätzlichen Daten "Zeitorientierung" und "Gewichtung" kennen mußten:

Die Zeitorientierung gestattet zu jeder Ecke  $q$  den raumartigen Kegel und die beiden zeitartigen Kegel in  $\mathbb{R}_1^n$  in eindeutiger Weise zu den drei von  $q$  ausgehenden Kanten in Beziehung zu setzen: den raumartigen Kegel mit der raumartigen Kante, den positiven Zeitkegel mit der zeitartigen Kante, die von  $q$  wegweist, und den negativen Zeitkegel mit der anderen zeitartigen Kante. Die Gewichtung bestimmt dann die Größe von  $U_q = U(r_1(q), r_2(q), r_3(q)) \subset \mathbb{R}_1^n$ . Die zu nicht-freien Kanten gehörenden  $r_i$  bekommen den Absolutwert  $\infty : |r_i(q)| = \infty$ .

Nun gibt der Graph darüber Auskunft, welche Bausteine  $U_q$  entlang welcher Kegel mit der Sphäreninversion  $S$  verklebt werden sollen. Aufgrund der Zeitorientierung wird dabei längs einer verbindenden zeitartigen Kante immer ein positiver Zeitkegel mit einem negativen Zeitkegel verklebt, d.h.  $S$  ist wirklich ein Diffeomorphismus zwischen diesen zu identifizierenden Kegeln.

Durch  $M \supset B_q \xleftarrow{\exp_q} \tilde{B}_q \xrightarrow{L'_q \circ K_q} L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q) = U_q \subset M_\delta$  für jeden kritischen Punkt  $q$  wird sodann ein konformer Diffeomorphismus  $\gamma : M \rightarrow M_\delta$  definiert. Die Abwicklung  $\delta$  läßt sich schreiben als  $\delta = \hat{\delta} \circ \gamma$ , wobei  $\hat{\delta} : M_\delta \rightarrow Q_1^n$  die Abwicklung von  $M_\delta$  ist, die auf  $U_q = L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q)$  gegeben ist durch  $i$  oder  $j$ , je nachdem, wie dort  $\delta$  erklärt ist.

Aus obigen Ausführungen ergibt sich folgender Satz:

### Satz 3.1

Sind für zwei abwickelbare Lorentz-Mannigfaltigkeiten  $M_1$  und  $M_2$ , die je die Bedingung (\*) erfüllen, die Gerüste isomorph und sind für zwei nach Abschnitt 3.3 konstruierte Abwicklungen  $\delta_1 : M_1 \rightarrow Q_1^n$  und  $\delta_2 : M_2 \rightarrow Q_1^n$  die induzierten Zeitorientierungen und Gewichtungen der Gerüste unter dieser Isomorphie im wesentlichen gleich, so sind  $M_1$  und  $M_2$  konform diffeomorph.

#### Beweis:

Man kann die Abwicklung  $\delta_2 : M_2 \rightarrow Q_1^n$  durch einen geeigneten Startwert so abändern, daß die Zeitorientierungen und Gewichtungen unter dem Isomorphismus der Gerüste gleich werden. Dann ist  $M_{\delta_1} = M_{\delta_2}$ .  $\square$

### 3.5. Konforme Klassifikation

Ziel dieses Abschnitts ist eine teilweise Umkehrung des letzten Satzes.

Zunächst halten wir zwei Eigenschaften fest, die alle im Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen  $\delta$  haben.

$\delta$  bildet die kritischen Punkte von  $\psi$  und nur diese auf  $i(0), j(0) \in Q_1^n$  ab.

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \delta(M) &\subset i(\mathbb{R}_1^n) \cup j(\mathbb{R}_1^n) \\ &= \{ \pi(x_0, x, x_{n+1}) \mid (x_0, x, x_{n+1}) \in \Gamma_2^{n+2} \text{ mit } x_0 + x_{n+1} \neq 0 \vee x_0 - x_{n+1} \neq 0 \} \\ &= Q_1^n \setminus \{ \pi(0, x, 0) \mid (0, x, 0) \in \Gamma_2^{n+2} \} \\ &= Q_1^n \setminus \{ \pi(0, x, 0) \mid x \in \Gamma_1^n \} \\ &= Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \end{aligned}$$

mit  $Q_0^{n-2} = \pi(\Gamma_1^n) \cong \pi(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \subset Q_1^n$ .

**Satz 3.2**

Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei Lorentz-Mannigfaltigkeiten die je die Bedingung (\*) erfüllen mit den Funktionen  $\psi_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiter sei  $M_1$  abwickelbar und für irgendeine Abwicklung  $\delta$  von  $M_1$  sei  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .

Dann ist jeder konforme Diffeomorphismus  $F : M_1 \rightarrow M_2$  flußlinientreu und induziert in natürlicher Weise einen Isomorphismus der als Teilmengen realisierten Gerüste von  $M_1$  und  $M_2$ .

Weiter sind für zwei geeignete Abwicklungen  $\delta_1 : M_1 \rightarrow Q_1^n$  und  $\delta_2 : M_2 \rightarrow Q_1^n$  die induzierten Zeitorientierungen und Gewichtungen unter diesem Isomorphismus der Gerüste gleich.

**Beweis:**

Mit  $M_1$  ist auch  $M_2$  abwickelbar mit Abwicklung  $\delta \circ F^{-1}$ .

Sei  $p_1 \in M_1$  ein kritischer Punkt von  $\psi_1$ . Wähle dazu einen kritischen Punkt  $p_2$  von  $\psi_2$  mit  $F(p_1) \in B_{p_2}$ .

Weiter seien die Abwicklungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  gemäß Abschnitt 3.3 konstruiert mit den Startwerten

$$B_{p_1} \xleftarrow{\exp_{p_1}} \tilde{B}_{p_1} \xrightarrow{L_{p_1} \circ K_{p_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

und

$$B_{p_2} \xleftarrow{\exp_{p_2}} \tilde{B}_{p_2} \xrightarrow{L_{p_2} \circ K_{p_2}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

mit zunächst beliebigen orthogonalen Abbildungen  $L_{p_1}$  und  $L_{p_2}$ , die aber schon so gewählt seien, daß  $F$  ein zeitorientierungstreuer konformer Diffeomorphismus ist bzgl. der durch  $\delta_1$  und  $\delta_2$  induzierten Zeitorientierungen.

Man hat dann folgendes kommutative Diagramm für ein geeignetes  $A \in \mathcal{O}(2, n)$

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \end{array} \quad (3.7)$$

Wegen der Voraussetzung  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  gilt  $\delta_1(M_1) = \delta_2(M_2) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ ; denn es existiert ein  $C \in \mathcal{O}(2, n)$ , so daß folgendes Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{ccc} & M_1 & \\ \delta \swarrow & & \searrow \delta_1 \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_C} & Q_1^n \end{array}$$

Daher



$$\begin{aligned}
& \phi_C \circ \delta(M_1) = \delta_1(M_1) \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}) \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_0^{n-2}) \supset Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \pi \circ C(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \supset \pi(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \\
\Rightarrow & \forall x \in \Gamma_1^n \exists y \in \Gamma_1^n \exists \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mu C(0, y, 0) = (0, x, 0) \\
\Rightarrow & C(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) \supset \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\} = \text{span}(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \\
\Rightarrow & C(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) = \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\} \quad (\text{da } C \text{ linearer Isomorphismus}) \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_0^{n-2}) = Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \delta_1(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}
\end{aligned}$$

und analog  $\delta_2(M_2) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .

Mithin ist

$$\begin{aligned}
& \phi_A(Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}) = \phi_A(\delta_1(M_1)) = \delta_2(M_2) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_A(Q_0^{n-2}) = Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & A(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) = \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}
\end{aligned}$$

Also  $A(0, x, 0) = (0, w(x), 0)$  für alle  $x \in \mathbb{R}_1^n$  mit  $w \in \mathcal{O}(1, n-1)$  (vgl. S. 43).

Wir bestimmen jetzt  $A$  noch etwas genauer.

Seien  $A(1, 0, 1) = (a, v_1, b)$  und  $A(1, 0, -1) = (c, v_2, d)$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_1^n$ .  
Dann gilt, da  $A \in \mathcal{O}(2, n)$ :

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 0, 1) \cdot (0, x, 0) = (a, v_1, b) \cdot (0, w(x), 0) = \langle v_1, w(x) \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n \\
\Rightarrow & v_1 = 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt  $v_2 = 0$ .

Weiter

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) = (a, 0, b) \cdot (a, 0, b) = -a^2 + b^2 \\
\Rightarrow & |a| = |b| \neq 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt  $|c| = |d| \neq 0$ .

Da  $A$  injektiv ist, ist

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a) \wedge A(1, 0, -1) = (c, 0, -c)$$

oder

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, -a) \wedge A(1, 0, -1) = (c, 0, c).$$

Wegen

$$-2 = (1, 0, 1) \cdot (1, 0, -1) = A(1, 0, 1) \cdot A(1, 0, -1) = -ac - ac = -2ac$$

ist  $c = 1/a$ .

Nun sei  $U \subset B_{p_1}$  eine Umgebung von  $p_1$ , so daß  $F(U) \subset B_{p_2}$ . Dann hat man mit  $V := L_{p_1} \circ K_{p_1} \circ (\exp_{p_1}|_{B_{p_1}}^{-1})(U)$  folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \\ & & i \uparrow & & \uparrow i \\ \mathbb{R}_1^n \supset U_{p_1} \supset & V & \xrightarrow{\Omega} & U_{p_2} & \subset \mathbb{R}_1^n \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & B_{p_1} \supset U & \xrightarrow{F|U} & B_{p_2} & \end{array}$$

Für alle  $x \in V$  hat man

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= i^{-1} \circ \phi_A \circ i(x) \\ &= i^{-1} \circ \pi \circ A(1 + \langle x, x \rangle, 2x, 1 - \langle x, x \rangle) \\ &= i^{-1} \circ \pi \circ A((1, 0, 1) + 2(0, x, 0) + \langle x, x \rangle(1, 0, -1)) \\ &= i^{-1} \circ \pi(A(1, 0, 1) + 2A(0, x, 0) + \langle x, x \rangle A(1, 0, -1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} i^{-1} \circ \pi((a, 0, a) + 2(0, w(x), 0) + \langle x, x \rangle \left(\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a}\right)) \\ i^{-1} \circ \pi((a, 0, -a) + 2(0, w(x), 0)) + \langle x, x \rangle \left(\frac{1}{a}, 0, \frac{1}{a}\right) \end{cases} \quad \text{oder} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{a}w(x) \\ a \frac{w(x)}{\langle x, x \rangle} \end{cases} \quad \text{oder}
\end{aligned}$$

Da  $0 \in V$  ist, muß notwendig gelten

$$\Omega(x) = \frac{1}{a}w(x) \quad \forall x \in V$$

Daher  $\Omega(0) = 0$  und das heißt  $F(p_1) = p_2$ .

Über  $A$  weiß man jetzt

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a) \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A(0, x, 0) = (0, w(x), 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n$$

$$A(1, 0, -1) = \left(\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a}\right).$$

Sei o.B.d.A.  $a > 0$ . (Sonst ersetze  $A$  durch  $-A$ .)

$F$  ist zeitorientierungstreu. Also  $w \in \mathcal{O}^+(1, n-1)$ .

Es sind  $i(0) = \pi(1, 0, 1)$  und  $j(0) = \pi(1, 0, -1)$  Fixpunkte von  $\phi_A$ . Wegen Diagramm (3.7) und da  $\delta_1$  und  $\delta_2$  genau die kritischen Punkte auf  $i(0)$  oder  $j(0)$  abbilden, bildet  $F$  die kritischen Punkte von  $\psi_1$ , und nur diese, auf die kritischen Punkte von  $\psi_2$  ab.

*Zwischenbehauptung* : Die Abbildung  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$  bildet  $U_{p_1}$  in  $U_{p_2}$  ab.

*Beweis* : Es ist

$$U_{p_1} = U(r_1(p_1), r_2(p_1), r_3(p_1)) \subset \mathbb{R}_1^n$$

und

$$U_{p_2} = U(r_1(p_2), r_2(p_2), r_3(p_2)) \subset \mathbb{R}_1^n$$

Die Abbildung  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$  bildet  $\Gamma_1^n \subset U_{p_1}$  auf  $\Gamma_1^n \subset U_{p_2}$  ab. Falls  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$  nicht  $U_{p_1}$  in  $U_{p_2}$  abbildet, muß es ein  $\nu \in \{1, 2, 3\}$  geben, so daß

$$|r_\nu(p_2)| < \frac{1}{a} |r_\nu(p_1)| .$$

Für ein solches  $\nu$  betrachten wir  $U^\pm(ar_\nu(p_2)) \subset U^\pm(r_\nu(p_1)) \subset U_{p_1}$  und  $U^\pm(r_\nu(p_2)) \subset U_{p_2}$  ( das Vorzeichen  $\pm$  hängt vom Index  $\nu$  ab; ”+” für  $\nu = 1$  und ”-” für  $\nu = 2, 3$  ). Man hat folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n & \\
 & \uparrow i & & \uparrow i & \\
 \delta_1 & U^\pm(ar_\nu(p_2)) & \xrightarrow{\frac{1}{a}w} & U^\pm(r_\nu(p_2)) & \delta_2 \\
 & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & \\
 & B_{p_1} & \xrightarrow{F} & M_2 & 
 \end{array} \quad (3.8)$$

mit  $\varphi_m := \exp_{p_m} \circ (L_{p_m} \circ K_{p_m})^{-1}$ ,  $m = 1, 2$  .

Hierbei ist das obere Rechteck kommutativ, da das untere Rechteck und das äußere Rechteck kommutativ sind.

Sei nun  $x \in \mathbb{R}_1^n$  aus dem zu  $U^\pm(r_\nu(p_1))$  gehörenden Kegel mit  $|\langle x, x \rangle| = 1$  . Es ist die Kurve

$$t \mapsto \varphi_1(t \cdot ax) , \quad 0 \leq t \leq |r_\nu(p_2)| ,$$

der Spur nach eine Geodäte in  $M_1$  und eine Flußlinie von  $\text{grad } \psi_1$  , die von  $p_1$  nach

$$q := \varphi_1(|r_\nu(p_2)| \cdot ax) \in B_{p_1}$$

führt. Weiter ist

$$t \mapsto \varphi_2(t \cdot w(x)) , \quad 0 \leq t < |r_\nu(p_2)|$$

der Spur nach gleich einer Geodäten in  $M_2$  und gleich einer Flußlinie von  $\text{grad } \psi_2$  . Sei  $c : [0, \infty) \rightarrow M_2$ ,  $s \mapsto c(s)$ ,  $c(0) = p_2$ , die Parametrisierung dieser Geodäten nach der Bogenlänge. Der Bewegung  $t \rightarrow |r_\nu(p_2)|$  entspricht die Bewegung  $s \rightarrow \infty$  . (Da  $|r_\nu(p_2)| < \infty$  kann es in der zu  $r_\nu(p_2)$  gehörenden Richtung keinen zu  $p_2$  benachbarten kritischen Punkt von  $\psi_2$  geben und  $\tilde{B}_{p_2}$  ist daher in dieser Richtung unbeschränkt.) Da das obere Rechteck in (3.8) kommutativ ist, folgt

$$\varphi_2(t \cdot w(x)) = F \circ \varphi_1(t \cdot ax) , \quad 0 \leq t < |r_\nu(p_2)| ,$$

und

$$\lim_{t \rightarrow |r_\nu(p_2)|} \varphi_2(t \cdot w(x)) = \lim_{t \rightarrow |r_\nu(p_2)|} F \circ \varphi_1(t \cdot ax) = F(q) .$$

Schaut man sich den Fluß von  $\text{grad } \psi_2$  in einer Umgebung von  $F(q)$  an, so sieht man, daß es keine Geodäte  $c$  in  $M_2$  geben kann, die der Spur nach eine Flußlinie von  $\text{grad } \psi_2$  ist mit  $\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = F(q)$ .

Also bildet  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$   $U_{p_1}$  in  $U_{p_2}$  ab.

*Ende des Beweises der Zwischenbehauptung.*

Wendet man die gleichen Überlegungen auf  $F^{-1}$  an, so folgt

$$\frac{1}{a}w(U_{p_1}) = U_{p_2} .$$

Ersetzt man in Diagramm (3.8) die mittlere Zeile durch  $U_{p_1} \xrightarrow{\frac{1}{a}w} U_{p_2}$ , so folgt

$$F(B_{p_1}) = B_{p_2} .$$

Anders formuliert haben wir die Abbildung  $G$  in folgendem kommutativen Diagramm auf  $U_{p_1} \subset M_{\delta_1}$  bestimmt als  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n & \\
 & \hat{\delta}_1 \uparrow & & \uparrow \hat{\delta}_2 & \\
 \delta_1 & M_{\delta_1} & \xrightarrow{G} & M_{\delta_2} & \delta_2 \\
 & \gamma_1 \uparrow & & \uparrow \gamma_2 & \\
 & M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 & 
 \end{array}$$

Ist nun  $q_1$  ein zu  $p_1$  in raumartiger oder zeitartiger Richtung benachbarter kritischer Punkt, so ist der kritische Punkt  $q_2 := F(q_1)$  zu  $p_2$  in raumartiger oder zeitartiger Richtung benachbart, denn  $F$  bildet die raumartigen oder zeitartigen Flußlinien von  $\text{grad } \psi_1$ , die von  $p_1$  nach  $q_1$  führen, der Spur nach auf ebensolche von  $p_2$  nach  $q_2$  ab.

Die obigen Überlegungen gelten für jeden anderen kritischen Punkt von  $\psi_1$  an Stelle von  $p_1$  (mit dann evtl. anderen Abwicklungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$ ). Also ist  $F$  flußlinientreu und liefert in natürlicher Weise einen Isomorphismus der als Teilmengen realisierten Gerüste von  $M_1$  und  $M_2$ .

Da  $F$  zeitorientierungstreu bzgl. der durch  $\delta_1$  und  $\delta_2$  induzierten Zeitorientierungen ist, überführt dieser Isomorphismus der Gerüste die Zeitorientierung der Gerüste von  $M_1$  und  $M_2$  ineinander.

Kommen wir nochmals auf die benachbarten kritischen Punkte  $p_1$  und  $q_1$  bzw.  $p_2$  und  $q_2$  zurück.

Aufgrund der obigen Überlegungen ist auch

$$F(B_{q_1}) = B_{q_2} .$$

Wir wollen noch die Abbildung  $G|_{U_{q_1}}$  in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
& Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \\
& \uparrow j & & \uparrow j \\
\delta_1 & U_{q_1} & \xrightarrow{G|U_{q_1}} & U_{q_2} & \delta_2 \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& B_{q_1} & \xrightarrow{F|B_{q_1}} & B_{q_2} & 
\end{array}$$

berechnen. Für alle  $x \in U_{q_1}$  gilt:

$$\begin{aligned}
G|U_{q_1}(x) &= j^{-1} \circ \phi_A \circ j(x) \\
&= j^{-1} \circ \phi_A \circ \pi( (1 + \langle x, x \rangle, 2x, \langle x, x \rangle - 1) ) \\
&= j^{-1} \circ \pi( A(1, 0, -1) + 2A(0, x, 0) + \langle x, x \rangle A(1, 0, 1) ) \\
&= j^{-1} \circ \pi\left( \left( \frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a} \right) + 2(0, w(x), 0) + \langle x, x \rangle (a, 0, a) \right) \\
&= aw(x) .
\end{aligned}$$

So fortfahrend erkennt man, daß  $G : M_{\delta_1} \rightarrow M_{\delta_2}$  von der Form  $M_{\delta_1} \supset U_{\bar{q}_1} \xrightarrow{\frac{1}{a}w} U_{\bar{q}_2} \subset M_{\delta_2}$  ist, falls  $\bar{q}_1 \in Cr(\psi_1)$  im Gerüst von  $M_1$  einen geraden Abstand von  $p_1$  hat und von der Form  $M_{\delta_1} \supset U_{\bar{q}_1} \xrightarrow{aw} U_{\bar{q}_2} \subset M_{\delta_2}$  ist für einen ungeraden Abstand.

Ersetzt man im Startwert für  $\delta_2$  die orthogonale Abbildung  $L_{p_2}$  durch  $aw^{-1} \circ L_{p_2}$  so ist  $G|U_{\bar{q}_1} : U_{\bar{q}_1} \rightarrow U_{F(\bar{q}_1)}$  die Identität für alle  $\bar{q}_1 \in Cr(\psi_1)$ , insbesondere  $U_{\bar{q}_1} = U_{F(\bar{q}_1)}$ .

Dann sind auch die Längen von einander entsprechenden freien Kanten an  $\bar{q}_1$  und  $F(\bar{q}_1)$  gleich.  $\square$

### Bemerkungen:

- 1) Kurz gesagt bildet  $F$  kritische Punkte auf kritische Punkte ab, weil  $\{i(0), j(0)\} \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  invariant unter der konformen Gruppe von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist.
- 2) Wir werden weiter unten sehen, daß man auf die Voraussetzung  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  nicht verzichten kann. Dann geht eventuell die Eigenschaft verloren, daß *jeder* konforme Diffeomorphismus  $F : M_1 \rightarrow M_2$  flußlinientreu ist.
- 3) Die Eigenschaft  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist für die nach Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen sicher dann erfüllt, wenn  $\psi_1$  mindestens zwei kritische Punkte hat und das Vektorfeld  $\text{grad } \psi_1$  vollständig ist. Es gibt aber Beispiele von Lorentz-Mannigfaltigkeiten  $M_1$  mit beliebig vielen kritischen Punkten von  $\psi_1$  und  $\delta(M_1) \not\subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  (vgl. Satz 4.1 und S. 73).

- 4) Im Fall der Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , ist das Gerüst von  $M_1$  immer ein linearer Graph, die Mannigfaltigkeit  $M_1$  also abwickelbar. Hat dann  $\psi_1$  mindestens drei kritische Punkte oder zwei kritische Punkte und ist das Vektorfeld  $\text{grad } \psi_1$  vollständig, so ist  $\delta(M_1) = Q_k^n \setminus Q_{k-1}^{n-2}$ , für die analog zu Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen.

### 3.6 Zwei weitere globale Sätze

Wir wollen jetzt unter etwas schwächeren Voraussetzungen als in Satz 3.2 zeigen, daß das Gerüst eine konforme Invariante ist.

Sei dazu  $(M, g)$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die die Bedingung (\*) zusammen mit der Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt.

Sei weiter  $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$  die universelle Überlagerung von  $M$  und  $\widehat{g}$  die Metrik auf  $\widehat{M}$ , die  $\pi$  zu einer lokalen Isometrie macht.

Dann erfüllen  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  und  $\widehat{\psi} := \psi \circ \pi$  die Bedingung (\*). Dabei liegen die kritischen Punkte von  $\widehat{\psi}$  über den kritischen Punkt von  $\psi$ . Für  $p \in Cr(\psi)$  und  $\widehat{p} \in \pi^{-1}(p)$  ist  $\pi|_{B_{\widehat{p}}} : B_{\widehat{p}} \rightarrow B_p$  eine Isometrie. Weiter ist jeder Lift  $\widehat{c}$  einer direkten geodätischen Verbindung  $c$  zweier benachbarter kritischer Punkte  $p, q \in Cr(\psi)$  eine direkte geodätische Verbindung zwischen den Endpunkten  $\widehat{p}, \widehat{q} \in Cr(\widehat{\psi})$  von  $\widehat{c}$ .

#### Bemerkung:

Ist  $\mathcal{G}$  eine Realisierung des Gerüsts von  $M$  als Teilmenge von  $M$ , so ist  $\widehat{\mathcal{G}} := \pi^{-1}(\mathcal{G})$  aufgrund der obigen Feststellungen eine Realisierung des Gerüsts von  $\widehat{M}$  als Teilmenge von  $\widehat{M}$ . Versieht man  $\mathcal{G}$  und  $\widehat{\mathcal{G}}$  mit der Teilraumtopologie, so ist  $\pi|_{\widehat{\mathcal{G}}} : \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  eine Überlagerung. Nach Lemma 4.1 in Kapitel 4 ist  $\widehat{\mathcal{G}}$  ein Baum, also einfach zusammenhängend. Daher ist  $\pi|_{\widehat{\mathcal{G}}} : \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  die universelle Überlagerung von  $\mathcal{G}$ . Von dieser Bemerkung werden wir in Kapitel 4 Gebrauch machen.

Nun gilt folgender Satz:

#### Satz 3.3

$(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  seien zwei Lorentz-Mannigfaltigkeiten die zusammen mit  $\psi_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Bedingung (\*) erfüllen. Gilt für eine Abwicklung  $\delta$  von  $(\widehat{M}_1, \widehat{g}_1)$ , der universellen Überlagerung von  $M_1$ , daß  $\delta(\widehat{M}_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist, so ist jeder konforme Diffeomorphismus  $F : M_1 \rightarrow M_2$  flußlinientreu und induziert in natürlicher Weise einen Isomorphismus der Gerüste.

#### Anmerkung:

Da  $M_1$  und  $M_2$  nicht notwendig abwickelbar sind, tragen ihre Gerüste nicht die zwei zusätzlichen Daten "Zeitorientierung" und "Gewichtung". Da man diese Daten nicht hat, kann man auch keine Aussage darüber machen, ob der durch  $F$  gegebene Isomorphismus diese erhält.

**Beweis:**

Man hat folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}_1 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \end{array}$$

mit einem Lift  $\widehat{F}$  von  $F \circ \pi_1$ .

Es ist  $\widehat{F}$  ein konformer Diffeomorphismus.

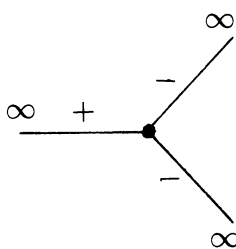
Sei nun  $p_1 \in Cr(\psi_1)$ . Wähle  $\widehat{p}_1 \in \pi_1^{-1}(p_1)$ . Nach Satz 3.2 ist  $\widehat{p}_2 := \widehat{F}(\widehat{p}_1) \in Cr(\widehat{\psi}_2)$  und damit  $p_2 := F(p_1) = \pi_2(\widehat{p}_2) \in Cr(\psi_2)$ . Wegen  $\widehat{F}(B_{\widehat{p}_1}) = B_{\widehat{p}_2}$  ist  $F(B_{p_1}) = B_{p_2}$  und  $F|_{B_{p_1}}$  flußlinientreu.  $\square$

Nun gibt es, wie die folgenden Beispiele zeigen, auf den Standardräumen konstanter Schnittkrümmung jeweils Funktionen, so daß die Bedingung (\*) erfüllt ist. Die Standardräume sind abwickelbar. Die Bilder der nach Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen sind alle echte Teilmengen von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ , d.h. die Voraussetzung von Satz 3.2 ist nicht erfüllt.

**1. Beispiel** (pseudo-Euklidischer Raum)

Der pseudo-Euklidische Raum  $\mathbb{R}_1^n$  zusammen mit der Funktion  $\psi : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1/2 \langle x, x \rangle$ , erfüllt die Bedingung (\*). Es ist  $\text{grad } \psi(x) = x$  und  $\nabla_X \text{grad } \psi = X$  für alle Vektorfelder  $X$  auf  $\mathbb{R}_1^n$ .

$i : \mathbb{R}_1^n \rightarrow Q_1^n$  ist gleich einer nach Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklung und  $i(\mathbb{R}_1^n) \subsetneq Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ . Das gewichtete Gerüst von  $\mathbb{R}_1^n$  bzgl. dieser Abwicklung ist

**2. Beispiel** (pseudo-hyperbolischer Raum) (vgl. [KR1] Beispiel 3.9.)

Es ist der pseudo-hyperbolische Raum  $\mathbb{H}_1^n := S(-1) \subset \mathbb{R}_2^{n+1}$ . Für festes  $v \in \mathbb{R}_2^{n+1}$  ist die Höhenfunktion  $\psi_v : \mathbb{H}_1^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \langle p, v \rangle$  eine Funktion mit konformen Gradienten.

Sei nun  $v \in S(-1)$ . Dann hat  $\psi_v$  die beiden kritischen Punkte  $v$  und  $-v$ .

Die Geodäten von  $\mathbb{H}_1^n$  sind die Schnitte von zweidimensionalen linearen Teilräumen von  $\mathbb{R}_2^{n+1}$  mit  $S(-1)$ . Aus dieser Tatsache folgert man, daß  $\mathbb{H}_1^n$   $Cr(\psi_v)$ -vollständig ist. Also erfüllt  $\mathbb{H}_1^n$  mit der Funktion  $\psi_v$ ,  $v \in S(-1)$ , die Bedingung (\*).



Die Exponentialabbildung in  $q \in \mathbb{H}_1^n$  schreibt sich mit der Identifikation  $T_q \mathbb{H}_1^n \cong \{x \in \mathbb{R}_2^{n+2} \mid \langle x, q \rangle = 0\}$  :

$$\exp_q(r \cdot x) = \begin{cases} \cosh r \cdot q + \sinh r \cdot x & , \quad \langle x, x \rangle = 1 \\ q + r \cdot x & , \quad \langle x, x \rangle = 0 \\ \cos r \cdot q + \sin r \cdot x & , \quad \langle x, x \rangle = -1 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad (3.9)$$

Daher ist in Polarkoordinaten um  $v$

$$\tilde{\psi}_{v,+}(r) = -\cosh r \quad \wedge \quad \tilde{\psi}_{v,-}(r) = -\cos r ,$$

und um  $-v$

$$\tilde{\psi}_{v,+}(r) = \cosh r \quad \wedge \quad \tilde{\psi}_{v,-}(r) = \cos r .$$

In beiden Fällen erhält man für die Funktionen  $f_{\pm}$  und  $\rho_{\pm}$  aus Kapitel 2, S. 33/34:

$$f_+(r) = \sinh r \quad \wedge \quad f_-(r) = \sin r$$

und

$$\rho_+(r) = 2 \tanh \frac{r}{2} \quad \wedge \quad \rho_-(r) = 2 \tan \frac{r}{2} .$$

Also für die Mengen  $U_{\pm v}$  (vgl. S. 50)

$$U_{\pm v} = U(2, +\infty, -\infty)$$

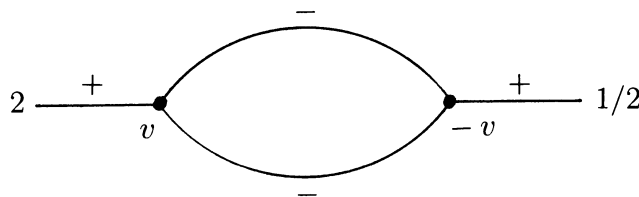
und für den Faktor  $a$  nach Gleichung (3.2)

$$a = \rho_-(r) \cdot \rho_-(\pi - r) = 2 \tan \frac{r}{2} \cdot 2 \tan \frac{\pi - r}{2} = 4 .$$

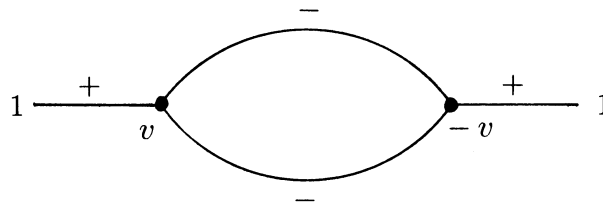
Für die Abwicklung von  $\mathbb{H}_1^n$  nach Abschnitt 3.3 mit dem Startwert

$$B_v \xleftarrow{\exp_v} \tilde{B}_v \xrightarrow{K_v} T_v \mathbb{H}_1^n \xrightarrow{L_v} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

( $L_v$  eine orthogonale Abbildung) sieht das gewichtete Gerüst so aus



Falls man  $L_v$  durch  $L'_v := \frac{1}{2}L_v$  ersetzt, erhält man



Für die zuletzt betrachtete Abwicklung  $\delta$  ist

$$\begin{aligned} \delta(\mathbb{H}_1^n) &= i(\{x \mid \langle x, x \rangle < 1\}) \cup j(\{x \mid \langle x, x \rangle < 1\}) \\ &= \pi(\{(x_0, x, x_{n+1}) \in \Gamma_2^{n+2} \mid x_{n+1} \neq 0\}) \\ &\subsetneq Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \end{aligned}$$

Wir wollen noch die Abwicklung  $\delta$  für  $v = e_1$  und ein spezielles  $L_v$  berechnen, da sie eine besonders einfache Gestalt hat.

Es ist nach (3.9) für  $p \in B_v$  ( $r = \text{Radius in Polarkoordinaten}$ ) :

$$\exp_v^{-1}(p) = \begin{cases} (p + \langle p, v \rangle v) \frac{r}{\sinh r} & , \langle p, v \rangle < -1 \\ p + \langle p, v \rangle v & , \langle p, v \rangle = -1 \\ (p + \langle p, v \rangle v) \frac{r}{\sin r} & , \langle p, v \rangle > -1 \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} K_v \circ \exp_v^{-1}(p) &= \begin{cases} (p + \langle p, v \rangle v) \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{2}} & , \langle p, v \rangle < -1 \\ p + \langle p, v \rangle v & , \langle p, v \rangle = -1 \\ (p + \langle p, v \rangle v) \frac{1}{\cos^2 \frac{r}{2}} & , \langle p, v \rangle > -1 \end{cases} \\ &= 2 \frac{2 + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} . \end{aligned}$$

Daher ist für  $p \in B_v$ :

$$\begin{aligned}
 \delta(p) &= i \circ \frac{1}{2} L_v \left( 2 \frac{p + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} \right) \\
 &= i \circ L_v \left( \frac{p + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} \right) \\
 &= \pi \left( 1 + \frac{\langle p, v \rangle + 1}{\langle p, v \rangle - 1}, 2 L_v \left( \frac{p + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} \right), 1 - \frac{\langle p, v \rangle + 1}{\langle p, v \rangle - 1} \right) \\
 &= \pi(-\langle p, v \rangle, L_v(p + \langle p, v \rangle v), 1)
 \end{aligned}$$

Für  $v = e_1$  ist nun  $T_v \mathbb{H}_1^n = T_{e_1} \mathbb{H}_1^n \cong \{x \in \mathbb{R}_2^{n+1} \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_2^{n+1} \mid x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \cong \mathbb{R}_1^n$ . Nimmt man als  $L_{e_1}$  diese kanonische Identifikation, so ist für  $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{H}_1^n$ :

$$-\langle p, e_1 \rangle = p_1 \quad \wedge \quad L_{e_1}(p + \langle p, e_1 \rangle e_1) = (p_2, \dots, p_{n+1})$$

Daher läßt sich das zugehörige  $\delta$  schreiben als

$$\begin{array}{ccccc}
 \delta : \mathbb{H}_1^n & \xrightarrow{\iota} & \Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & Q_1^n \\
 p & \longmapsto & (p, 1) & \longmapsto & \pi(p, 1)
 \end{array}$$

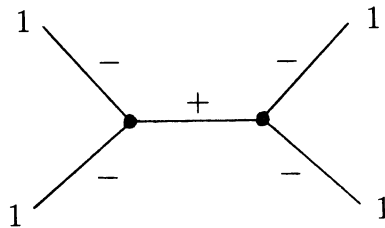
Aus diesem Diagramm kann man sofort ablesen, daß  $\delta$  eine konforme Immersion ist:  $\iota$  ist eine isometrische Immersion in den  $\mathbb{R}_2^{n+2}$  und  $\pi$  hat die Eigenschaft  $\pi^* g_{n,1} \Big|_x = \frac{2}{\|x\|} \cdot g_0$  auf  $T_x(\Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\}) \subset T_x \mathbb{R}_2^{n+2}$ ,  $x \in \Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\}$  (vgl. S. 13).

### 3. Beispiel (pseudo-Sphäre)

Analog wie im 2. Beispiel haben die Höhenfunktionen auf der pseudo-Sphäre  $S_1^n := S(+1) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$  einen konformen Gradienten. Die Abwicklung

$$\begin{array}{ccccc}
 \delta : S_1^n & \xrightarrow{\iota_1} & \Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & Q_1^n \\
 p & \longmapsto & (1, p) & \longmapsto & \pi(1, p)
 \end{array}$$

liefert als bewertetes Gerüst



also  $\delta(S_1^n) \not\subseteq Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .

Auf allen drei Räumen operiert die Isometriegruppe transitiv. Daher gibt es Isometrien auf diesen Räumen (insbesondere konforme Diffeomorphismen), die nicht flußlinientreu sind. Die Behauptung von Satz 3.2 gilt für diese Mannigfaltigkeiten also nicht.

Ist  $F$  ein konformer Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}_1^n$ ,  $\mathbb{H}_1^n$  oder  $S_1^n$  auf eine weitere Mannigfaltigkeit, so kann man  $F$  durch Komposition mit einem konformen Automorphismus von  $\mathbb{R}_1^n$ ,  $\mathbb{H}_1^n$  oder  $S_1^n$  so abändern, daß die Voraussetzung des folgenden Satzes erfüllt ist.

### Satz 3.4

Seien  $M_1, M_2$  zwei Lorentz-Mannigfaltigkeiten, die die Bedingung (\*) mit den Funktionen  $\psi_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen. Sei weiter  $F : M_1 \rightarrow M_2$  ein konformer Diffeomorphismus der mindestens einen kritischen Punkt von  $\psi_1$  auf einen kritischen Punkt von  $\psi_2$  abbildet. Dann ist  $F$  flußlinientreu und induziert einen Isomorphismus der Gerüste.

### Beweis:

Betrachte zunächst die universellen Überlagerungen von  $M_1$  und  $M_2$ . Man hat folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}_1 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \end{array}$$

Es seien  $p_1$  ein kritischer Punkt von  $\psi_1$  und  $p_2$  ein kritischer Punkt von  $\psi_2$  mit  $F(p_1) = p_2$ . Dann ist für jeden Punkt  $\widehat{p}_1 \in \widehat{M}_1$  über  $p_1$  der Punkt  $\widehat{p}_2 := \widehat{F}(\widehat{p}_1)$  ein kritischer Punkt von  $\widehat{\psi}_2$  über  $p_2$ . Wähle für  $\widehat{M}_1$  und  $\widehat{M}_2$  Abwicklungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  mit den Startwerten

$$B_{\widehat{p}_1} \xleftarrow{\exp_{\widehat{p}_1}} \widetilde{B}_{\widehat{p}_1} \xrightarrow{L_{\widehat{p}_1} \circ K_{\widehat{p}_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

und

$$B_{\widehat{p}_2} \xleftarrow{\exp_{\widehat{p}_2}} \widetilde{B}_{\widehat{p}_2} \xrightarrow{L_{\widehat{p}_2} \circ K_{\widehat{p}_2}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

mit irgendwelchen orthogonalen Abbildungen  $L_{\widehat{p}_1}$  und  $L_{\widehat{p}_2}$ .

Man hat für ein  $A \in \mathcal{O}(2, n)$  folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}_1 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{M}_2 \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \end{array}$$

Wegen  $\widehat{F}(\widehat{p}_1) = \widehat{p}_2$  und  $\delta_1(\widehat{p}_1) = \delta_2(\widehat{p}_2) = i(0)$  ist  $\phi_A(i(0)) = i(0)$ , also

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sei weiter  $A(0, x, 0) = (l_1(x), w(x), l_2(x))$  mit  $l_1, l_2 \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R})$ ,  $w \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}_1^n)$ . Es ist für alle  $x \in \mathbb{R}_1^n$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 0, 1) \cdot (0, x, 0) = (a, 0, a) \cdot (l_1(x), w(x), l_2(x)) = -al_1(x) + al_2(x) \\ \Rightarrow l_1(x) &= l_2(x). \end{aligned}$$

Nun ist  $i(\Gamma_1^n) \subset \delta_1(B_{\hat{p}_1}) \subset \delta_1(\widehat{M}_1)$ , also

$$\phi_A(i(\Gamma_1^n)) \subset \delta_2(\widehat{M}_2) \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}. \quad (3.10)$$

Außerdem ist für alle  $x \in \Gamma_1^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \phi_A(i(t \cdot x)) &= \phi_A \circ \pi(1, 2tx, 1) \\ &= \pi \circ A(1, 2tx, 1) \\ &= \pi \circ A((1, 0, 1) + 2t(0, x, 0)) \\ &= \pi((a, 0, a) + 2t(l_1(x), w(x), l_1(x))) \\ \Rightarrow a + 2tl_1(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \Gamma_1^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{wegen (3.10)}) \\ \Rightarrow l_1(x) &= 0 \quad \forall x \in \Gamma_1^n \\ \Rightarrow l_1(x) &= 0 \quad \forall x \in \text{span}(\Gamma_1^n) = \mathbb{R}_1^n \\ \Rightarrow A(0, x, 0) &= (0, w(x), 0) \quad \text{mit } w \in \mathcal{O}(1, n-1). \end{aligned}$$

Weiter folgt  $A(1, 0, -1) = \left(\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a}\right)$ . Nun kann man wie in Beweis von Satz 3.2, S. 56, fortfahren. Man erhält, daß  $\widehat{F}$  flußlinientreu ist und damit auch  $F$ .  $\square$

## Kapitel 4: Beispiele

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, welche Graphen als Gerüste von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft (\*) auftreten können.

### Satz 4.1

Erfüllt ein Graph  $\mathcal{G}$  die Eigenschaften 1) bis 5) aus Abschnitt 3.1 (S. 39/40), so gibt es zu jeder Zeitorientierung und jeder Gewichtung von  $\mathcal{G}$  eine zusammenhängende und abwickelbare Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  und eine nicht konstante Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Bedingung (\*) aus Kapitel 3 erfüllen, so daß  $\mathcal{G}$  das Gerüst von  $M$  ist und eine geeignete Abwicklung von  $M$  die gegebene Zeitorientierung und Gewichtung induziert.

### Bemerkung:

Auf jedem Graph  $\mathcal{G}$  der die Eigenschaften 1) bis 5) hat, gibt es eine Zeitorientierung. Dazu wählt man eine Richtung für eine zeitartige Kante. Diese setzt sich auf den maximalen zeitartigen Kantenzug, der die gegebene Kante enthält, eindeutig fort. Falls es noch weitere zeitartige Kanten gibt, wählt man für eine von ihnen eine Richtung und wiederholt das Verfahren, usw.

### Beweis:

Zunächst konstruieren wir die Werte der Funktion  $\psi$  in den Ecken. Dabei muß man beachten, daß für das Wachstum von  $\psi$  um einen kritischen Punkt nur die beiden folgenden Möglichkeiten gegeben sind:



Damit müssen die Funktionswerte von  $\psi$  in den Ecken verträglich sein. Daher kommt die folgende etwas längere und technische Überlegung.

Wir setzen eine Ecke von  $\mathcal{G}$  als Quelle (von  $\text{grad } \psi$ ) fest. Sodann sollen alle zu dieser Ecke benachbarten Ecken Senken sein und die zu diesen wieder benachbarten Ecken sollen Quellen sein, usw. Da jeder Zyklus von  $\mathcal{G}$  eine gerade Länge hat, gibt es bei dieser Definition keine Ecke, die sowohl Quelle als auch Senke sein soll.

Nun kann man  $\mathcal{G}$  mit einer Orientierung versehen, d.h. jede Kante erhält eine Richtung, die das Wachstum von  $\psi$  anzeigt. Diese Orientierung hat nichts mit der Zeitorientierung zu tun.

Jede Kante von  $\mathcal{G}$  hat als Ecken eine Quelle und eine Senke. Eine raumartige Kante soll von der Quelle zur Senke gerichtet sein und eine zeitartige Kante genau umgekehrt.

Dann sieht es um jeder Ecke so aus, wie oben gefordert. Wegen Eigenschaft 5) gibt es keine gerichteten Zyklen in  $\mathcal{G}$ . Daher definiert die Orientierung von  $\mathcal{G}$  eine Halbordnung " $<$ " auf der Menge der Ecke, wenn man vorher noch die transitive Hülle bildet, d.h. für jeden gerichteten Kantenzug führt man noch eine gleichgerichtete Kante zwischen seinen Endpunkten ein.

Gibt es dann noch nicht vergleichbare Ecken, so führt man zwischen zwei solchen Ecken irgendeine gerichtete Kante ein und bildet wieder die transitive Hülle, usw.

Ist  $\mathcal{G}$  endlich, so bricht dieses Verfahren ab und man hat eine Ordnung " $<$ " auf der Menge der Ecken. Hat  $\mathcal{G}$  abzählbar unendlich viele Ecken  $p_0, p_1, p_2, \dots$ , so kann man das Verfahren so führen, daß man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  nach endlich vielen Schritten auf  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  eine Ordnung hat, die sich dann im folgenden nicht mehr ändert. Dies definiert dann eine Ordnung " $<$ " auf  $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ .

Nun definieren wir  $\psi(p_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , induktiv.  
Setze  $\psi(p_0) := 0$ .

Falls  $p_1 < p_0$ , dann  $\psi(p_1) := -1$  und falls  $p_1 > p_0$ , dann  $\psi(p_1) := 1$ .

Sind  $\psi(p_0), \dots, \psi(p_{n-1})$  schon definiert, so sei

für  $p_n < p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ :  $\psi(p_n) := \min\{\psi(p_0), \dots, \psi(p_{n-1})\} - 1$ ,

für  $p_n > p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ :  $\psi(p_n) := \max\{\psi(p_0), \dots, \psi(p_{n-1})\} + 1$ ,

und sonst existieren eindeutig bestimmte Ecken  $p_k$  und  $p_l$ ,  $k, l \in \{1, \dots, n-1\}$  mit  $p_k < p_n < p_l$  und zwischen  $p_k$  und  $p_l$  liegen keine weiteren Ecken  $p_\nu$ ,  $\nu \in \{0, \dots, n-1\}$ . Dann setzt man

$$\psi(p_n) := \frac{1}{2}(\psi(p_k) + \psi(p_l)) .$$

Die so definierte Bewertung der Ecken ist mit der Ordnung " $<$ " und also auch mit der Orientierung von  $\mathcal{G}$  verträglich.

Nun definiert man für jede Ecke  $p_i$  eine Teilmenge  $B_i \subset \mathbb{R}_1^n$  der Form  $U(r_1, r_2, r_3)$ . Dabei soll  $r_1 = 1$  oder  $r_1 = \infty$  sein, falls die raumartige Kante, die von  $p_i$  ausgeht, zu einer anderen Ecke führt oder falls sie frei ist.  $r_2$  bzw.  $r_3$  werden analog nach der Art der zeitartigen Kante, die von  $p$  wegzeigt bzw. auf  $p$  hinzeigt (die Richtung ist die der Zeitorientierung), festgelegt.

Jetzt definieren wir auf  $B_i \setminus \Gamma_1^n$  eine Funktion  $\psi_i$  in Polarkoordinaten  $(r, x)$ .

Falls  $r \cdot x$  in einem Kegel liegt, der zu einer  $p_i$  mit  $p_j$  verbindenden Kante gehört, sei

$$\psi_i(r \cdot x) := \psi_{i,\eta}(r) := \psi(p_i) + \text{sign } c \cdot \int_0^{|r|} f_{|c|}(t) dt$$

wobei  $\eta = \langle x, x \rangle$ ,  $c := \psi(p_j) - \psi(p_i)$  und  $f_{|c|}$  die Funktion aus Lemma A7 (S. 93) ist.

Falls  $r \cdot x$  in einem Kegel liegt, der zu einer freien Kante der Länge  $l$  gehört, wähle zunächst eine  $C^\infty$ -Funktion  $\rho_l : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  mit den Eigenschaften

- i)  $\exists \varepsilon > 0 : \rho_l(t) = t, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon$
- ii)  $\rho'_l(t) > 0 \quad \forall t \in [0, \infty[$
- iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_l(t) = l.$

Setze  $h_l(t) := \frac{\rho_l(t)}{\rho'_l(t)}, \quad t \in [0, \infty[.$  (Dann ist  $\rho_l$  Lösung der Differentialgleichung  $\rho'_l = \frac{\rho_l}{h_l}.$ )

Nun definiere

$$\psi_i(r \cdot x) := \psi_{i,\eta}(r) := \psi(p_i) \pm \int_0^{|r|} h_l(t) dt, \quad \eta = \langle x, x \rangle,$$

wobei das Vorzeichen  $\pm$  so zu wählen ist, daß die Funktion  $\psi_i$  so in dem betrachteten Kegel wächst, wie es die Orientierung von  $\mathcal{G}$  fordert.

Dann gilt für  $r$  nahe bei Null  $\psi_{i,\eta}(r) = \psi(p_i) \pm \frac{1}{2}r^2$  und die Vorzeichen sind so gewählt, daß gilt

$$\psi_i(y) = \psi(p_i) \pm \frac{1}{2}\langle y, y \rangle$$

für alle  $y \in B_i \setminus \Gamma_1^n$  in einer Umgebung von  $\Gamma_1^n$ . Daher läßt sich  $\psi_i$  glatt auf  $B_i$  fortsetzen.

Weiter definiere in Polarkoordinaten  $(r, x)$  eine Metrik auf  $B_i \setminus \Gamma_1^n$  durch

$$g_i|_{(r,x)} := \eta dr^2 + (\psi'_{i,\eta}(r))^2 g_\eta, \quad \eta = \langle x, x \rangle.$$

Da  $|\psi'_{i,\eta}(r)| = |r|$  für alle hinreichend kleinen  $r$ , ist  $g_i|_y = g_0|_y$  für alle  $y \in B_i \setminus \Gamma_1^n$  in einer Umgebung von  $\Gamma_1^n$ . Also läßt sich auch  $g_i$  glatt auf  $B_i$  fortsetzen.

Es ist  $\text{grad } \psi_i$  ein konformes Vektorfeld auf  $(B_i, g_i)$  mit  $0 \in B_i$  als einzigem kritischen Punkt (vgl. [ON], Kapitel 7).

Nun werden je zwei Bausteine  $B_i$  und  $B_j$ , die zu benachbarten Ecken  $p_i$  und  $p_j$  in  $\mathcal{G}$  gehören, mittels der Identifikation

$$B_i \supset U^+(1) \ni (r, x) \leftrightarrow (1 - r, x) \in U^+(1) \subset B_j, \quad x \in S(+1)$$

verklebt, falls die verbindende Kante raumartig ist und mittels

$$B_i \supset U^-(1) \ni (r, x) \leftrightarrow (-1 + r, x) \in U^-(1) \subset B_j, \quad x \in S^0(-1)$$

falls die verbindende Kante zeitartig ist und von  $p_i$  nach  $p_j$  zeigt bzgl. der Zeitorientierung.

Es ist in diesen Fällen

$$\begin{aligned} \psi'_{i,+}(r) &= \text{sign}(c) f_{|c|}(r) \\ &= \text{sign}(c) f_{|c|}(1 - r) \quad (\text{Eigenschaft (v) aus Lemma A7}) \\ &= -\text{sign}(-c) f_{|-c|}(1 - r) \\ &= -\psi'_{j,+}(1 - r) \end{aligned}$$



und

$$\begin{aligned}
\psi'_{i,-}(r) &= \text{sign}(c) f_{|c|}(r) \\
&= -\text{sign}(-c) f_{|-c|}(1-r) \\
&= \psi'_{j,-}(-1+r).
\end{aligned}$$

In jedem Fall ist daher die Identifikation eine Isometrie und man hat auf  $M = \bigcup_i B_i / \sim$  eine Lorentz-Metrik  $g$  mit  $g|_{B_i} = g_i$ . Weiter ist

$$\begin{aligned}
\psi_{j,+}(1-r) &= \psi(p_j) + \text{sign}(-c) \int_0^{1-r} f_{|-c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + c + \text{sign}(-c) \int_0^{1-r} f_{|-c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + c - \text{sign}(c) \int_r^1 f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + \text{sign}(c) \int_0^1 f_{|c|}(t) dt - \text{sign}(c) \int_r^1 f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + \text{sign}(c) \int_0^r f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi_{i,+}(r)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi_{j,-}(-1+r) &= \psi(p_j) + \text{sign}(-c) \int_0^{|-1+r|} f_{|-c|}(t) dt \\
&= \psi(p_j) + \text{sign}(-c) \int_0^{1-r} f_{|-c|}(t) dt \\
&\quad \vdots \\
&= \psi(p_i) + \text{sign}(c) \int_0^r f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi_{i,-}(r).
\end{aligned}$$

Daher ist durch  $\psi|_{B_i} = \psi_i$  eine Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert. Es ist  $\text{grad } \psi$  ein konformes Vektorfeld auf  $M$  und die kritischen Punkte von  $\psi$  sind die Nullpunkte  $0 \in B_i$ . Man sieht leicht, daß  $M$   $Cr(\psi)$ -vollständig ist. Das Gerüst von  $M$  ist offensichtlich isomorph zu  $\mathcal{G}$ .

Nun betrachten wir die Wechselabbildungen nach Abschnitt 3.2, Gl. (3.1). Wegen Eigenschaft (iii) aus Lemma A7 ist der Faktor  $a$  in Gl. (3.2), S. 44, gleich Eins. Wählt man für

die orthogonalen Abbildungen  $L_i : T_0 B_i \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  die kanonische Identifikation  $T_0 \mathbb{R}_1^n \cong \mathbb{R}_1^n$ , so werden alle Wechselabbildungen in Gl. (3.1) gleich der Sphäreninversion  $S$ . Also ist die Mannigfaltigkeit  $M$  abwickelbar und die so erhaltene Abwicklung induziert die gegebene Zeitorientierung und Gewichtung von  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Als nächstes betrachten wir die Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit genau einem kritischen Punkt der Funktion  $\psi$  und werden sie konform klassifizieren.

Sei also  $M_1$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die die Bedingung (\*) erfüllt mit einer Funktion  $\psi_1$ , die genau einen kritischen Punkt hat. Nach S. 36 ist  $M_1$  konform diffeomorph zu  $U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) \subset \mathbb{R}_1^n$  mit gewissen  $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in ]0; \infty]$ ,  $\bar{r}_3 \in [-\infty, 0[$ . Im folgenden sei o.E.  $M_1 = U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ .

$M_1$  ist abwickelbar mit Abwicklung  $i|_{U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)} : U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) \rightarrow Q_1^n$ .

Ist nun  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die gleichfalls (\*) erfüllt und konform diffeomorph zu  $M_1$  ist, so ist auch  $M$  abwickelbar. Für  $M$  wählen wir eine nach Abschnitt 3.3 konstruierte Abwicklung  $\delta$ . Dann hat man folgendes kommutative Diagramm,  $F : M \rightarrow M_1$  ein konformer Diffeomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & M_1 \\ \delta \downarrow & & \downarrow i \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_{A_1}} & Q_1^n \end{array}$$

Sei nun  $p \in M$  ein kritischer Punkt, der durch  $\delta$  auf  $i(0) \in Q_1^n$  abgebildet wird. Sei  $T$  die Translation von  $\mathbb{R}_1^n$  die  $F(p)$  in 0 verschiebt. Man hat dann das folgende erweiterte Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{F} & M_1 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}_1^n \\ \delta \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_{A_1}} & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_{A_2}} & Q_1^n \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & \phi_A = \phi_{A_2 \cdot A_1} & & \end{array}$$

Es hat  $\phi_A$  die Eigenschaften

- i)  $\phi_A(i(0)) = i(0)$
- ii)  $\phi_A(i(\Gamma_1^n)) \subset i(\mathbb{R}_1^n)$

Daher folgt wie im Beweis zu Satz 3.4, daß

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A(0, x, 0) = (0, w(x), 0), \quad x \in \mathbb{R}_1^n, \quad w \in \mathcal{O}(1, n-1)$$

$$A(1, 0, -1) = \left( \frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a} \right).$$

Also ist  $\phi_A(j(0)) = \phi_A(\pi(1, 0, -1)) = j(0)$ .

Hätte nun  $M$  mehr als einen kritischen Punkt, so folgt

$$\begin{aligned} j(0) &\in \text{Bild } \delta \\ \Rightarrow j(0) &\in \text{Bild } (\phi_A \circ \delta) \subset \text{Bild } i, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Also liegt in  $M$  nur ein kritischer Punkt und  $M$  ist konform diffeomorph zu  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) \subset \mathbb{R}_1^n$ ,  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \in ]0; \infty]$ ,  $\bar{\rho}_3 \in [-\infty, 0[$ .

Ersetzt man im obigen Diagramm  $M$  durch  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$  und  $\delta$  durch  $i|_{U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)}$ , so erhält man für  $x \in U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$

$$\begin{aligned} T \circ F(x) &= i^{-1} \circ \phi_A \circ i(x) \\ &= \frac{1}{a} w(x) \end{aligned}$$

oder

$$F(x) = \frac{1}{a} w(x) + t, \quad t \in \mathbb{R}_1^n.$$

Es ist wieder o.E.  $a > 0$ .

Da  $x \mapsto \frac{1}{a} w(x) + t$  eine Bijektion von  $\mathbb{R}_1^n$  ist, gilt: Ist  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$  eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R}_1^n$  so auch  $U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$  und umgekehrt.

In diesem Fall, d.h.  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) \subsetneq \mathbb{R}_1^n$ , ist notwendig  $t = 0$ :

Der Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}_1^n$  ist der Schnittpunkt der Normalen der Randhyperflächen von  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$  und  $U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ .  $F$  bildet nun diese Randhyperflächen aufeinander ab und, da es eine winkeltreue affine Abbildung ist, die Normalen wieder auf Normalen. Also bildet  $F$  die Schnittpunkte der Normalen aufeinander ab, d.h.  $F(0) = 0$ , oder  $t = 0$ .

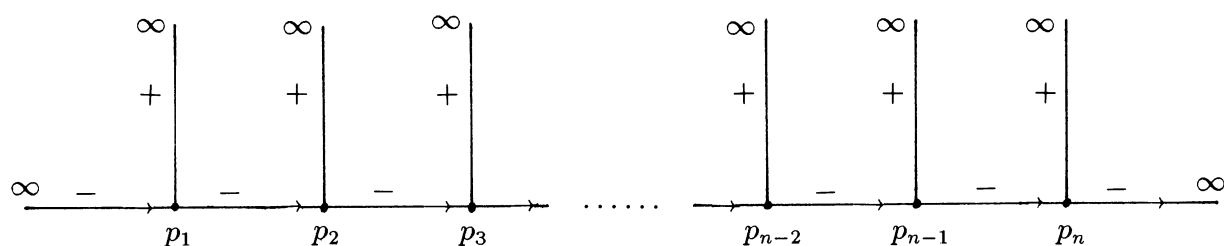
Für  $w \in \mathcal{O}^+(1, n-1)$  ist  $\bar{r}_i = \frac{1}{a} \bar{\rho}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  und für  $w \in \mathcal{O}^-(1, n-1)$  ist  $\bar{r}_1 = \frac{1}{a} \bar{\rho}_1$ ,  $\bar{r}_2 = -\frac{1}{a} \bar{\rho}_3$ ,  $\bar{r}_3 = -\frac{1}{a} \bar{\rho}_2$ .

In jedem Fall sind aber die Gerüste von  $M$  und  $M_1$  mit den zwei zusätzlichen Daten Zeitorientierung und Gewichtung im wesentlichen gleich.

Dies kann man noch etwas anders ausdrücken. Das Gerüst von  $M$  besteht aus einer Ecke mit drei freien Kanten, einer raumartigen und zwei zeitartigen, die je eine Länge haben. Unter Vernachlässigung der Zeitorientierung gilt hier: Die drei Längen der freien Kanten bilden, bis auf einen gemeinsamen positiven Faktor und bis auf die Reihenfolge der Längen der beiden zeitartigen Kanten, ein vollständiges System konformer Invarianten.

Jetzt werden wir mit Hilfe von Satz 4.1 auf  $\mathbb{R}^n$  mit der gewöhnlichen differenzierbaren Struktur unendlich viele lokal konform flache Lorentz-Metriken konstruieren, die paarweise nicht global konform diffeomorph sind.

Nach Satz 4.1 existieren Mannigfaltigkeiten  $M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit den folgenden gewichteten und zeitorientierten Gerüsten:



Wir lassen auch abzählbar unendlich viele Ecken zu, unterschieden in die beiden Fälle  $p_0, p_1, p_2, \dots$  ( $\rightarrow M_{\mathbb{N}}$ ) und  $\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots$  ( $\rightarrow M_{\mathbb{Z}}$ ). Mit Satz 3.2 und dem vorhergehenden Beispiel erkennt man, daß diese Mannigfaltigkeiten untereinander konform inäquivalent sind.

Um Satz 3.2 anwenden zu können, d.h. das Bild einer Abwicklung ist gleich  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ , kann man allgemeiner für die raumartigen freien Kanten solche endlichen Längen zulassen, für die z.B. das Produkt der Längen für zwei aufeinanderfolgende Kanten größer als 1 ist. Auch kann man die Längen der bis zu zwei freien zeitartigen Kanten unter Berücksichtigung des oben gesagten endlich wählen.

Nun betrachten wir eine nach Abschnitt 3.3 konstruierte Abwicklung  $\delta_n$  von  $M_n$  und ihre Faktorisierung

$$M_n \xrightarrow{\gamma_n} M_{\delta_n} \xrightarrow{\hat{\delta}_n} Q_1^n.$$

Es ist  $M_{\delta_n} = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{R}_1^n(p_i) / \sim$ ,  $\mathbb{R}_1^n(p_i)$  eine Kopie von  $\mathbb{R}_1^n$ , wobei

$$\mathbb{R}_1^n(p_i) \supset U^-(+\infty) \xleftrightarrow{S} U^-(-\infty) \subset \mathbb{R}_1^n(p_{i+1})$$

zu identifizieren ist.

Wir überlegen uns jetzt, daß  $M_{\delta_n}$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist.

Sei

$$\begin{aligned} B(p_1) &:= \overline{U(\infty, 1, -\infty)} \subset \mathbb{R}_1^n(p_1) \\ B(p_\nu) &:= \overline{U(\infty, 1, -1)} \subset \mathbb{R}_1^n(p_\nu), \quad 2 \leq \nu \leq n-1, \\ B(p_n) &:= \overline{U(\infty, \infty, -1)} \subset \mathbb{R}_1^n(p_n). \end{aligned}$$

(  $\overline{\quad}$  steht für den Abschluß in  $\mathbb{R}^n$ . ) Dann ist  $M_{\delta_n}$  diffeomorph zu

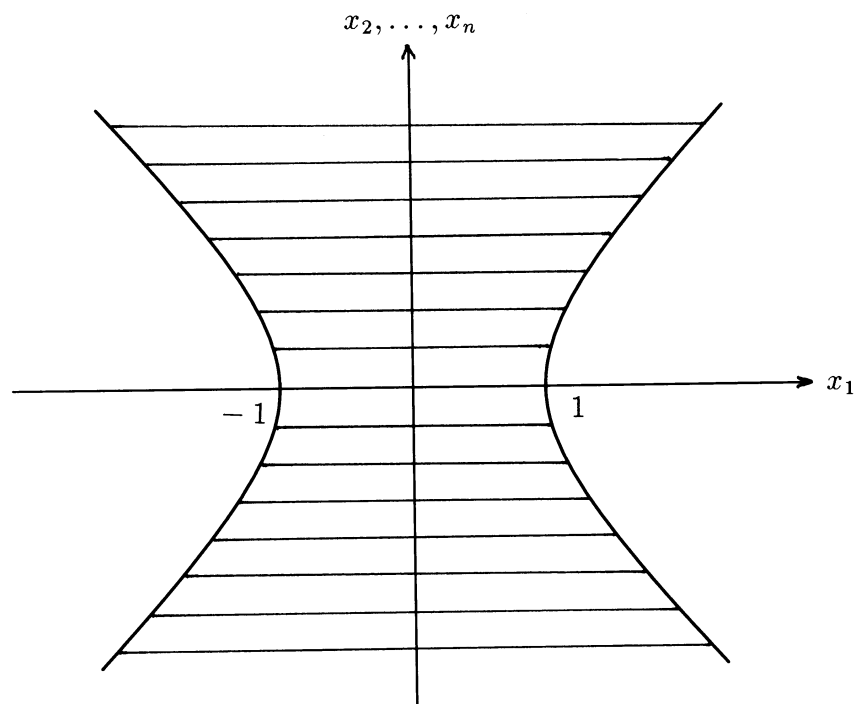
$$B(p_1) \cup_{-id} B(p_2) \cup_{-id} \dots \cup_{-id} B(p_n)$$

wobei

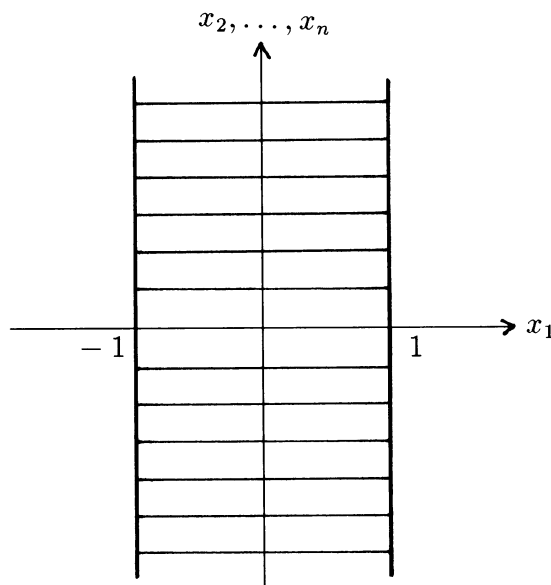
$$S^\circ(-1) \subset \partial B(p_\nu) \text{ mit } -S^\circ(-1) \subset \partial B(p_{\nu+1}), \quad 1 \leq \nu \leq n-1,$$

zu verkleben ist gemäß der Abbildung  $S|_{S^\circ(-1)} = -id|_{S^\circ(-1)}$ .

Nun ist  $B(p_\nu)$ ,  $2 \leq \nu \leq n-1$ ,



diffeomorph zum Streifen  $\tilde{B}(p_\nu) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 \leq 1\}$



und analog  $B(p_1)$  zu  $\tilde{B}(p_1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 < x_1 \leq 1\}$  und  $B(p_n)$  zu  $\tilde{B}(p_n) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 < 1\}$ .

Daher ist  $M_{\delta_n}$  (und  $M_n$ ) diffeomorph zum Streifen  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < 2n\}$ , also auch diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

Gleiches gilt für  $M_{\mathbb{N}}$  und  $M_{\mathbb{Z}}$  und für die Mannigfaltigkeiten mit endlichen freien Kanten. Man gewinnt so eine abzählbar-unendlich parametrisierte Schar von lokal konform flachen Lorentz-Mannigfaltigkeiten, die alle diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$ , aber untereinander nicht konform äquivalent sind.

Zum Abschluß wollen wir zeigen, daß jede einfach zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft (\*) konform in die universelle Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  eingebettet werden kann.

Zunächst ein Lemma.

#### Lemma 4.1

$M$  sei eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die mit der Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  die Bedingung (\*) erfüllt. Dann gilt:

$M$  ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn das Gerüst von  $M$  ein Baum ist.

#### Beweis:

” $\Leftarrow$ ” Sei das Gerüst  $\mathcal{G}$  von  $M$  ein Baum.

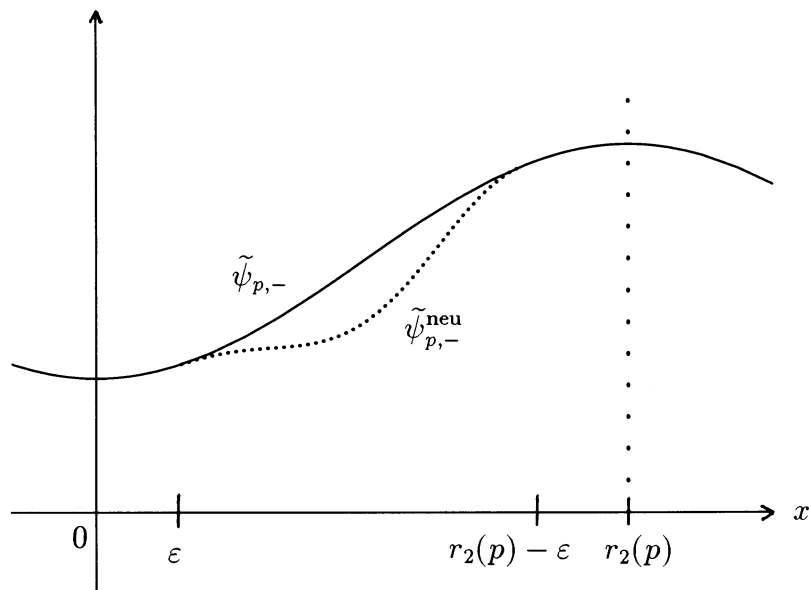
Weiter sei  $c$  eine geschlossene Kurve in  $M$ . Die Spur von  $c$  läßt sich durch endlich viele Blöcke  $B_p$ ,  $p \in Cr(\psi)$ , überdecken. Die zugehörigen kritischen Punkte liegen in einem endlichen zusammenhängenden Teilgraph  $\mathcal{G}_0$  des Gerüsts. (Dazu braucht man z.B. nur jeden solchen kritischen Punkt durch einen Kantenzug mit einem festen kritischen Punkt verbinden.)

Nun sind alle Blöcke  $B_p$ ,  $p \in Cr(\psi)$ , einfach zusammenhängend. Wähle einen kritischen Punkt  $p_0 \in \mathcal{G}_0$ . Sei  $p_1 \in \mathcal{G}_0$  zu  $p_0$  benachbart. Da  $\mathcal{G}$  ein Baum ist, können  $p_0$  und  $p_1$  nur längs einer Kante benachbart sein. Also ist  $B_{p_0} \cap B_{p_1}$  einfach zusammenhängend. Der Satz von Seifert-van Kampen sagt dann, daß  $B_{p_0} \cup B_{p_1}$  einfach zusammenhängend ist. Nimmt man, so fortfahrend, immer einen neuen Block dazu, so erkennt man, daß  $\bigcup_{p \in \mathcal{G}_0} B_p$  einfach zusammenhängend ist. Nun liegt unsere geschlossene Kurve  $c$  in  $\bigcup_{p \in \mathcal{G}_0} B_p$ . Daher ist  $c$  nullhomotop in  $M$ .

” $\Rightarrow$ ” Sei  $M$  einfach zusammenhängend.

Annahme: Das Gerüst  $\mathcal{G}$  von  $M$  habe einen Zyklus. Da  $M$  einfach zusammenhängend ist, ist  $(M, g)$  abwickelbar nach dem Satz von Kuiper. Also muß sich jeder Zyklus in der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Weise schließen. Wir werden nun an einer Kante eines Zykluses die Metrik  $g$  und die Funktion  $\psi$  so abändern, daß die neue pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht mehr abwickelbar ist. Dabei ändern wir aber nicht die Topologie von  $M$ .

Seien dazu  $p$  und  $q$  zwei Ecken aus einem Zyklus, die längs einer zeitartigen Kante benachbart sind. Es ist  $\tilde{B}_p = U(r_1(p), r_2(p), r_3(p)) \subset T_p M$  und  $\tilde{B}_q = U(r_1(q), r_2(q), r_3(q)) \subset T_q M$  und o.E.  $r_0 := r_2(p) = -r_3(q) > 0$  und  $U^-(r_0) \subset \tilde{B}_p$  bzw.  $U^-(-r_0) \subset \tilde{B}_q$  die zur verbindenden Kante gehörenden Teile in  $T_p M$  bzw.  $T_q M$ . Nun ändern wir  $\tilde{\psi}_{p,-} : ]r_3(p), r_2(p)[ \rightarrow \mathbb{R}$  so in  $[\varepsilon, r_2(p) - \varepsilon]$  ab,  $0 < \varepsilon < r_2(p)/2$ , daß die neue Funktion  $\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}} : ]r_3(p), r_2(p)[ \rightarrow \mathbb{R}$  wieder glatt ist, in  $[\varepsilon, r_2(p) - \varepsilon]$  auch keine kritischen Punkte hat und sich der Wert des Integrals in Gl. (3.2) (S. 45) über dem Intervall  $[0; r_2(p)]$  ändert.



(Durch den fast horizontalen Bereich von  $\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}$  wird das Integral (3.2) beliebig groß.)

Auf  $U^-(r_2(p)) \cong \exp_p(U^-(r_2(p))) = \exp_q(U^-(r_3(q)))$  seien die neue Funktion  $\psi^{\text{neu}}$  und die neue Metrik  $g^{\text{neu}}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi^{\text{neu}}(r \cdot x) &:= \tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}(r) \\ g^{\text{neu}}|_{(r,x)} &:= -dr^2 + \frac{\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}(r)^2}{\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}(0)^2} g_1|_x\end{aligned}$$

und auf dem Rest von  $M$  seien sie gleich  $\psi$  und  $g$ . Dann erfüllen  $(M, g^{\text{neu}})$  und  $\psi^{\text{neu}}$  die Eigenschaft (\*) und  $(M, g^{\text{neu}})$  ist nicht mehr abwickelbar, ein Widerspruch.  $\square$

In Abschnitt 3.4 haben wir die dort konstruierten Abwicklungen  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  faktorisiert in  $M \xrightarrow{\gamma} M_\delta \xrightarrow{\hat{\delta}} Q_1^n$  und das zeitorientierte und gewichtete Gerüst von  $M$  diente uns als Bauplan für die Mannigfaltigkeit  $M_\delta$ .

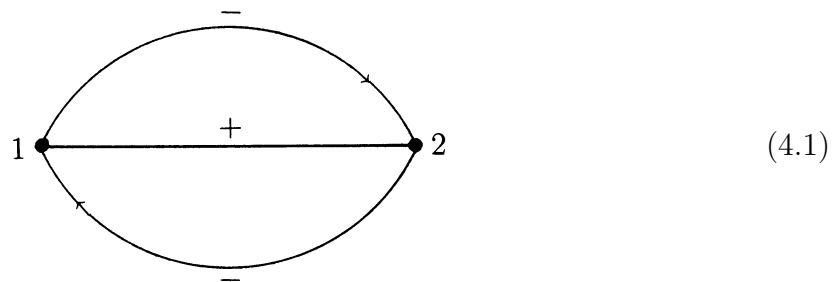
Gleiches kann man nun mit der Inklusionsabbildung  $\iota : Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \rightarrow Q_1^n$  machen, die ja eine Abwicklung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist.

Es ist  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} = i(\mathbb{R}_1^n) \cup j(\mathbb{R}_1^n)$  und die Wechselabbildung zwischen den beiden Einbettungen  $i$  und  $j$  ist die Sphäreninversion  $S$ .

Sei daher  $M_\iota$  die konforme Mannigfaltigkeit, die man erhält, wenn man zwei Kopien  $\mathbb{R}_1^n(1)$  und  $\mathbb{R}_1^n(2)$  von  $\mathbb{R}_1^n$  mittels der Sphäreninversion  $S$  längs  $\mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n$  verklebt:

$$M_\iota := \mathbb{R}_1^n(1) \cup_S \mathbb{R}_1^n(2).$$

Man verklebt also  $\mathbb{R}_1^n(1)$  und  $\mathbb{R}_1^n(2)$  entsprechend dem folgenden zeitorientierten Graphen:



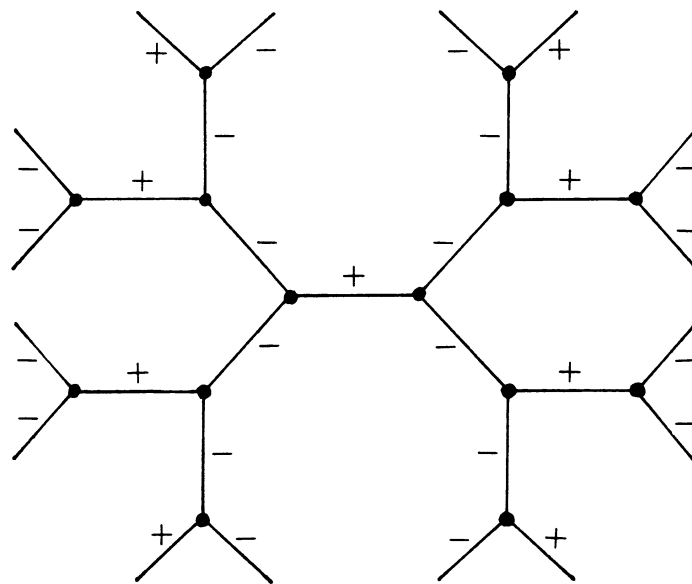


In der Sequenz

$$Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \xrightarrow{\gamma} M_\iota \xrightarrow{\hat{\iota}} Q_1^n$$

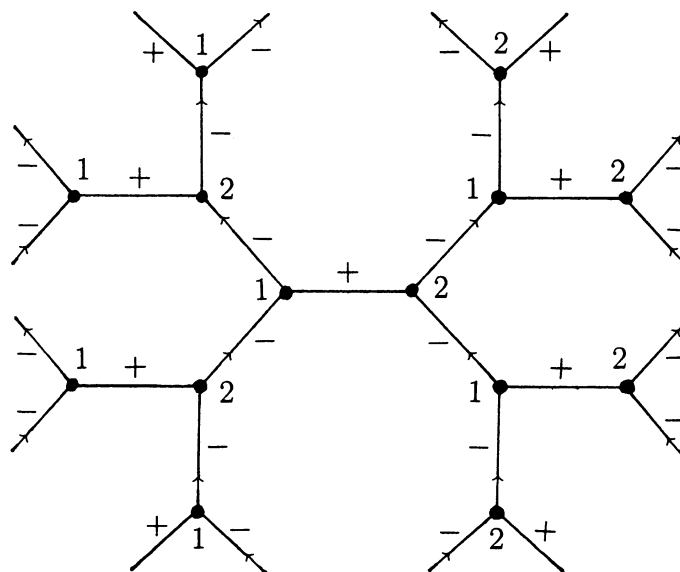
ist  $\hat{\iota}$  gegeben durch  $\hat{\iota}|_{\mathbb{R}_1^{n(1)}} : \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$  und  $\hat{\iota}|_{\mathbb{R}_1^{n(2)}} : \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n$ .  $\gamma$  ist die Umkehrung von  $\hat{\iota}$ .

Nun kann man die universelle Überlagerung von  $M_\iota$  konstruieren. Dazu betrachten wir den vollständigen 3-regulären Baum, der die Eigenschaften 1) bis 3) aus Abschnitt 3.1 hat:



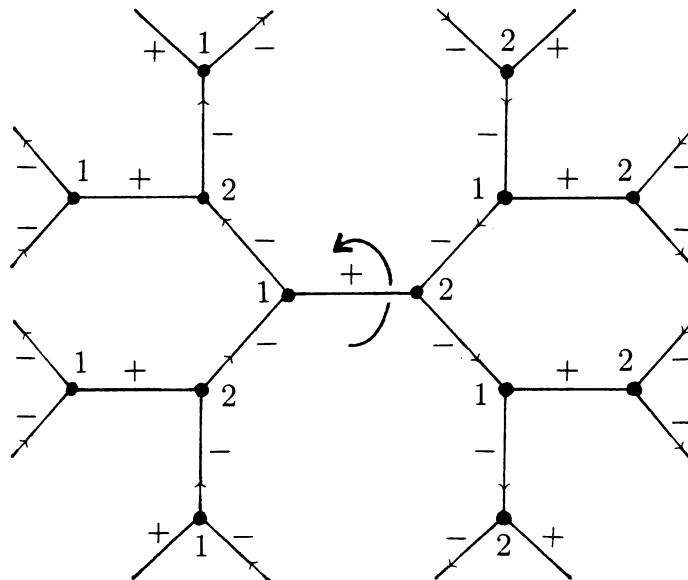
(4.2)

Für diesen wählen wir eine Zeitorientierung und ordnen den Ecken abwechselnd die Werte 1 und 2 zu:



(4.3)

Die Willkür in der Wahl der Zeitorientierung und in der Zuordnung der Werte 1 und 2 ist unerheblich, denn je zwei solcher Zeitorientierungen und Wertezuordnungen werden durch einen Automorphismus von (4.2) ineinander überführt. Ein Beispiel dazu:

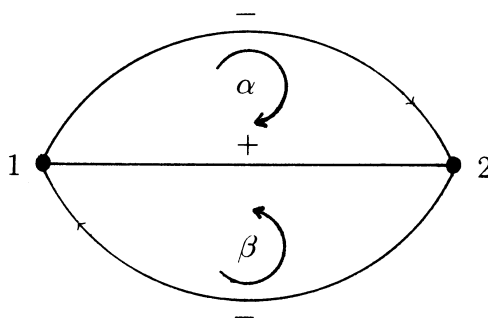


Anhand dieses Graphen können wir nun Kopien von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  und  $\mathbb{R}_1^n(2)$ , wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, mit der Sphäreninversion  $S$  verkleben. Dabei gehört zu Ecken mit dem Wert 1 bzw. 2 eine Kopie von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2)$ .

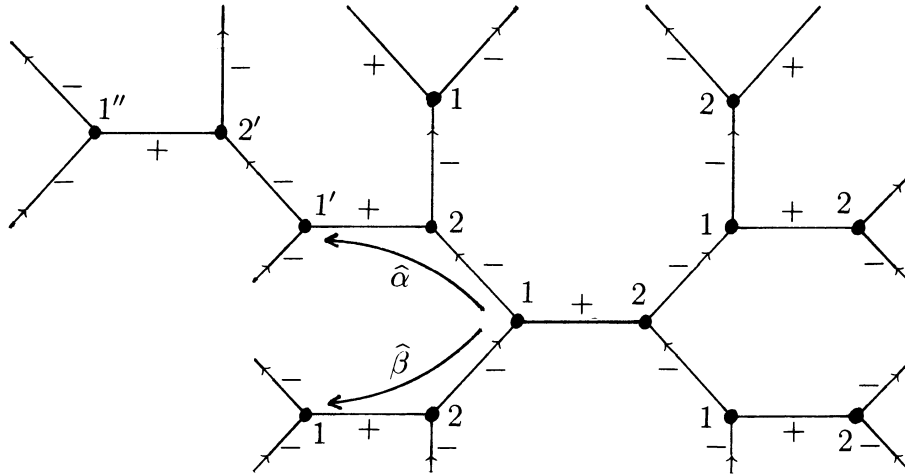
Das Ergebnis ist eine einfach zusammenhängende konforme Mannigfaltigkeit  $\widehat{M}_l$ . Die Überlagerungsabbildung  $\pi : \widehat{M}_l \rightarrow M_l$  bildet nun die Kopien von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2)$  mittels der Identität auf  $\mathbb{R}_1^n(1) \subset M_l$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2) \subset M_l$  ab.

Nun ist die Teilmenge  $\mathcal{G}$  von  $M_l$  mit  $\mathcal{G} \cap \mathbb{R}_1^n(1) = \mathbb{R}_+ \cdot x \cup \mathbb{R} \cdot y$ ,  $\mathcal{G} \cap \mathbb{R}_1^n(2) = \mathbb{R}_+ \cdot x \cup \mathbb{R} \cdot y$ ,  $x \in S(+1)$ ,  $y \in S^\circ(-1)$  fest, eine Realisierung des Gerüstes (4.1) als Teilmenge von  $M_l$ . Es ist  $\widehat{\mathcal{G}} := \pi^{-1}(\mathcal{G})$  eine Realisierung des Graphen (4.3) als Teilmenge von  $\widehat{M}_l$  und  $\pi|_{\widehat{\mathcal{G}}} : \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  ist die universelle Überlagerung von  $\mathcal{G}$ .

$\mathcal{G}$  hat als Fundamentalgruppe die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden. Als erzeugende Elemente kann man die (Homotopieklassen der) beiden folgenden Wege  $\alpha, \beta$  wählen:



Geliftet ergeben  $\alpha$  und  $\beta$  die Wege  $\widehat{\alpha}$  und  $\widehat{\beta}$



Diese beiden Wege legen zwei Decktransformationen von  $\widehat{\mathcal{G}}$  fest, die die Decktransformationsgruppe erzeugen. Als Beispiel ist für  $\widehat{\alpha}$  der Anfang gezeigt:  $1 \mapsto 1' \mapsto 1''$ ,  $2 \mapsto 2'$ , die Kante  $1 \rightarrow 2$  auf  $1' \rightarrow 2'$  etc.

Aus allen Decktransformationen von  $\widehat{\mathcal{G}}$  gewinnt man Decktransformationen von  $\widehat{M}_l$ , wenn man die Kopie von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2)$ , die zu einer Ecke gehört, mittels der Identität auf die Kopie, die zur Bildecke gehört, abbildet. Da diese Gruppe von Decktransformationen von  $\widehat{M}_l$ , transitiv und frei auf z.B. der Faser über dem Punkt  $0 \in \mathbb{R}_1^n(1) \subset M_l$  operiert, ist es die Decktransformationsgruppe von  $\pi : \widehat{M}_l \rightarrow M_l$ . Also ist die Fundamentalgruppe von  $M_l$  und damit die von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden.

Sei nun  $M$  eine einfach zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft (\*). Dann ist ihr Gerüst  $\mathcal{G}_M$  ein Baum und das zeitorientierte Gerüst von  $M$  bzgl. einer Abwicklung  $\delta$  ist isomorph zu einem Teilbaum von (4.3).

Nun gehört zu jeder Ecke  $p$  von  $\mathcal{G}_M$  eine Teilmenge  $U_p$  von  $\mathbb{R}_1^n$  und wir betrachten sie jetzt als Teilmenge der Kopie von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  oder  $\mathbb{R}_1^n(2)$ , die zu  $p$  als Ecke von (4.3) gehört.

Damit wird  $M_\delta$  eine Teilmenge von  $\widehat{M}_l$ .

Der konforme Diffeomorphismus  $\gamma : Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \rightarrow M_l$  wird geliftet zu einem konformen Diffeomorphismus  $\widehat{\gamma}$  zwischen der universellen Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  und  $\widehat{M}_l$ . Man kann also  $M$  auch konform in die universelle Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  einbetten.

## Anhang: Analytische Hilfsmittel

In diesem Anhang sind Hilfssätze durchweg technischer Natur zusammengestellt, deren Beweise, würden sie in den Beweisen im Hauptteil dieser Arbeit vorgenommen, die wesentlichen Gedankengänge zu sehr stören würden. Deshalb sind sie hier zusammengefaßt. Zentral ist Lemma A5. Die Lemmata A2 bis A4 führen zu Lemma A5 hin, besitzen aber auch für sich Bedeutung. Lemma A1 und die Lemmata A6, A7 werden je nur an einer Stelle in der Arbeit gebraucht.

Wir betrachten die folgende Menge von Funktionenpaaren

$$\mathcal{F} := \{(f_+, f_-) \mid \exists U \subset \mathbb{R} \text{ offen, } 0 \in U, \text{ mit } f_+, f_- \in C^\infty(U, \mathbb{R}), \\ f_+^{(2\nu)}(0) = (-1)^\nu f_-^{(2\nu)}(0) \wedge f_\pm^{(2\nu+1)}(0) = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0\}$$

### Lemma A1

$$(f_+, f_-) \in \mathcal{F} \quad \wedge \quad f_+(0) = f_-(0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{f_+}, \frac{1}{f_-}\right) \in \mathcal{F}.$$

### Beweis:

Es ist  $\frac{1}{f_\pm} \in C^\infty(V, \mathbb{R})$  für ein  $V \subset U$ ,  $0 \in V$ ,  $V$  offen. Wir zeigen induktiv für  $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu)}(0) = (-1)^\nu \left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu)}(0) \quad \wedge \quad \left(\frac{1}{f_\pm}\right)^{(2\nu+1)}(0) = 0.$$

*Induktionsanfang*  $\nu = 0$  :

$$\left(\frac{1}{f_+}\right)(0) = \frac{1}{f_+(0)} = \frac{1}{f_-(0)} = \left(\frac{1}{f_-}\right)(0) \quad \wedge \quad \left(\frac{1}{f_\pm}\right)'(0) = -\frac{f'_\pm(0)}{f_\pm^2(0)} = 0$$

*Induktionsschritt* von  $0, \dots, \nu - 1$  nach  $\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}} \left( f_+ \cdot \frac{1}{f_+} \right) \Big|_{x=0} = \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} f_+^{(\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_+} \right)^{(2\nu-\kappa)}(0) \\
&\quad \text{(Leibnizformel)} \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} f_+^{(2\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_+} \right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&\quad \text{(da } (f_+, f_-) \in \mathcal{F} \text{)} \\
&= f_+(0) \left( \frac{1}{f_+} \right)^{(2\nu)}(0) + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} f_+^{(2\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_+} \right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&= f_-(0) \left( \frac{1}{f_+} \right)^{(2\nu)}(0) + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} (-1)^\kappa f_-^{(2\kappa)}(0) (-1)^{\nu-\kappa} \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&\quad \text{(} (f_+, f_-) \in \mathcal{F} \text{ und Induktionsvoraussetzung)} \\
&= f_-(0) \left( \frac{1}{f_+} \right)^{(2\nu)}(0) + (-1)^\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) .
\end{aligned}$$

Analog

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} f_-^{(\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu-\kappa)}(0) \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&= f_-(0) \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu)}(0) + \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
\Rightarrow 0 &= (-1)^\nu f_-(0) \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu)}(0) + (-1)^\nu \sum_{\kappa=1}^{\nu} \binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0) \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) .
\end{aligned}$$

Also mit der ersten Gleichung

$$\left( \frac{1}{f_+} \right)^{(2\nu)}(0) = (-1)^\nu \left( \frac{1}{f_-} \right)^{(2\nu)}(0) .$$

Weiter

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu+1} \binom{2\nu+1}{\kappa} f_{\pm}^{(\kappa)}(0) \left(\frac{1}{f_{\pm}}\right)^{(2\nu+1-\kappa)}(0) \\
&= f_{\pm}(0) \left(\frac{1}{f_{\pm}}\right)^{(2\nu+1)}(0) ,
\end{aligned}$$

da entweder  $\kappa$  oder  $2\nu + 1 - \kappa$  ungerade ist und dann wegen  $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$  oder nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$f_{\pm}^{(\kappa)}(0) = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{f_{\pm}}\right)^{(2\nu+1-\kappa)}(0) = 0, \quad \kappa > 0.$$

Also

$$\left(\frac{1}{f_{\pm}}\right)^{(2\nu+1)}(0) = 0.$$

□

Die Aussagen der folgenden drei Lemmata werden trivial für analytische Funktionen wenn man sich jeweils die Potenzreihen im Nullpunkt anschaut. Da die Eigenschaft  $C^n$ -Funktion ( $C^\infty$ -Funktion) zu sein induktiv definiert ist, muß man zu ihrem Nachweis auch induktiv vorgehen. Es reicht nicht zu zeigen, daß man endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung hat (vgl. das Beispiel im Beweis von Lemma A4).

### Lemma A2

Sei  $U \subset \mathbb{R}$  offen,  $0 \in U$  und  $g \in C^n(U; \mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $g(0) = 0$ . Dann ist die Funktion

$$h : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & , \quad x \neq 0 \\ g'(0) & , \quad x = 0 \end{cases}$$

aus  $C^{n-1}(U, \mathbb{R})$  mit  $h^{(\nu)}(0) = \frac{g^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1}$ ,  $0 \leq \nu \leq n-1$ .

### Beweis:

Es ist  $h \in C^n(U \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ . Durch Induktion weist man nach, daß für  $0 \leq \nu \leq n$  und  $x \neq 0$  gilt:

$$\frac{d^\nu h}{dx^\nu}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x) x^i a_{\nu,i}}{x^{\nu+1}},$$

mit den ganzen Zahlen  $a_{\nu,i} = (-1)^{\nu-i} \nu \cdot (\nu-1) \cdot \dots \cdot (i+1)$ ,  $0 \leq i \leq \nu$ , wobei  $a_{\nu,\nu} = (-1)^{\nu-\nu} \cdot 1 = 1$ .

*Induktionsanfang*  $\nu = 0$  : klar!

Induktionsschritt  $\nu \rightarrow \nu + 1$ ,  $\nu + 1 \leq n$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\nu+1}h}{dx^{\nu+1}}(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d^\nu h}{dx^\nu} \right) (x) = \frac{d}{dx} \frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x) x^i a_{\nu,i}}{x^{\nu+1}} \\
&= \frac{1}{x^{2\nu+2}} \left( \left( \sum_{i=0}^{\nu} g^{(i+1)}(x) x^i a_{\nu,i} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x) i x^{i-1} a_{\nu,i} \right) x^{\nu+1} \right. \\
&\quad \left. - \left( \sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x) x^i a_{\nu,i} \right) (\nu + 1) x^\nu \right) \\
&= \frac{1}{x^{\nu+2}} \left( \sum_{i=1}^{\nu+1} g^{(i)}(x) x^i a_{\nu,i-1} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x) i x^i a_{\nu,i} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x) x^i (\nu + 1) a_{\nu,i} \right) \\
&= \frac{1}{x^{\nu+2}} \left( g^{(\nu+1)}(x) x^{\nu+1} a_{\nu,\nu} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x) x^i (a_{\nu,i-1} + (i - \nu - 1) a_{\nu,i}) \right. \\
&\quad \left. - g^{(0)}(x) (\nu + 1) a_{\nu,0} \right) \\
&\equiv \frac{1}{x^{\nu+2}} \sum_{i=0}^{\nu+1} g^{(i)}(x) x^i a_{\nu+1,i}
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung liest man folgende Rekursion ab:

$$\begin{aligned}
a_{\nu+1,\nu+1} &= a_{\nu,\nu} \\
a_{\nu+1,i} &= a_{\nu,i-1} + (i - \nu - 1) a_{\nu,i}, \quad 1 \leq i \leq \nu \\
a_{\nu+1,0} &= -(\nu + 1) a_{\nu,0}
\end{aligned}$$

Daher folgt aus der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
a_{\nu+1,\nu+1} &= a_{\nu,\nu} = 1 \\
a_{\nu+1,i} &= (-1)^{\nu-i+1} \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot i + (i - \nu - 1) (-1)^{\nu-i} \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot (i + 1) \\
&= (-1)^{\nu-i+1} \left( \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot i + (\nu - i + 1) \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot (i + 1) \right) \\
&= (-1)^{\nu-i+1} \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot (i + 1) \left( i + (\nu - i + 1) \right) \\
&= (-1)^{\nu-i+1} (\nu + 1) \cdot \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot (i + 1), \quad 1 \leq i \leq \nu \\
a_{\nu+1,0} &= -(\nu + 1) a_{\nu,0} = -(\nu + 1) (-1)^\nu \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot 1 \\
&= (-1)^{\nu+1} (\nu + 1) \cdot \nu \cdot (\nu - 1) \cdot \dots \cdot 1
\end{aligned}$$

Damit zeigen wir nun, daß sich  $\frac{d^\nu h}{dx^\nu}(x)$ ,  $x \in U \setminus \{0\}$ ,  $0 \leq \nu \leq n-1$ , stetig in den Nullpunkt fortsetzen läßt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^\nu h}{dx^\nu}(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x) x^i a_{\nu,i}}{x^{\nu+1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i+1)}(x) x^i a_{\nu,i} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x) i x^{i-1} a_{\nu,i}}{(\nu+1)x^\nu} \quad (\text{l'Hospital}) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(\nu+1)}(x) x^\nu a_{\nu,\nu} + \sum_{i=0}^{\nu-1} g^{(i+1)}(x) x^i (a_{\nu,i} + (i+1)a_{\nu,i+1})}{(\nu+1)x^\nu} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{(\nu+1)}(x) x^\nu}{(\nu+1)x^\nu} \\
&= \frac{g^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1}
\end{aligned}$$

Nun folgt induktiv mit dem Mittelwertsatz, daß  $h \in C^{n-1}(U, \mathbb{R})$ :

Nach dem gezeigten ist  $h$  stetig auf  $U$ . Für jedes  $x \neq 0$  ist also  $h$  auf  $[0, x]$  (bzw.  $[x, 0]$  für  $x < 0$ ) stetig und in  $]0, x[$  (bzw.  $]x, 0[$ ) differenzierbar. Der Mittelwertsatz liefert dann ein  $\xi_x \in ]0, x[$  (bzw.  $\xi_x \in ]x, 0[$ ) mit

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(\xi_x)$$

Da  $h'$  stetig in den Nullpunkt fortsetzbar ist, folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} h'(\xi) = \frac{g''(0)}{2}$$

Also ist  $h \in C^1(U, \mathbb{R})$  mit  $h'(0) = \frac{g''(0)}{2}$ , u.s.w. □

### Lemma A3

Sei  $U \subset \mathbb{R}$  offen,  $0 \in U$  und  $f \in C^{2n}(U, \mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $f^{(2k+1)}(0) = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Dann ist die Abbildung

$$x \mapsto f(\sqrt{x}),$$

die für ein  $\varepsilon > 0$  auf  $[0, \varepsilon)$  erklärt ist, aus  $C^n([0, \varepsilon), \mathbb{R})$ . Hierbei ist in 0 immer die rechtsseitige Ableitung gemeint.

#### Beweis:

Für  $x > 0$  ist  $\frac{d}{dx}(f(\sqrt{x})) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = h(\sqrt{x})$  mit  $h(t) := \frac{f'(t)}{2t}$ ,  $t \in U \setminus \{0\}$ . Nach Lemma A2 ist  $h$  in den Nullpunkt stetig fortsetzbar, d.h.  $\frac{d}{dx}(f(\sqrt{x}))$  läßt sich in den



Nullpunkt stetig fortsetzen. Wie oben erkennt man, daß die Abbildung  $x \mapsto f(\sqrt{x})$  aus  $C^1([0, \varepsilon), \mathbb{R})$  ist.

Weiter ist die stetig in den Nullpunkt fortgesetzte Funktion  $h$  nach Lemma A2 in  $C^{2n-2}(U, \mathbb{R})$  mit  $h^{(2k+1)}(0) = \frac{f^{(2k+3)}(0)}{2(2k+2)} = 0$ ,  $0 \leq k \leq n-2$ .  $h$  hat also für  $n-1 \in \mathbb{N}$  die analogen Eigenschaften wie  $f$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wegen  $\frac{d}{dx}(f(\sqrt{x})) = h(\sqrt{x})$  folgt die Behauptung induktiv.  $\square$

### Bemerkung:

Das Lemma gilt analog für die Abbildungen  $x \mapsto f(\pm\sqrt{\pm x})$  mit festen, voneinander unabhängigen Wahlen der Vorzeichen  $\pm$ .

Wir betrachten nun für zwei Funktionen  $f_+, f_- \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ,  $0 \in U \subset \mathbb{R}$ ,  $U$  offen, die Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} f_+(\pm\sqrt{x}) & , \quad x > 0 \\ f_-(\pm\sqrt{-x}) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

für eine beliebige, voneinander unabhängige Wahl der Vorzeichen  $\pm$  vor den Wurzeln. Es gilt

### Lemma A4

$f$  läßt sich zu einer, in einer Nullumgebung  $V$  definierten,  $C^\infty$ -Funktion fortsetzen genau dann, wenn  $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$ .

### Beweis:

*notwendig:* Man hat für die glatte Funktion  $f$  im Nullpunkt endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu + o(x^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f_+(\pm\sqrt{x}) &= f(x) && \text{für } x > 0 \\ \Rightarrow f_+(t) &= f(t^2) && \text{für } t > 0 \text{ oder für } t < 0 \\ \Rightarrow f_+(t) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{a_\nu}{\nu!} t^{2\nu} + o(t^{2\nu}) && \text{für } t > 0 \text{ oder für } t < 0 \end{aligned}$$

Da  $f_+$  glatt ist, ist dies die Taylorentwicklung von  $f_+$ , also

$$f_+^{(2\nu)}(0) = \frac{a_\nu}{\nu!} (2\nu)! \quad \wedge \quad f_+^{(2\nu+1)}(0) = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0$$

Analog

$$\begin{aligned}
 f_-(\pm\sqrt{-x}) &= f(x) && \text{für } x < 0 \\
 \Rightarrow f_-(t) &= f(-t^2) && \text{für } t > 0 \text{ oder für } t < 0 \\
 \Rightarrow f_-(t) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{a_\nu}{\nu!} (-1)^\nu t^{2\nu} + o(t^{2\nu}) && \text{für } t > 0 \text{ oder für } t < 0 \\
 \Rightarrow f_-^{(2\nu)}(0) &= (-1)^\nu \frac{a_\nu}{\nu!} (2\nu)! \quad \wedge \quad f_-^{(2\nu+1)}(0) = 0, \quad \nu \in \mathbb{N}_0
 \end{aligned}$$

*hinreichend:* Da  $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$  ist, hat man im Nullpunkt endliche Entwicklungen der folgenden Form

$$f_+(t) = \sum_{\nu=0}^n \frac{a_\nu}{\nu!} t^{2\nu} + o(t^{2n})$$

und

$$f_-(t) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{a_\nu}{\nu!} t^{2\nu} + o(t^{2n})$$

Daher gilt für die Annäherung an 0 von links und von rechts

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu + o(x^n) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Nun ist folgendes Argument falsch:

$$\begin{aligned}
 f \in C^\infty(V \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \quad \wedge \quad f \text{ hat in } x = 0 \text{ endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung} \\
 \Rightarrow f \in C^\infty(V, \mathbb{R}).
 \end{aligned}$$

Gegenbeispiel:  $\Phi : x \mapsto e^{-1/x^2} \sin(e^{1/x^2})$ . Es ist  $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ ,  $\Phi$  stetig fortsetzbar in 0 und  $\Phi$  hat endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung in 0 .

$\Phi(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + o(x^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , denn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x^n} = 0$ . Aber  $\Phi$  ist nicht aus  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , denn für  $x \neq 0$  ist  $\frac{d\Phi}{dx}(x) = -\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \sin(e^{1/x^2}) - \frac{2}{x^3} \cos(e^{1/x^2})$  und der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d\Phi}{dx}(x)$  existiert nicht.

Statt dessen verfahren wir wie folgt: Nach Lemma A3 existieren wegen

$$f(x) = f_+(\pm\sqrt{x}), \quad x > 0$$

und

$$f(x) = f_-(\pm\sqrt{-x}), \quad x < 0$$

die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x),$$

das sind die rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen von  $f$  in 0. Mit diesen Ableitungen lassen sich rechtsseitige und linksseitige Taylorentwicklungen hinschreiben. Diese beiden müssen mit der in Gl. (A.1) gegebenen übereinstimmen. Also ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

Mithin  $f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ . □

### Lemma A5

Sei  $U \subset \mathbb{R}$  offen,  $0 \in U$ , und  $f_+, f_- \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ .

Definiert man auf  $A := \{r \cdot x \mid (r, x) \in \mathcal{D} \wedge r \in U\} \subset \mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n$  eine Funktion  $f$  durch

$$(r, x) \mapsto f_\eta(r), \quad \eta = \langle x, x \rangle,$$

so ist  $f$  auf  $A \cup \Gamma_1^n$  glatt fortsetzbar genau dann, wenn  $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$ .

#### Beweis:

*notwendig:* Seien  $x := \frac{1}{2}(e_1 + e_n)$ ,  $y := \frac{1}{2}(-e_1 + e_n) \in \Gamma_1^n$ . Dann ist  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}$ . Für die Gerade  $c : t \mapsto x + ty$  ist  $\langle c(t), c(t) \rangle = t$  und

$$f(c(t)) = \begin{cases} f_+(\sqrt{t}) & , \quad t > 0 \\ f_-(\sqrt{-t}) & , \quad t < 0 \end{cases}$$

(Man beachte, daß  $c(t)$  zeitartig positiv ist für  $t < 0$ .)

Da  $f \circ c$  glatt ist, muß nach Lemma A4  $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$  sein.

*hinreichend:* Wir verfahren wie im Beweis von Lemma A2. Zuerst zeigen wir, daß für jedes  $y_0 \in \Gamma_1^n$  und jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  der Grenzwert

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in A}} d^k f|_y$$

existiert. Dabei ist  $d^k f$ , die  $k$ -te Ableitung von  $f$ , eine  $k$ -Form auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Dann weisen wir die Differenzierbarkeit mit dem Analogon des Mittelwertsatzes für den  $\mathbb{R}^n$  induktiv nach.

Wir betrachten die glatten Funktionen

$$g_\pm : t \mapsto \begin{cases} f_+(\sqrt{t}) & , \quad t > 0 \\ f_-(\pm\sqrt{-t}) & , \quad t < 0 \end{cases}$$

Es ist nach dem Beweis von Lemma A4

$$g_{\pm}^{(n)}(0) = \frac{f_{\pm}^{(2n)}(0)}{(2n)!} n! , \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Nun läßt sich auf jeder Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $A$  die Funktion  $f$  schreiben als

$$f(y) = g_{\pm}(\langle y, y \rangle)$$

mit festem Vorzeichen  $+$  oder  $-$ .

Wir berechnen  $d^k f|_y$ ,  $y \in Z$ . Dazu seien  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  Multiindizes der Länge  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  und

$$d^{\alpha} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} .$$

$d^k f$  wird in Koordination durch sämtliche  $d^{\alpha} f$ ,  $|\alpha| = k$ , beschrieben. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) &= g'_{\pm}(\langle y, y \rangle) 2\epsilon_i y_i \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(y) &= g''_{\pm}(\langle y, y \rangle) 4\epsilon_i \epsilon_j y_i y_j + g'_{\pm}(\langle y, y \rangle) 2\epsilon_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

u.s.w.

Man erkennt, daß für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$d^{\alpha} f|_y = \sum_{\kappa=0}^{|\alpha|} g_{\pm}^{(\kappa)}(\langle y, y \rangle) \cdot P_{\kappa}^{\alpha}(y) ,$$

mit Polynomen  $P_{\kappa}^{\alpha}$  auf  $\mathbb{R}^n$ , die nur von  $\alpha$  und  $\kappa$ , nicht aber vom Vorzeichen  $\pm$  der Abbildung  $g_{\pm}$  abhängen.

Also folgt für  $y_0 \in \Gamma_1^n$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in Z}} d^{\alpha} f|_y = \sum_{\kappa=0}^{|\alpha|} g_{\pm}^{(\kappa)}(0) P_{\kappa}^{\alpha}(y_0) .$$

Die rechte Seite ist unabhängig von  $Z$ , also existiert  $\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in A}} d^{\alpha} f|_y$  für alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  und daher auch  $\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in A}} d^k f|_y$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Setzt man durch  $f(y_0) := \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in A}} f(y)$ ,  $y_0 \in \Gamma_1^n$ ,  $f$  in den Lichtkegel fort, so ist  $f$  stetig auf  $A \cup \Gamma_1^n$ :

In Punkten  $y \in A$  ist dies klar. Für  $y_0 \in \Gamma_1^n$  sei zu  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß  $|f(y_0) - f(y)| \leq \varepsilon$ ,  $\forall y \in U_\delta(y_0) \cap A$  ( $U_\delta(y_0)$  = euklidischer Ball mit Radius  $\delta$  um  $y_0$ ).  
Dann ist für  $y_1 \in U_\delta(y_0) \cap \Gamma_1^n$

$$\begin{aligned} |f(y_0) - f(y_1)| &= |f(y_0) - \lim_{\substack{y \rightarrow y_1 \\ y \in U_\delta(y_0) \cap A}} f(y)| \\ &= \lim_{\substack{y \rightarrow y_1 \\ y \in U_\delta(y_0) \cap A}} |f(y_0) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Insgesamt

$$|f(y_0) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y \in U_\delta(y_0) \cap (A \cup \Gamma_1^n).$$

Nun weisen wir die Differenzierbarkeit in  $y_0 \in \Gamma_1^n$  nach. Sei  $L_0 = \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ y \in A}} df|_y$ . Mit  $|\cdot|$  bezeichnen wir den euklidischen Betrag in  $\mathbb{R}^n$  und in  $\mathbb{R}$  und mit  $\|\cdot\|$  die lub-Norm (für 1-Formen) zum euklidischen Betrag. Es ist (vgl. [Ca], S. 54 ff)

$$|f(y) - f(y_0) - L_0(y - y_0)| \leq \sup_{t \in ]y_0, y[} \|df|_t - L_0\| \cdot |y - y_0|$$

für alle  $y \in A$ , wobei  $]y_0, y[$  die Strecke von  $y_0$  nach  $y$  ohne Anfangs- und Endpunkt bezeichnet.

Zu  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit

$$\|df|_t - L_0\| \leq \varepsilon \quad \forall t \in U_\delta(y_0) \cap A.$$

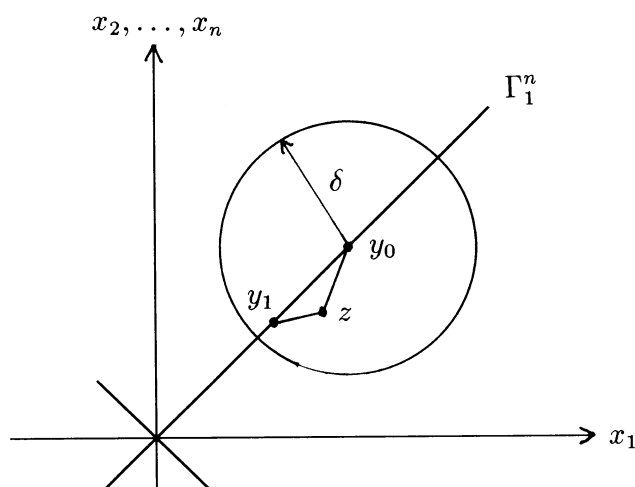
Daher ist für  $y \in U_\delta(y_0) \cap A$

$$|f(y) - f(y_0) - L_0(y - y_0)| \leq \varepsilon |y - y_0|.$$

Weiter für alle  $y_1 \in U_\delta(y_0) \cap \Gamma_1^n$

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_0) - L_0(y_1 - y_0)| &\leq |f(y_1) - f(z) - L_0(y_1 - z)| + \\ &\quad |f(z) - f(y_0) - L_0(z - y_0)| \\ &\quad z \in U_\delta(y_0) \cap A \text{ zunächst beliebig} \\ &\leq \sup_{t \in ]y_1, z[} \|df|_t - L_0\| |y_1 - z| \\ &\quad + \sup_{t \in ]z, y_0[} \|df|_t - L_0\| |z - y_0| \\ &\leq \varepsilon (|y_1 - z| + |z - y_0|) \end{aligned}$$

Für geeignete  $z \in U_\delta(y_0) \cap A$  ist  $|y_1 - z| + |z - y_0| \leq 2|y_1 - y_0|$  :



Daher  $|f(y_1) - f(y_0) - L_0(y_1 - y_0)| \leq 2\varepsilon|y_1 - y_0|$ .

Also ist  $f$  in  $y_0$  differenzierbar mit Ableitung  $df|_{y_0} = L_0$ .

Wegen  $d^k(df) = d^{k+1}f$  (modulo einer kanonischen Identifikation) hat man für  $df$  die gleichen Voraussetzungen wie für  $f$ . Induktiv folgt daher, daß  $f$  unendlich oft differenzierbar ist.  $\square$

### Lemma A6

Sei  $(\psi_+, \psi_-) \in \mathcal{F}$  mit  $\psi_+''(0) = -\psi_-''(0) \neq 0$ . Setze  $f_\eta := \frac{\psi_\eta'}{\psi_\eta''(0)}$ ,  $\eta = \pm 1$ .

Sei  $\rho_\eta$  die Lösung der Differentialgleichung

$$\rho_\eta' = \frac{\rho_\eta}{f_\eta}$$

mit  $\rho_\eta(0) = 0$ ,  $\rho_\eta'(0) = 1$ ,  $\eta = \pm 1$ .

Dann ist

$$\left( \frac{\rho_+(r)}{r}, \frac{\rho_-(r)}{r} \right) \in \mathcal{F}.$$

### Beweis:

Wegen  $(\psi_+, \psi_-) \in \mathcal{F}$  gilt

$$f_\pm^{(2\nu)}(0) = 0 \quad \wedge \quad f_+^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^\nu f_-^{(2\nu+1)}(0), \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen Lemma A2 reicht es zu zeigen:

$$\rho_{\pm}^{(2\nu)}(0) = 0 \quad \wedge \quad \rho_{+}^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^{\nu} \rho_{-}^{(2\nu+1)}(0), \quad \nu \in \mathbb{N}_0.$$

Das weisen wir nun induktiv nach.

Der *Induktionsanfang* für  $\nu = 0$  gilt nach Voraussetzung.

*Induktionsschritt* von  $0, \dots, \nu - 1$  nach  $\nu$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ :

Wir wenden auf  $\rho_{\eta} = \rho'_{\eta} \cdot f_{\eta}$  die Leibnizformel an:

$$\begin{aligned} \rho_{\eta}^{(2\nu)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} \rho_{\eta}^{(\kappa+1)}(0) \cdot f_{\eta}^{(2\nu-\kappa)}(0) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu}{2\kappa+1} \rho_{\eta}^{(2\kappa+2)}(0) \cdot f_{\eta}^{(2\nu-2\kappa-1)}(0) \\ &\quad \text{(Eigenschaften von } f) \\ &= \binom{2\nu}{2\nu-1} \rho_{\eta}^{(2\nu)}(0) \cdot f_{\eta}^{(1)}(0) \\ &\quad \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\ &= 2\nu \cdot \rho_{\eta}^{(2\nu)}(0) \\ \Rightarrow \rho_{\eta}^{(2\nu)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \rho_{\eta}^{(2\nu+1)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu+1} \binom{2\nu+1}{\kappa} \rho_{\eta}^{(\kappa+1)}(0) \cdot f_{\eta}^{(2\nu+1-\kappa)}(0) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_{\eta}^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_{\eta}^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\ &= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_{\eta}^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_{\eta}^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\ &\quad + \binom{2\nu+1}{2\nu} \rho_{\eta}^{(2\nu+1)}(0) \cdot f_{\eta}^{(1)}(0) \\ \Rightarrow -2\nu \rho_{\eta}^{(2\nu+1)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_{\eta}^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_{\eta}^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow -2\nu \rho_+^{(2\nu+1)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_+^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_+^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu+1}{2\kappa} (-1)^\kappa \rho_-^{(2\kappa+1)}(0) \cdot (-1)^{\nu-\kappa} f_-^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&= (-1)^\nu \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_-^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_-^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&= (-1)^\nu (-2\nu) \rho_-^{(2\nu-1)}(0)
\end{aligned}$$

□

**Lemma A7**

Zu jedem  $c > 0$  existiert eine Funktion  $f \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$  mit folgenden Eigenschaften

- i)  $\exists \varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[ : f(x) = x, 0 \leq x \leq \varepsilon \quad \wedge \quad f(x) = 1 - x, 1 - \varepsilon \leq x \leq 1$
- ii)  $f(x) > 0, 0 < x < 1$
- iii)  $\int_0^1 \left( \frac{1}{f(t)} - \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t} \right) dt = 0$
- iv)  $\int_0^1 f(t) dt = c$
- v)  $f$  ist symmetrisch bzgl.  $x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2} + t\right) = f\left(\frac{1}{2} - t\right), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ .

**Beweis:**

Aufgrund der Eigenschaft (i) existiert stets das Integral in Eigenschaft (iii).

Unter der Voraussetzung (i) ist (iii) äquivalent zu

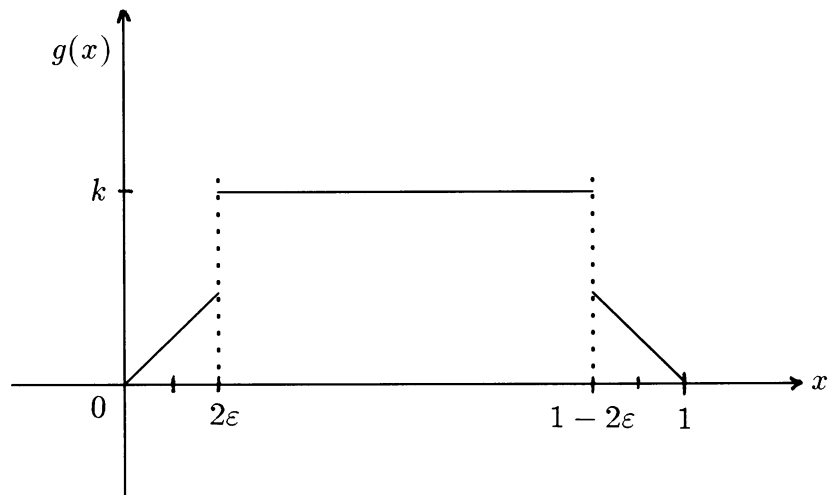
$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{f(t)} dt = 2 \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle ein  $\varepsilon$  so klein, daß  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ ,  $\varepsilon < \frac{\sqrt{c}}{2}$ ,  $\frac{(1-4\varepsilon)^2}{c-4\varepsilon^2} + 2 \ln 2 < 2 \ln \frac{1}{\varepsilon}$  ist. Sodann sei  $k > 0$  so, daß das Integral über die Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 2\varepsilon \\ k & , 2\varepsilon < x < 1 - 2\varepsilon \\ 1 - x & , 1 - 2\varepsilon \leq x \leq 1 \end{cases}$$



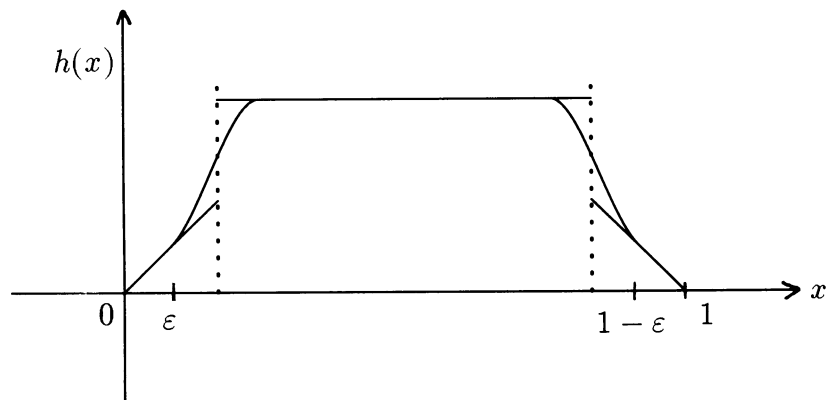
gerade  $c$  ergibt. Das ist äquivalent zu  $4\varepsilon^2 + (1 - 4\varepsilon)k = c$  oder  $k = \frac{c - 4\varepsilon^2}{1 - 4\varepsilon}$ .



Nun gilt

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{g(t)} dt = \frac{1}{k}(1 - 4\varepsilon) + 2 \ln 2 = \frac{(1 - 4\varepsilon)^2}{c - 4\varepsilon^2} + 2 \ln 2 < 2 \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

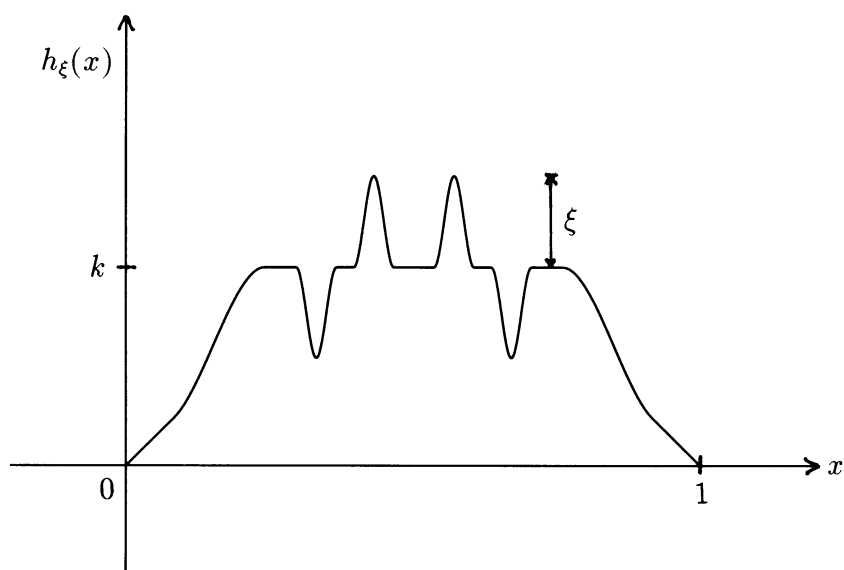
Approximiere  $g$  durch eine  $C^\infty$ -Funktion  $h$  nach folgender Skizze. Dabei sollen sich  $g$  und  $h$  nur im Bereich  $[\varepsilon, 2\varepsilon + \delta] \cup [1 - 2\varepsilon - \delta, 1 - \varepsilon]$  unterscheiden ( $\delta > 0$  genügend klein).



$h$  soll symmetrisch bzgl.  $x = \frac{1}{2}$  sein. Außerdem  $\int_0^1 h(t) dt = c$  und noch  $\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{h(t)} dt < 2 \ln \frac{1}{\varepsilon}$ . Letzteres ist der Fall, wenn man  $h$  hinreichend nahe bei  $g$  wählt.

Sodann versehe  $h$  mit vier gleichen  $C^\infty$ -Picks der variablen Höhe  $\xi$ , wie in der folgenden

Abbildung gezeigt:



Nun ändert man die Höhe der Picks stetig von Null an bis  $k$ . Dabei ändert sich das Integral

$$\int_0^1 h_\xi(t) dt$$

nicht, aber

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h_\xi(t)} dt$$

wächst stetig von  $\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h(t)} dt < 2 \ln \frac{1}{\varepsilon}$  bis  $+\infty$ .

Also gibt es ein  $\xi_0$  mit

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h_{\xi_0}(t)} dt = 2 \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Setze  $f := h_{\xi_0}$ .

□

## Literaturverzeichnis

- [Al] D.V. ALEKSEEVSKII, Groups of conformal transformations of Riemannian spaces, (russ.) Mat. Sbornik, 89, 1972, 131, (engl. Übers.) Math. USSR Sbornik, 18, 1972, pp. 285 - 301
- [Bo] J.P. BOURGUIGNON, Transformations infinitésimales conformes fermées des variétés riemanniennes connexes complètes, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 270, 1970, pp. 1593 - 1596
- [Br] H.W. BRINKMANN, Einstein spaces which are mapped conformally on each other, Math. Ann. 94, 1925, pp. 119 - 145
- [CK] M. CAHEN UND Y. KERBRAT, Domaines symétriques des quadriques projectives, J. Math. Pures Appl., 62, 1983, pp. 327 - 348
- [doC] M.P. DO CARMO, Riemannian Geometry, Birkhäuser, Boston, 1992
- [Ca] H. CARTAN, Differentialrechnung, B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1974
- [Du] B.A. DUBROVIN ET AL., Modern Geometry-Methods and Applications, Part I, Springer, New-York, 1984
- [Ha] J. HAANTJES, Conformal representations of an n-dimensional euclidean space with a non-definite fundamental form on itself, Proc. Kon. Akad. Amsterdam, 40, 1937, pp. 700 - 705
- [Ke1] Y. KERBRAT, Existence de certains champs de vecteurs sur les variétés riemanniennes complètes, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 270, 1970, pp. 1430 - 1433
- [Ke2] Y. KERBRAT, Transformations conformes des variétés pseudo-riemanniennes, J. Diff. Geom., 11, 1976, pp. 547 - 571
- [KR1] W. KÜHNEL, H.-B. RADEMACHER, Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry, J. Math. Pures Appl., 74, 1995, pp. 453 - 481
- [KR2] W. KÜHNEL, H.-B. RADEMACHER, Essential conformal fields in pseudo-Riemannian geometry. II, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 4, 1997, pp. 649 - 662
- [Kü] W. KÜHNEL, Conformal transformations between Einstein spaces, in: Conformal Geometry, hrsg. von R.S. Kulkarni und U. Pinkall, Vieweg, Braunschweig, 1988, pp. 105 - 146
- [Kui] N. KUIPER, On conformally-flat spaces in the large, Ann. Math., 50, 1949, pp. 916 - 924
- [Kul] R.S. KULKARNI, Conformal Structures and Möbius Structures, in: Conformal Geometry, a.a.O., pp. 1 - 40

- [Laf] J. LAFONTAINE, The theorem of Lelong-Ferrand and Obata, in: Conformal Geometry, a.a.O., pp. 65 - 92
- [Lau] D. LAUGWITZ, Differentialgeometrie, Teubner, Stuttgart, 1977
- [Le] J. LELONG-FERRAND, Transformations conformes et quasi-conformes des variétés riemanniennes: application à la démonstration d'une conjecture de A. Lichnerowicz, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 269, 1969, pp. 583 - 586
- [Ob] M. OBATA, The conjectures about conformal transformations, J. Diff. Geom., 6, 1971, pp. 247 - 258
- [ON] B. O'NEILL, Semi-Riemannian geometry, Academic Press, New York, 1983
- [Ta] Y. TASHIRO, Complete Riemannian manifolds and some vector fields, Trans. Amer. Math. Soc., 117, 1965, pp. 251 - 275