

## Kapitel 3: Die globale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld

In diesem Kapitel sei  $(M, g)$  stets eine zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$  und  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion auf  $M$ . Es bezeichne  $Cr(\psi)$  die Menge der kritischen Punkte von  $\psi$ .  $M$  und  $\psi$  haben noch die folgenden Eigenschaften:

- (i) Der Gradient von  $\psi$  ist ein konformes Vektorfeld, d.h. es gibt eine Funktion  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla^2 \psi = \lambda g$ .
- (ii)  $\psi$  hat mindestens einen kritischen Punkt.
- (iii)  $M$  ist  $Cr(\psi)$ -vollständig, d.h. für alle  $p \in Cr(\psi)$  ist  $\exp_p$  auf  $T_p M$  definiert und jeder Punkt von  $M$  läßt sich durch eine Geodäte mit einem kritischen Punkt von  $\psi$  verbinden.

Diese Eigenschaften von  $M$  und  $\psi$  werden als Eigenschaft (\*) im folgenden zitiert. Manchmal sagen wir auch kurz "M hat die Eigenschaft (\*)" ohne die Funktion  $\psi$  zu erwähnen. Nach Lemma 6.2. in [KR1] ist jede geodätisch vollständige Mannigfaltigkeit  $M$   $Cr(\psi)$ -vollständig.

### 3.1 Das Gerüst der Mannigfaltigkeit $M$

Ein **Gerüst** von  $M$  (genauer: ein Gerüst von  $M$  zusammen mit der Funktion  $\psi$ ) ist ein Graph  $\mathcal{G}$ , der aus Ecken und zwei Arten von Kanten besteht, raumartigen Kanten ("+"-Kanten) und zeitartigen Kanten ("-"-Kanten), so daß gilt:

- (i) Die Ecken von  $\mathcal{G}$  stehen in eindeutiger Beziehung zu den kritischen Punkten von  $\psi$  (in Zeichen  $E \sim p$ ,  $E$  Ecke von  $\mathcal{G}$ ,  $p \in Cr(\psi)$ ).
- (ii) Von jeder Ecke  $E (\sim p)$  gehen drei Kanten aus, eine raumartige und zwei zeitartige. Diese stehen in eindeutiger Weise zum raumartigen und zu den beiden zeitartigen Kegeln in  $T_p M$  in Beziehung, und zwar die raumartige Kante zum raumartigen Kegel und die beiden zeitartigen Kanten zu den beiden zeitartigen Kegeln.
- (iii) Eine Kante soll genau dann zwei Ecken  $E_1 (\sim p_1)$  und  $E_2 (\sim p_2)$  verbinden, wenn die zugeordneten kritischen Punkte  $p_1$  und  $p_2$  zueinander benachbart sind in den durch die Kante gegebenen Richtungen in  $T_{p_1} M$  und  $T_{p_2} M$ .

Es kann vorkommen, daß zwei Ecken durch mehr als eine Kante verbunden werden und auch, daß eine Kante nur mit einer Ecke koinzidiert. Jede solche nur an einer Ecke hängende Kante heißt eine **freie Kante**.

Unter einem *Isomorphismus* zwischen zwei solchen Graphen versteht man eine Bijektion zwischen den Ecken und eine Bijektion zwischen den Kanten, so daß die Bijektion zwischen den Kanten nur Kanten auf Kanten der gleichen Art abbildet und zwei Ecken genau

dann mit einer Kante koinzidieren, wenn die Bilder der Ecken mit dem Bild der Kante koinzidieren.

Aufgrund der Beziehung der Ecken eines Gerüsts von  $M$  zu den kritischen Punkten von  $\psi$  sind je zwei Gerüste kanonisch isomorph. Deswegen reden wir ab sofort auch von *dem* Gerüst von  $M$ .

Man kann das Gerüst von  $M$  immer als Teilmenge von  $M$  realisieren:

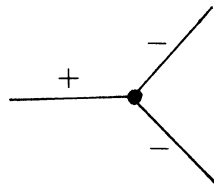
Die Ecken sollen die kritischen Punkte von  $\psi$  sein. Für je zwei benachbarte kritische Punkte wählen wir als verbindende Kante eine direkte geodätische Verbindung dieser Punkte. Als freie Kante an einem kritischen Punkt wählen wir einen geodätischen Strahl in  $M$  der entsprechenden Richtung, der von diesem Punkt ausgeht.

Für später halten wir die folgenden Eigenschaften der Graphen  $\mathcal{G}$  fest, die als Gerüste auftreten:

1. Der Graph  $\mathcal{G}$  hat nur abzählbar viele Ecken:

Die kritischen Punkte von  $\psi$  liegen isoliert. Es gibt daher nur abzählbar viele.

2. Jede Ecke des Graphen  $\mathcal{G}$  ist von folgendem Typ:



3. Der Graph  $\mathcal{G}$  ist zusammenhängend:

Sei  $\mathcal{E}$  die Menge der Ecken von  $\mathcal{G}$  und  $E_0 \in \mathcal{E}$ . Betrachte die Mengen

$$\mathcal{E}_1 := \{E \in \mathcal{E} \mid E \text{ ist mit } E_0 \text{ durch einen Kantenzug in } \mathcal{G} \text{ verbindbar}\}$$

$$\mathcal{E}_2 := \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1,$$

und

$$M_1 := \bigcup_{\substack{p \sim E \\ E \in \mathcal{E}_1}} B_p, \quad M_2 := \bigcup_{\substack{p \sim E \\ E \in \mathcal{E}_2}} B_p$$

( $B_p$  sind die Mengen aus Satz 2.2, S. 29)

Es ist  $B_{p_1} \cap B_{p_2} = \emptyset$  für alle  $p_1 \sim E_1 \in \mathcal{E}_1$  und  $p_2 \sim E_2 \in \mathcal{E}_2$ , denn für jedes  $q \in B_{p_1} \cap B_{p_2}$  führt die Geodäte durch  $q$  in Richtung  $\pm \text{grad } \psi|_q$  zu  $p_1$  und  $p_2$ . Falls also  $B_{p_1} \cap B_{p_2} \neq \emptyset$ , so ist  $p_1 = p_2$  oder  $p_1$  und  $p_2$  sind benachbarte kritische Punkte.

Also  $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

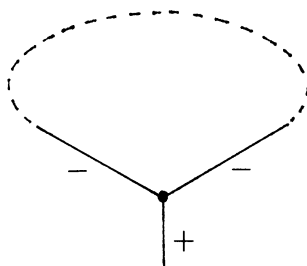
Da  $M$   $Cr(\psi)$ -vollständig ist, ist  $M_1 \cup M_2 = M$ .

$M_1$  und  $M_2$  sind offene Mengen,  $M$  zusammenhängend und  $M_1 \neq \emptyset$ . Also  $M_2 = \emptyset$ , d.h.  $\mathcal{E}_2 = \emptyset$  und  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}$ .

4. Jeder Zyklus im Graphen hat eine gerade Länge:

Jeder kritische Punkt von  $\psi$  ist eine Quelle oder Senke von  $\text{grad } \psi$  (vgl. das Beispiel  $\psi(x) = 1/2 \langle x, x \rangle$  in  $\mathbb{R}_1^n$ ,  $\text{grad } \psi(x) = x$ ) und in zwei benachbarten kritischen Punkten hat das Vektorfeld  $\text{grad } \psi$  eine Quelle und eine Senke.

5. In jedem Zyklus tritt mindestens einmal folgende Sequenz auf:



Denn die Funktion  $\psi$  kann längs eines Zykluses nicht nur wachsen und für das Wachstum von  $\psi$  in der Umgebung eines kritischen Punktes gibt es nur die zwei Möglichkeiten



Anmerkung: Im Fall der Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , hat  $\{x \in T_p M \mid \langle x, x \rangle = \pm 1\}$  nur zwei Komponenten und daher sieht jede Ecke so aus:



Das Gerüst ist dann in jedem Fall ein linearer Graph.

### 3.2 Benachbarte kritische Punkte

Seien  $p$  und  $q$  zwei benachbarte kritische Punkte von  $\psi$ . Um im folgenden die Bezeichnung nicht zu kompliziert werden zu lassen, beschränken wir uns auf den Fall, daß  $p$  und  $q$  in raumartiger Richtung benachbart sind.

Wir denken uns in  $T_p M$  und  $T_q M$  Polarkoordinaten eingeführt. Die zurückgeholte Metrik  $\exp_p^*(g)$  bzw.  $\exp_q^*(g)$  bezeichnen wir jetzt genauer mit  $\tilde{g}_p$  bzw.  $\tilde{g}_q$ . Seien  $\tilde{\psi}_{\pm, p}$ ,  $K_p$  und  $\tilde{\psi}_{\pm, q}$ ,  $K_q$  die Abbildungen aus den Sätzen 2.1 und 2.3 und  $r_0 > 0$  die erste positive Nullstelle von  $\tilde{\psi}'_{+, p}$  und  $\tilde{\psi}'_{+, q}$ . Weiter wählen wir irgend zwei orthogonale Abbildungen  $L_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$  und  $L_q : T_q M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ .

Man hat dann folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{R}_1^n & \supset & U^+(\infty) & \xrightarrow{u} & U^+(\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\
 L_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L_q \\
 T_p M & \supset & U^+(\infty) & \longrightarrow & U^+(\infty) & \subset & T_q M \\
 K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow K_q \\
 \tilde{B}_p & \supset & U^+(r_0) & \xrightarrow{(I)} & U^+(r_0) & \subset & \tilde{B}_q \\
 & & \exp_p \searrow & & \swarrow \exp_q & & \\
 & & & & M & & 
 \end{array}$$

Die Abbildung (I) ist eine Isometrie zwischen  $(U^+(r_0), \tilde{g}_p)$  und  $(U^+(r_0), \tilde{g}_q)$ . Daher ist  $u$  ein konformer Diffeomorphismus bzgl. des pseudo-Euklidischen Skalarproduktes.  $u$  bildet jeden von Null ausgehenden raumartigen Strahl auf einen ebensolchen ab, denn diese entsprechen in  $M$  den Flußlinien von  $p$  nach  $q$ .

Nun wenden wir den Satz von Liouville an, um  $u$  näher zu bestimmen. Demnach gibt es ein  $A \in \mathcal{O}(2, n)$ , so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_2^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}_2^{n+2} \setminus \{0\} \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \\
 i \uparrow & & \uparrow i \\
 \mathbb{R}_1^n \supset U^+(\infty) & \xrightarrow{u} & U^+(\infty) \subset \mathbb{R}_1^n
 \end{array}$$

Sei  $x \in S(+1) \subset \mathbb{R}_1^n$ . Dann wird der Strahl  $\{r \cdot x \mid r > 0\}$  durch  $u$  auf einen Strahl  $\{\bar{r} \cdot y \mid \bar{r} > 0\}$ ,  $y \in S(+1)$ , abgebildet. Der Bewegung  $r \rightarrow 0$  entspricht die Bewegung  $\bar{r} \rightarrow \infty$ . Nun gilt mit den Bezeichnungen aus dem ersten Kapitel:

$$\begin{aligned}
\pi \circ A(1, 0, 1) &= \phi_A \circ \pi(1, 0, 1) \\
&= \phi_A \circ i(0) \\
&= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} \phi_A \circ i(r \cdot x) \\
&= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r > 0}} i \circ u(r \cdot x) \\
&= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} i(\bar{r} \cdot y) \\
&= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \pi(1 + \bar{r}^2 \langle y, y \rangle, 2\bar{r}y, 1 - \bar{r}^2 \langle y, y \rangle) \\
&= \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \pi\left(\frac{1}{\bar{r}^2} + \langle y, y \rangle, \frac{2}{\bar{r}}y, \frac{1}{\bar{r}^2} - \langle y, y \rangle\right) \\
&= \pi(\langle y, y \rangle, 0, -\langle y, y \rangle)
\end{aligned}$$

d.h.  $A(1, 0, 1) = (a, 0, -a)$  für ein  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sei weiter

$$A(1, 0, -1) := (b, v, c), \quad b, c \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}_1^n$$

$$A(0, x, 0) := (\ell_1(x), w(x), \ell_2(x)), \quad x \in \mathbb{R}_1^n, \ell_1, \ell_2 \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}), w \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}_1^n).$$

Da  $A$  orthogonal ist, gilt für alle  $x \in \mathbb{R}_1^n$ :

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 0, 1) \cdot (0, x, 0) = (a, 0, -a) \cdot (\ell_1(x), w(x), \ell_2(x)) \\
&= -a\ell_1(x) - a\ell_2(x) = -a(\ell_1(x) + \ell_2(x)) \\
\Rightarrow \ell_2(x) &= -\ell_1(x)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nochmals den Strahl  $\{r \cdot x \mid r > 0\}$ ,  $x \in S(+1)$ .

$$\begin{aligned}
i^{-1} \circ \phi_A \circ i(r \cdot x) &= i^{-1} \circ \pi \circ A(1 + \langle rx, rx \rangle, 2rx, 1 - \langle rx, rx \rangle) \\
&= i^{-1} \circ \pi \circ A((1, 0, 1) + 2r(0, x, 0) + r^2(1, 0, -1)) \\
&= i^{-1} \circ \pi((a, 0, -a) + 2r(\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) + r^2(b, v, c)) \\
&= \frac{1}{r^2(b+c)}(r^2v + 2rw(x)) \\
&= \frac{1}{r(b+c)}(rv + 2w(x))
\end{aligned}$$

Da  $i^{-1} \circ \phi_A \circ i(r \cdot x) = u(r \cdot x) = \bar{r}(r) \cdot y$ ,  $\forall r > 0$ , müssen  $v$  und  $w(x)$  Vielfache von  $y$  sein.

*Annahme:*  $v \neq 0$ .

Dann ist  $v$  raumartig und es gilt

$$\forall x \in S(+1) \quad \exists \vartheta(x) \in \mathbb{R} : w(x) = \vartheta(x) \cdot v$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 &= (1, 0, -1) \cdot (0, x, 0) = (b, v, c) \cdot (\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) \\ &= -b\ell_1(x) + \langle v, w(x) \rangle - c\ell_1(x) \\ &= -(b+c)\ell_1(x) + \vartheta(x)\langle v, v \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vartheta(x) = \frac{b+c}{\langle v, v \rangle} \ell_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad A(0, x, 0) = (\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) = \ell_1(x) \cdot \left( 1, \frac{b+c}{\langle v, v \rangle} v, -1 \right) \quad \forall x \in S(+1)$$

Da  $\text{span}(S(+1)) = \mathbb{R}_1^n$  folgt

$$A(0, x, 0) = \ell_1(x) \left( 1, \frac{b+c}{\langle v, v \rangle} v, -1 \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n,$$

also  $\dim A(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) \leq 1$ . Widerspruch zu "A linearer Isomorphismus".

Mithin  $v = 0$ .

Weiter ist dann

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) = (b, 0, c) \cdot (b, 0, c) = -b^2 + c^2 \\ \Rightarrow \quad |b| &= |c|. \end{aligned}$$

$(1, 0, 1)$  und  $(1, 0, -1)$  sind linear unabhängig, also auch  $A(1, 0, 1) = (a, 0, -a)$  und  $A(1, 0, -1) = (b, 0, c)$ . Daher

$$\begin{aligned} A(1, 0, -1) &= (b, 0, b), \quad b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \Rightarrow \quad -2 &= (1, 0, 1) \cdot (1, 0, -1) = (a, 0, -a) \cdot (b, 0, b) = -2ab \\ \Rightarrow \quad b &= 1/a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 0, -1) \cdot (0, x, 0) = (1/a, 0, 1/a) \cdot (\ell_1(x), w(x), -\ell_1(x)) = -\frac{2}{a} \ell_1(x) \\ \Rightarrow \quad \ell_1(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad A(0, x, 0) &= (0, w(x), 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n. \end{aligned}$$

Damit ist  $w$  sogar aus  $\mathcal{O}(1, n-1)$  :

$$\begin{aligned} \langle w(x), w(y) \rangle &= (0, w(x), 0) \cdot (0, w(y), 0) \\ &= A(0, x, 0) \cdot A(0, y, 0) \\ &= (0, x, 0) \cdot (0, y, 0) \\ &= \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_1^n . \end{aligned}$$

Insgesamt

$$u(y) = i^{-1} \circ \phi_A \circ i(y) = a \frac{w(y)}{\langle y, y \rangle}, \quad y \in U^+(\infty) . \quad (3.1)$$

Im folgenden sei o.E. stets  $a > 0$ . Ist  $a < 0$ , so ist

$$u(y) = (-a) \frac{-w(y)}{\langle y, y \rangle}, \quad -w \in \mathcal{O}(1, n-1).$$

Also ist  $u$ , bis auf die orthogonale Abbildung  $w$  und die Homothetie  $y \mapsto ay$ , die Sphäreninversion  $S$ . Bei der Konstruktion einer Abwicklung von  $M$  in Abschnitt 3.3 werden uns die orthogonale Abbildung und die Homothetie stören. Deshalb fragen wir uns zuerst, woran es liegt, daß diese Abbildungen auftreten.

Die orthogonale Abbildung  $w$  liegt hier in der Willkür der Identifikationen  $T_p M \xrightarrow{L_p} \mathbb{R}_1^n$  und  $T_q M \xrightarrow{L_q} \mathbb{R}_1^n$  begründet. Ersetzt man  $L_q$  durch  $w^{-1} \circ L_q$ , so kann man sich in (3.1) auf den Fall  $w = \text{id}$  zurückziehen. Komplizierter wird es mit der Herkunft der Homothetie.

Um den Faktor  $a$  näher zu bestimmen, identifizieren wir  $T_p M$  und  $T_q M$  mit  $\mathbb{R}_1^n$  mittels der Abbildungen  $L_p$  und  $w^{-1} \circ L_q$ . Dann ist die Wechselabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_1^n \xleftarrow{L_p} T_p M \supset U^+(r_0) & \longleftrightarrow & U^+(r_0) \subset T_q(M) \xrightarrow{w^{-1} \circ L_q} \mathbb{R}_1^n \\ \exp_p \searrow & & \swarrow \exp_q \\ & M & \end{array}$$

bzgl. Polarkoordinaten in  $\mathbb{R}_1^n$  gegeben durch  $(r, x) \longleftrightarrow (r_0 - r, x)$ ,  $x \in S(+1)$ . Setze  $f_1(r) := \frac{\tilde{\psi}'_{+,p}(r)}{\tilde{\psi}''_{+,p}(0)}$ . Die Abbildung  $K_p$  wird auf  $U^+(r_0)$  durch  $(r, x) \mapsto (\rho_1(r), x)$  beschrieben. Analog definiert man  $f_2$  und  $\rho_2(r)$  bzgl. des Punktes  $q$ . Die Metrik  $\tilde{g}_p$  in  $U^+(r_0) \subset T_p M \cong \mathbb{R}_1^n$  ist gegeben durch

$$dr^2 + f_1^2(r)g_1$$

und die Metrik  $\tilde{g}_q$  in  $U^+(r_0) \subset T_q M \cong \mathbb{R}_1^n$  durch

$$dr^2 + f_2^2(r)g_1 .$$

Da  $(r, x) \longleftrightarrow (r_0 - r, x)$  eine Isometrie zwischen diesen beiden Metriken ist, folgt

$$f_1^2(r) = f_2^2(r_0 - r)$$

und weiter, da  $f_1$  und  $f_2$  positiv sind,

$$f_1(r) = f_2(r_0 - r).$$

Nun ist

$$\rho_i(r) = r \exp\left(\int_0^r h_i(\xi) d\xi\right)$$

mit  $h_i(\xi) = \frac{1}{f_i(\xi)} - \frac{1}{\xi}$ ,  $i = 1, 2$ . Die Abbildung  $u$  wird in Polarkoordinaten beschrieben durch  $(\rho_1, x) \mapsto (a/\rho_1, x) = (\rho_2, x)$ . Also

$$\begin{aligned} a &= \rho_1(r) \cdot \rho_2(r_0 - r) \\ \Rightarrow a &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\rho_1(r)}{r} \cdot r \cdot \rho_2(r_0 - r) \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot \rho_2(r_0 - r) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot (r_0 - r) \exp\left(\int_0^{r_0-r} h_2(\xi) d\xi\right) \\ &= r_0 \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \exp\left(\ln r + \int_0^{r_0-r} h_2(\xi) d\xi\right). \end{aligned}$$

Mit  $m(r) := \ln r + \int_0^{r_0-r} h_2(\xi) d\xi$  gilt

$$m'(r) = \frac{1}{r} - h_2(r_0 - r) = \frac{1}{r} - \left( \frac{1}{f_2(r_0 - r)} - \frac{1}{r_0 - r} \right) = -\frac{1}{f_1(r)} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r_0 - r}$$

$$m(r_0) = \ln r_0$$

$$\Rightarrow m(r) = \ln r_0 + \int_{r_0}^r m'(\xi) d\xi = \ln r_0 + \int_r^{r_0} \left( \frac{1}{f_1(\xi)} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{r_0 - \xi} \right) d\xi$$

$$\Rightarrow a = r_0^2 \cdot \exp\left(\int_0^{r_0} \left( \frac{1}{f_1(\xi)} - \frac{1}{\xi} - \frac{1}{r_0 - \xi} \right) d\xi\right) \quad (3.2)$$

Der Faktor  $a$  hängt also vom Verhalten der Funktion  $\psi$ , und damit der Metrik  $g$ , zwischen  $p$  und  $q$  ab, ausgedrückt durch die obige Formel.



### 3.3 Konstruktion von Abwicklungsabbildungen

Nach Satz 2.3 ist die Mannigfaltigkeit  $M$  lokal konform flach. Man kann sich also fragen, ob  $M$  abwickelbar ist, d.h. ob es eine konforme Immersion  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  gibt. Wenn ja, ist für jede offene Menge  $U \subset M$  die Abwicklung  $\delta$  schon eindeutig durch  $\delta|_U$  bestimmt und jede auf  $U$  definierte Abwicklung  $\delta_1 : U \rightarrow Q_1^n$  läßt sich eindeutig fortsetzen auf  $M$  (vgl. Satz 1.1).

Sei nun  $p \in M$  ein kritischer Punkt von  $\psi$ . Dann hat man auf  $B_p$  eine Abwicklung gegeben durch

$$B_p \xleftarrow{\exp_p} \tilde{B}_p \xrightarrow{K_p} T_p M \xrightarrow{L_p} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n .$$

Wie setzt sich diese nun fort? Zunächst setzen wir noch nicht voraus, daß  $M$  abwickelbar ist. Wir wollen nur untersuchen, wie weit man die so auf  $B_p$  definierte Abwicklung fortsetzen kann.

Sei dazu  $q$  ein zu  $p$  benachbarter kritischer Punkt und die verbindende Kante z.B. raumartig. Dann hat man folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_1^n & \supset & U^+(\infty) & \xrightarrow{y \mapsto a \frac{w(y)}{\langle y, y \rangle}} & U^+(\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\ L_p \circ K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L_q \circ K_q \\ \tilde{B}_p & \supset & U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) & \subset & \tilde{B}_q \end{array}$$

Ersetzt man hier  $L_q$  durch den konformen Isomorphismus

$$L'_q = \frac{1}{a} w^{-1} \circ L_q$$

so geht unser Diagramm über in folgendes

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_1^n & \supset & U^+(\infty) & \xrightarrow{y \mapsto \frac{y}{\langle y, y \rangle}} & U^+(\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\ L_p \circ K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_q \circ K_q \\ \tilde{B}_p & \supset & U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) & \subset & \tilde{B}_q \end{array}$$

Für die konforme Einbettung  $j : \mathbb{R}_1^n \rightarrow Q_1^n$  ist  $i = j \circ S$  auf  $\mathbb{R}_1^n \setminus \Gamma_1^n$ .

Daher kann man, falls  $p$  und  $q$  nur durch eine Kante verbunden sind, die auf  $B_p$  gegebene Abwicklung fortsetzen auf  $B_p \cup B_q$  durch

$$B_q \xleftarrow{\exp_q} \tilde{B}_q \xrightarrow{K_q} T_q M \xrightarrow{L'_q} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n .$$

Dieses Verfahren kann man nun fortsetzen. Man geht, mit  $p$  beginnend, von einem kritischen Punkt  $q_1$  zu einem benachbarten Punkt  $q_2$  über, ändert die Abbildung  $L_{q_2}$  zu einem linearen konformen Isomorphismus  $L'_{q_2}$  ab, so daß die Wechselabbildung gerade  $S$  wird, und verwendet abwechselnd  $i$  und  $j$  zur Definition der Abwicklung.

Ist das Gerüst von  $M$  ein Baum, so erhält man auf diese Weise eine Abwicklung von  $M$ . Schwierigkeiten können nur dann auftreten, wenn das Gerüst Zyklen enthält (z.B. zwei benachbarte kritische Punkte, die durch zwei zeitartige Kanten verbunden sind).

Nehmen wir an, wir hätten die Konstruktion längs eines Zyklus durchgeführt, indem wir bei  $q_1$ , einer seiner Ecken, starteten und den Zyklus einmal durchlaufen hätten. Der letzte kritische Punkt vor  $q_1$  sei  $q_\ell$ . Dann ist o.E. die Abwicklung auf  $B_{q_1}$  und  $B_{q_\ell}$  festgelegt durch

$$B_{q_1} \xleftarrow{\exp_{p_1}} \tilde{B}_{q_1} \xrightarrow{L'_{q_1} \circ K_{q_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

und

$$B_{q_\ell} \xleftarrow{\exp_{q_\ell}} \tilde{B}_{q_\ell} \xrightarrow{L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n .$$

Das "o.E." bezieht sich auf die Einbettungen "i" und "j". Da der Zyklus eine gerade Länge hat, treten  $i$  und  $j$  auf. O.E. trete  $i$  in der ersten Zeile auf.

Ist nun die letzte Kante von  $q_\ell$  nach  $q_1$  raumartig, so hat man auf dem raumartigen Kegel in  $\mathbb{R}_1^n$  eine Wechselabbildung

$$\begin{array}{ccccc}
 Q_1^n & & & & Q_1^n \\
 i \uparrow & & & & \uparrow j \\
 \mathbb{R}_1^n \supset U^+(\infty) & \xrightarrow{y \rightarrow \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}} & U^+(\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 L'_{q_1} \circ K_{q_1} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell} \\
 \tilde{B}_{q_1} \supset U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) \subset \tilde{B}_{q_\ell} & & \\
 \exp_{q_1} \searrow & & \swarrow \exp_{q_\ell} & & \\
 & M & & & 
 \end{array}$$

$\alpha \in \mathbb{R}_+$  und  $\omega \in \mathcal{O}(1, n-1)$ .

Damit die Abwicklung auf  $\exp_{q_1}(U^+(r_0)) = \exp_{q_\ell}(U^+(r_0))$  eindeutig wird muß  $\alpha = 1$  und  $\omega = \text{id}$  sein. Trifft dies für jeden Zyklus zu, so erhält man auf die oben beschriebene Weise eine Abwicklung.

Was bedeutet es aber, wenn  $\alpha \neq 1$  oder  $\omega \neq \text{id}$  ist? Es entspricht  $\omega$  einem Twist. Diesen kann man auflösen ohne die Metrik  $g$  und die Funktion  $\psi$  zu ändern, da diese, auf  $U^+(r_0) \subset T_{q_1}M$  und  $U^+(r_0) \subset T_{q_\ell}M$ , eine  $\mathcal{O}(1, n-1)$ -Symmetrie haben. Dazu zerschneidet man  $M$  in der Mitte zwischen  $q_1$  und  $q_\ell$ , d.h. längs

$$\exp_{q_1} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right) = \exp_{q_\ell} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right)$$

und verklebt die Ränder neu mittels der Abbildung

$$\begin{array}{ccc}
\exp_{q_1} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right) & \xleftarrow{\exp_{q_1}} - \frac{r_0}{2} S(+1) \xrightarrow{L'_{q_1} \circ K_{q_1}} & \mathbb{R}_1^n \\
& & \downarrow \alpha \cdot S \\
\exp_{q_\ell} \left( \frac{r_0}{2} S(+1) \right) & \xleftarrow{\exp_{q_\ell}} - \frac{r_0}{2} S(+1) \xrightarrow{L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}} & \mathbb{R}_1^n
\end{array}$$

Die neue Wechselabbildung ist dann gegeben durch

$$\mathbb{R}_1^n \supset U^+(\infty) \xrightarrow{y \mapsto \alpha \frac{y}{\langle y, y \rangle}} U^+(\infty) \subset \mathbb{R}_1^n.$$

Den Faktor  $\alpha$  kann man nicht so kanonisch beheben. Z.B. könnte man die Metrik  $g$  und die Funktion  $\psi$  geeignet, aber willkürlich, zwischen  $q_1$  und  $q_\ell$  so abändern, daß in Gl. (3.2) der Faktor  $\alpha$  gleich 1 wird.

Ist die letzte verbindende Kante zeitartig, so wird die Situation etwas komplizierter. Man hat dann zwischen den positiven oder negativen Zeitkegeln die Wechselabbildung  $y \mapsto \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}$

$$\begin{array}{ccccc}
Q_1^n & & & & Q_1^n \\
i \uparrow & & & & \uparrow j \\
\mathbb{R}_1^n \supset U^-(\pm\infty) & \xrightarrow{y \mapsto \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}} & U^-(\pm\infty) & \subset & \mathbb{R}_1^n \\
L'_{q_1} \circ K_{q_1} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell} \\
\tilde{B}_{q_1} \supset U^-(\pm r_0) & \xrightarrow{(I)} & U^-(\pm r_0) & \subset & \tilde{B}_{q_\ell} \\
\exp_{q_1} \searrow & & & & \swarrow \exp_{q_\ell} \\
& & M & & 
\end{array} \tag{3.3}$$

Hierbei sind alle auftretenden Vorzeichen  $\pm$  unabhängig voneinander möglich. Damit die Abwicklung eindeutig wird, muß wieder  $\alpha = 1$  und  $\omega = \text{id}$  gelten. Da die Sphäreninversion  $y \mapsto \frac{y}{\langle y, y \rangle}$  die beiden Zeitkegel in  $\mathbb{R}_1^n$  miteinander vertauscht, muß dann in der zweiten Zeile des obigen Diagramms der links auftretende Zeitkegel der Gegenkegel des rechts auftretenden Zeitkegels sein.

Für  $\omega \neq \text{id}$  könnte aber in der zweiten Zeile links und rechts der gleiche Zeitkegel auftreten. Dann vertauscht die orthogonale Abbildung  $\omega$  gleichfalls die Zeitkegel, d.h.  $\omega$  ist nicht zeitorientierungstreu. In diesem Fall ist die Lorentz-Mannigfaltigkeit  $M$  nicht zeitorientierbar. Denn sonst wählen wir für  $M$  eine Zeitorientierung und o.B.d.A. sei dann

$$B_{q_1} \xleftarrow{\exp_{q_1}} - \tilde{B}_{q_1} \xrightarrow{L'_{q_1} \circ K_{q_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n \tag{3.4}$$

ein zeitorientierungstreuer konformer Diffeomorphismus. Diese Eigenschaft vererbt sich bei der Konstruktion der Abwicklung auf

$$B_{q_\ell} \xleftarrow{\exp_{q_\ell}} \tilde{B}_{q_\ell} \xrightarrow{L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{j} Q_1^n, \quad (3.5)$$

denn ein konformer lokaler Diffeomorphismus zwischen zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeiten ist entweder zeitorientierungstreu oder zeitorientierungsumkehrend.

Nun ist für alle  $\bar{q} \in Cr(\psi)$  die Exponentialabbildung  $\exp_{\bar{q}} : (\tilde{B}_{\bar{q}}, \tilde{g}_{\bar{q}}) \longrightarrow (B_{\bar{q}}, g)$  eine Isometrie und wir wählen in  $(\tilde{B}_{\bar{q}}, \tilde{g}_{\bar{q}})$  als Zeitorientierung die durch  $\exp_{\bar{q}}$  zurückgeholte Zeitorientierung von  $B_{\bar{q}} \subset M$ .

Da  $i, j : \mathbb{R}_1^n \rightarrow Q_1^n$  zeitorientierungstreu sind, sind in (3.4) und (3.5)  $L'_{q_1} \circ K_{q_1}$  und  $L'_{q_\ell} \circ K_{q_\ell}$  zeitorientierungstreu.

Weiter ist mit den oben gewählten Zeitorientierungen in  $(\tilde{B}_{\bar{q}}, \tilde{g}_{\bar{q}})$ ,  $\bar{q} \in Cr(\psi)$ , die Wechselabbildung (I) in Diagramm (3.3) zeitorientierungstreu.

Also ist die Wechselabbildung  $y \mapsto \alpha \frac{\omega(y)}{\langle y, y \rangle}$  zeitorientierungstreu. Da  $y \mapsto \alpha \frac{y}{\langle y, y \rangle}$  zeitorientierungstreu ist, muß dann auch  $\omega$  zeitorientierungstreu sein, ein Widerspruch.

Ist  $\omega$  zeitorientierungstreu, so kann man wie oben bei der raumartigen Kante den "Twist"  $\omega$  beheben, da  $g$  und  $\psi$  eine  $\mathcal{O}^+(1, n-1)$ -Symmetrie um  $q_1$  und  $q_\ell$  haben.

Man beachte, daß im Fall der raumartigen Kante zum "Enttwisten" nicht notwendig  $\omega \in \mathcal{O}^+(1, n-1)$  sein muß, da auch  $\omega \in \mathcal{O}^-(1, n-1)$  die Abstandssphäre  $S(+1)$  in sich überführt. Also kann man durch das "Enttwisten" an einer raumartigen Kante in einem Zyklus auch das "nicht-zeitorientierbar sein" längs dieses Zykluses beheben, was an einer zeitartigen Kante so nicht geht.

### 3.4. Abwickelbare Mannigfaltigkeiten

Sei jetzt  $M$  abwickelbar und ausgehend von einem kritischen Punkt  $p$  von  $\psi$  nach dem Verfahren des letzten Abschnitts eine Abwicklung  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  konstruiert. Man hat dann für jeden kritischen Punkt  $q$  von  $\psi$  einen konformen linearen Isomorphismus  $L'_q : T_q M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ , ( $L'_p = L_p$ ), so daß für benachbarte kritische Punkte die Wechselabbildung zwischen den auftretenden raumartigen oder zeitartigen Kegeln des  $\mathbb{R}_1^n$  die Sphäreninversion  $S$  ist. Die Abwicklung  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  ist auf  $B_q$  gegeben durch

$$B_q \xleftarrow{\exp_q} \tilde{B}_q \xrightarrow{K_q} T_q M \xrightarrow{L'_q} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{*} Q_1^n \quad (3.6)$$

wobei "\*" für  $i$  oder  $j$  steht, je nachdem ob  $q$  im Gerüst von  $M$  einen geraden oder ungeraden Abstand von  $p$  hat.

$\delta$  induziert eine Zeitorientierung auf  $M$ . Diese Zeitorientierung induziert kanonisch auf jedem Tangentialraum  $T_q M$ ,  $q \in M$ , aufgefaßt als Lorentz-Mannigfaltigkeit mit der pseudo-Euklidischen Metrik  $g_q$ , eine Zeitorientierung. Dazu betrachtet man einen zeitartigen Vektor  $V_q \in T_q M$  als zeitartiges Vektorfeld auf  $T_q M$ , das dann die (kanonische) Zeitorientierung induziert. (In diesem Fall wollen wir im folgenden immer die Polarkoordinaten in  $T_q M$  so einführen, daß  $S^0(-1)$  im positiven Zeitkegel liegt.)

Man beachte folgendes: Auf  $\tilde{B}_q \subset T_q M$ ,  $q \in Cr(\psi)$ , betrachten wir die Metrik  $\tilde{g}_q = \exp_q^*(g)$  und die mit  $\exp_q$  zurückgeholte Zeitorientierung von  $M$ . Diese sind zu unterscheiden von den gleichen Begriffen des pseudo-Euklidischen Raumes  $T_q M$ .

Es ist für  $q \in Cr(\psi)$  die konforme Immersion  $K_q : (\tilde{B}_q, \tilde{g}_q) \longrightarrow (T_qM, g_q)$  zeitorientierungstreu, denn

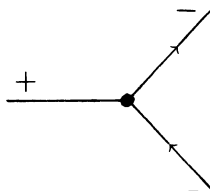
$$dK_q|_0 = \text{id}|_{T_qM} \quad \text{und} \quad d\exp_q|_0 = \text{id}|_{T_qM}$$

modulo der Identifikation  $T_0T_qM \cong T_qM$ . ( Für  $dK_q|_0$  siehe Kapitel 2, Seite 36 ) Also ist die Abbildung  $L'_q : T_qM \longrightarrow \mathbb{R}_1^n$  zeitorientierungstreu.

Nun kann man mit Hilfe der Abwicklung  $\delta$  das Gerüst von  $M$  um zwei Daten ergänzen. Zum einen um eine *Zeitorientierung* und zum anderen um eine *Gewichtung*, d.h. eine "Länge" für jede freie Kante.

**Definition** ( Zeitorientierung und Gewichtung )

Eine **Zeitorientierung** auf dem Gerüst von  $M$  ist die Zuordnung einer Richtung zu jeder zeitartigen Kante, so daß es um jeder Ecke wie folgt aussieht:



Mit jeder Zeitorientierung ist auch die Zuordnung, die jeder zeitartigen Kante die Gegenrichtung der ursprünglichen Richtung zuordnet, eine Zeitorientierung: die **inverse Zeitorientierung**. Zeitorientierung und inverse Zeitorientierung werden als im wesentlichen gleich angesehen.

Eine **Gewichtung**  $\mathcal{L}$  des Gerüstes ist eine Zuordnung, die jeder freien Kante  $\mathcal{K}$  eine "Länge"  $\mathcal{L}(\mathcal{K})$ , d.i. eine Zahl aus  $]0, +\infty]$ , zuordnet. Zwei Gewichtungen  $\mathcal{L}_1$  und  $\mathcal{L}_2$  heißen im wesentlichen gleich, falls es eine positive reelle Zahl  $a$  und einen kritischen Punkt  $p$  gibt, so daß für alle freien Kanten  $\mathcal{K}$  an  $p$  und an Ecken die von  $p$  einen geraden Abstand haben gilt  $\mathcal{L}_2(\mathcal{K}) = a \cdot \mathcal{L}_1(\mathcal{K})$  und für die übrigen freien Kanten  $\tilde{\mathcal{K}}$   $\mathcal{L}_2(\tilde{\mathcal{K}}) = \frac{1}{a} \mathcal{L}_1(\tilde{\mathcal{K}})$ .

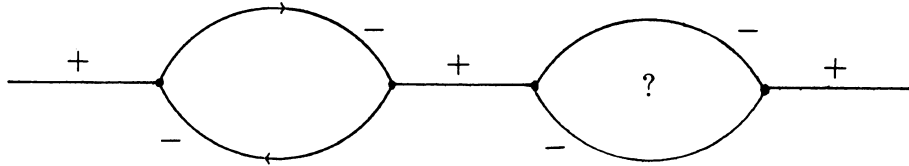
Dem positiven und dem negativen Zeitkegel in  $T_qM$ ,  $q \in Cr(\psi)$ , entspricht im Gerüst je eine zeitartige Kante, die von  $q$  ausgeht. Betrachtet man diese Kanten zusammen als eine zeitartige Geodäte in  $M$ , die durch  $q$  führt, so hat diese eine Durchlaufrichtung, die sie zu einer zeitartig-positiven Kurve macht. Diese Durchlaufrichtung induziert je eine Richtung auf den beiden zeitartigen Kanten. Die Richtung der zum positiven Zeitkegel gehörenden Kante weist von  $q$  weg, die der anderen Kante auf  $q$  hin.

Auf diese Weise erhält man eine Zeitorientierung des Gerüstes. Die inverse Zeitorientierung des Gerüstes entspricht der inversen Zeitorientierung auf  $M$ . Diese wird z.B. von der Abwicklung erzeugt, die man erhält, wenn man in Abschnitt 3.3 mit  $L'_p = A \circ L_p$ ,  $A \in \mathcal{O}^-(1, n-1)$ , anstelle von  $L_p$  startet.

Im Gegensatz zur Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es auf dem Gerüst von  $M$  im allgemeinen mehr als zwei Zeitorientierungen, denn eine Zeitorientierung auf dem Gerüst ist nicht durch die Wahl einer Richtung für eine zeitartige Kante festgelegt. Sie setzt sich von

dieser nur längs des maximalen Kantenzuges, der nur aus zeitartigen Kanten besteht und diese Kante enthält, eindeutig fort. Über davon durch raumartige Kanten getrennte zeitartige Kanten kann man keine Aussage aufgrund der Richtung der einen zeitartigen Kante machen.

Beispiel:



Nun zur Gewichtung: Für jeden kritischen Punkt  $q$  ist  $U_q := L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q) \subset \mathbb{R}_1^n$  von der Form  $U(r_1(q), r_2(q), r_3(q))$ . Zu einer freien Kante, die am Punkt  $q$  hängt, gehört ein raumartiger oder zeitartiger Kegel in  $T_qM$  und diesem entspricht unter  $L'_q \circ K_q$  ein Kegel in  $\mathbb{R}_1^n$ . Als Länge dieser Kante wählen wir die zu diesem Kegel gehörende Zahl  $|r_i(q)| \in ]0; \infty]$ .

Wie ändern sich diese Längen, wenn man mit der Abwicklung in einem anderen kritischen Punkt als  $p$  gestartet wäre, oder, was etwas allgemeiner ist, in  $p$  mit einem anderen konformen Isomorphismus  $L''_p$  anstelle von  $L_p$  gestartet wäre?

Es ist  $L''_p = a \cdot A \circ L_p$  für ein  $a \in \mathbb{R}_+$ , und  $A \in \mathcal{O}(1, n - 1)$ . Wir beschränken uns auf den Fall, daß  $A \in \mathcal{O}^+(1, n - 1)$  ist. Im anderen Fall wird zusätzlich noch die Zeitorientierung umgekehrt.

Nun ist  $L''_p \circ K_p(\tilde{B}_p) = a U_p = U(ar_1(p), ar_2(p), ar_3(p))$ . Also werden die Längen von freien Kanten am Punkt  $p$  mit  $a$  multipliziert.

Sei nun  $q$  ein zu  $p$  benachbarter kritischer Punkt. Damit die Wechselabbildungen (I) in folgenden Diagrammen (\* steht für  $i$  oder  $j$ )

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Q_1^n & & & & \\
 & & * \uparrow & & & & \\
 & & \mathbb{R}_1^n \supset U^+(+\infty) & \xrightarrow{(I)} & U^+(+\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 & a \cdot A \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow (II) & \\
 & \mathbb{R}_1^n \supset U^+(+\infty) & \xrightarrow{S} & U^+(+\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & & \\
 L_p \circ K_p \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_q \circ K_q & \\
 \tilde{B}_p \supset U^+(r_0) & \longrightarrow & U^+(r_0) & \subset & \tilde{B}_q & & 
 \end{array}$$

(falls  $p$  und  $q$  längs einer raumartigen Kante benachbart sind)

bzw.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Q_1^n & & & & \\
 & & * \uparrow & & & & \\
 & & \mathbb{R}_1^n \supset U^-(\pm\infty) & \xrightarrow{\text{(I)}} & U^-(\mp\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 a \cdot A \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \text{(II)} \\
 & & \mathbb{R}_1^n \supset U^-(\pm\infty) & \xrightarrow{S} & U^-(\mp\infty) \subset \mathbb{R}_1^n & & \\
 L_p \circ K_p \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow L'_q \circ K_q \\
 & & \tilde{B}_p \supset U^-(\pm r_0) & \longrightarrow & U^-(\mp r_0) \subset \tilde{B}_q & & 
 \end{array}$$

(falls  $p$  und  $q$  längs einer zeitartigen Kante benachbart sind)

wieder  $S$  wird, man also in bekannter Weise eine Abwicklung konstruieren kann, muß man die Abbildung (II) als  $\frac{1}{a}A$  wählen, denn

$$(S \circ aA)(x) = \frac{aA(x)}{\langle aA(x), aA(x) \rangle} = \frac{1}{a} \frac{A(x)}{\langle x, x \rangle} = \left( \frac{1}{a}A \circ S \right)(x)$$

Mithin muß man  $L'_q$  durch  $L''_q := \frac{1}{a}A \circ L'_q$  ersetzen. Die Längen der freien Kanten am Punkt  $q$  werden also mit  $\frac{1}{a}$  multipliziert.

So fortfahrend erkennt man: Die Längen der freien Kanten an Ecken mit geradem bzw. ungeradem Abstand zu  $p$  werden mit  $a$  bzw.  $\frac{1}{a}$  multipliziert. Die beiden Gewichtungen sind also im wesentlichen gleich.

Nun konstruieren wir noch eine konforme Mannigfaltigkeit  $M_\delta$ , die die Konstruktion von  $\delta$  widerspiegelt.

Dazu wählen wir zu jedem kritischen Punkt  $q$  von  $\psi$  eine Kopie von  $U_q = L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q) = U(r_1(q), r_2(q), r_3(q)) \subset \mathbb{R}_1^n$  und verkleben diese "Bausteine" für benachbarte kritische Punkte an den entsprechenden raumartigen oder zeitartigen Kegeln mit der Sphäreninversion  $S$  zusammen. So erhalten wir die Mannigfaltigkeit  $M_\delta$  mit einer lokal konform flachen Struktur (Möbiusstruktur), d.h. man hat einen Atlas, dessen Übergangsabbildungen konforme lokale Diffeomorphismen des  $\mathbb{R}_1^n$  sind.

Wichtig ist, daß wir zur Konstruktion von  $M_\delta$  nur das Gerüst von  $M$  mit den zwei zusätzlichen Daten "Zeitorientierung" und "Gewichtung" kennen mußten:

Die Zeitorientierung gestattet zu jeder Ecke  $q$  den raumartigen Kegel und die beiden zeitartigen Kegel in  $\mathbb{R}_1^n$  in eindeutiger Weise zu den drei von  $q$  ausgehenden Kanten in Beziehung zu setzen: den raumartigen Kegel mit der raumartigen Kante, den positiven Zeitkegel mit der zeitartigen Kante, die von  $q$  wegweist, und den negativen Zeitkegel mit der anderen zeitartigen Kante. Die Gewichtung bestimmt dann die Größe von  $U_q = U(r_1(q), r_2(q), r_3(q)) \subset \mathbb{R}_1^n$ . Die zu nicht-freien Kanten gehörenden  $r_i$  bekommen den Absolutwert  $\infty : |r_i(q)| = \infty$ .

Nun gibt der Graph darüber Auskunft, welche Bausteine  $U_q$  entlang welcher Kegel mit der Sphäreninversion  $S$  verklebt werden sollen. Aufgrund der Zeitorientierung wird dabei längs einer verbindenden zeitartigen Kante immer ein positiver Zeitkegel mit einem negativen Zeitkegel verklebt, d.h.  $S$  ist wirklich ein Diffeomorphismus zwischen diesen zu identifizierenden Kegeln.

Durch  $M \supset B_q \xleftarrow{\exp_q} \tilde{B}_q \xrightarrow{L'_q \circ K_q} L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q) = U_q \subset M_\delta$  für jeden kritischen Punkt  $q$  wird sodann ein konformer Diffeomorphismus  $\gamma : M \rightarrow M_\delta$  definiert. Die Abwicklung  $\delta$  läßt sich schreiben als  $\delta = \hat{\delta} \circ \gamma$ , wobei  $\hat{\delta} : M_\delta \rightarrow Q_1^n$  die Abwicklung von  $M_\delta$  ist, die auf  $U_q = L'_q \circ K_q(\tilde{B}_q)$  gegeben ist durch  $i$  oder  $j$ , je nachdem, wie dort  $\delta$  erklärt ist.

Aus obigen Ausführungen ergibt sich folgender Satz:

### Satz 3.1

Sind für zwei abwickelbare Lorentz-Mannigfaltigkeiten  $M_1$  und  $M_2$ , die je die Bedingung (\*) erfüllen, die Gerüste isomorph und sind für zwei nach Abschnitt 3.3 konstruierte Abwicklungen  $\delta_1 : M_1 \rightarrow Q_1^n$  und  $\delta_2 : M_2 \rightarrow Q_1^n$  die induzierten Zeitorientierungen und Gewichtungen der Gerüste unter dieser Isomorphie im wesentlichen gleich, so sind  $M_1$  und  $M_2$  konform diffeomorph.

#### Beweis:

Man kann die Abwicklung  $\delta_2 : M_2 \rightarrow Q_1^n$  durch einen geeigneten Startwert so abändern, daß die Zeitorientierungen und Gewichtungen unter dem Isomorphismus der Gerüste gleich werden. Dann ist  $M_{\delta_1} = M_{\delta_2}$ .  $\square$

### 3.5. Konforme Klassifikation

Ziel dieses Abschnitts ist eine teilweise Umkehrung des letzten Satzes.

Zunächst halten wir zwei Eigenschaften fest, die alle im Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen  $\delta$  haben.

$\delta$  bildet die kritischen Punkte von  $\psi$  und nur diese auf  $i(0), j(0) \in Q_1^n$  ab.

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \delta(M) &\subset i(\mathbb{R}_1^n) \cup j(\mathbb{R}_1^n) \\ &= \{ \pi(x_0, x, x_{n+1}) \mid (x_0, x, x_{n+1}) \in \Gamma_2^{n+2} \text{ mit } x_0 + x_{n+1} \neq 0 \vee x_0 - x_{n+1} \neq 0 \} \\ &= Q_1^n \setminus \{ \pi(0, x, 0) \mid (0, x, 0) \in \Gamma_2^{n+2} \} \\ &= Q_1^n \setminus \{ \pi(0, x, 0) \mid x \in \Gamma_1^n \} \\ &= Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \end{aligned}$$

mit  $Q_0^{n-2} = \pi(\Gamma_1^n) \cong \pi(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \subset Q_1^n$ .



### Satz 3.2

Seien  $(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  zwei Lorentz-Mannigfaltigkeiten die je die Bedingung (\*) erfüllen mit den Funktionen  $\psi_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Weiter sei  $M_1$  abwickelbar und für irgendeine Abwicklung  $\delta$  von  $M_1$  sei  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .

Dann ist jeder konforme Diffeomorphismus  $F : M_1 \rightarrow M_2$  flußlinientreu und induziert in natürlicher Weise einen Isomorphismus der als Teilmengen realisierten Gerüste von  $M_1$  und  $M_2$ .

Weiter sind für zwei geeignete Abwicklungen  $\delta_1 : M_1 \rightarrow Q_1^n$  und  $\delta_2 : M_2 \rightarrow Q_1^n$  die induzierten Zeitorientierungen und Gewichtungen unter diesem Isomorphismus der Gerüste gleich.

#### Beweis:

Mit  $M_1$  ist auch  $M_2$  abwickelbar mit Abwicklung  $\delta \circ F^{-1}$ .

Sei  $p_1 \in M_1$  ein kritischer Punkt von  $\psi_1$ . Wähle dazu einen kritischen Punkt  $p_2$  von  $\psi_2$  mit  $F(p_1) \in B_{p_2}$ .

Weiter seien die Abwicklungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  gemäß Abschnitt 3.3 konstruiert mit den Startwerten

$$B_{p_1} \xleftarrow{\exp_{p_1}} \tilde{B}_{p_1} \xrightarrow{L_{p_1} \circ K_{p_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

und

$$B_{p_2} \xleftarrow{\exp_{p_2}} \tilde{B}_{p_2} \xrightarrow{L_{p_2} \circ K_{p_2}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

mit zunächst beliebigen orthogonalen Abbildungen  $L_{p_1}$  und  $L_{p_2}$ , die aber schon so gewählt seien, daß  $F$  ein zeitorientierungstreuer konformer Diffeomorphismus ist bzgl. der durch  $\delta_1$  und  $\delta_2$  induzierten Zeitorientierungen.

Man hat dann folgendes kommutative Diagramm für ein geeignetes  $A \in \mathcal{O}(2, n)$

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \end{array} \quad (3.7)$$

Wegen der Voraussetzung  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  gilt  $\delta_1(M_1) = \delta_2(M_2) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ ; denn es existiert ein  $C \in \mathcal{O}(2, n)$ , so daß folgendes Diagramm kommutativ ist

$$\begin{array}{ccc} & M_1 & \\ \delta \swarrow & & \searrow \delta_1 \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_C} & Q_1^n \end{array}$$

Daher

$$\begin{aligned}
& \phi_C \circ \delta(M_1) = \delta_1(M_1) \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}) \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_0^{n-2}) \supset Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \pi \circ C(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \supset \pi(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \\
\Rightarrow & \forall x \in \Gamma_1^n \exists y \in \Gamma_1^n \exists \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mu C(0, y, 0) = (0, x, 0) \\
\Rightarrow & C(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) \supset \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\} = \text{span}(\{0\} \times \Gamma_1^n \times \{0\}) \\
\Rightarrow & C(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) = \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\} \quad (\text{da } C \text{ linearer Isomorphismus}) \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_0^{n-2}) = Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_C(Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \delta_1(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}
\end{aligned}$$

und analog  $\delta_2(M_2) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .

Mithin ist

$$\begin{aligned}
& \phi_A(Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}) = \phi_A(\delta_1(M_1)) = \delta_2(M_2) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & \phi_A(Q_0^{n-2}) = Q_0^{n-2} \\
\Rightarrow & A(\{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}) = \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \times \{0\}
\end{aligned}$$

Also  $A(0, x, 0) = (0, w(x), 0)$  für alle  $x \in \mathbb{R}_1^n$  mit  $w \in \mathcal{O}(1, n-1)$  (vgl. S. 43).

Wir bestimmen jetzt  $A$  noch etwas genauer.

Seien  $A(1, 0, 1) = (a, v_1, b)$  und  $A(1, 0, -1) = (c, v_2, d)$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}_1^n$ .  
Dann gilt, da  $A \in \mathcal{O}(2, n)$ :

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 0, 1) \cdot (0, x, 0) = (a, v_1, b) \cdot (0, w(x), 0) = \langle v_1, w(x) \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n \\
\Rightarrow & v_1 = 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt  $v_2 = 0$ .

Weiter

$$\begin{aligned}
0 &= (1, 0, 1) \cdot (1, 0, 1) = (a, 0, b) \cdot (a, 0, b) = -a^2 + b^2 \\
\Rightarrow & |a| = |b| \neq 0.
\end{aligned}$$

Analog folgt  $|c| = |d| \neq 0$ .

Da  $A$  injektiv ist, ist

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a) \wedge A(1, 0, -1) = (c, 0, -c)$$

oder

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, -a) \wedge A(1, 0, -1) = (c, 0, c).$$

Wegen

$$-2 = (1, 0, 1) \cdot (1, 0, -1) = A(1, 0, 1) \cdot A(1, 0, -1) = -ac - ac = -2ac$$

ist  $c = 1/a$ .

Nun sei  $U \subset B_{p_1}$  eine Umgebung von  $p_1$ , so daß  $F(U) \subset B_{p_2}$ . Dann hat man mit  $V := L_{p_1} \circ K_{p_1} \circ (\exp_{p_1}|_{B_{p_1}}^{-1})(U)$  folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \\ & & i \uparrow & & \uparrow i \\ \mathbb{R}_1^n \supset U_{p_1} \supset & V & \xrightarrow{\Omega} & U_{p_2} & \subset \mathbb{R}_1^n \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & B_{p_1} \supset U & \xrightarrow{F|_U} & B_{p_2} & \end{array}$$

Für alle  $x \in V$  hat man

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= i^{-1} \circ \phi_A \circ i(x) \\ &= i^{-1} \circ \pi \circ A(1 + \langle x, x \rangle, 2x, 1 - \langle x, x \rangle) \\ &= i^{-1} \circ \pi \circ A((1, 0, 1) + 2(0, x, 0) + \langle x, x \rangle(1, 0, -1)) \\ &= i^{-1} \circ \pi(A(1, 0, 1) + 2A(0, x, 0) + \langle x, x \rangle A(1, 0, -1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} i^{-1} \circ \pi((a, 0, a) + 2(0, w(x), 0) + \langle x, x \rangle \left(\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a}\right)) \\ i^{-1} \circ \pi((a, 0, -a) + 2(0, w(x), 0)) + \langle x, x \rangle \left(\frac{1}{a}, 0, \frac{1}{a}\right) \end{cases} \quad \text{oder} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{a}w(x) \\ a \frac{w(x)}{\langle x, x \rangle} \end{cases} \quad \text{oder}
\end{aligned}$$

Da  $0 \in V$  ist, muß notwendig gelten

$$\Omega(x) = \frac{1}{a}w(x) \quad \forall x \in V$$

Daher  $\Omega(0) = 0$  und das heißt  $F(p_1) = p_2$ .

Über  $A$  weiß man jetzt

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a) \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$A(0, x, 0) = (0, w(x), 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}_1^n$$

$$A(1, 0, -1) = \left(\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a}\right).$$

Sei o.B.d.A.  $a > 0$ . (Sonst ersetze  $A$  durch  $-A$ .)

$F$  ist zeitorientierungstreu. Also  $w \in \mathcal{O}^+(1, n-1)$ .

Es sind  $i(0) = \pi(1, 0, 1)$  und  $j(0) = \pi(1, 0, -1)$  Fixpunkte von  $\phi_A$ . Wegen Diagramm (3.7) und da  $\delta_1$  und  $\delta_2$  genau die kritischen Punkte auf  $i(0)$  oder  $j(0)$  abbilden, bildet  $F$  die kritischen Punkte von  $\psi_1$ , und nur diese, auf die kritischen Punkte von  $\psi_2$  ab.

*Zwischenbehauptung* : Die Abbildung  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$  bildet  $U_{p_1}$  in  $U_{p_2}$  ab.

*Beweis* : Es ist

$$U_{p_1} = U(r_1(p_1), r_2(p_1), r_3(p_1)) \subset \mathbb{R}_1^n$$

und

$$U_{p_2} = U(r_1(p_2), r_2(p_2), r_3(p_2)) \subset \mathbb{R}_1^n$$

Die Abbildung  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$  bildet  $\Gamma_1^n \subset U_{p_1}$  auf  $\Gamma_1^n \subset U_{p_2}$  ab. Falls  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$  nicht  $U_{p_1}$  in  $U_{p_2}$  abbildet, muß es ein  $\nu \in \{1, 2, 3\}$  geben, so daß

$$|r_\nu(p_2)| < \frac{1}{a} |r_\nu(p_1)| .$$

Für ein solches  $\nu$  betrachten wir  $U^\pm(ar_\nu(p_2)) \subset U^\pm(r_\nu(p_1)) \subset U_{p_1}$  und  $U^\pm(r_\nu(p_2)) \subset U_{p_2}$  ( das Vorzeichen  $\pm$  hängt vom Index  $\nu$  ab; ”+” für  $\nu = 1$  und ”-” für  $\nu = 2, 3$  ). Man hat folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n & \\
 & \uparrow i & & \uparrow i & \\
 \delta_1 & U^\pm(ar_\nu(p_2)) & \xrightarrow{\frac{1}{a}w} & U^\pm(r_\nu(p_2)) & \delta_2 \\
 & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & \\
 & B_{p_1} & \xrightarrow{F} & M_2 & 
 \end{array} \quad (3.8)$$

mit  $\varphi_m := \exp_{p_m} \circ (L_{p_m} \circ K_{p_m})^{-1}$ ,  $m = 1, 2$  .

Hierbei ist das obere Rechteck kommutativ, da das untere Rechteck und das äußere Rechteck kommutativ sind.

Sei nun  $x \in \mathbb{R}_1^n$  aus dem zu  $U^\pm(r_\nu(p_1))$  gehörenden Kegel mit  $|\langle x, x \rangle| = 1$  . Es ist die Kurve

$$t \mapsto \varphi_1(t \cdot ax) , \quad 0 \leq t \leq |r_\nu(p_2)| ,$$

der Spur nach eine Geodäte in  $M_1$  und eine Flußlinie von  $\text{grad } \psi_1$  , die von  $p_1$  nach

$$q := \varphi_1(|r_\nu(p_2)| \cdot ax) \in B_{p_1}$$

führt. Weiter ist

$$t \mapsto \varphi_2(t \cdot w(x)) , \quad 0 \leq t < |r_\nu(p_2)|$$

der Spur nach gleich einer Geodäten in  $M_2$  und gleich einer Flußlinie von  $\text{grad } \psi_2$  . Sei  $c : [0, \infty) \rightarrow M_2$ ,  $s \mapsto c(s)$ ,  $c(0) = p_2$ , die Parametrisierung dieser Geodäten nach der Bogenlänge. Der Bewegung  $t \rightarrow |r_\nu(p_2)|$  entspricht die Bewegung  $s \rightarrow \infty$  . (Da  $|r_\nu(p_2)| < \infty$  kann es in der zu  $r_\nu(p_2)$  gehörenden Richtung keinen zu  $p_2$  benachbarten kritischen Punkt von  $\psi_2$  geben und  $\tilde{B}_{p_2}$  ist daher in dieser Richtung unbeschränkt.) Da das obere Rechteck in (3.8) kommutativ ist, folgt

$$\varphi_2(t \cdot w(x)) = F \circ \varphi_1(t \cdot ax) , \quad 0 \leq t < |r_\nu(p_2)| ,$$

und

$$\lim_{t \rightarrow |r_\nu(p_2)|} \varphi_2(t \cdot w(x)) = \lim_{t \rightarrow |r_\nu(p_2)|} F \circ \varphi_1(t \cdot ax) = F(q) .$$

Schaut man sich den Fluß von  $\text{grad } \psi_2$  in einer Umgebung von  $F(q)$  an, so sieht man, daß es keine Geodäte  $c$  in  $M_2$  geben kann, die der Spur nach eine Flußlinie von  $\text{grad } \psi_2$  ist mit  $\lim_{s \rightarrow \infty} c(s) = F(q)$ .

Also bildet  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$   $U_{p_1}$  in  $U_{p_2}$  ab.

*Ende des Beweises der Zwischenbehauptung.*

Wendet man die gleichen Überlegungen auf  $F^{-1}$  an, so folgt

$$\frac{1}{a}w(U_{p_1}) = U_{p_2} .$$

Ersetzt man in Diagramm (3.8) die mittlere Zeile durch  $U_{p_1} \xrightarrow{\frac{1}{a}w} U_{p_2}$ , so folgt

$$F(B_{p_1}) = B_{p_2} .$$

Anders formuliert haben wir die Abbildung  $G$  in folgendem kommutativen Diagramm auf  $U_{p_1} \subset M_{\delta_1}$  bestimmt als  $x \mapsto \frac{1}{a}w(x)$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n & \\
 & \hat{\delta}_1 \uparrow & & \uparrow \hat{\delta}_2 & \\
 \delta_1 & M_{\delta_1} & \xrightarrow{G} & M_{\delta_2} & \delta_2 \\
 & \gamma_1 \uparrow & & \uparrow \gamma_2 & \\
 & M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 & 
 \end{array}$$

Ist nun  $q_1$  ein zu  $p_1$  in raumartiger oder zeitartiger Richtung benachbarter kritischer Punkt, so ist der kritische Punkt  $q_2 := F(q_1)$  zu  $p_2$  in raumartiger oder zeitartiger Richtung benachbart, denn  $F$  bildet die raumartigen oder zeitartigen Flußlinien von  $\text{grad } \psi_1$ , die von  $p_1$  nach  $q_1$  führen, der Spur nach auf ebensolche von  $p_2$  nach  $q_2$  ab.

Die obigen Überlegungen gelten für jeden anderen kritischen Punkt von  $\psi_1$  an Stelle von  $p_1$  (mit dann evtl. anderen Abwicklungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$ ). Also ist  $F$  flußlinientreu und liefert in natürlicher Weise einen Isomorphismus der als Teilmengen realisierten Gerüste von  $M_1$  und  $M_2$ .

Da  $F$  zeitorientierungstreu bzgl. der durch  $\delta_1$  und  $\delta_2$  induzierten Zeitorientierungen ist, überführt dieser Isomorphismus der Gerüste die Zeitorientierung der Gerüste von  $M_1$  und  $M_2$  ineinander.

Kommen wir nochmals auf die benachbarten kritischen Punkte  $p_1$  und  $q_1$  bzw.  $p_2$  und  $q_2$  zurück.

Aufgrund der obigen Überlegungen ist auch

$$F(B_{q_1}) = B_{q_2} .$$

Wir wollen noch die Abbildung  $G|_{U_{q_1}}$  in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
& Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \\
& \uparrow j & & \uparrow j \\
\delta_1 & U_{q_1} & \xrightarrow{G|U_{q_1}} & U_{q_2} & \delta_2 \\
& \uparrow & & \uparrow & \\
& B_{q_1} & \xrightarrow{F|B_{q_1}} & B_{q_2} & 
\end{array}$$

berechnen. Für alle  $x \in U_{q_1}$  gilt:

$$\begin{aligned}
G|U_{q_1}(x) &= j^{-1} \circ \phi_A \circ j(x) \\
&= j^{-1} \circ \phi_A \circ \pi( (1 + \langle x, x \rangle, 2x, \langle x, x \rangle - 1) ) \\
&= j^{-1} \circ \pi( A(1, 0, -1) + 2A(0, x, 0) + \langle x, x \rangle A(1, 0, 1) ) \\
&= j^{-1} \circ \pi\left( \left( \frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a} \right) + 2(0, w(x), 0) + \langle x, x \rangle (a, 0, a) \right) \\
&= aw(x) .
\end{aligned}$$

So fortfahrend erkennt man, daß  $G : M_{\delta_1} \rightarrow M_{\delta_2}$  von der Form  $M_{\delta_1} \supset U_{\bar{q}_1} \xrightarrow{\frac{1}{a}w} U_{\bar{q}_2} \subset M_{\delta_2}$  ist, falls  $\bar{q}_1 \in Cr(\psi_1)$  im Gerüst von  $M_1$  einen geraden Abstand von  $p_1$  hat und von der Form  $M_{\delta_1} \supset U_{\bar{q}_1} \xrightarrow{aw} U_{\bar{q}_2} \subset M_{\delta_2}$  ist für einen ungeraden Abstand.

Ersetzt man im Startwert für  $\delta_2$  die orthogonale Abbildung  $L_{p_2}$  durch  $aw^{-1} \circ L_{p_2}$  so ist  $G|U_{\bar{q}_1} : U_{\bar{q}_1} \rightarrow U_{F(\bar{q}_1)}$  die Identität für alle  $\bar{q}_1 \in Cr(\psi_1)$ , insbesondere  $U_{\bar{q}_1} = U_{F(\bar{q}_1)}$ .

Dann sind auch die Längen von einander entsprechenden freien Kanten an  $\bar{q}_1$  und  $F(\bar{q}_1)$  gleich.  $\square$

### Bemerkungen:

- 1) Kurz gesagt bildet  $F$  kritische Punkte auf kritische Punkte ab, weil  $\{i(0), j(0)\} \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  invariant unter der konformen Gruppe von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist.
- 2) Wir werden weiter unten sehen, daß man auf die Voraussetzung  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  nicht verzichten kann. Dann geht eventuell die Eigenschaft verloren, daß *jeder* konforme Diffeomorphismus  $F : M_1 \rightarrow M_2$  flußlinientreu ist.
- 3) Die Eigenschaft  $\delta(M_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist für die nach Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen sicher dann erfüllt, wenn  $\psi_1$  mindestens zwei kritische Punkte hat und das Vektorfeld grad  $\psi_1$  vollständig ist. Es gibt aber Beispiele von Lorentz-Mannigfaltigkeiten  $M_1$  mit beliebig vielen kritischen Punkten von  $\psi_1$  und  $\delta(M_1) \not\subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  (vgl. Satz 4.1 und S. 73).

- 4) Im Fall der Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , ist das Gerüst von  $M_1$  immer ein linearer Graph, die Mannigfaltigkeit  $M_1$  also abwickelbar. Hat dann  $\psi_1$  mindestens drei kritische Punkte oder zwei kritische Punkte und ist das Vektorfeld  $\text{grad } \psi_1$  vollständig, so ist  $\delta(M_1) = Q_k^n \setminus Q_{k-1}^{n-2}$ , für die analog zu Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen.

### 3.6 Zwei weitere globale Sätze

Wir wollen jetzt unter etwas schwächeren Voraussetzungen als in Satz 3.2 zeigen, daß das Gerüst eine konforme Invariante ist.

Sei dazu  $(M, g)$  eine Lorentz-Mannigfaltigkeit, die die Bedingung (\*) zusammen mit der Funktion  $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt.

Sei weiter  $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$  die universelle Überlagerung von  $M$  und  $\widehat{g}$  die Metrik auf  $\widehat{M}$ , die  $\pi$  zu einer lokalen Isometrie macht.

Dann erfüllen  $(\widehat{M}, \widehat{g})$  und  $\widehat{\psi} := \psi \circ \pi$  die Bedingung (\*). Dabei liegen die kritischen Punkte von  $\widehat{\psi}$  über den kritischen Punkt von  $\psi$ . Für  $p \in Cr(\psi)$  und  $\widehat{p} \in \pi^{-1}(p)$  ist  $\pi|_{B_{\widehat{p}}} : B_{\widehat{p}} \rightarrow B_p$  eine Isometrie. Weiter ist jeder Lift  $\widehat{c}$  einer direkten geodätischen Verbindung  $c$  zweier benachbarter kritischer Punkte  $p, q \in Cr(\psi)$  eine direkte geodätische Verbindung zwischen den Endpunkten  $\widehat{p}, \widehat{q} \in Cr(\widehat{\psi})$  von  $\widehat{c}$ .

#### Bemerkung:

Ist  $\mathcal{G}$  eine Realisierung des Gerüsts von  $M$  als Teilmenge von  $M$ , so ist  $\widehat{\mathcal{G}} := \pi^{-1}(\mathcal{G})$  aufgrund der obigen Feststellungen eine Realisierung des Gerüsts von  $\widehat{M}$  als Teilmenge von  $\widehat{M}$ . Versieht man  $\mathcal{G}$  und  $\widehat{\mathcal{G}}$  mit der Teilraumtopologie, so ist  $\pi|_{\widehat{\mathcal{G}}} : \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  eine Überlagerung. Nach Lemma 4.1 in Kapitel 4 ist  $\widehat{\mathcal{G}}$  ein Baum, also einfach zusammenhängend. Daher ist  $\pi|_{\widehat{\mathcal{G}}} : \widehat{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$  die universelle Überlagerung von  $\mathcal{G}$ . Von dieser Bemerkung werden wir in Kapitel 4 Gebrauch machen.

Nun gilt folgender Satz:

#### Satz 3.3

$(M_1, g_1)$  und  $(M_2, g_2)$  seien zwei Lorentz-Mannigfaltigkeiten die zusammen mit  $\psi_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  die Bedingung (\*) erfüllen. Gilt für eine Abwicklung  $\delta$  von  $(\widehat{M}_1, \widehat{g}_1)$ , der universellen Überlagerung von  $M_1$ , daß  $\delta(\widehat{M}_1) = Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  ist, so ist jeder konforme Diffeomorphismus  $F : M_1 \rightarrow M_2$  flußlinientreu und induziert in natürlicher Weise einen Isomorphismus der Gerüste.

#### Anmerkung:

Da  $M_1$  und  $M_2$  nicht notwendig abwickelbar sind, tragen ihre Gerüste nicht die zwei zusätzlichen Daten "Zeitorientierung" und "Gewichtung". Da man diese Daten nicht hat, kann man auch keine Aussage darüber machen, ob der durch  $F$  gegebene Isomorphismus diese erhält.



**Beweis:**

Man hat folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}_1 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \end{array}$$

mit einem Lift  $\widehat{F}$  von  $F \circ \pi_1$ .

Es ist  $\widehat{F}$  ein konformer Diffeomorphismus.

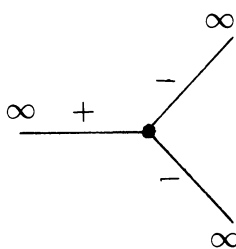
Sei nun  $p_1 \in Cr(\psi_1)$ . Wähle  $\widehat{p}_1 \in \pi_1^{-1}(p_1)$ . Nach Satz 3.2 ist  $\widehat{p}_2 := \widehat{F}(\widehat{p}_1) \in Cr(\widehat{\psi}_2)$  und damit  $p_2 := F(p_1) = \pi_2(\widehat{p}_2) \in Cr(\psi_2)$ . Wegen  $\widehat{F}(B_{\widehat{p}_1}) = B_{\widehat{p}_2}$  ist  $F(B_{p_1}) = B_{p_2}$  und  $F|_{B_{p_1}}$  flußlinientreu.  $\square$

Nun gibt es, wie die folgenden Beispiele zeigen, auf den Standardräumen konstanter Schnittkrümmung jeweils Funktionen, so daß die Bedingung (\*) erfüllt ist. Die Standardräume sind abwickelbar. Die Bilder der nach Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklungen sind alle echte Teilmengen von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ , d.h. die Voraussetzung von Satz 3.2 ist nicht erfüllt.

**1. Beispiel** (pseudo-Euklidischer Raum)

Der pseudo-Euklidische Raum  $\mathbb{R}_1^n$  zusammen mit der Funktion  $\psi : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 1/2 \langle x, x \rangle$ , erfüllt die Bedingung (\*). Es ist  $\text{grad } \psi(x) = x$  und  $\nabla_X \text{grad } \psi = X$  für alle Vektorfelder  $X$  auf  $\mathbb{R}_1^n$ .

$i : \mathbb{R}_1^n \rightarrow Q_1^n$  ist gleich einer nach Abschnitt 3.3 konstruierten Abwicklung und  $i(\mathbb{R}_1^n) \subsetneq Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ . Das gewichtete Gerüst von  $\mathbb{R}_1^n$  bzgl. dieser Abwicklung ist

**2. Beispiel** (pseudo-hyperbolischer Raum) (vgl. [KR1] Beispiel 3.9.)

Es ist der pseudo-hyperbolische Raum  $\mathbb{H}_1^n := S(-1) \subset \mathbb{R}_2^{n+1}$ . Für festes  $v \in \mathbb{R}_2^{n+1}$  ist die Höhenfunktion  $\psi_v : \mathbb{H}_1^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \mapsto \langle p, v \rangle$  eine Funktion mit konformen Gradienten.

Sei nun  $v \in S(-1)$ . Dann hat  $\psi_v$  die beiden kritischen Punkte  $v$  und  $-v$ .

Die Geodäten von  $\mathbb{H}_1^n$  sind die Schnitte von zweidimensionalen linearen Teilräumen von  $\mathbb{R}_2^{n+1}$  mit  $S(-1)$ . Aus dieser Tatsache folgert man, daß  $\mathbb{H}_1^n$   $Cr(\psi_v)$ -vollständig ist. Also erfüllt  $\mathbb{H}_1^n$  mit der Funktion  $\psi_v$ ,  $v \in S(-1)$ , die Bedingung (\*).

Die Exponentialabbildung in  $q \in \mathbb{H}_1^n$  schreibt sich mit der Identifikation  $T_q \mathbb{H}_1^n \cong \{x \in \mathbb{R}_2^{n+2} \mid \langle x, q \rangle = 0\}$  :

$$\exp_q(r \cdot x) = \begin{cases} \cosh r \cdot q + \sinh r \cdot x & , \quad \langle x, x \rangle = 1 \\ q + r \cdot x & , \quad \langle x, x \rangle = 0 \\ \cos r \cdot q + \sin r \cdot x & , \quad \langle x, x \rangle = -1 \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \quad (3.9)$$

Daher ist in Polarkoordinaten um  $v$

$$\tilde{\psi}_{v,+}(r) = -\cosh r \quad \wedge \quad \tilde{\psi}_{v,-}(r) = -\cos r ,$$

und um  $-v$

$$\tilde{\psi}_{v,+}(r) = \cosh r \quad \wedge \quad \tilde{\psi}_{v,-}(r) = \cos r .$$

In beiden Fällen erhält man für die Funktionen  $f_{\pm}$  und  $\rho_{\pm}$  aus Kapitel 2, S. 33/34:

$$f_+(r) = \sinh r \quad \wedge \quad f_-(r) = \sin r$$

und

$$\rho_+(r) = 2 \tanh \frac{r}{2} \quad \wedge \quad \rho_-(r) = 2 \tan \frac{r}{2} .$$

Also für die Mengen  $U_{\pm v}$  (vgl. S. 50)

$$U_{\pm v} = U(2, +\infty, -\infty)$$

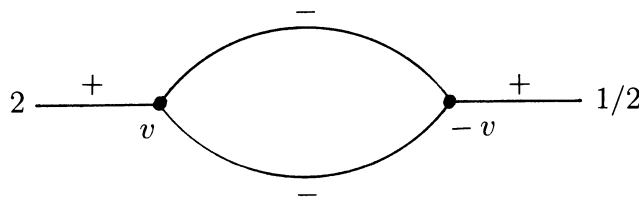
und für den Faktor  $a$  nach Gleichung (3.2)

$$a = \rho_-(r) \cdot \rho_-(\pi - r) = 2 \tan \frac{r}{2} \cdot 2 \tan \frac{\pi - r}{2} = 4 .$$

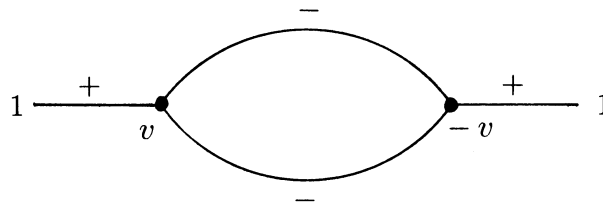
Für die Abwicklung von  $\mathbb{H}_1^n$  nach Abschnitt 3.3 mit dem Startwert

$$B_v \xleftarrow{\exp_v} \tilde{B}_v \xrightarrow{K_v} T_v \mathbb{H}_1^n \xrightarrow{L_v} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

( $L_v$  eine orthogonale Abbildung) sieht das gewichtete Gerüst so aus



Falls man  $L_v$  durch  $L'_v := \frac{1}{2}L_v$  ersetzt, erhält man



Für die zuletzt betrachtete Abwicklung  $\delta$  ist

$$\begin{aligned} \delta(\mathbb{H}_1^n) &= i(\{x \mid \langle x, x \rangle < 1\}) \cup j(\{x \mid \langle x, x \rangle < 1\}) \\ &= \pi(\{(x_0, x, x_{n+1}) \in \Gamma_2^{n+2} \mid x_{n+1} \neq 0\}) \\ &\subsetneq Q_1^n \setminus Q_0^{n-2} \end{aligned}$$

Wir wollen noch die Abwicklung  $\delta$  für  $v = e_1$  und ein spezielles  $L_v$  berechnen, da sie eine besonders einfache Gestalt hat.

Es ist nach (3.9) für  $p \in B_v$  ( $r = \text{Radius in Polarkoordinaten}$ ) :

$$\exp_v^{-1}(p) = \begin{cases} (p + \langle p, v \rangle v) \frac{r}{\sinh r} & , \langle p, v \rangle < -1 \\ p + \langle p, v \rangle v & , \langle p, v \rangle = -1 \\ (p + \langle p, v \rangle v) \frac{r}{\sin r} & , \langle p, v \rangle > -1 \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} K_v \circ \exp_v^{-1}(p) &= \begin{cases} (p + \langle p, v \rangle v) \frac{1}{\cosh^2 \frac{r}{2}} & , \langle p, v \rangle < -1 \\ p + \langle p, v \rangle v & , \langle p, v \rangle = -1 \\ (p + \langle p, v \rangle v) \frac{1}{\cos^2 \frac{r}{2}} & , \langle p, v \rangle > -1 \end{cases} \\ &= 2 \frac{2 + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} . \end{aligned}$$

Daher ist für  $p \in B_v$ :

$$\begin{aligned}
 \delta(p) &= i \circ \frac{1}{2} L_v \left( 2 \frac{p + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} \right) \\
 &= i \circ L_v \left( \frac{p + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} \right) \\
 &= \pi \left( 1 + \frac{\langle p, v \rangle + 1}{\langle p, v \rangle - 1}, 2 L_v \left( \frac{p + \langle p, v \rangle v}{1 - \langle p, v \rangle} \right), 1 - \frac{\langle p, v \rangle + 1}{\langle p, v \rangle - 1} \right) \\
 &= \pi(-\langle p, v \rangle, L_v(p + \langle p, v \rangle v), 1)
 \end{aligned}$$

Für  $v = e_1$  ist nun  $T_v \mathbb{H}_1^n = T_{e_1} \mathbb{H}_1^n \cong \{x \in \mathbb{R}_2^{n+1} \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} = \{x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}_2^{n+1} \mid x_1 = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}_1^n \cong \mathbb{R}_1^n$ . Nimmt man als  $L_{e_1}$  diese kanonische Identifikation, so ist für  $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathbb{H}_1^n$ :

$$-\langle p, e_1 \rangle = p_1 \quad \wedge \quad L_{e_1}(p + \langle p, e_1 \rangle e_1) = (p_2, \dots, p_{n+1})$$

Daher läßt sich das zugehörige  $\delta$  schreiben als

$$\begin{array}{ccc}
 \delta : \mathbb{H}_1^n & \xrightarrow{\iota} & \Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & Q_1^n \\
 p & \longmapsto & (p, 1) & \longmapsto & \pi(p, 1)
 \end{array}$$

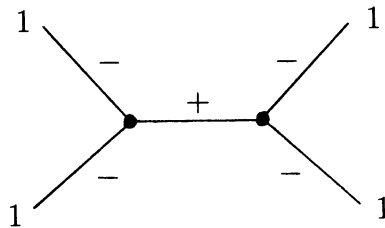
Aus diesem Diagramm kann man sofort ablesen, daß  $\delta$  eine konforme Immersion ist:  $\iota$  ist eine isometrische Immersion in den  $\mathbb{R}_2^{n+2}$  und  $\pi$  hat die Eigenschaft  $\pi^* g_{n,1} \Big|_x = \frac{2}{\|x\|} \cdot g_0$  auf  $T_x(\Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\}) \subset T_x \mathbb{R}_2^{n+2}$ ,  $x \in \Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\}$  (vgl. S. 13).

### 3. Beispiel (pseudo-Sphäre)

Analog wie im 2. Beispiel haben die Höhenfunktionen auf der pseudo-Sphäre  $S_1^n := S(+1) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$  einen konformen Gradienten. Die Abwicklung

$$\begin{array}{ccc}
 \delta : S_1^n & \xrightarrow{\iota_1} & \Gamma_2^{n+2} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & Q_1^n \\
 p & \longmapsto & (1, p) & \longmapsto & \pi(1, p)
 \end{array}$$

liefert als bewertetes Gerüst



also  $\delta(S_1^n) \not\subseteq Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .

Auf allen drei Räumen operiert die Isometriegruppe transitiv. Daher gibt es Isometrien auf diesen Räumen (insbesondere konforme Diffeomorphismen), die nicht flußlinientreu sind. Die Behauptung von Satz 3.2 gilt für diese Mannigfaltigkeiten also nicht.

Ist  $F$  ein konformer Diffeomorphismus von  $\mathbb{R}_1^n$ ,  $\mathbb{H}_1^n$  oder  $S_1^n$  auf eine weitere Mannigfaltigkeit, so kann man  $F$  durch Komposition mit einem konformen Automorphismus von  $\mathbb{R}_1^n$ ,  $\mathbb{H}_1^n$  oder  $S_1^n$  so abändern, daß die Voraussetzung des folgenden Satzes erfüllt ist.

### Satz 3.4

Seien  $M_1, M_2$  zwei Lorentz-Mannigfaltigkeiten, die die Bedingung (\*) mit den Funktionen  $\psi_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllen. Sei weiter  $F : M_1 \rightarrow M_2$  ein konformer Diffeomorphismus der mindestens einen kritischen Punkt von  $\psi_1$  auf einen kritischen Punkt von  $\psi_2$  abbildet. Dann ist  $F$  flußlinientreu und induziert einen Isomorphismus der Gerüste.

### Beweis:

Betrachte zunächst die universellen Überlagerungen von  $M_1$  und  $M_2$ . Man hat folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}_1 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{M}_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \end{array}$$

Es seien  $p_1$  ein kritischer Punkt von  $\psi_1$  und  $p_2$  ein kritischer Punkt von  $\psi_2$  mit  $F(p_1) = p_2$ . Dann ist für jeden Punkt  $\widehat{p}_1 \in \widehat{M}_1$  über  $p_1$  der Punkt  $\widehat{p}_2 := \widehat{F}(\widehat{p}_1)$  ein kritischer Punkt von  $\widehat{\psi}_2$  über  $p_2$ . Wähle für  $\widehat{M}_1$  und  $\widehat{M}_2$  Abwicklungen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  mit den Startwerten

$$B_{\widehat{p}_1} \xleftarrow{\exp_{\widehat{p}_1}} \widetilde{B}_{\widehat{p}_1} \xrightarrow{L_{\widehat{p}_1} \circ K_{\widehat{p}_1}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

und

$$B_{\widehat{p}_2} \xleftarrow{\exp_{\widehat{p}_2}} \widetilde{B}_{\widehat{p}_2} \xrightarrow{L_{\widehat{p}_2} \circ K_{\widehat{p}_2}} \mathbb{R}_1^n \xrightarrow{i} Q_1^n$$

mit irgendwelchen orthogonalen Abbildungen  $L_{\widehat{p}_1}$  und  $L_{\widehat{p}_2}$ .

Man hat für ein  $A \in \mathcal{O}(2, n)$  folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M}_1 & \xrightarrow{\widehat{F}} & \widehat{M}_2 \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_2 \\ Q_1^n & \xrightarrow{\phi_A} & Q_1^n \end{array}$$

Wegen  $\widehat{F}(\widehat{p}_1) = \widehat{p}_2$  und  $\delta_1(\widehat{p}_1) = \delta_2(\widehat{p}_2) = i(0)$  ist  $\phi_A(i(0)) = i(0)$ , also

$$A(1, 0, 1) = (a, 0, a), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Sei weiter  $A(0, x, 0) = (l_1(x), w(x), l_2(x))$  mit  $l_1, l_2 \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R})$ ,  $w \in L(\mathbb{R}_1^n, \mathbb{R}_1^n)$ . Es ist für alle  $x \in \mathbb{R}_1^n$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (1, 0, 1) \cdot (0, x, 0) = (a, 0, a) \cdot (l_1(x), w(x), l_2(x)) = -al_1(x) + al_2(x) \\ \Rightarrow l_1(x) &= l_2(x). \end{aligned}$$

Nun ist  $i(\Gamma_1^n) \subset \delta_1(B_{\hat{p}_1}) \subset \delta_1(\widehat{M}_1)$ , also

$$\phi_A(i(\Gamma_1^n)) \subset \delta_2(\widehat{M}_2) \subset Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}. \quad (3.10)$$

Außerdem ist für alle  $x \in \Gamma_1^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \phi_A(i(t \cdot x)) &= \phi_A \circ \pi(1, 2tx, 1) \\ &= \pi \circ A(1, 2tx, 1) \\ &= \pi \circ A((1, 0, 1) + 2t(0, x, 0)) \\ &= \pi((a, 0, a) + 2t(l_1(x), w(x), l_1(x))) \\ \Rightarrow a + 2tl_1(x) &\neq 0 \quad \forall x \in \Gamma_1^n \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (\text{wegen (3.10)}) \\ \Rightarrow l_1(x) &= 0 \quad \forall x \in \Gamma_1^n \\ \Rightarrow l_1(x) &= 0 \quad \forall x \in \text{span}(\Gamma_1^n) = \mathbb{R}_1^n \\ \Rightarrow A(0, x, 0) &= (0, w(x), 0) \quad \text{mit } w \in \mathcal{O}(1, n-1). \end{aligned}$$

Weiter folgt  $A(1, 0, -1) = \left(\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a}\right)$ . Nun kann man wie in Beweis von Satz 3.2, S. 56, fortfahren. Man erhält, daß  $\widehat{F}$  flußlinientreu ist und damit auch  $F$ .  $\square$