Anhang: Analytische Hilfsmittel

In diesem Anhang sind Hilfssätze durchweg technischer Natur zusammengestellt, deren Beweise, würden sie in den Beweisen im Hauptteil dieser Arbeit vorgenommen, die wesentlichen Gedankengänge zu sehr stören würden. Deshalb sind sie hier zusammengefaßt. Zentral ist Lemma A5. Die Lemmata A2 bis A4 führen zu Lemma A5 hin, besitzen aber auch für sich Bedeutung. Lemma A1 und die Lemmata A6, A7 werden je nur an einer Stelle in der Arbeit gebraucht.

Wir betrachten die folgende Menge von Funktionenpaaren

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \;:=\; \{(f_+, f_-) \mid \exists U \subset \mathbb{R} \text{ offen}, \ 0 \in U, \text{ mit } f_+, f_- \in C^\infty(U, \mathbb{R}), \\ f_+^{(2\nu)}(0) = (-1)^\nu f_-^{(2\nu)}(0) \ \wedge \ f_\pm^{(2\nu+1)}(0) = 0 \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned}$$

Lemma A1

$$(f_+, f_-) \in \mathcal{F} \quad \wedge \quad f_+(0) = f_-(0) \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{f_+}, \frac{1}{f_-}\right) \in \mathcal{F}.$$

Beweis:

Es ist $\dfrac{1}{f_\pm} \in C^\infty(V, \mathbb{R})$ für ein $V \subset U$, $0 \in V$, V offen. Wir zeigen induktiv für $\nu \in \mathbb{N}_0$

$$\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu)}(0) = (-1)^\nu \left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu)}(0) \ \ \wedge \ \ \left(\frac{1}{f_\pm}\right)^{(2\nu+1)}(0) = 0\ .$$

Induktionsanfang $\nu = 0$:

$$\left(\frac{1}{f_+}\right)(0) = \frac{1}{f_+(0)} = \frac{1}{f_-(0)} = \left(\frac{1}{f_-}\right)(0) \ \ \wedge \ \ \left(\frac{1}{f_\pm}\right)'(0) = -\frac{f_\pm'(0)}{f_\pm^2(0)} = 0$$

Induktionsschritt von $0, \ldots, \nu - 1$ nach ν , $\nu \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d^{2\nu}}{dx^{2\nu}}\left(f_+\cdot\frac{1}{f_+}\right)\Big|_{x=0} = \sum_{\kappa=0}^{2\nu}\binom{2\nu}{\kappa} f_+^{(\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu-\kappa)}(0) \\
&\qquad\qquad \text{(Leibnizformel)} \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{2\nu}{2\kappa} f_+^{(2\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&\quad \text{(da}\quad (f_+,f_-)\in\mathcal{F}) \\
&= f_+(0)\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu)}(0)+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\binom{2\nu}{2\kappa} f_+^{(2\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&= f_-(0)\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu)}(0)+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\binom{2\nu}{2\kappa}(-1)^{\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0)\ \ (-1)^{\nu-\kappa}\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&\quad (\,(f_+,f_-)\in\mathcal{F}\ \text{ und Induktionsvoraussetzung}\,) \\
&= f_-(0)\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu)}(0)+(-1)^{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \quad .
\end{aligned}
$$

Analog

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu}\binom{2\nu}{\kappa} f_-^{(\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu-\kappa)}(0) \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu}\binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
&= f_-(0)\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu)}(0)+\sum_{\kappa=1}^{\nu}\binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \\
\Rightarrow\ 0 &= (-1)^{\nu} f_-(0)\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu)}(0)+(-1)^{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\binom{2\nu}{2\kappa} f_-^{(2\kappa)}(0)\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu-2\kappa)}(0) \quad .
\end{aligned}
$$

Also mit der ersten Gleichung

$$
\left(\frac{1}{f_+}\right)^{(2\nu)}(0) = (-1)^{\nu}\left(\frac{1}{f_-}\right)^{(2\nu)}(0)\ .
$$

Weiter

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu+1} \binom{2\nu+1}{\kappa} f_\pm^{(\kappa)}(0) \left(\frac{1}{f_\pm}\right)^{(2\nu+1-\kappa)}(0) \\
&= f_\pm(0) \left(\frac{1}{f_\pm}\right)^{(2\nu+1)}(0) \ ,
\end{aligned}
$$

da entweder κ oder $2\nu + 1 - \kappa$ ungerade ist und dann wegen $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$ oder nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$
f_\pm^{(\kappa)}(0) = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{1}{f_\pm}\right)^{(2\nu+1-\kappa)}(0) = 0 \ , \quad \kappa > 0 \ .
$$

Also

$$
\left(\frac{1}{f_\pm}\right)^{(2\nu+1)}(0) = 0 \ .
$$

□

Die Aussagen der folgenden drei Lemmata werden trivial für analytische Funktionen wenn man sich jeweils die Potenzreihen im Nullpunkt anschaut. Da die Eigenschaft C^n–Funktion (C^∞–Funktion) zu sein induktiv definiert ist, muß man zu ihrem Nachweis auch induktiv vorgehen. Es reicht nicht zu zeigen, daß man endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung hat (vgl. das Beispiel im Beweis von Lemma A4) .

Lemma A2

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in U$ und $g \in C^n(U;\mathbb{R})$, $n \in I\!N$, mit $g(0) = 0$. Dann ist die Funktion

$$
h : U \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & , \ \ x \neq 0 \\ g'(0) & , \ \ x = 0 \end{cases}
$$

aus $C^{n-1}(U,\mathbb{R})$ mit $h^{(\nu)}(0) = \dfrac{g^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1}$, $\ 0 \leq \nu \leq n-1$.

Beweis:

Es ist $h \in C^n(U\backslash\{0\},\mathbb{R})$. Durch Induktion weist man nach, daß für $0 \leq \nu \leq n$ und $x \neq 0$ gilt:

$$
\frac{d^\nu h}{dx^\nu}(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x) x^i a_{\nu,i}}{x^{\nu+1}} \ ,
$$

mit den ganzen Zahlen $a_{\nu,i} = (-1)^{\nu-i}\, \nu \cdot (\nu-1) \cdot \ldots \cdot (i+1)$, $\ 0 \leq i \leq \nu$, wobei $a_{\nu,\nu} = (-1)^{\nu-\nu} \cdot 1 = 1$.

Induktionsanfang $\nu = 0$: klar!

Induktionsschritt $\nu \to \nu+1\ ,\ \nu+1 \leq n\ $:

$$\begin{aligned}
\frac{d^{\nu+1}h}{dx^{\nu+1}}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^\nu h}{dx^\nu}\right)(x) \;=\; \frac{d}{dx}\,\frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x)x^i a_{\nu,i}}{x^{\nu+1}} \\
&= \frac{1}{x^{2\nu+2}}\Bigg(\left(\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i+1)}(x)x^i a_{\nu,i} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x) i x^{i-1} a_{\nu,i}\right) x^{\nu+1} \\
&\qquad - \left(\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x)x^i a_{\nu,i}\right)(\nu+1)x^\nu\Bigg) \\
&= \frac{1}{x^{\nu+2}}\Bigg(\sum_{i=1}^{\nu+1} g^{(i)}(x)x^i a_{\nu,i-1} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x) i x^i a_{\nu,i} \\
&\qquad - \sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x)x^i(\nu+1)a_{\nu,i}\Bigg) \\
&= \frac{1}{x^{\nu+2}}\Bigg(g^{(\nu+1)}(x)x^{\nu+1}a_{\nu,\nu} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x)x^i(a_{\nu,i-1} + (i-\nu-1)a_{\nu,i}) \\
&\qquad - g^{(0)}(x)(\nu+1)a_{\nu,0}\Bigg) \\
&\equiv \frac{1}{x^{\nu+2}}\sum_{i=0}^{\nu+1} g^{(i)}(x)x^i a_{\nu+1,i}
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung liest man folgende Rekursion ab:

$$\begin{aligned}
a_{\nu+1,\nu+1} &= a_{\nu,\nu} \\
a_{\nu+1,i} &= a_{\nu,i-1} + (i-\nu-1)a_{\nu,i}\ ,\quad 1 \leq i \leq \nu \\
a_{\nu+1,0} &= -(\nu+1)a_{\nu,0}
\end{aligned}$$

Daher folgt aus der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
a_{\nu+1,\nu+1} &= a_{\nu,\nu} \;=\; 1 \\
a_{\nu+1,i} &= (-1)^{\nu-i+1}\,\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot i \;+\; (i-\nu-1)(-1)^{\nu-i}\,\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(i+1) \\
&= (-1)^{\nu-i+1}\Big(\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot i \;+\; (\nu-i+1)\,\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(i+1)\Big) \\
&= (-1)^{\nu-i+1}\,\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(i+1)\Big(i+(\nu-i+1)\Big) \\
&= (-1)^{\nu-i+1}\,(\nu+1)\cdot\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot(i+1)\ \ ,\ \ 1 \leq i \leq \nu \\
a_{\nu+1,0} &= -(\nu+1)a_{\nu,0} \;=\; -(\nu+1)(-1)^\nu\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot 1 \\
&= (-1)^{\nu+1}(\nu+1)\cdot\nu\cdot(\nu-1)\cdot\ldots\cdot 1
\end{aligned}$$

Damit zeigen wir nun, daß sich $\dfrac{d^\nu h}{dx^\nu}(x)$, $x \in U\backslash\{0\}$, $0 \le \nu \le n-1$, stetig in den Nullpunkt fortsetzen läßt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{d^\nu h}{dx^\nu}(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i)}(x)x^i a_{\nu,i}}{x^{\nu+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{\nu} g^{(i+1)}(x)x^i a_{\nu,i} + \sum_{i=1}^{\nu} g^{(i)}(x) i x^{i-1} a_{\nu,i}}{(\nu+1)x^\nu} \qquad \text{(l'Hospital)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{g^{(\nu+1)}(x)x^\nu a_{\nu,\nu} + \sum_{i=0}^{\nu-1} g^{(i+1)}(x)x^i (a_{\nu,i} + (i+1)a_{\nu,i+1})}{(\nu+1)x^\nu} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{g^{(\nu+1)}(x)x^\nu}{(\nu+1)x^\nu} \\
&= \frac{g^{(\nu+1)}(0)}{\nu+1}
\end{aligned}$$

Nun folgt induktiv mit dem Mittelwertsatz, daß $h \in C^{n-1}(U,\mathbb{R})$:

Nach dem gezeigten ist h stetig auf U. Für jedes $x \neq 0$ ist also h auf $[0,x]$ (bzw. $[x,0]$ für $x<0$) stetig und in $]0;x[$ (bzw. $]x,0[$) differenzierbar. Der Mittelwertsatz liefert dann ein $\xi_x \in]0,x[$ (bzw. $\xi_x \in]x,0[$) mit

$$\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = h'(\xi_x)$$

Da h' stetig in den Nullpunkt fortsetzbar ist, folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{\xi\to 0} h'(\xi) = \frac{g''(0)}{2}$$

Also ist $h \in C^1(U,\mathbb{R})$ mit $h'(0) = \dfrac{g''(0)}{2}$, u.s.w. $\square$

Lemma A3

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in U$ und $f \in C^{2n}(U,\mathbb{R})$, $n \in I\!N$, mit $f^{(2k+1)}(0) = 0$, $0 \le k \le n-1$. Dann ist die Abbildung

$$x \mapsto f(\sqrt{x}\,) ,$$

die für ein $\varepsilon > 0$ auf $[0,\varepsilon)$ erklärt ist, aus $C^n([0,\varepsilon),\mathbb{R})$. Hierbei ist in 0 immer die rechtsseitige Ableitung gemeint.

Beweis:

Für $x > 0$ ist $\dfrac{d}{dx}(f(\sqrt{x}\,)) = \dfrac{f'(\sqrt{x}\,)}{2\sqrt{x}} = h(\sqrt{x}\,)$ mit $h(t) := \dfrac{f'(t)}{2t}$, $t \in U \setminus \{0\}$. Nach Lemma A2 ist h in den Nullpunkt stetig fortsetzbar, d.h. $\dfrac{d}{dx}(f\sqrt{x}\,))$ läßt sich in den

Nullpunkt stetig fortsetzen. Wie oben erkennt man, daß die Abbildung $x \mapsto f(\sqrt{x}\,)$ aus $C^1([0,\varepsilon),\mathbb{R})$ ist.
Weiter ist die stetig in den Nullpunkt fortgesetzte Funktion h nach Lemma A2 in $C^{2n-2}(U,\mathbb{R})$ mit $h^{(2k+1)}(0) = \dfrac{f^{(2k+3)}(0)}{2(2k+2)} = 0$, $0 \le k \le n-2$. h hat also für $n-1 \in \mathbb{N}$ die analogen Eigenschaften wie f für $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\dfrac{d}{dx}(f(\sqrt{x}\,)) = h(\sqrt{x}\,)$ folgt die Behauptung induktiv. $\square$

Bemerkung:

Das Lemma gilt analog für die Abbildungen $x \mapsto f(\pm\sqrt{\pm x}\,)$ mit festen, voneinander unabhängigen Wahlen der Vorzeichen $\pm$.

Wir betrachten nun für zwei Funktionen $f_+, f_- \in C^\infty(U,\mathbb{R})$, $0 \in U \subset \mathbb{R}$, U offen, die Funktion

$$f : x \mapsto \begin{cases} f_+(\pm\sqrt{x}\,) & , \quad x > 0 \\ f_-(\pm\sqrt{-x}\,) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

für eine beliebige, voneinander unabhängige Wahl der Vorzeichen $\pm$ vor den Wurzeln. Es gilt

Lemma A4

f läßt sich zu einer, in einer Nullumgebung V definierten, C^∞-Funktion fortsetzen genau dann, wenn $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$.

Beweis:

notwendig: Man hat für die glatte Funktion f im Nullpunkt endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu + o(x^n)\ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es ist

$$\begin{array}{rrcll} & f_+(\pm\sqrt{x}\,) & = & f(x) & \text{für } x > 0 \\ \Rightarrow & f_+(t) & = & f(t^2) & \text{für } t > 0 \text{ oder für } t < 0 \\ \Rightarrow & f_+(t) & = & \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!} t^{2\nu} + o(t^{2\nu}) & \text{für } t > 0 \text{ oder für } t < 0 \end{array}$$

Da f_+ glatt ist, ist dies die Taylorentwicklung von f_+, also

$$f_+^{(2\nu)}(0) = \frac{a_\nu}{\nu!}(2\nu)! \ \wedge\ f_+^{(2\nu+1)}(0) = 0\ , \ \nu \in \mathbb{N}_0$$

Analog

$$
\begin{array}{rrcll}
 & f_-(\pm\sqrt{-x}\,) & = & f(x) & \text{für } x<0 \\
\Rightarrow & f_-(t) & = & f(-t^2) & \text{für } t>0 \text{ oder für } t<0 \\
\Rightarrow & f_-(t) & = & \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!}(-1)^\nu t^{2\nu} + o(t^{2\nu}) & \text{für } t>0 \text{ oder für } t<0 \\
\Rightarrow & f_-^{(2\nu)}(0) & = & (-1)^\nu \frac{a_\nu}{\nu!}(2\nu)! \quad \wedge \quad f_-^{(2\nu+1)}(0) = 0\,, \quad \nu \in \mathbb{N}_0 &
\end{array}
$$

hinreichend: Da $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$ ist, hat man im Nullpunkt endliche Entwicklungen der folgenden Form

$$f_+(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!} t^{2\nu} + o(t^{2n})$$

und

$$f_-(t) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{a_\nu}{\nu!} t^{2\nu} + o(t^{2n})$$

Daher gilt für die Annäherung an 0 von links und von rechts

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{\nu!} x^\nu + o(x^n) \quad . \tag{A.1}$$

Nun ist folgendes Argument falsch:

> $f \in C^\infty(V \setminus \{0\}, \mathbb{R}) \ \wedge\ f$ hat in $x=0$ endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung $\Rightarrow f \in C^\infty(V, \mathbb{R})$.

Gegenbeispiel: $\Phi : x \mapsto e^{-1/x^2} \sin(e^{1/x^2})$. Es ist $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$, Φ stetig fortsetzbar in 0 und Φ hat endliche Entwicklungen beliebiger Ordnung in 0 .
$\Phi(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot x^n + o(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$, denn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\Phi(x)}{x^n} = 0$. Aber Φ ist nicht aus $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denn für $x \neq 0$ ist $\dfrac{d\Phi}{dx}(x) = -\dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \sin(e^{1/x^2}) - \dfrac{2}{x^3} \cos(e^{1/x^2})$ und der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{d\Phi}{dx}(x)$ existiert nicht.
Statt dessen verfahren wir wie folgt: Nach Lemma A3 existieren wegen

$$f(x) = f_+(\pm\sqrt{x}\,), \;\; x > 0$$

und

$$f(x) = f_-(\pm\sqrt{-x}\,), \;\; x < 0$$

die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \ \text{ und } \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x),$$

das sind die rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen von f in 0. Mit diesen Ableitungen lassen sich rechtsseitige und linksseitige Taylorentwicklungen hinschreiben. Diese beiden müssen mit der in Gl. (A.1) gegebenen übereinstimmen. Also ist

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x) \ = \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

Mithin $f \in C^\infty(V,\mathbb{R})$. □

Lemma A5

Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $0 \in U$, und $f_+, f_- \in C^\infty(U,\mathbb{R})$.
Definiert man auf $A := \{r \cdot x \mid (r,x) \in \mathcal{D} \ \wedge \ r \in U\} \subset \mathbb{R}^n_1 \setminus \Gamma^n_1$ eine Funktion f durch

$$(r,x) \mapsto f_\eta(r) \ , \ \eta = \langle x,x\rangle,$$

so ist f auf $A \cup \Gamma^n_1$ glatt fortsetzbar genau dann, wenn $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$.

Beweis:

notwendig: Seien $x := \dfrac{1}{2}(e_1 + e_n)$, $\ y := \dfrac{1}{2}(-e_1 + e_n) \in \Gamma^n_1$. Dann ist $\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{2}$. Für die Gerade $c : t \mapsto x + ty$ ist $\langle c(t), c(t)\rangle = t$ und

$$f(c(t)) = \begin{cases} f_+(\sqrt{t}\,) & , \quad t > 0 \\ f_-(\sqrt{-t}\,) & , \quad t < 0 \end{cases}$$

(Man beachte, daß $c(t)$ zeitartig positiv ist für $t < 0$.)

Da $f \circ c$ glatt ist, muß nach Lemma A4 $(f_+, f_-) \in \mathcal{F}$ sein.

hinreichend: Wir verfahren wie im Beweis von Lemma A2. Zuerst zeigen wir, daß für jedes $y_0 \in \Gamma^n_1$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{y\to y_0\\ y\in A}} d^k f\Big|_y$$

existiert. Dabei ist $d^k f$, die k-te Ableitung von f, eine k-Form auf dem $\mathbb{R}^n$. Dann weisen wir die Differenzierbarkeit mit dem Analogon des Mittelwertsatzes für den $\mathbb{R}^n$ induktiv nach.

Wir betrachten die glatten Funktionen

$$g_\pm : t \mapsto \begin{cases} f_+(\sqrt{t}\,) & , \quad t > 0 \\ f_-(\pm\sqrt{-t}\,) & , \quad t < 0 \end{cases}$$

Es ist nach dem Beweis von Lemma A4

$$g_{\pm}^{(n)}(0) = \frac{f_{+}^{(2n)}(0)}{(2n)!} n! \ , \ n \in I\!N_0 \ .$$

Nun läßt sich auf jeder Zusammenhangskomponente Z von A die Funktion f schreiben als

$$f(y) = g_{\pm}(\langle y, y \rangle)$$

mit festem Vorzeichen + oder − .

Wir berechnen $d^k f\Big|_y$, $y \in Z$. Dazu seien $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in I\!N_0^n$ Multiindizes der Länge $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ und

$$d^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}.$$

$d^k f$ wird in Koordination durch sämtliche $d^\alpha f$, $|\alpha| = k$, beschrieben. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) &= g'_{\pm}(\langle y, y \rangle)\, 2\epsilon_i y_i \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}(y) &= g''_{\pm}(\langle y, y \rangle)\, 4\epsilon_i \epsilon_j y_i y_j + g'_{\pm}(\langle y, y \rangle)\, 2\epsilon_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

u.s.w.

Man erkennt, daß für $\alpha \in I\!N_0^n$

$$d^\alpha f\Big|_y = \sum_{\kappa=0}^{|\alpha|} g_{\pm}^{(\kappa)}(\langle y, y \rangle) \cdot P_\kappa^\alpha(y) \quad ,$$

mit Polynomen P_κ^α auf $\mathbb{R}^n$, die nur von α und κ, nicht aber vom Vorzeichen $\pm$ der Abbildung $g_{\pm}$ abhängen.

Also folgt für $y_0 \in \Gamma_1^n$

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in Z}} d^\alpha f\Big|_y = \sum_{\kappa=0}^{|\alpha|} g_{\pm}^{(\kappa)}(0) P_\kappa^\alpha(y_0).$$

Die rechte Seite ist unabhängig von Z, also existiert $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in A}} d^\alpha f\Big|_y$ für alle $\alpha \in I\!N_0^n$ und daher auch $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in A}} d^k f\Big|_y$ für alle $k \in I\!N_0$.
Setzt man durch $f(y_0) := \lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in A}} f(y)$, $y_0 \in \Gamma_1^n$, f in den Lichtkegel fort, so ist f stetig auf $A \cup \Gamma_1^n$:

In Punkten $y \in A$ ist dies klar. Für $y_0 \in \Gamma_1^n$ sei zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $|f(y_0)-f(y)| \leq \varepsilon$, $\forall y \in U_\delta(y_0) \cap A$ ($U_\delta(y_0)$ = euklidischer Ball mit Radius δ um y_0).
Dann ist für $y_1 \in U_\delta(y_0) \cap \Gamma_1^n$

$$\begin{aligned} |f(y_0) - f(y_1)| &= |f(y_0) - \lim_{\substack{y \to y_1 \\ y \in U_\delta(y_0) \cap A}} f(y)| \\ &= \lim_{\substack{y \to y_1 \\ y \in U_\delta(y_0) \cap A}} |f(y_0) - f(y)| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Insgesamt

$$|f(y_0) - f(y)| \leq \varepsilon \qquad \forall y \in U_\delta(y_0) \cap (A \cup \Gamma_1^n).$$

Nun weisen wir die Differenzierbarkeit in $y_0 \in \Gamma_1^n$ nach. Sei $L_0 = \lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ y \in A}} df\Big|_y$. Mit $|\cdot|$ bezeichnen wir den euklidischen Betrag in $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{R}$ und mit $\|\cdot\|$ die lub-Norm (für 1-Formen) zum euklidischen Betrag. Es ist (vgl. [Ca], S. 54 ff)

$$|f(y) - f(y_0) - L_0(y - y_0)| \leq \sup_{t \in]y_0, y[} \|df\Big|_t - L_0\| \cdot |y - y_0|$$

für alle $y \in A$, wobei $]y_0, y[$ die Strecke von y_0 nach y ohne Anfangs- und Endpunkt bezeichnet.
Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\|df\Big|_t - L_0\| \leq \varepsilon \qquad \forall t \in U_\delta(y_0) \cap A\,.$$

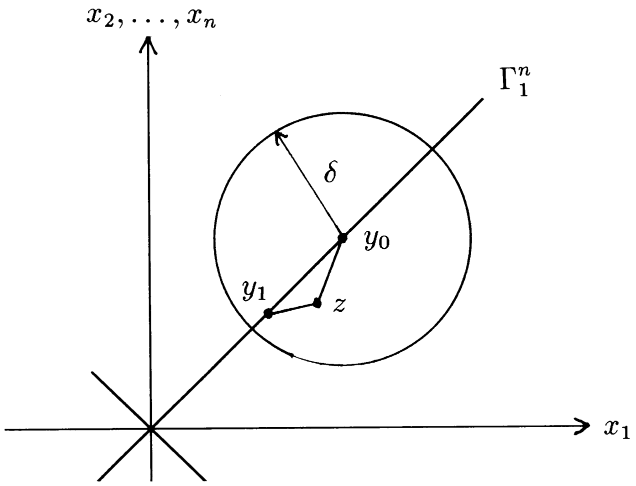
Daher ist für $y \in U_\delta(y_0) \cap A$

$$|f(y) - f(y_0) - L_0(y - y_0)| \leq \varepsilon |y - y_0|\,.$$

Weiter für alle $y_1 \in U_\delta(y_0) \cap \Gamma_1^n$

$$\begin{aligned} |f(y_1) - f(y_0) - L_0(y_1 - y_0)| &\leq |f(y_1) - f(z) - L_0(y_1 - z)| + \\ &\quad |f(z) - f(y_0) - L_0(z - y_0)| \\ &\quad z \in U_\delta(y_0) \cap A \text{ zunächst beliebig} \\ &\leq \sup_{t \in]y_1, z[} \|df\Big|_t - L_0\|\, |y_1 - z| \\ &\quad + \sup_{t \in]z, y_0[} \|df\Big|_t - L_0\|\, |z - y_0| \\ &\leq \varepsilon(|y_1 - z| + |z - y_0|) \end{aligned}$$

Für geeignete $z \in U_\delta(y_0) \cap A$ ist $|y_1 - z| + |z - y_0| \leq 2|y_1 - y_0|$:



Daher $|f(y_1) - f(y_0) - L_0(y_1 - y_0)| \leq 2\varepsilon |y_1 - y_0|$.

Also ist f in y_0 differenzierbar mit Ableitung $df\Big|_{y_0} = L_0$.

Wegen $d^k(df) = d^{k+1}f$ (modulo einer kanonischen Identifikation) hat man für df die gleichen Voraussetzungen wie für f. Induktiv folgt daher, daß f unendlich oft differenzierbar ist. □

Lemma A6

Sei $(\psi_+, \psi_-) \in \mathcal{F}$ mit $\psi''_+(0) = -\psi''_-(0) \neq 0$. Setze $f_\eta := \dfrac{\psi'_\eta}{\psi''_\eta(0)}$, $\eta = \pm 1$.
Sei ρ_η die Lösung der Differentialgleichung

$$\rho'_\eta = \frac{\rho_\eta}{f_\eta}$$

mit $\rho_\eta(0) = 0, \;\; \rho'_\eta(0) = 1, \;\; \eta = \pm 1$.
Dann ist

$$\left(\frac{\rho_+(r)}{r}, \frac{\rho_-(r)}{r} \right) \in \mathcal{F}.$$

Beweis:

Wegen $(\psi_+, \psi_-) \in \mathcal{F}$ gilt

$$f_\pm^{(2\nu)}(0) = 0 \quad \wedge \quad f_+^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^\nu f_-^{(2\nu+1)}(0), \;\; \nu \in I\!N_0 \; .$$

Wegen Lemma A2 reicht es zu zeigen:

$$\rho_{\pm}^{(2\nu)}(0) = 0 \quad \wedge \quad \rho_{+}^{(2\nu+1)}(0) = (-1)^{\nu} \rho_{-}^{(2\nu+1)}(0), \quad \nu \in I\!N_0 \,.$$

Das weisen wir nun induktiv nach.

Der *Induktionsanfang* für $\nu = 0$ gilt nach Voraussetzung.

Induktionsschritt von $0, \ldots, \nu - 1$ nach ν, $\nu \in I\!N$:
Wir wenden auf $\rho_\eta = \rho_\eta' \cdot f_\eta$ die Leibnizformel an:

$$\begin{aligned}
\rho_\eta^{(2\nu)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu} \binom{2\nu}{\kappa} \rho_\eta^{(\kappa+1)}(0) \cdot f_\eta^{(2\nu-\kappa)}(0) \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu}{2\kappa+1} \rho_\eta^{(2\kappa+2)}(0) \cdot f_\eta^{(2\nu-2\kappa-1)}(0) \\
&\ \text{(Eigenschaften von } f\text{)} \\
&= \binom{2\nu}{2\nu-1} \rho_\eta^{(2\nu)}(0) \cdot f_\eta^{(1)}(0) \\
&\ \text{(Induktionsvoraussetzung)} \\
&= 2\nu \cdot \rho_\eta^{(2\nu)}(0) \\
\Rightarrow \ \rho_\eta^{(2\nu)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\rho_\eta^{(2\nu+1)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{2\nu+1} \binom{2\nu+1}{\kappa} \rho_\eta^{(\kappa+1)}(0) \cdot f_\eta^{(2\nu+1-\kappa)}(0) \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_\eta^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_\eta^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_\eta^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_\eta^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&\ + \binom{2\nu+1}{2\nu} \rho_\eta^{(2\nu+1)}(0) \cdot f_\eta^{(1)}(0) \\
\Rightarrow \ -2\nu\, \rho_\eta^{(2\nu+1)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \binom{2\nu+1}{2\kappa} \rho_\eta^{(2\kappa+1)}(0) \cdot f_\eta^{(2\nu+1-2\kappa)}(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad -2\nu\,\rho_+^{(2\nu+1)}(0) &= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1}\binom{2\nu+1}{2\kappa}\rho_+^{(2\kappa+1)}(0)\cdot f_+^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&= \sum_{\kappa=0}^{\nu-1}\binom{2\nu+1}{2\kappa}(-1)^{\kappa}\rho_-^{(2\kappa+1)}(0)\cdot(-1)^{\nu-\kappa}f_-^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&= (-1)^{\nu}\sum_{\kappa=0}^{\nu-1}\binom{2\nu+1}{2\kappa}\rho_-^{(2\kappa+1)}(0)\cdot f_-^{(2\nu+1-2\kappa)}(0) \\
&= (-1)^{\nu}(-2\nu)\rho_-^{(2\nu-1)}(0)
\end{aligned}$$

□

Lemma A7

Zu jedem $c > 0$ existiert eine Funktion $f \in C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften

i) $\exists \varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[: \quad f(x) = x\ ,\ 0 \le x \le \varepsilon \quad \wedge \quad f(x) = 1 - x\ ,\ 1 - \varepsilon \le x \le 1$

ii) $f(x) > 0\ ,\ 0 < x < 1$

iii) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{t} - \frac{1}{1-t}\right) dt = 0$

iv) $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = c$

v) f ist symmetrisch bzgl. $x = \frac{1}{2}$: $\quad f\left(\frac{1}{2} + t\right) = f\left(\frac{1}{2} - t\right)\ ,\ 0 \le t \le \frac{1}{2}$.

Beweis:
Aufgrund der Eigenschaft (i) existiert stets das Integral in Eigenschaft (iii).

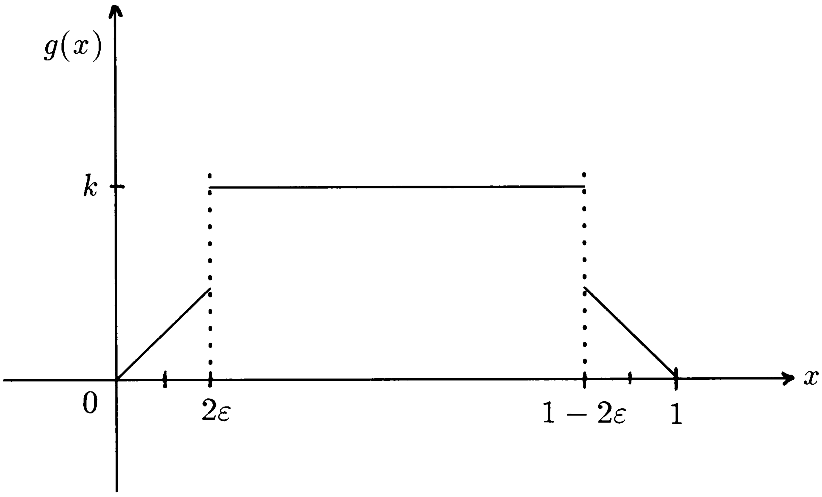
Unter der Voraussetzung (i) ist (iii) äquivalent zu

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{f(t)} dt = 2\ln\frac{1}{\varepsilon}$$

Wähle ein ε so klein, daß $\varepsilon < \frac{1}{4}$, $\varepsilon < \frac{\sqrt{c}}{2}$, $\frac{(1-4\varepsilon)^2}{c-4\varepsilon^2} + 2\ln 2 < 2\ln\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Sodann sei $k > 0$ so, daß das Integral über die Funktion

$$g : x \mapsto \begin{cases} x & ,\ 0 \le x \le 2\varepsilon \\ k & ,\ 2\varepsilon < x < 1 - 2\varepsilon \\ 1 - x & ,\ 1 - 2\varepsilon \le x \le 1 \end{cases}$$

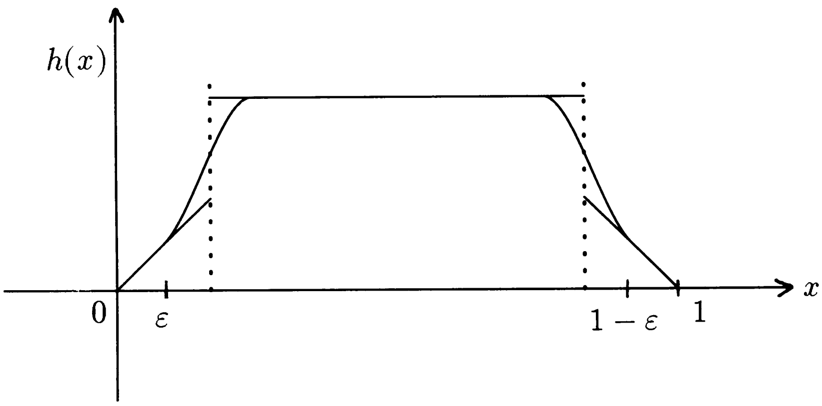
gerade c ergibt. Das ist äquivalent zu $4\varepsilon^2 + (1-4\varepsilon)k = c$ oder $k = \dfrac{c-4\varepsilon^2}{1-4\varepsilon}$.



Nun gilt

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{g(t)}dt = \frac{1}{k}(1-4\varepsilon) + 2\ln 2 = \frac{(1-4\varepsilon)^2}{c-4\varepsilon^2} + 2\ln 2 < 2\ln\frac{1}{\varepsilon}\ .$$

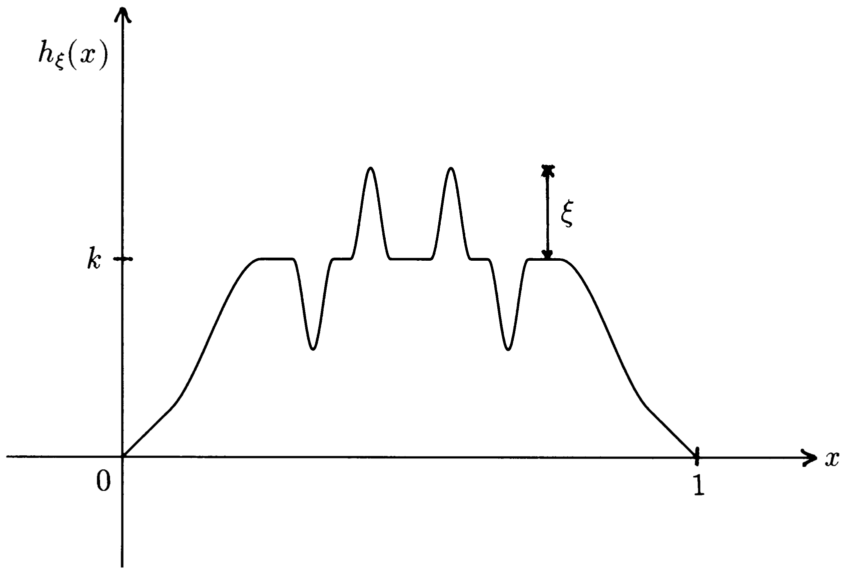
Approximiere g durch eine C^∞-Funktion h nach folgender Skizze. Dabei sollen sich g und h nur im Bereich $[\varepsilon, 2\varepsilon+\delta] \cup [1-2\varepsilon-\delta, 1-\varepsilon]$ unterscheiden ($\delta > 0$ genügend klein).



h soll symmetrisch bzgl. $x = \dfrac{1}{2}$ sein. Außerdem $\displaystyle\int_0^1 h(t)dt = c$ und noch $\displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h(t)}dt < 2\ln\frac{1}{\varepsilon}$. Letzteres ist der Fall, wenn man h hinreichend nahe bei g wählt.

Sodann versehe h mit vier gleichen C^∞-Picks der variablen Höhe ξ, wie in der folgenden

Abbildung gezeigt:



Nun ändert man die Höhe der Picks stetig von Null an bis k. Dabei ändert sich das Integral

$$\int_0^1 h_\xi(t)dt$$

nicht, aber

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h_\xi(t)}dt$$

wächst stetig von $\displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h(t)}dt < 2\ln\frac{1}{\varepsilon}$ bis $+\infty$.
Also gibt es ein ξ_0 mit

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{1}{h_{\xi_0}(t)}dt = 2\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Setze $f := h_{\xi_0}$. $\square$