

## Kapitel 4: Beispiele

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, welche Graphen als Gerüste von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft (\*) auftreten können.

### Satz 4.1

Erfüllt ein Graph  $\mathcal{G}$  die Eigenschaften 1) bis 5) aus Abschnitt 3.1 (S. 39/40), so gibt es zu jeder Zeitorientierung und jeder Gewichtung von  $\mathcal{G}$  eine zusammenhängende und abwickelbare Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  und eine nicht konstante Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Bedingung (\*) aus Kapitel 3 erfüllen, so daß  $\mathcal{G}$  das Gerüst von  $M$  ist und eine geeignete Abwicklung von  $M$  die gegebene Zeitorientierung und Gewichtung induziert.

### Bemerkung:

Auf jedem Graph  $\mathcal{G}$  der die Eigenschaften 1) bis 5) hat, gibt es eine Zeitorientierung. Dazu wählt man eine Richtung für eine zeitartige Kante. Diese setzt sich auf den maximalen zeitartigen Kantenzug, der die gegebene Kante enthält, eindeutig fort. Falls es noch weitere zeitartige Kanten gibt, wählt man für eine von ihnen eine Richtung und wiederholt das Verfahren, usw.

### Beweis:

Zunächst konstruieren wir die Werte der Funktion  $\psi$  in den Ecken. Dabei muß man beachten, daß für das Wachstum von  $\psi$  um einen kritischen Punkt nur die beiden folgenden Möglichkeiten gegeben sind:



Damit müssen die Funktionswerte von  $\psi$  in den Ecken verträglich sein. Daher kommt die folgende etwas längere und technische Überlegung.

Wir setzen eine Ecke von  $\mathcal{G}$  als Quelle (von  $\text{grad } \psi$ ) fest. Sodann sollen alle zu dieser Ecke benachbarten Ecken Senken sein und die zu diesen wieder benachbarten Ecken sollen Quellen sein, usw. Da jeder Zyklus von  $\mathcal{G}$  eine gerade Länge hat, gibt es bei dieser Definition keine Ecke, die sowohl Quelle als auch Senke sein soll.

Nun kann man  $\mathcal{G}$  mit einer Orientierung versehen, d.h. jede Kante erhält eine Richtung, die das Wachstum von  $\psi$  anzeigt. Diese Orientierung hat nichts mit der Zeitorientierung zu tun.

Jede Kante von  $\mathcal{G}$  hat als Ecken eine Quelle und eine Senke. Eine raumartige Kante soll von der Quelle zur Senke gerichtet sein und eine zeitartige Kante genau umgekehrt.

Dann sieht es um jeder Ecke so aus, wie oben gefordert. Wegen Eigenschaft 5) gibt es keine gerichteten Zyklen in  $\mathcal{G}$ . Daher definiert die Orientierung von  $\mathcal{G}$  eine Halbordnung " $<$ " auf der Menge der Ecke, wenn man vorher noch die transitive Hülle bildet, d.h. für jeden gerichteten Kantenzug führt man noch eine gleichgerichtete Kante zwischen seinen Endpunkten ein.

Gibt es dann noch nicht vergleichbare Ecken, so führt man zwischen zwei solchen Ecken irgendeine gerichtete Kante ein und bildet wieder die transitive Hülle, usw.

Ist  $\mathcal{G}$  endlich, so bricht dieses Verfahren ab und man hat eine Ordnung " $<$ " auf der Menge der Ecken. Hat  $\mathcal{G}$  abzählbar unendlich viele Ecken  $p_0, p_1, p_2, \dots$ , so kann man das Verfahren so führen, daß man für jedes  $n \in \mathbb{N}$  nach endlich vielen Schritten auf  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$  eine Ordnung hat, die sich dann im folgenden nicht mehr ändert. Dies definiert dann eine Ordnung " $<$ " auf  $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ .

Nun definieren wir  $\psi(p_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , induktiv.  
Setze  $\psi(p_0) := 0$ .

Falls  $p_1 < p_0$ , dann  $\psi(p_1) := -1$  und falls  $p_1 > p_0$ , dann  $\psi(p_1) := 1$ .

Sind  $\psi(p_0), \dots, \psi(p_{n-1})$  schon definiert, so sei

für  $p_n < p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ :  $\psi(p_n) := \min\{\psi(p_0), \dots, \psi(p_{n-1})\} - 1$ ,

für  $p_n > p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ :  $\psi(p_n) := \max\{\psi(p_0), \dots, \psi(p_{n-1})\} + 1$ ,

und sonst existieren eindeutig bestimmte Ecken  $p_k$  und  $p_l$ ,  $k, l \in \{1, \dots, n-1\}$  mit  $p_k < p_n < p_l$  und zwischen  $p_k$  und  $p_l$  liegen keine weiteren Ecken  $p_\nu$ ,  $\nu \in \{0, \dots, n-1\}$ . Dann setzt man

$$\psi(p_n) := \frac{1}{2}(\psi(p_k) + \psi(p_l)).$$

Die so definierte Bewertung der Ecken ist mit der Ordnung " $<$ " und also auch mit der Orientierung von  $\mathcal{G}$  verträglich.

Nun definiert man für jede Ecke  $p_i$  eine Teilmenge  $B_i \subset \mathbb{R}_1^n$  der Form  $U(r_1, r_2, r_3)$ . Dabei soll  $r_1 = 1$  oder  $r_1 = \infty$  sein, falls die raumartige Kante, die von  $p_i$  ausgeht, zu einer anderen Ecke führt oder falls sie frei ist.  $r_2$  bzw.  $r_3$  werden analog nach der Art der zeitartigen Kante, die von  $p$  wegzeigt bzw. auf  $p$  hinzeigt (die Richtung ist die der Zeitorientierung), festgelegt.

Jetzt definieren wir auf  $B_i \setminus \Gamma_1^n$  eine Funktion  $\psi_i$  in Polarkoordinaten  $(r, x)$ .

Falls  $r \cdot x$  in einem Kegel liegt, der zu einer  $p_i$  mit  $p_j$  verbindenden Kante gehört, sei

$$\psi_i(r \cdot x) := \psi_{i,\eta}(r) := \psi(p_i) + \text{sign } c \cdot \int_0^{|r|} f_{|c|}(t) dt$$

wobei  $\eta = \langle x, x \rangle$ ,  $c := \psi(p_j) - \psi(p_i)$  und  $f_{|c|}$  die Funktion aus Lemma A7 (S. 93) ist.

Falls  $r \cdot x$  in einem Kegel liegt, der zu einer freien Kante der Länge  $l$  gehört, wähle zunächst eine  $C^\infty$ -Funktion  $\rho_l : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  mit den Eigenschaften

- i)  $\exists \varepsilon > 0 : \rho_l(t) = t, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon$
- ii)  $\rho_l'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, \infty[$
- iii)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_l(t) = l.$

Setze  $h_l(t) := \frac{\rho_l(t)}{\rho_l'(t)}, \quad t \in [0, \infty[.$  (Dann ist  $\rho_l$  Lösung der Differentialgleichung  $\rho_l' = \frac{\rho_l}{h_l}.$ )

Nun definiere

$$\psi_i(r \cdot x) := \psi_{i,\eta}(r) := \psi(p_i) \pm \int_0^{|r|} h_l(t) dt, \quad \eta = \langle x, x \rangle,$$

wobei das Vorzeichen  $\pm$  so zu wählen ist, daß die Funktion  $\psi_i$  so in dem betrachteten Kegel wächst, wie es die Orientierung von  $\mathcal{G}$  fordert.

Dann gilt für  $r$  nahe bei Null  $\psi_{i,\eta}(r) = \psi(p_i) \pm \frac{1}{2}r^2$  und die Vorzeichen sind so gewählt, daß gilt

$$\psi_i(y) = \psi(p_i) \pm \frac{1}{2}\langle y, y \rangle$$

für alle  $y \in B_i \setminus \Gamma_1^n$  in einer Umgebung von  $\Gamma_1^n$ . Daher läßt sich  $\psi_i$  glatt auf  $B_i$  fortsetzen.

Weiter definiere in Polarkoordinaten  $(r, x)$  eine Metrik auf  $B_i \setminus \Gamma_1^n$  durch

$$g_i|_{(r,x)} := \eta dr^2 + (\psi_{i,\eta}'(r))^2 g_\eta, \quad \eta = \langle x, x \rangle.$$

Da  $|\psi_{i,\eta}'(r)| = |r|$  für alle hinreichend kleinen  $r$ , ist  $g_i|_y = g_0|_y$  für alle  $y \in B_i \setminus \Gamma_1^n$  in einer Umgebung von  $\Gamma_1^n$ . Also läßt sich auch  $g_i$  glatt auf  $B_i$  fortsetzen.

Es ist  $\text{grad } \psi_i$  ein konformes Vektorfeld auf  $(B_i, g_i)$  mit  $0 \in B_i$  als einzigem kritischen Punkt (vgl. [ON], Kapitel 7).

Nun werden je zwei Bausteine  $B_i$  und  $B_j$ , die zu benachbarten Ecken  $p_i$  und  $p_j$  in  $\mathcal{G}$  gehören, mittels der Identifikation

$$B_i \supset U^+(1) \ni (r, x) \leftrightarrow (1 - r, x) \in U^+(1) \subset B_j, \quad x \in S(+1)$$

verklebt, falls die verbindende Kante raumartig ist und mittels

$$B_i \supset U^-(1) \ni (r, x) \leftrightarrow (-1 + r, x) \in U^-(-1) \subset B_j, \quad x \in S^0(-1)$$

falls die verbindende Kante zeitartig ist und von  $p_i$  nach  $p_j$  zeigt bzgl. der Zeitorientierung.

Es ist in diesen Fällen

$$\begin{aligned} \psi_{i,+}'(r) &= \text{sign}(c) f_{|c|}(r) \\ &= \text{sign}(c) f_{|c|}(1 - r) \quad (\text{Eigenschaft (v) aus Lemma A7}) \\ &= -\text{sign}(-c) f_{|-c|}(1 - r) \\ &= -\psi_{j,+}'(1 - r) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi'_{i,-}(r) &= \text{sign}(c) f_{|c|}(r) \\
&= -\text{sign}(-c) f_{|-c|}(1-r) \\
&= \psi'_{j,-}(-1+r).
\end{aligned}$$

In jedem Fall ist daher die Identifikation eine Isometrie und man hat auf  $M = \bigcup_i B_i / \sim$  eine Lorentz-Metrik  $g$  mit  $g|_{B_i} = g_i$ . Weiter ist

$$\begin{aligned}
\psi_{j,+}(1-r) &= \psi(p_j) + \text{sign}(-c) \int_0^{1-r} f_{|-c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + c + \text{sign}(-c) \int_0^{1-r} f_{|-c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + c - \text{sign}(c) \int_r^1 f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + \text{sign}(c) \int_0^1 f_{|c|}(t) dt - \text{sign}(c) \int_r^1 f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi(p_i) + \text{sign}(c) \int_0^r f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi_{i,+}(r)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi_{j,-}(-1+r) &= \psi(p_j) + \text{sign}(-c) \int_0^{|-1+r|} f_{|-c|}(t) dt \\
&= \psi(p_j) + \text{sign}(-c) \int_0^{1-r} f_{|-c|}(t) dt \\
&\quad \vdots \\
&= \psi(p_i) + \text{sign}(c) \int_0^r f_{|c|}(t) dt \\
&= \psi_{i,-}(r).
\end{aligned}$$

Daher ist durch  $\psi|_{B_i} = \psi_i$  eine Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert. Es ist  $\text{grad } \psi$  ein konformes Vektorfeld auf  $M$  und die kritischen Punkte von  $\psi$  sind die Nullpunkte  $0 \in B_i$ . Man sieht leicht, daß  $M$   $Cr(\psi)$ -vollständig ist. Das Gerüst von  $M$  ist offensichtlich isomorph zu  $\mathcal{G}$ .

Nun betrachten wir die Wechselabbildungen nach Abschnitt 3.2, Gl. (3.1). Wegen Eigenschaft (iii) aus Lemma A7 ist der Faktor  $a$  in Gl. (3.2), S. 44, gleich Eins. Wählt man für

die orthogonalen Abbildungen  $L_i : T_0 B_i \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  die kanonische Identifikation  $T_0 \mathbb{R}_1^n \cong \mathbb{R}_1^n$ , so werden alle Wechselabbildungen in Gl. (3.1) gleich der Sphäreninversion  $S$ . Also ist die Mannigfaltigkeit  $M$  abwickelbar und die so erhaltene Abwicklung induziert die gegebene Zeitorientierung und Gewichtung von  $\mathcal{G}$ .  $\square$

Als nächstes betrachten wir die Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit genau einem kritischen Punkt der Funktion  $\psi$  und werden sie konform klassifizieren.

Sei also  $M_1$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die die Bedingung (\*) erfüllt mit einer Funktion  $\psi_1$ , die genau einen kritischen Punkt hat. Nach S. 36 ist  $M_1$  konform diffeomorph zu  $U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) \subset \mathbb{R}_1^n$  mit gewissen  $\bar{r}_1, \bar{r}_2 \in ]0; \infty]$ ,  $\bar{r}_3 \in [-\infty, 0[$ . Im folgenden sei o.E.  $M_1 = U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ .

$M_1$  ist abwickelbar mit Abwicklung  $i|_{U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)} : U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3) \rightarrow Q_1^n$ .

Ist nun  $M$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die gleichfalls (\*) erfüllt und konform diffeomorph zu  $M_1$  ist, so ist auch  $M$  abwickelbar. Für  $M$  wählen wir eine nach Abschnitt 3.3 konstruierte Abwicklung  $\delta$ . Dann hat man folgendes kommutative Diagramm,  $F : M \rightarrow M_1$  ein konformer Diffeomorphismus:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & M_1 \\ \delta \downarrow & & \downarrow i \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_{A_1}} & Q_1^n \end{array}$$

Sei nun  $p \in M$  ein kritischer Punkt, der durch  $\delta$  auf  $i(0) \in Q_1^n$  abgebildet wird. Sei  $T$  die Translation von  $\mathbb{R}_1^n$  die  $F(p)$  in 0 verschiebt. Man hat dann das folgende erweiterte Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{F} & M_1 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}_1^n \\ \delta \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow i \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_{A_1}} & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_{A_2}} & Q_1^n \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & \phi_A = \phi_{A_2 \cdot A_1} & & \end{array}$$

Es hat  $\phi_A$  die Eigenschaften

- i)  $\phi_A(i(0)) = i(0)$
- ii)  $\phi_A(i(\Gamma_1^n)) \subset i(\mathbb{R}_1^n)$

Daher folgt wie im Beweis zu Satz 3.4, daß

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A(0, x, 0) = (0, w(x), 0), \quad x \in \mathbb{R}_1^n, \quad w \in \mathcal{O}(1, n-1)$$

$$A(1, 0, -1) = \left( \frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a} \right).$$

Also ist  $\phi_A(j(0)) = \phi_A(\pi(1, 0, -1)) = j(0)$ .

Hätte nun  $M$  mehr als einen kritischen Punkt, so folgt

$$\begin{aligned} j(0) &\in \text{Bild } \delta \\ \Rightarrow j(0) &\in \text{Bild } (\phi_A \circ \delta) \subset \text{Bild } i, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Also liegt in  $M$  nur ein kritischer Punkt und  $M$  ist konform diffeomorph zu  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) \subset \mathbb{R}_1^n$ ,  $\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2 \in ]0; \infty]$ ,  $\bar{\rho}_3 \in [-\infty, 0[$ .

Ersetzt man im obigen Diagramm  $M$  durch  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$  und  $\delta$  durch  $i|_{U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)}$ , so erhält man für  $x \in U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$

$$\begin{aligned} T \circ F(x) &= i^{-1} \circ \phi_A \circ i(x) \\ &= \frac{1}{a} w(x) \end{aligned}$$

oder

$$F(x) = \frac{1}{a} w(x) + t, \quad t \in \mathbb{R}_1^n.$$

Es ist wieder o.E.  $a > 0$ .

Da  $x \mapsto \frac{1}{a} w(x) + t$  eine Bijektion von  $\mathbb{R}_1^n$  ist, gilt: Ist  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$  eine echte Teilmenge von  $\mathbb{R}_1^n$  so auch  $U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$  und umgekehrt.

In diesem Fall, d.h.  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3) \subsetneq \mathbb{R}_1^n$ , ist notwendig  $t = 0$ :

Der Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}_1^n$  ist der Schnittpunkt der Normalen der Randhyperflächen von  $U(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3)$  und  $U(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3)$ .  $F$  bildet nun diese Randhyperflächen aufeinander ab und, da es eine winkeltreue affine Abbildung ist, die Normalen wieder auf Normalen. Also bildet  $F$  die Schnittpunkte der Normalen aufeinander ab, d.h.  $F(0) = 0$ , oder  $t = 0$ .

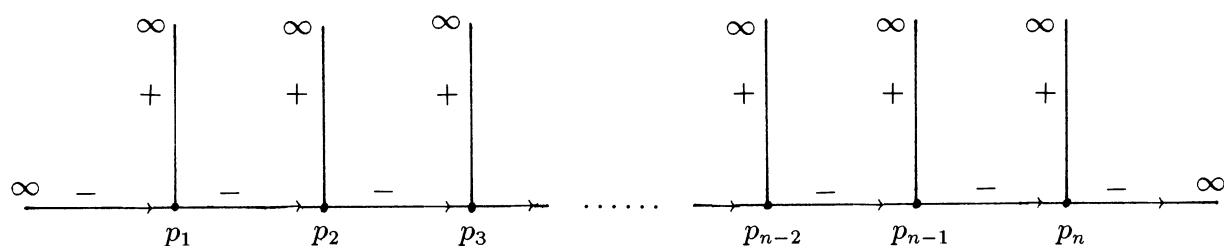
Für  $w \in \mathcal{O}^+(1, n-1)$  ist  $\bar{r}_i = \frac{1}{a} \bar{\rho}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  und für  $w \in \mathcal{O}^-(1, n-1)$  ist  $\bar{r}_1 = \frac{1}{a} \bar{\rho}_1$ ,  $\bar{r}_2 = -\frac{1}{a} \bar{\rho}_3$ ,  $\bar{r}_3 = -\frac{1}{a} \bar{\rho}_2$ .

In jedem Fall sind aber die Gerüste von  $M$  und  $M_1$  mit den zwei zusätzlichen Daten Zeitorientierung und Gewichtung im wesentlichen gleich.

Dies kann man noch etwas anders ausdrücken. Das Gerüst von  $M$  besteht aus einer Ecke mit drei freien Kanten, einer raumartigen und zwei zeitartigen, die je eine Länge haben. Unter Vernachlässigung der Zeitorientierung gilt hier: Die drei Längen der freien Kanten bilden, bis auf einen gemeinsamen positiven Faktor und bis auf die Reihenfolge der Längen der beiden zeitartigen Kanten, ein vollständiges System konformer Invarianten.

Jetzt werden wir mit Hilfe von Satz 4.1 auf  $\mathbb{R}^n$  mit der gewöhnlichen differenzierbaren Struktur unendlich viele lokal konform flache Lorentz-Metriken konstruieren, die paarweise nicht global konform diffeomorph sind.

Nach Satz 4.1 existieren Mannigfaltigkeiten  $M_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit den folgenden gewichteten und zeitorientierten Gerüsten:



Wir lassen auch abzählbar unendlich viele Ecken zu, unterschieden in die beiden Fälle  $p_0, p_1, p_2, \dots$  ( $\rightarrow M_{\mathbb{N}}$ ) und  $\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots$  ( $\rightarrow M_{\mathbb{Z}}$ ). Mit Satz 3.2 und dem vorhergehenden Beispiel erkennt man, daß diese Mannigfaltigkeiten untereinander konform inäquivalent sind.

Um Satz 3.2 anwenden zu können, d.h. das Bild einer Abwicklung ist gleich  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ , kann man allgemeiner für die raumartigen freien Kanten solche endlichen Längen zulassen, für die z.B. das Produkt der Längen für zwei aufeinanderfolgende Kanten größer als 1 ist. Auch kann man die Längen der bis zu zwei freien zeitartigen Kanten unter Berücksichtigung des oben gesagten endlich wählen.

Nun betrachten wir eine nach Abschnitt 3.3 konstruierte Abwicklung  $\delta_n$  von  $M_n$  und ihre Faktorisierung

$$M_n \xrightarrow{\gamma_n} M_{\delta_n} \xrightarrow{\hat{\delta}_n} Q_1^n.$$

Es ist  $M_{\delta_n} = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{R}_1^n(p_i) / \sim$ ,  $\mathbb{R}_1^n(p_i)$  eine Kopie von  $\mathbb{R}_1^n$ , wobei

$$\mathbb{R}_1^n(p_i) \supset U^-(+\infty) \xleftrightarrow{S} U^-(-\infty) \subset \mathbb{R}_1^n(p_{i+1})$$

zu identifizieren ist.

Wir überlegen uns jetzt, daß  $M_{\delta_n}$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist.

Sei

$$\begin{aligned} B(p_1) &:= \overline{U(\infty, 1, -\infty)} \subset \mathbb{R}_1^n(p_1) \\ B(p_\nu) &:= \overline{U(\infty, 1, -1)} \subset \mathbb{R}_1^n(p_\nu), \quad 2 \leq \nu \leq n-1, \\ B(p_n) &:= \overline{U(\infty, \infty, -1)} \subset \mathbb{R}_1^n(p_n). \end{aligned}$$

(  $\overline{\quad}$  steht für den Abschluß in  $\mathbb{R}^n$ . ) Dann ist  $M_{\delta_n}$  diffeomorph zu

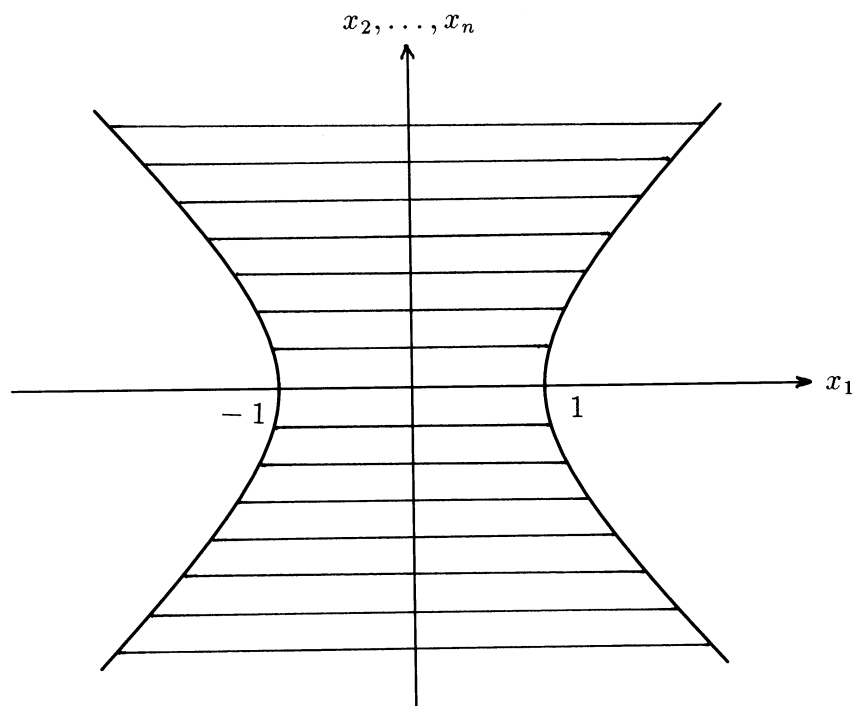
$$B(p_1) \cup_{-id} B(p_2) \cup_{-id} \dots \cup_{-id} B(p_n)$$

wobei

$$S^\circ(-1) \subset \partial B(p_\nu) \quad \text{mit} \quad -S^\circ(-1) \subset \partial B(p_{\nu+1}), \quad 1 \leq \nu \leq n-1,$$

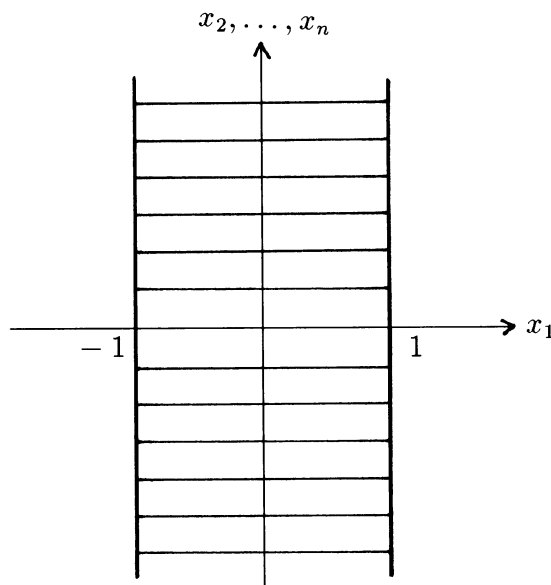
zu verkleben ist gemäß der Abbildung  $S|_{S^\circ(-1)} = -id|_{S^\circ(-1)}$ .

Nun ist  $B(p_\nu)$ ,  $2 \leq \nu \leq n-1$ ,





diffeomorph zum Streifen  $\tilde{B}(p_\nu) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 \leq 1\}$



und analog  $B(p_1)$  zu  $\tilde{B}(p_1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 < x_1 \leq 1\}$  und  $B(p_n)$  zu  $\tilde{B}(p_n) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid -1 \leq x_1 < 1\}$ .

Daher ist  $M_{\delta_n}$  (und  $M_n$ ) diffeomorph zum Streifen  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < 2n\}$ , also auch diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

Gleiches gilt für  $M_{\mathbb{N}}$  und  $M_{\mathbb{Z}}$  und für die Mannigfaltigkeiten mit endlichen freien Kanten. Man gewinnt so eine abzählbar-unendlich parametrisierte Schar von lokal konform flachen Lorentz-Mannigfaltigkeiten, die alle diffeomorph zum  $\mathbb{R}^n$ , aber untereinander nicht konform äquivalent sind.

Zum Abschluß wollen wir zeigen, daß jede einfach zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft (\*) konform in die universelle Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  eingebettet werden kann.

Zunächst ein Lemma.

#### Lemma 4.1

$M$  sei eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die mit der Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  die Bedingung (\*) erfüllt. Dann gilt:

$M$  ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn das Gerüst von  $M$  ein Baum ist.

#### Beweis:

” $\Leftarrow$ ” Sei das Gerüst  $\mathcal{G}$  von  $M$  ein Baum.

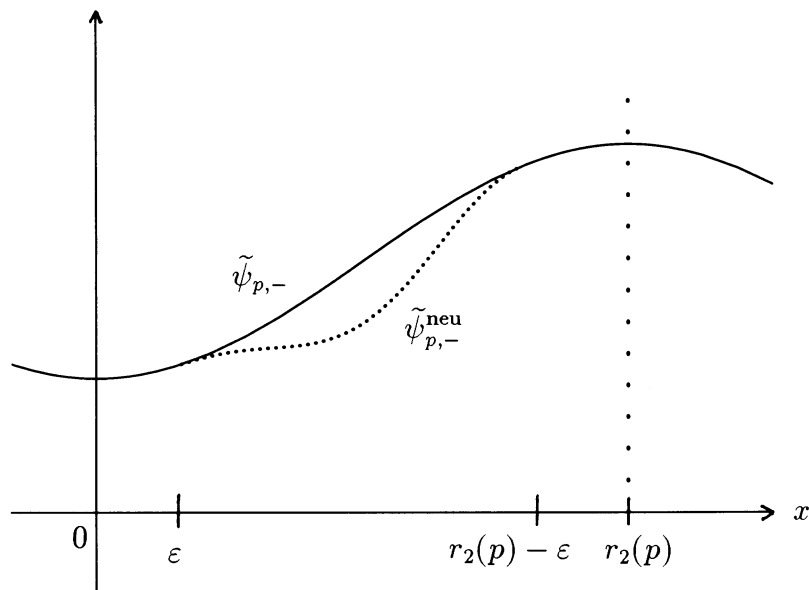
Weiter sei  $c$  eine geschlossene Kurve in  $M$ . Die Spur von  $c$  läßt sich durch endlich viele Blöcke  $B_p$ ,  $p \in Cr(\psi)$ , überdecken. Die zugehörigen kritischen Punkte liegen in einem endlichen zusammenhängenden Teilgraph  $\mathcal{G}_0$  des Gerüsts. (Dazu braucht man z.B. nur jeden solchen kritischen Punkt durch einen Kantenzug mit einem festen kritischen Punkt verbinden.)

Nun sind alle Blöcke  $B_p$ ,  $p \in Cr(\psi)$ , einfach zusammenhängend. Wähle einen kritischen Punkt  $p_0 \in \mathcal{G}_0$ . Sei  $p_1 \in \mathcal{G}_0$  zu  $p_0$  benachbart. Da  $\mathcal{G}$  ein Baum ist, können  $p_0$  und  $p_1$  nur längs einer Kante benachbart sein. Also ist  $B_{p_0} \cap B_{p_1}$  einfach zusammenhängend. Der Satz von Seifert-van Kampen sagt dann, daß  $B_{p_0} \cup B_{p_1}$  einfach zusammenhängend ist. Nimmt man, so fortfahrend, immer einen neuen Block dazu, so erkennt man, daß  $\bigcup_{p \in \mathcal{G}_0} B_p$  einfach zusammenhängend ist. Nun liegt unsere geschlossene Kurve  $c$  in  $\bigcup_{p \in \mathcal{G}_0} B_p$ . Daher ist  $c$  nullhomotop in  $M$ .

” $\Rightarrow$ ” Sei  $M$  einfach zusammenhängend.

Annahme: Das Gerüst  $\mathcal{G}$  von  $M$  habe einen Zyklus. Da  $M$  einfach zusammenhängend ist, ist  $(M, g)$  abwickelbar nach dem Satz von Kuiper. Also muß sich jeder Zyklus in der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Weise schließen. Wir werden nun an einer Kante eines Zykluses die Metrik  $g$  und die Funktion  $\psi$  so abändern, daß die neue pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht mehr abwickelbar ist. Dabei ändern wir aber nicht die Topologie von  $M$ .

Seien dazu  $p$  und  $q$  zwei Ecken aus einem Zyklus, die längs einer zeitartigen Kante benachbart sind. Es ist  $\tilde{B}_p = U(r_1(p), r_2(p), r_3(p)) \subset T_p M$  und  $\tilde{B}_q = U(r_1(q), r_2(q), r_3(q)) \subset T_q M$  und o.E.  $r_0 := r_2(p) = -r_3(q) > 0$  und  $U^-(r_0) \subset \tilde{B}_p$  bzw.  $U^-(-r_0) \subset \tilde{B}_q$  die zur verbindenden Kante gehörenden Teile in  $T_p M$  bzw.  $T_q M$ . Nun ändern wir  $\tilde{\psi}_{p,-} : ]r_3(p), r_2(p)[ \rightarrow \mathbb{R}$  so in  $[\varepsilon, r_2(p) - \varepsilon]$  ab,  $0 < \varepsilon < r_2(p)/2$ , daß die neue Funktion  $\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}} : ]r_3(p), r_2(p)[ \rightarrow \mathbb{R}$  wieder glatt ist, in  $[\varepsilon, r_2(p) - \varepsilon]$  auch keine kritischen Punkte hat und sich der Wert des Integrals in Gl. (3.2) (S. 45) über dem Intervall  $[0; r_2(p)]$  ändert.



(Durch den fast horizontalen Bereich von  $\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}$  wird das Integral (3.2) beliebig groß.)

Auf  $U^-(r_2(p)) \cong \exp_p(U^-(r_2(p))) = \exp_q(U^-(r_3(q)))$  seien die neue Funktion  $\psi^{\text{neu}}$  und die neue Metrik  $g^{\text{neu}}$  gegeben durch

$$\begin{aligned}\psi^{\text{neu}}(r \cdot x) &:= \tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}(r) \\ g^{\text{neu}}|_{(r,x)} &:= -dr^2 + \frac{\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}(r)^2}{\tilde{\psi}_{p,-}^{\text{neu}}(0)^2} g_1|_x\end{aligned}$$

und auf dem Rest von  $M$  seien sie gleich  $\psi$  und  $g$ . Dann erfüllen  $(M, g^{\text{neu}})$  und  $\psi^{\text{neu}}$  die Eigenschaft (\*) und  $(M, g^{\text{neu}})$  ist nicht mehr abwickelbar, ein Widerspruch.  $\square$

In Abschnitt 3.4 haben wir die dort konstruierten Abwicklungen  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  faktorisiert in  $M \xrightarrow{\gamma} M_\delta \xrightarrow{\hat{\delta}} Q_1^n$  und das zeitorientierte und gewichtete Gerüst von  $M$  diente uns als Bauplan für die Mannigfaltigkeit  $M_\delta$ .

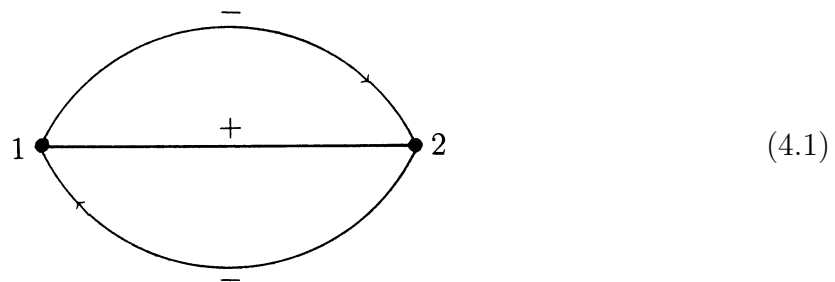
Gleiches kann man nun mit der Inklusionsabbildung  $\iota : Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \rightarrow Q_1^n$  machen, die ja eine Abwicklung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist.

Es ist  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} = i(\mathbb{R}_1^n) \cup j(\mathbb{R}_1^n)$  und die Wechselabbildung zwischen den beiden Einbettungen  $i$  und  $j$  ist die Sphäreninversion  $S$ .

Sei daher  $M_\iota$  die konforme Mannigfaltigkeit, die man erhält, wenn man zwei Kopien  $\mathbb{R}_1^n(1)$  und  $\mathbb{R}_1^n(2)$  von  $\mathbb{R}_1^n$  mittels der Sphäreninversion  $S$  längs  $\mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n$  verklebt:

$$M_\iota := \mathbb{R}_1^n(1) \cup_S \mathbb{R}_1^n(2).$$

Man verklebt also  $\mathbb{R}_1^n(1)$  und  $\mathbb{R}_1^n(2)$  entsprechend dem folgenden zeitorientierten Graphen:

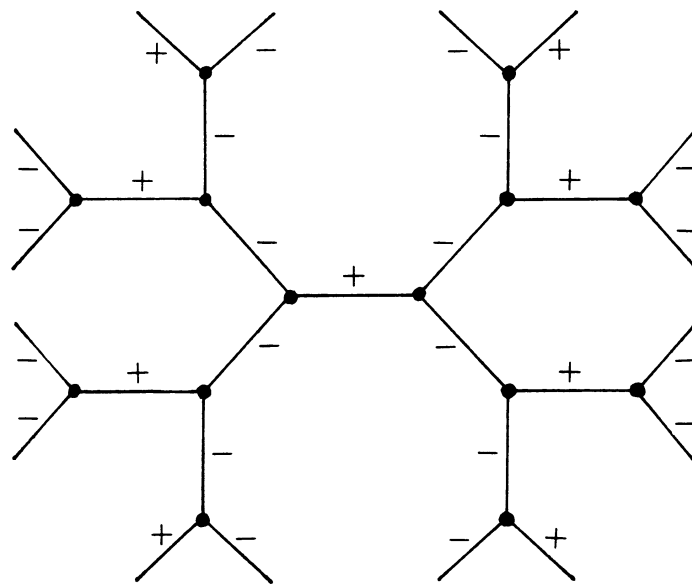


In der Sequenz

$$Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \xrightarrow{\gamma} M_\iota \xrightarrow{\hat{\iota}} Q_1^n$$

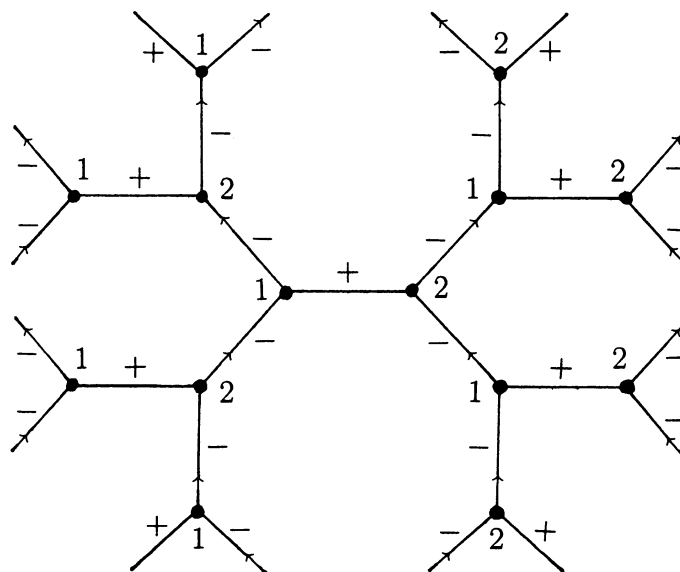
ist  $\hat{\iota}$  gegeben durch  $\hat{\iota}|_{\mathbb{R}_1^{n(1)}} : \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$  und  $\hat{\iota}|_{\mathbb{R}_1^{n(2)}} : \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n$ .  $\gamma$  ist die Umkehrung von  $\hat{\iota}$ .

Nun kann man die universelle Überlagerung von  $M_\iota$  konstruieren. Dazu betrachten wir den vollständigen 3-regulären Baum, der die Eigenschaften 1) bis 3) aus Abschnitt 3.1 hat:



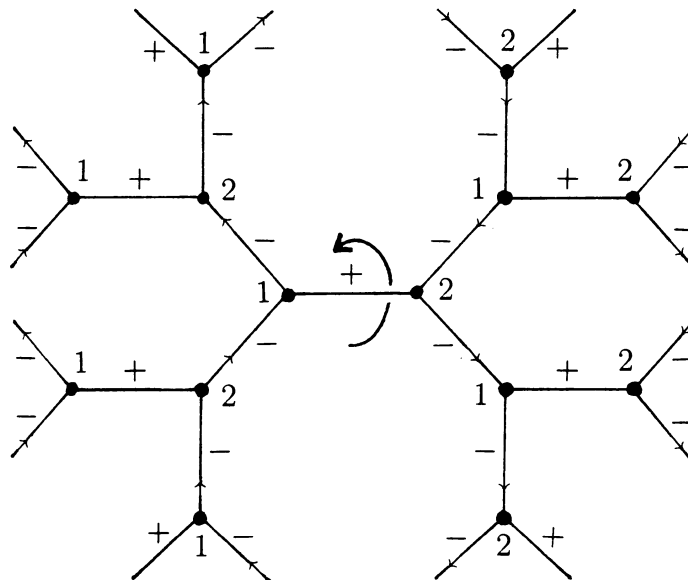
(4.2)

Für diesen wählen wir eine Zeitorientierung und ordnen den Ecken abwechselnd die Werte 1 und 2 zu:



(4.3)

Die Willkür in der Wahl der Zeitorientierung und in der Zuordnung der Werte 1 und 2 ist unerheblich, denn je zwei solcher Zeitorientierungen und Wertezuordnungen werden durch einen Automorphismus von (4.2) ineinander überführt. Ein Beispiel dazu:

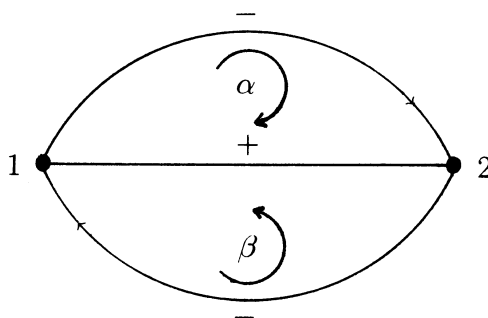


Anhand dieses Graphen können wir nun Kopien von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  und  $\mathbb{R}_1^n(2)$ , wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, mit der Sphäreninversion  $S$  verkleben. Dabei gehört zu Ecken mit dem Wert 1 bzw. 2 eine Kopie von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2)$ .

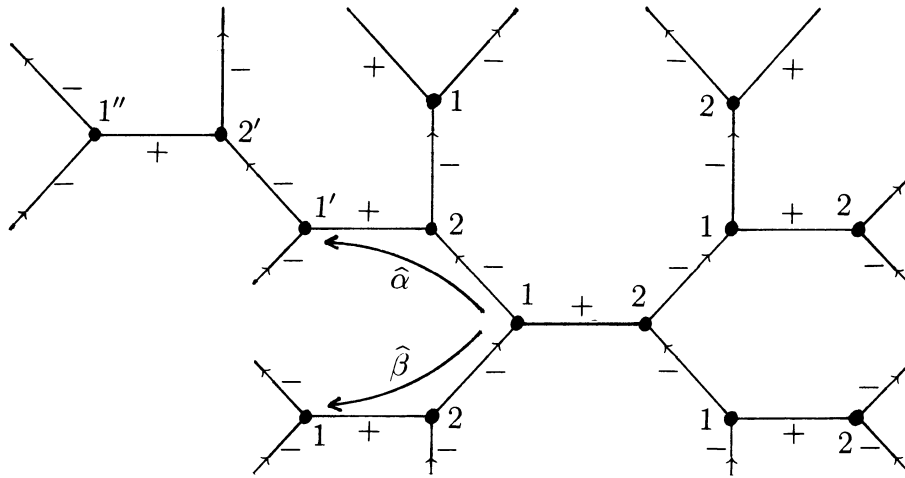
Das Ergebnis ist eine einfach zusammenhängende konforme Mannigfaltigkeit  $\widehat{M}_l$ . Die Überlagerungsabbildung  $\pi : \widehat{M}_l \rightarrow M_l$  bildet nun die Kopien von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2)$  mittels der Identität auf  $\mathbb{R}_1^n(1) \subset M_l$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2) \subset M_l$  ab.

Nun ist die Teilmenge  $\mathcal{G}$  von  $M_l$  mit  $\mathcal{G} \cap \mathbb{R}_1^n(1) = \mathbb{R}_+ \cdot x \cup \mathbb{R} \cdot y$ ,  $\mathcal{G} \cap \mathbb{R}_1^n(2) = \mathbb{R}_+ \cdot x \cup \mathbb{R} \cdot y$ ,  $x \in S(+1)$ ,  $y \in S^\circ(-1)$  fest, eine Realisierung des Gerüstes (4.1) als Teilmenge von  $M_l$ . Es ist  $\widehat{\mathcal{G}} := \pi^{-1}(\mathcal{G})$  eine Realisierung des Graphen (4.3) als Teilmenge von  $\widehat{M}_l$  und  $\pi|_{\widehat{\mathcal{G}}} : \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  ist die universelle Überlagerung von  $\mathcal{G}$ .

$\mathcal{G}$  hat als Fundamentalgruppe die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden. Als erzeugende Elemente kann man die (Homotopieklassen der) beiden folgenden Wege  $\alpha, \beta$  wählen:



Geliftet ergeben  $\alpha$  und  $\beta$  die Wege  $\widehat{\alpha}$  und  $\widehat{\beta}$



Diese beiden Wege legen zwei Decktransformationen von  $\widehat{\mathcal{G}}$  fest, die die Decktransformationsgruppe erzeugen. Als Beispiel ist für  $\widehat{\alpha}$  der Anfang gezeigt:  $1 \mapsto 1' \mapsto 1''$ ,  $2 \mapsto 2'$ , die Kante  $1 \rightarrow 2$  auf  $1' \rightarrow 2'$  etc.

Aus allen Decktransformationen von  $\widehat{\mathcal{G}}$  gewinnt man Decktransformationen von  $\widehat{M}_l$ , wenn man die Kopie von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  bzw.  $\mathbb{R}_1^n(2)$ , die zu einer Ecke gehört, mittels der Identität auf die Kopie, die zur Bildecke gehört, abbildet. Da diese Gruppe von Decktransformationen von  $\widehat{M}_l$ , transitiv und frei auf z.B. der Faser über dem Punkt  $0 \in \mathbb{R}_1^n(1) \subset M_l$  operiert, ist es die Decktransformationsgruppe von  $\pi : \widehat{M}_l \rightarrow M_l$ . Also ist die Fundamentalgruppe von  $M_l$  und damit die von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden.

Sei nun  $M$  eine einfach zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit mit der Eigenschaft (\*). Dann ist ihr Gerüst  $\mathcal{G}_M$  ein Baum und das zeitorientierte Gerüst von  $M$  bzgl. einer Abwicklung  $\delta$  ist isomorph zu einem Teilbaum von (4.3).

Nun gehört zu jeder Ecke  $p$  von  $\mathcal{G}_M$  eine Teilmenge  $U_p$  von  $\mathbb{R}_1^n$  und wir betrachten sie jetzt als Teilmenge der Kopie von  $\mathbb{R}_1^n(1)$  oder  $\mathbb{R}_1^n(2)$ , die zu  $p$  als Ecke von (4.3) gehört.

Damit wird  $M_\delta$  eine Teilmenge von  $\widehat{M}_l$ .

Der konforme Diffeomorphismus  $\gamma : Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \rightarrow M_l$  wird geliftet zu einem konformen Diffeomorphismus  $\widehat{\gamma}$  zwischen der universellen Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  und  $\widehat{M}_l$ . Man kann also  $M$  auch konform in die universelle Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  einbetten.