2. Kapitel: Die lokale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld

Sei $\psi : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit konformem Gradienten auf der Lorentz-Mannigfaltigkeit M . Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, daß in einer relativ großen Umgebung eines jeden kritischen Punktes von $\psi : M \to \mathbb{R}$ die Mannigfaltigkeit (M, g) konform flach ist.

Zunächst beweisen wir zwei vorbereitende Lemmata. Das erste Lemma besagt, daß die Flußlinien von $\operatorname{grad}\psi$, bis auf die Parametrisierung, Geodäten sind und das zweite hält fest, daß die kritischen Punkte von ψ diskret liegen. Die Herleitung der eigentlichen Aussage ist dann auf die drei folgenden Sätze verteilt. Zusammengefaßt sagen sie, daß die Metrik g um jeden kritischen Punkt in Polarkoordinaten ein "warped-product" ist, für das man recht leicht einen konformen Diffeomorphismus in den pseudo-Euklidischen Raum angeben kann.

Sei also (M, g) eine n-dimensionale zusammenhängende pseudo-Riemannsche C^∞-Mannigfaltigkeit, $n \geq 3$, deren Metrik g die Signatur $(1, n-1)$ hat (Lorentz-Mannigfaltigkeit). Alle auftretenden Funktionen und Vektorfelder seien unendlich oft differenzierbar. ∇ bezeichne den Levi-Civita-Zusammenhang, R den $(1,3)$-Krümmungstensor und Ric den $(0,2)$-Riccitensor von (M, g). Für Vektorfelder X, Y, Z auf M hat man:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$
$$\operatorname{Ric}(X,Y) = \operatorname{Spur}(Z \mapsto R(Z,X)Y)$$

Ein Vektorfeld V auf M heißt konform, wenn der (lokale) Fluß von V aus konformen (lokalen) Diffeomorphismen besteht. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Lie-Ableitung von g in Richtung V ein Vielfaches von g ist, d.h. es gibt eine Funktion $\lambda : M \to \mathbb{R}$ mit

$$L_V g = 2\lambda g \tag{2.1}$$

Ist V geschlossen, d.h. die 1–Form $g(V, \cdot)$ geschlossen oder gleichwertig $X \mapsto \nabla_X V$ symmetrisch bzgl. g, so ist für je zwei Vektorfelder X und Y auf M:

$$L_V g(X,Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) = 2g(\nabla_X V, Y)$$

In diesem Fall ist (2.1) äquivalent zu

$$\nabla_X V = \lambda X \tag{2.2}$$

für alle Vektorfelder X auf M.

Schreibt man V lokal als Gradient einer Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$, $U \subset M$ offen, also $V = \operatorname{grad}\psi$, so ist (2.2) auf U äquivalent zu

$$\nabla^2 \psi = \lambda g \tag{2.3}$$

$\nabla^2\psi$ bezeichnet dabei den $(0,2)$-Hessetensor von ψ.

Lemma 2.1 ([Ke2], Prop. 1)

Sei V ein geschlossenes konformes Vektorfeld auf M, $\nabla_X V = \lambda X$ für alle Vektorfelder X auf M, und $c : [0; a) \to M$ eine Geodäte in M mit $V(c(0)) = k \cdot \dot{c}(0)$ für ein $k \in \mathbb{R}$. Setze $\Lambda_c(t) := \int_0^t \lambda(c(s))ds$. Dann gilt für $t \in [0; a)$

$$V(c(t)) = (k + \Lambda_c(t))\dot{c}(t).$$

Beweis:

Sei $(E_1(t), \ldots, E_n(t))$ ein paralleles ON-Bein längs c. Dann ist $\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^n c_i E_i(t)$, $0 \leq t < a$, mit festen Zahlen $c_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

Weiter ist $V(c(t)) = \sum_{i=1}^n v_i(t) E_i(t)$, $0 \leq t < a$, mit Funktionen $v_i : [0, a) \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.

Es ist $v_i(0) = kc_i$, $1 \leq i \leq n$.

Nun gilt mit dem induzierten Zusammenhang $\frac{\nabla}{dt}$ längs c (s. [ON], S. 65)

$$\frac{\nabla}{dt} V(c(t)) = \sum_{i=1}^n \dot{v}_i(t) E_i(t)$$

und

$$\begin{array}{rrcll} & \frac{\nabla}{dt} V(c(t)) & = & \nabla_{\dot{c}(t)} V = \lambda(c(t))\, \dot{c}(t) & \\ \Rightarrow & \dot{v}_i(t) & = & \lambda(c(t))\, c_i & 1 \leq i \leq n \\ \Rightarrow & v_i(t) & = & (k + \Lambda_c(t)) c_i & 1 \leq i \leq n \\ \Rightarrow & V(c(t)) & = & (k + \Lambda_c(t))\dot{c}(t) & \end{array}$$

$\square$

Bemerkungen:

1) Anschaulich besagt das Lemma folgendes: Ist das geschlossene konforme Vektorfeld V in einem Punkt parallel zu einer Geodäten, so ist es in jedem Punkt der Geodäten parallel zu ihr. Oder anders: Die Flußlinien von V sind, bis auf Umparametrisierung, Geodäten.

2) Ist $V(c(0)) = 0$, so ist $V(c(t)) = \Lambda_c(t)\dot{c}(t)$. Falls noch $V = \operatorname{grad} \psi$ gilt, ist

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi(c(t)) = \nabla^2\psi(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \lambda(c(t))\, g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)).$$

Dann ist mit $\psi_c(t) := \psi \circ c(t)$ für $g(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) \neq 0$

$$\begin{aligned}
\lambda(c(t)) &= \frac{1}{g(\dot{c},\dot{c})}\psi_c''(t) \\
\Rightarrow \qquad \Lambda_c(t) &= \frac{1}{g(\dot{c},\dot{c})}(\psi_c'(t) - \psi_c'(0)) \\
&= \frac{1}{g(\dot{c},\dot{c})}\psi_c'(t) \\
\Rightarrow \quad \operatorname{grad}\psi(c(t)) &= \frac{1}{g(\dot{c},\dot{c})}\psi_c'(t)\,\dot{c}(t)
\end{aligned}$$

Lemma 2.2 ([Ke2], Prop. 2)

Ist $V \neq 0$ ein geschlossenes konformes Vektorfeld auf M, $\nabla_X V = \lambda X$ für alle Vektorfelder X auf M, so gilt für $p \in M$

$$V(p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} V(p) = n \cdot \lambda(p) \neq 0.$$

Insbesondere sind die Nullstellen von V isoliert.

Beweis:

Aus $\nabla_X V = \lambda X$ für alle Vektorfelder X auf M folgt $\operatorname{div} V = n \cdot \lambda$.

Für Vektorfelder X, Y auf M gilt

$$\begin{aligned}
R(X,Y)V &= \nabla_X\nabla_Y V - \nabla_Y\nabla_X V - \nabla_{[X,Y]}V \\
&= \nabla_X(\lambda Y) - \nabla_Y(\lambda X) - \lambda[X,Y] \\
&= X(\lambda)Y + \lambda\nabla_X Y - Y(\lambda)X - \lambda\nabla_Y X - \lambda[X,Y] \\
&= X(\lambda)Y - Y(\lambda)X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \mathrm{Ric}\,(X,V) &= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i g(R(E_i,X)V,E_i) \\
& \qquad E_1,\dots,E_n \;\; ON\text{-Basis bzgl. } g,\;\; g(E_i,E_j)=\epsilon_i\delta_{ij},\;\; \epsilon_i=\pm 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\, g(E_i(\lambda)X - X(\lambda)E_i, E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\, E_i(\lambda) g(X,E_i) - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\, X(\lambda) g(E_i,E_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\, g(X,E_i)E_i\right)(\lambda) - nX(\lambda) \\
&= X(\lambda) - nX(\lambda) \\
&= (1-n)X(\lambda)
\end{aligned}$$

Sei nun $p \in M$ mit $V(p) = 0$.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$, $c : I \to M$ eine Geodäte mit $c(0) = p$ und Λ_c die Funktion aus Lemma 2.1. Dann erfüllt Λ_c die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\Lambda_c''(t) &= \frac{d}{dt}\lambda(c(t)) = \dot c(t)(\lambda) = \frac{1}{1-n}\,\mathrm{Ric}\,(\dot c(t), V(c(t))) \\
&= \frac{\Lambda_c(t)}{1-n}\,\mathrm{Ric}\,(\dot c(t),\dot c(t))\;.
\end{aligned}$$

Es ist $\Lambda_c(0) = 0$. Falls noch $\Lambda_c'(0) = \lambda(c(0)) = \lambda(p) = 0$ gilt, so verschwindet Λ_c identisch und zwar für alle Geodäten c die durch p führen. Also verschwindet V in einer ganzen Umgebung von p.
Daher ist $A := \{q \in M \mid V(q) = 0\} \cap \{q \in M \mid \lambda(q) = 0\}$ offen und, da V und λ stetig sind, abgeschlossen. Da $V \neq 0$ und M zusammenhängend ist, muß A die leere Menge sein. Also ist $\lambda(p) \neq 0$.

Lägen beliebig nahe bei p weitere Nullstellen von V, so hätte man $\Lambda_c(0) = \Lambda_c(1) = 0$ für gewisse Geodäten $c : [0,1] \to M$ mit beliebig kleinem $\dot c(0)$ (klein bzgl. der Topologie in T_pM), die p mit diesen Nullstellen verbinden (da $V(c(t)) = \Lambda_c(t)\dot c(t)$). Für diese Geodäten c hat dann $\Lambda_c' = \lambda \circ c$ eine Nullstelle zwischen 0 und 1. Also hat λ beliebig nahe bei p Nullstellen. Dann muß auch $\lambda(p) = 0$ sein, ein Widerspruch. $\square$

Im folgenden benötigen wir Polarkoordinaten in den Tangentialräumen T_pM.

Sei dazu V ein n-dimensionaler ($n \geq 3$) reeller Vektorraum mit einer nicht-degenerierten symmetrischen Bilinearform $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ der Signatur $(1, n-1)$. Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, heißt raumartig, lichtartig oder zeitartig, je nachdem $\langle v, v\rangle > 0$, $\langle v, v\rangle = 0$ oder $\langle v, v\rangle < 0$ ist.

Mit Γ bezeichnen wir den Lichtkegel von $V:\ \Gamma := \{v \in V \mid \langle v,v\rangle = 0\}$. Es ist $S(+1) := \{v \in V \mid \langle v,v\rangle = +1\}$ zusammenhängend, wo hingegen $S(-1) := \{v \in V \mid \langle v,v\rangle = -1\}$ aus zwei Komponenten besteht. Wählt man eine dieser Komponenten aus, wir bezeichnen sie mit $S^\circ(-1)$, so entspricht das der Auswahl eines Zeitkegels, d.h. wir haben implizit eine Zeitorientierung auf V und können von zeitartig-positiven und zeitartig-negativen Vektoren reden.
Setze $\Sigma := S(+1) \cup S^\circ(-1)$.
Ordnen wir einem $v \in V \setminus \Gamma$ in Polarkoordinaten eine "Länge" r und eine "Richtung" $x \in \Sigma$ zu, so soll immer $v = r \cdot x$ gelten. Dies wird durch folgende Definition gewährleistet:

für $\langle v,v\rangle > 0$ sei $\qquad r := \sqrt{\langle v,v\rangle}$ und $x := \dfrac{v}{r} \in S(+1)$

für $\langle v,v\rangle < 0$ und v zeitartig-positiv sei

$$r := \sqrt{|\langle v,v\rangle|} \ \text{ und } \ x := \frac{v}{r} \in S^\circ(-1)$$

für $\langle v,v\rangle < 0$ und v zeitartig-negativ sei

$$r := -\sqrt{|\langle v,v\rangle|} \ \text{ und } \ x := \frac{v}{r} \in S^\circ(-1).$$

Der Definitionsbereich der Polarkoordinaten ist dann die Menge

$$\mathcal{D} := \mathbb{R}_+ \times\ S(+1) \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times\ S^\circ(-1).$$

Weiter definieren wir

$$\begin{aligned}
U^+(r) &:= \{v \in V \mid 0 < \langle v,v\rangle < r^2\},\ \ 0 < r \le \infty \\
U^-(r) &:= \{v \in V \mid -r^2 < \langle v,v\rangle < 0\ \wedge\ v\ \text{ zeitartig-positiv}\},\ \ 0 < r \le \infty \\
U^-(r) &:= \{v \in V \mid -r^2 < \langle v,v\rangle < 0\ \wedge\ v\ \text{ zeitartig-negativ}\},\ \ -\infty \le r < 0
\end{aligned}$$

und

$$U(r_1, r_2, r_3) := \Gamma \cup U^+(r_1) \cup U^-(r_2) \cup U^-(r_3)$$

für $0 < r_1, r_2 \le \infty\ ,\ \ -\infty \le r_3 < 0$.

Wie den pseudo-Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n_1$ kann man auch $(V, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ als pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit betrachten.

Sei nun $v \in V \setminus \Gamma$ und $(r,x) \in \mathcal{D}$ die Polarkoordinaten von v. Sei $X \in T_x\Sigma \subset T_xV \cong V$. Für $(\partial_r, X) \in T_r\mathbb{R} \oplus T_x\Sigma \cong T_{(r,x)}\mathcal{D}$ identifiziere

$$\partial_r\Big|_{(r,x)} \ \text{ mit } \ x\Big|_v \in T_vV \cong V$$

und

$$X\Big|_{(r,x)} \;\text{ mit }\; r\cdot X\Big|_{v} \in T_vV \cong V.$$

Von nun an soll der Index (r,x) auf Polarkoordinaten und der Index $v = r\cdot x$ auf die Identifikation $T_vV \cong V$ hinweisen.

Im folgenden Satz denken wir uns in $V := T_pM$, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle := g_p$, Polarkoordinaten eingeführt.

Satz 2.1 (vgl. [Ta], [Kü], [KR1])

Sei $\psi : M \to \mathbb{R}$ eine nicht-konstante Funktion, die die Differentialgleichung $\nabla^2\psi = \lambda g$ auf M erfüllt und $p \in M$ ein kritischer Punkt von ψ sowie $\exp_p$ auf ganz T_pM definiert. Dann gilt

1) Die Funktionen $\widetilde{\psi} := \psi \circ \exp_p$ und $\widetilde{\lambda} := \lambda \circ \exp_p$ hängen, in Polarkoordinaten (r,x) betrachtet, nur von r ab, solange x in $S(+1)$ oder in $S^\circ(-1)$ variiert. Man kann daher definieren

$$\left.\begin{array}{l}\widetilde{\psi}_\eta(r) := \widetilde{\psi}(r\cdot x)\\[4pt] \widetilde{\lambda}_\eta(r) := \widetilde{\lambda}(r\cdot x)\end{array}\right. \;,\quad \eta := \langle x,x\rangle$$

2) Die zurückgeholte Metrik $\widetilde{g} := \exp_p^*(g)$ hat in Polarkoordinaten die Gestalt

$$\widetilde{g}\Big|_{(r,x)} = \eta dr^2 + \frac{\widetilde{\psi}_\eta'(r)^2}{\widetilde{\psi}_\eta''(0)^2}\, g_\eta\Big|_x,$$

solange $\widetilde{\psi}_\eta'(r)$ nicht Null wird, d.h.

$$(r,x) \in \widetilde{A}_p := \Big\{\, (r_1,x_1) \in \mathcal{D} \;\Big|\; \widetilde{\psi}_\eta'(t) \neq 0 \quad \forall t \in]0,r_1] \quad \text{falls } r_1 > 0 \text{ ist, bzw.}$$
$$\forall t \in [r_1,0[\;\text{ falls }\; r_1 < 0\;,\quad \eta = \langle x_1,x_1\rangle \,\Big\}$$

Dabei ist g_η die Standardmetrik auf $S(\eta)$, d.h. die von g_p auf der Untermannigfaltigkeit $S(\eta)$ induzierte Metrik der konstanten Schnittkrümmung η.

Beweis:

zu 1) : Sei $X \in T_x\Sigma$ beliebig.

Wähle dazu eine Kurve $c : I \to \Sigma$ mit $c(0) = x$, $\dot{c}(0) = X$. Dann gilt

$$\begin{aligned} X\Big|_{(r,x)}\widetilde{\psi} &= \frac{d}{dt}\psi\circ\exp_p(r\cdot c(t))\Big|_{t=0} \\ &= g(\text{grad }\psi\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}, d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(r\cdot X)) \end{aligned}$$

Da p kritischer Punkt von ψ ist, ist nach Lemma 2.1 grad ψ kollinear zu den Tangenten aller von p ausgehenden Geodäten, d.h.

$$\operatorname{grad}\psi\Big|_{\exp_p(r\cdot x)} \;\Big|\Big|\; d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(x)\ .$$

Nach dem Gauß-Lemma ist dann

$$X\Big|_{(r,x)}\widetilde{\psi} = 0\ .$$

Also ist $\widetilde{\psi}_\eta(r) := \widetilde{\psi}(r\cdot x)$, $\eta = \langle x,x\rangle$, wohldefiniert.

Da $r \mapsto \exp_p(r\cdot x)$ eine Geodäte ist, gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dr^2}\psi(\exp_p(r\cdot x)) &= \nabla^2\psi(d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(x), d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(x)) \\
&= \lambda(\exp_p(r\cdot x))\, g(d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(x), d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(x)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \frac{d^2}{dr^2}\widetilde{\psi}_\eta(r) &= \widetilde{\lambda}(r\cdot x)\langle x,x\rangle \\
\Rightarrow \qquad \widetilde{\psi}''_\eta(r) &= \eta\widetilde{\lambda}(r\cdot x) \\
\Rightarrow \qquad \widetilde{\lambda}(r\cdot x) &= \eta\widetilde{\psi}''_\eta(r) =: \widetilde{\lambda}_\eta(r)
\end{aligned}$$

zu 2) : Zunächst wissen wir nur, daß $\widetilde{g}$ ein symmetrischer $(0,2)$-Tensor auf T_pM ist. Ob $\widetilde{g}$ auf $\widetilde{A}_p$ nicht degeneriert ist, d.h. eine Metrik definiert, ist unbekannt. Insbesondere können wir (noch) nicht von dem zugeordneten Levi-Civita-Zusammenhang reden. Stattdessen benutzen wir den durch ∇ induzierten Zusammenhang längs Abbildungen in die Mannigfaltigkeit M. Deshalb fällt der folgende Beweis etwas technischer aus.

Es gilt $\widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(\partial_r,\partial_r) = \langle x,x\rangle = \eta$ nach Definition der Exponentialabbildung.

Weiter ist $\widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(\partial_r, X) = 0$ für alle $X \in T_x\Sigma$ nach dem Gauß-Lemma.

Nun bestimmen wir $\widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X)$ für $X \in T_x\Sigma$.

Sei dazu wieder $c : I \to \Sigma$ eine Kurve mit $c(0) = x$, $\dot{c}(0) = X$. Betrachte die 2-Parameter-Schar

$$c(r,s) := \exp_p(r\cdot c(s))\ .$$

Man hat

$$\frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial c}{\partial r}(r,s) = \frac{\nabla}{\partial r}\frac{\partial c}{\partial s}(r,s)\ .$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial r}(r,s) &= d\exp_p\Big|_{r\cdot c(s)}(c(s)) \\
\frac{\partial c}{\partial s}(r,s) &= d\exp_p\Big|_{r\cdot c(s)}(r\cdot \dot{c}(s)) \\
\frac{\partial c}{\partial s}(r,0) &= d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(r\cdot X)\ .
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X) &= \frac{d}{dr}\, g\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}(d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(r\cdot X), d\exp_p\Big|_{r\cdot x}(r\cdot X)) \\
&= \frac{d}{dr}\, g\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}\left(\frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\,,\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\right) \\
&= 2\, g\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}\left(\frac{\nabla}{\partial r}\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\,,\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\right) \\
&= 2\, g\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}\left(\frac{\nabla}{\partial s}\ \frac{\partial c}{\partial r}(r,0)\,,\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\right)\ .
\end{aligned}$$

Nach der Bemerkung 2) zu Lemma 2.1 ist

$$\operatorname{grad}\psi\Big|_{\exp_p(r\cdot c(s))} \ =\ \eta\widetilde{\psi}'_\eta(r) d\exp_p\Big|_{r\cdot c(s)}(c(s)) \ =\ \eta\widetilde{\psi}'_\eta(r)\frac{\partial c}{\partial r}(r,s)\ .$$

Also solange $\widetilde{\psi}'_\eta(r) \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X) &= 2\, g\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}\left(\frac{1}{\eta\widetilde{\psi}'_\eta(r)}\ \frac{\nabla}{\partial s}\operatorname{grad}\psi\Big|_{\exp_p(r\cdot c(s))}\Big|_{s=0}\,,\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\right) \\
&= \frac{2}{\eta\widetilde{\psi}'_\eta(r)}\ g\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}\left(\nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}(r,0)}\ \operatorname{grad}\psi\,,\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\right) \\
&= \frac{2}{\eta\widetilde{\psi}'_\eta(r)}\ \nabla^2\psi\left(\frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\,,\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\right) \\
&= \frac{2}{\eta\widetilde{\psi}'_\eta(r)}\ \lambda\circ\exp_p(r\cdot x)\ g\Big|_{\exp_p(r\cdot x)}\left(\frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\,,\ \frac{\partial c}{\partial s}(r,0)\right) \\
&= 2\ \frac{\widetilde{\psi}''_\eta(r)}{\widetilde{\psi}'_\eta(r)}\widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X)\ .
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\ \frac{1}{(\widetilde{\psi}_\eta'(r))^2}\widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X) &= -\frac{2\widetilde{\psi}_\eta''(r)}{(\widetilde{\psi}_\eta'(r))^3}\ \widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X) \\
&\qquad + \frac{1}{(\widetilde{\psi}_\eta'(r))^2}\ 2\frac{\widetilde{\psi}_\eta''(r)}{\widetilde{\psi}_\eta'(r)}\ \widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und somit kann man definieren

$$g^*\Big|_x(X,X) := \frac{\widetilde{\psi}_\eta''(0)^2}{\widetilde{\psi}_\eta'(r)^2}\ \widetilde{g}\Big|_{(r,x)}(X,X)$$

für alle r zwischen 0 und der ersten Nullstelle von $\widetilde{\psi}_\eta'$ rechts (oder links) von 0. Also

$$\widetilde{g}\Big|_{(r,x)} = \eta dr^2 + \frac{\widetilde{\psi}_\eta'(r)^2}{\widetilde{\psi}_\eta''(0)^2} g^*\Big|_x$$

Man beachte $\widetilde{\psi}_\eta''(0) = \eta\widetilde{\lambda}(0) = \eta\lambda(p) \neq 0$. Außerdem müßte man für den Fall $x \in S^\circ(-1)$ zwischen zwei Metriken g_+^* und g_-^* unterscheiden, je nachdem $r > 0$ oder $r < 0$ ist. Da aber, wie sich jetzt gleich herausstellt, beide gleich der Standardmetrik auf $S^\circ(-1)$ sind, verzichten wir darauf.

Nun ist bekanntlich $d\exp_p\Big|_0 : T_0T_pM \cong T_pM \longrightarrow T_pM$ die identische Abbildung. Also $\widetilde{g}\Big|_0 = g_p = \langle\cdot\,,\cdot\rangle$. Daher gilt für alle $X, Y \in T_x\Sigma \subset T_xT_pM \cong T_pM$

$$\begin{aligned}
\langle X, Y\rangle &= \widetilde{g}\Big|_0(X,Y) = \lim_{r\to 0}\ \widetilde{g}\Big|_{r\cdot x}(X,Y) \\
&= \lim_{r\to 0}\ \widetilde{g}\Big|_{(r,x)}\left(\frac{1}{r}X, \frac{1}{r}Y\right) \\
&= \lim_{r\to 0}\ \frac{\widetilde{\psi}_\eta'(r)^2}{\widetilde{\psi}_\eta''(0)^2}\frac{1}{r^2}\ g^*\Big|_x(X,Y) \\
&= g^*\Big|_x(X,Y)
\end{aligned}$$

d.h. g^* ist die Standardmetrik g_η auf $S(\eta)$. $\square$

Ziel der folgenden Überlegungen ist der

Satz 2.2

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.1. Weiter sei Γ_p der Lichtkegel in T_pM, $\widetilde{B}_p := \widetilde{A}_p \cup \Gamma_p$, $B_p := \exp_p(\widetilde{B}_p)$. Dann ist

$$\exp_p\Big|_{\widetilde{B}_p} : \widetilde{B}_p \to B_p$$

ein Diffeomorphismus.

Wir bestimmen zunächst $\widetilde{g}\Big|_z$ für $z \in \Gamma_p$ aus der Grenzwertdarstellung

$$\widetilde{g}\Big|_z = \lim_{\substack{y \to z \\ y \in \tilde{A}_p}} \widetilde{g}\Big|_y$$

Sei dazu $V \in T_pM$ und $y \in \widetilde{A}_p$.

Seien (r, x) die Polarkoordinaten von y und $V\Big|_y$ habe in Polarkoordinaten die Darstellung $(\alpha\partial_r, X) \in T_{(r,x)}\mathcal{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$V\Big|_y = \alpha x + rX$$

Dabei ist

$$\alpha = \eta\langle V, x\rangle = \frac{\eta}{r}\langle V, y\rangle, \quad \eta = \langle x, x\rangle$$

und

$$rX = V - \alpha x = V - \frac{\eta}{r^2}\langle V, y\rangle y \quad .$$

Daher

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}\Big|_y(V, V) &= \eta\alpha^2 + \frac{\widetilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\widetilde{\psi}''_\eta(0)^2}\langle X, X\rangle \\
&= \frac{\eta}{r^2}\langle V, y\rangle^2 + \frac{\widetilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\widetilde{\psi}''_\eta(0)^2}\frac{1}{r^2}\Big(\langle V, V\rangle - \frac{2\eta}{r^2}\langle V, y\rangle^2 + \frac{1}{r^4}\langle V, y\rangle^2\langle y, y\rangle\Big)
\end{aligned}$$

Mit $\chi_\eta(r) := \dfrac{\widetilde{\psi}'_\eta(r)}{\widetilde{\psi}''_\eta(0) \cdot r}$ folgt

$$\widetilde{g}\Big|_y(V, V) = \chi^2_\eta(r)\langle V, V\rangle + \frac{\eta}{r^2}(1 - \chi^2_\eta(r))\langle V, y\rangle^2$$

Da $\widetilde{\psi}$ auf T_pM existiert, muß nach Lemma A5 (S. 88) $(\widetilde{\psi}_+, \widetilde{\psi}_-) \in \mathcal{F}$ sein. Mit dieser Information berechnet man mit Hilfe der Regel von l'Hospital und mit Lemma A2, S. 83,

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \chi_\eta(r) &= 1 \\
\lim_{r\to 0} \frac{1-\chi_\eta^2(r)}{r^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{-2\chi_\eta(r)\chi_\eta'(r)}{2r} \\
&= \lim_{r\to 0} -\frac{\chi_\eta'(r)\chi_\eta'(r) + \chi_\eta(r)\chi_\eta''(r)}{1} \\
&= -\frac{\widetilde{\psi}_\eta^{(4)}(0)}{3\widetilde{\psi}_\eta''(0)} \;=:\; \bar{\chi}_\eta
\end{aligned}$$

Also

$$\widetilde{g}\Big|_z(V,V) \;=\; \langle V,V\rangle - \eta\bar{\chi}_\eta\langle V,z\rangle^2$$

oder

$$\widetilde{g}\Big|_z(V,W) \;=\; \langle V,W\rangle - \eta\bar{\chi}_\eta\langle V,z\rangle\,\langle W,z\rangle \qquad \text{für alle } V,W\in T_pM. \tag{2.4}$$

Nun sieht man leicht, daß $\widetilde{g}\Big|_z$ nicht degeneriert ist:

$$\begin{array}{rrcll}
 & \widetilde{g}\Big|_z(V,W) &=& 0 & \forall\, W\in T_pM \\
\Rightarrow & \widetilde{g}\Big|_z(V,W) &=& 0 & \forall\, W\in z^\perp \subset T_pM \\
\overset{(2.4)}{\Rightarrow} & \langle V,W\rangle &=& 0 & \forall\, W\in z^\perp \\
\Rightarrow & V\in z^{\perp\perp} &=& \mathbb{R}\cdot z & \\
\Rightarrow & \exists\mu\in\mathbb{R}\,:\,V &=& \mu\cdot z & \\
\overset{(2.4)}{\Rightarrow} & \widetilde{g}\Big|_z(V,W) &=& \langle V,W\rangle \;=\; 0 & \forall\, W\in T_pM \\
\Rightarrow & V &=& 0. &
\end{array}$$

Insgesamt ist damit $\widetilde{g}$ auf $\widetilde{B}_p = \widetilde{A}_p \cup \Gamma_p$ nicht degeneriert. Daher muß $\exp_p$ auf $\widetilde{B}_p$ eine Immersion sein. Jetzt zeigen wir noch, daß $\exp_p\Big|_{\widetilde{B}_p}$ injektiv ist.

Es ist in $\widetilde{A}_p$

$$\operatorname{grad}\widetilde{\psi}\Big|_{(r,x)} \;=\; \eta\widetilde{\psi}_\eta'(r)\partial_r$$

und für $z\in\Gamma_p$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} \widetilde{\psi}\Big|_z &= \lim_{\substack{y\to z\\ y\in \tilde{A}_p}} \operatorname{grad} \widetilde{\psi}\Big|_y \\
&= \lim_{\substack{y\to z\\ y=r\cdot x}} \operatorname{grad} \widetilde{\psi}\Big|_{r\cdot x} \\
&= \lim_{\substack{y\to z\\ y=r\cdot x}} \frac{\eta\widetilde{\psi}'_\eta(r)}{r}\cdot y \\
&= \eta\widetilde{\psi}''_\eta(0)\cdot z
\end{aligned}
$$

Da $\exp_p : (\widetilde{B}_p, \widetilde{g}) \to (B_p, g)$ eine lokale Isometrie ist, gilt

$$
d\exp_p(\operatorname{grad} \widetilde{\psi}) = \operatorname{grad} \psi \; .
$$

Seien nun $y_1, y_2 \in \widetilde{B}_p$ mit $\exp_p(y_1) = \exp_p(y_2) =: q$.
Es ist $\widetilde{\psi}|\Gamma_p \equiv \widetilde{\psi}(0) = \widetilde{\psi}_\pm(0)$. Wegen $\widetilde{\psi}'_\eta(r) \neq 0$ falls $(r,x) \in \widetilde{A}_p$, $\langle x,x\rangle = \eta$, und $\widetilde{\psi}''_+(0) = -\widetilde{\psi}''_-(0) \neq 0$ wächst $\widetilde{\psi}|\widetilde{A}_p$ streng in raumartiger Richtung und fällt streng in den beiden zeitartigen Richtungen oder umgekehrt.
Da $\widetilde{\psi}(y_1) = \psi(q) = \widetilde{\psi}(y_2)$ sind also $y_1, y_2 \in \Gamma_p$ oder y_1, y_2 raumartig oder y_1, y_2 zeitartig.

1. Fall: $y_1, y_2 \in \Gamma_p$

Betrachte die Geodäten $c_i : t \mapsto \exp_p(t\cdot y_i) \quad i = 1,2$.

Es ist

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} \psi\Big|_q &= d\exp_p\Big|_{y_i}(\eta\widetilde{\psi}''_\eta(0)\, y_i) \\
&= \eta\widetilde{\psi}''_\eta(0)\, d\exp_p\Big|_{y_i}(y_i) \\
&= \eta\widetilde{\psi}''_\eta(0)\, \dot{c}_i(1) \qquad\qquad i = 1,2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \dot{c}_1(1) &= \dot{c}_2(1) \quad (\text{ und } c_1(1) = c_2(1) = q\,) \\
\Rightarrow \quad c_1 &= c_2 \\
\Rightarrow \quad y_1 &= \dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0) = y_2.
\end{aligned}
$$

2. Fall: y_1, y_2 raumartig oder y_1, y_2 zeitartig

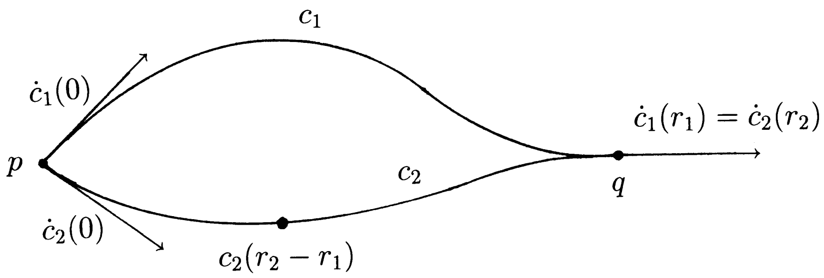
Dann existieren $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$, $x_1, x_2 \in S(\eta)$, $\eta = \operatorname{sign}\langle y_1, y_1\rangle = \operatorname{sign}\langle y_2, y_2\rangle$ mit $r_1\cdot x_1 = y_1$, $r_2\cdot x_2 = y_2$. (Im zeitartigen Fall sind (r_i, x_i) nicht notwendig die Polarkoordinaten von y_i, $i = 1,2$.) Betrachte die Geodäten $c_i : t \mapsto \exp_p(t\cdot x_i)$, $i = 1,2$. Es ist wieder

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad} \psi\Big|_q &= d\exp_p\Big|_{y_i}(\eta\widetilde{\psi}'_\eta(\pm r_i)(\pm x_i)) \\
&= \eta\psi'_\eta(\pm r_i)(\pm\dot{c}_i(r_i)) \qquad\qquad i = 1,2.
\end{aligned}
$$

Da $\dot{c}_1(r_1)$ und $\dot{c}_2(r_2)$ Einheitsvektoren sind folgt

$$\dot{c}_1(r_1) = \dot{c}_2(r_2) \ \text{ oder } \ \dot{c}_1(r_1) = -\dot{c}_2(r_2)$$

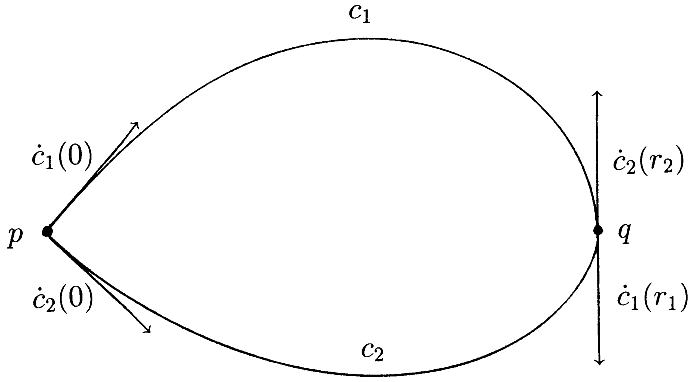
1. Unterfall: $\dot{c}_1(r_1) = \dot{c}_2(r_2)$



Dann sind die Geodäten $t \mapsto c_1(r_1 - t)$ und $t \mapsto c_2(r_2 - t)$ gleich. O.E. sei $r_1 \leq r_2$. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} & p & = & c_1(0) \ = \ c_2(r_2 - r_1) \\ \Rightarrow & 0 & = & \operatorname{grad} \psi\Big|_p \ = \ \pm\eta\widetilde{\psi}'_\eta(\pm(r_2 - r_1))\dot{c}_2(r_2 - r_1) \\ \Rightarrow & r_1 & = & r_2 \\ \Rightarrow & c_1 & = & c_2 \\ \Rightarrow & x_1 & = & \dot{c}_1(0) \ = \ \dot{c}_2(0) \ = \ x_2 \\ \Rightarrow & y_1 & = & r_1 \cdot x_1 \ = \ r_2 \cdot x_2 \ = \ y_2. \end{array}$$

2. Unterfall: $\dot{c}_1(r_1) = -\dot{c}_2(r_2)$



Betrachte die Geodäte, die entsteht, wenn man zuerst c_1 durchläuft und dann c_2 rückwärts:

$$c : t \mapsto \begin{cases} c_1(t) & , \quad 0 \le t \le r_1 \\ c_2(r_1 + r_2 - t) & , \quad r_1 \le t \le r_1 + r_2 \; . \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} & \psi \circ c(0) \; = \; \psi \circ c(r_1 + r_2) \\ \Rightarrow \quad & \exists r \in]0, r_1 + r_2[: \qquad (\psi \circ c)'(r) \; = \; 0 \; . \end{aligned}$$

Wegen

$$(\psi \circ c)'(r) = \begin{cases} \widetilde{\psi}'_\eta(\pm r) & , \quad 0 < r \le r_1 \\ -\widetilde{\psi}'_\eta(\pm(r_1 + r_2 - r)) & , \quad r_1 \le r \le r_1 + r_2 \end{cases}$$

erhält man einen Widerspruch zu $(\pm r_i, \pm x_i) \in \widetilde{A}_p$, $i = 1, 2$.
Damit ist Satz 2.2 bewiesen. $\square$

Was bedeutet nun $\widetilde{\psi}'_\eta(r_0) = 0$?

Nach der Bemerkung zu Lemma 2.1 gilt in allen Punkten $\exp_p(r_0 \cdot x)$, $x \in \Sigma$, $\langle x, x \rangle = \eta$,

$$\operatorname{grad} \psi \Big|_{\exp_p(r_0 \cdot x)} = \eta \widetilde{\psi}'_\eta(r_0) \cdot d\exp_p \Big|_{r_0 \cdot x}(x) = 0 \; .$$

Da die kritischen Punkte von ψ isoliert liegen (Lemma 2.2), werden alle Punkte $r_0 \cdot x$, $x \in \Sigma$, $\langle x, x \rangle = \eta$ durch $\exp_p$ auf einen einzigen (kritischen) Punkt abgebildet. Ist r_0 die erste Nullstelle von $\widetilde{\psi}'_\eta$ rechts oder links von Null, so nennen wir diesen kritischen Punkt einen zu p in raumartiger ($\eta = +1$) oder zeitartiger ($\eta = -1$) Richtung **benachbarten kritischen Punkt**, wobei man im zeitartigen Fall noch genauer zwischen zeitartig-positiver Richtung ($r_0 > 0$) und zeitartig-negativer Richtung ($r_0 < 0$) unterscheiden kann.

Satz 2.3

Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in Satz 2.1, S. 25. Dann ist die zurückgeholte Metrik

$$\widetilde{g} = \exp_p^*(g) = \eta dr^2 + \frac{\widetilde{\psi}'_\eta(r)^2}{\widetilde{\psi}''_\eta(0)^2} g_\eta$$

auf $\widetilde{B}_p = \widetilde{A}_p \cup \Gamma_p$ konform flach.

Beweis:

Zur Abkürzung schreiben wir

$$\widetilde{g}\Big|_{(r,x)} = \eta dr^2 + f_\eta^2(r)\, g_\eta\Big|_x \; , \qquad (r, x) \in \widetilde{A}_p \; ,$$

mit $f_\eta(r) := \dfrac{\widetilde{\psi}'_\eta(r)}{\widetilde{\psi}''_\eta(0)}$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\rho'_\eta(r) = \frac{\rho_\eta(r)}{f_\eta(r)} \, .$$

Nun ist $f_\eta(0) = 0$, $f'_\eta(0) = 1$. Daher ist

$$\rho_\eta(r) := r \cdot \exp\left(\int_0^r h_\eta(\xi)d\xi\right) \quad \text{mit} \quad h_\eta(\xi) := \frac{1}{f_\eta(\xi)} - \frac{1}{\xi}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung und zwar die mit

$$\rho_\eta(0) = 0 \ \text{ und } \ \rho'_\eta(0) = 1.$$

Man beachte dabei, daß f_η auf ganz $\mathbb{R}$, jedoch h_η und ρ_η nur zwischen den ersten Nullstellen von f_η links und rechts der Null definiert sind, falls es überhaupt solche Nullstellen gibt.
h_η ist in diesem Bereich, insbesondere in Null, unendlich oft differenzierbar:

$$\begin{aligned} h_\eta(r) &= \frac{1}{f_\eta(r)} - \frac{1}{r} = \frac{r - f_\eta(r)}{r \cdot f_\eta(r)} = \frac{1 - \frac{f_\eta(r)}{r}}{r \cdot \frac{f_\eta(r)}{r}} \\ &= \frac{1}{\frac{f_\eta(r)}{r}} \cdot \frac{1 - \frac{f_\eta(r)}{r}}{r} \end{aligned}$$

$r \mapsto \dfrac{f_\eta(r)}{r}$ ist glatt auf $\mathbb{R}$ mit Wert 1 für $r = 0$ nach Lemma A2. Wiederum nach Lemma A2 ist dann $r \mapsto \dfrac{1 - \frac{f_\eta(r)}{r}}{r}$ glatt auf $\mathbb{R}$.

Es ist auf dem Definitionsbereich von ρ_η

$$\rho_\eta(r) > 0 \ \text{ für } \ r > 0 \quad \text{und} \quad \rho_\eta(r) < 0 \ \text{ für } \ r < 0$$

und wegen $f_\eta(0) = 0$, $f'_\eta(0) = 1$ gleichfalls auf dem Definitionsbereich von ρ_η

$$f_\eta(r) > 0 \ \text{ für } \ r > 0 \quad \text{und} \quad f_\eta(r) < 0 \ \text{ für } \ r < 0.$$

Die Differentialgleichung liefert dann $\rho'_\eta(r) > 0$ für alle r des Definitionsbereiches.

Daher wird in Polarkoordinaten durch $(r, x) \mapsto (\rho_\eta(r), x)$, $\eta = \langle x, x\rangle$, ein Diffeomorphismus K_p von $\widetilde{A}_p$ in T_pM definiert. Dieser ist ein konformer Diffeomorphismus von $(\widetilde{A}_p, \widetilde{g})$ in (T_pM, g_p):

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g} &= \eta dr^2 + f_\eta^2(r)\, g_\eta \\
&= \eta \, \frac{d\rho^2}{\rho_\eta'(r)^2} + f_\eta^2(r)\, g_\eta \\
&= \eta \, \frac{f_\eta^2(r)}{\rho_\eta^2(r)} d\rho^2 + f_\eta^2(r)\, g_\eta \\
&= \frac{f_\eta^2(r)}{\rho_\eta^2(r)} (\eta d\rho^2 + \rho^2 g_\eta) \\
&= \frac{f_\eta^2(r)}{\rho_\eta^2(r)}\, g_p
\end{aligned}
$$

Die Frage ist nun, ob sich K_p zu einem Diffeomorphismus auf $\widetilde{B}_p = \widetilde{A}_p \cup \Gamma_p$ fortsetzen läßt. Wenn ja, ist aus Stetigkeitsgründen $K_p : \widetilde{B}_p \to T_pM$ ein konformer Diffeomorphismus zwischen $\widetilde{B}_p$ und $K_p(\widetilde{B}_p)$.

Nun ist für $y = r \cdot x \in \widetilde{A}_p$:

$$
K_p(y) = K_p(r \cdot x) = \rho_\eta(r) \cdot x = \frac{\rho_\eta(r)}{r} \cdot y \; .
$$

Nach Lemma A6, S. 91, ist

$$
\left(\frac{\rho_+(r)}{r}, \frac{\rho_-(r)}{r} \right) \in \mathcal{F} \; .
$$

Also läßt sich die Funktion $\kappa : \widetilde{A}_p \ni y = r \cdot x \mapsto \dfrac{\rho_\eta(r)}{r}$ nach Lemma A5 zu einer glatten Funktion auf $\widetilde{B}_p$ fortsetzen. Daher läßt sich auch $K_p : y \mapsto \kappa(y) \cdot y$ auf $\widetilde{B}_p$ glatt fortsetzen. Die Fortsetzungen bezeichnen wir wieder mit κ und K_p.
Es ist für $z \in \Gamma_p$:

$$
\kappa(z) = \lim_{r \to 0} \frac{\rho_\eta(r)}{r} = 1
$$

und

$$
K_p(z) = \kappa(z) \cdot z = z. \tag{2.5}
$$

Weiter ist für $V \in T_z T_p M \cong T_p M$:

$$
\begin{aligned}
dK_p\Big|_z(V) &= \kappa(z) V + d\kappa\Big|_z(V)\, z \\
&= V + d\kappa\Big|_z(V)\, z
\end{aligned}
$$

Also ist $dK_p\Big|_z$ injektiv, denn

$$\begin{aligned} dK_p\Big|_z(V) = 0 \quad &\Rightarrow \quad V + d\kappa\Big|_z(V)\, z = 0 \\ &\Rightarrow \quad V \in \mathbb{R}\cdot z \\ &\Rightarrow \quad d\kappa\Big|_z(V) = 0 \qquad (\text{da } \kappa \text{ konstant längs } \Gamma_p) \\ &\Rightarrow \quad dK_p\Big|_z(V) = V = 0. \end{aligned}$$

Also ist $K_p : \widetilde{B}_p \to T_pM$ eine Immersion und wegen (2.5) injektiv. □

Wie sieht nun das Bild $K_p(\widetilde{B}_p)$ aus?

Es ist $\widetilde{B}_p = U(r_1, r_2, r_3) \subset T_pM$ für gewisse $0 < r_1, r_2 \le \infty$ und $-\infty \le r_3 < 0$. Nach Konstruktion von K_p ist dann $K_p(\widetilde{B}_p) = U(\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3) \subset T_pM$ mit

$$\begin{aligned} \overline{r}_1 &= \lim_{r\to r_1} \rho_+(r) \\ \overline{r}_2 &= \lim_{r\to r_2} \rho_-(r) \\ \overline{r}_3 &= \lim_{r\to r_3} \rho_-(r) \end{aligned}$$

Wie groß $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{r}_3$ werden, hängt i.a. von ψ ab. In zwei Fällen aber müssen sie unendlich sein.

Im ersten Fall hat ψ'_η oder gleichwertig f_η eine Nullstelle in $r_i, |r_i| < \infty$, $i = 1{,}2$ oder 3, d.h. es gibt in der entsprechenden Richtung einen zu p benachbarten kritischen Punkt von ψ. Dann hat $h_\eta(r) = \dfrac{1}{f_\eta(r)} - \dfrac{1}{r}$ bei $r = r_i$ einen Pol mindestens der Ordnung 1. Daher

$$\lim_{r\to r_i} \int_0^r h_\eta(\xi)d\xi = +\infty$$

also

$$\lim_{r\to r_i} \rho_\eta(r) = \lim_{r\to r_i} r \exp\left(\int_0^r h_\eta(\xi)d\xi\right) = \pm\infty.$$

Nun zum zweiten Fall. Das Vektorfeld $\operatorname{grad}\widetilde{\psi}\Big|_{(r,x)} = \eta\widetilde{\psi}'_\eta(r)\,\partial_r = \eta\widetilde{\psi}''_\eta(0) f_\eta(r)\,\partial_r$ geht unter der Abbildung $K_p : (r,x) \longmapsto (\rho_\eta(r), x)$ über in

$$\begin{aligned} \eta\widetilde{\psi}''_\eta(0) f_\eta(r)\rho'_\eta(r)\,\partial_\rho &= \eta\widetilde{\psi}''_\eta(0) f_\eta(r)\frac{\rho_\eta(r)}{f_\eta(r)}\partial_\rho \\ &= \eta\widetilde{\psi}''_\eta(0)\rho_\eta(r)\partial_\rho \end{aligned}$$

d.h. in das Ortsvektorfeld bis auf den Faktor $\eta\widetilde{\psi}''_\eta(0)$.

Hat nun $\widetilde{\psi}'_\eta$ links oder rechts von Null keine Nullstelle, (das entsprechende r_i also gleich $\pm\infty$), so ist $\overline{r}_i$ gleich $\pm\infty$, wenn das Vektorfeld $\operatorname{grad}\widetilde{\psi}$ in dieser Richtung vollständig ist.