# Kapitel 1: Der Satz von Liouville im pseudo-Euklidischen Raum

In diesem ersten Kapitel beweisen wir den Satz von Liouville für den pseudo-Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n_k$ und geben seine Verallgemeinerung für die "konforme Kompaktifizierung" von $\mathbb{R}^n_k$ an. Dabei erhalten wir gleichzeitig eine Darstellung der konformen Diffeomorphismen dieser Kompaktifizierung durch orthogonale Abbildungen des $\mathbb{R}^{n+2}_{k+1}$. Zum Schluß gehen wir auf abwickelbare Mannigfaltigkeiten und die Zeitorientierung von Lorentz-Mannigfaltigkeiten in diesem Zusammenhang ein.

Alle Aussagen dieses Kapitels sind schon seit langem bekannt (vgl. [CK], [doC], [Du], [Ha], [Ku]). Wir benutzen sie wesentlich in dieser Arbeit. Da aber die Beweise auf viele Arbeiten verteilt sind und zum Teil Lücken aufweisen, gehen wir hier ausführlicher auf sie ein.

Für $n, k \in I\!N,\ 0 \leq k \leq n$, bezeichne $\mathbb{R}^n_k$ den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem pseudo-Euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := -\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{j=k+1}^{n} x_j y_j, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ ist nicht degeneriert und hat die Signatur $(k, n-k)$. Man kann nun in bekannter Weise $\mathbb{R}^n_k$ zu einer (flachen) pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit machen, indem man jeden Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^n_k$ mit $\mathbb{R}^n_k$ identifiziert und mit der Metrik $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ versieht. Diese pseudo-Riemannsche Metrik bezeichnen wir mit $g_0$. In den natürlichen Koordinaten hat man

$$g_0(x) = (g_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n} = (\epsilon_i\, \delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

mit $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_k = -1$ und $\epsilon_{k+1} = \ldots = \epsilon_n = +1$.

Eine auf $U \subset \mathbb{R}^n_k$, $U$ offen, definierte $C^\infty$-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n_k$ heißt konform, wenn $f^*(g_0) = \sigma \cdot g_0$ für eine reelle, positive Funktion $\sigma$ auf $U$. Dabei ist $f^*(g_0)$ der pull-back von $g_0$ unter $f$. Für die folgende Rechnung ist es zweckmäßig, $f^*(g_0) = 1/\rho^2 \cdot g_0$ zu schreiben. Mit $df$ bezeichnen wir die Ableitung (Jacobi-Matrix) von $f$.

**Lemma 1.1** (vgl. [CK], Lemma 5)

Ist $n \geq 3$ und $U \subset \mathbb{R}^n_k$, $U$ offen und zusammenhängend, sowie $\varphi_1, \varphi_2 : U \to \mathbb{R}^n_k$ zwei konforme lokale Diffeomorphismen und gilt für einen Punkt $x_0 \in U$

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) \ \text{ und } \ d\varphi_1(x_0) = d\varphi_2(x_0)$$

und weiter für die konformen Faktoren $\rho_i$ , d.h. $\varphi_i^*(g_0) = 1/\rho_i^2 \cdot g_0$ , $i = 1, 2$ ,

$$d\rho_1(x_0) = d\rho_2(x_0),$$

so ist $\varphi_1 = \varphi_2$. ( Wegen $d\varphi_1(x_0) = d\varphi_2(x_0)$ gilt auch $\rho_1(x_0) = \rho_2(x_0)$. )

**Beweis:**

Sei $f : U \to \mathbb{R}^n_k$ ein beliebiger konformer lokaler Diffeomorphismus mit konformem Faktor $1/\rho^2$. Wir werden für $f, df, \rho$ und $d\rho$ ein System partieller Differentialgleichungen herleiten. Genauer: Wir drücken

$$\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}$$

durch

$$f = (f_1, \ldots, f_n)\ ,\ df = \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\right)_{1 \le \nu, i \le n}\ ,\ \rho \quad \text{und} \quad d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right)_{1 \le i \le n}$$

aus.

Man hat

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} \cdot \epsilon_\nu = \frac{1}{\rho^2} g_{ij} \tag{1.1}$$

mit $g_{ij} = \epsilon_i\, \delta_{ij} = \text{const}$. Nun leiten wir dies nach $x_k$ ab:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \left( \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_k} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} \cdot \epsilon_\nu + \frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \epsilon_\nu \right) = -\frac{2}{\rho^3} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \cdot g_{ij}\ .$$

Vertauscht man die Indizes $i, j, k$ zyklisch und bildet die Summe $-(i,j,k) + (j,k,i) + (k,i,j)$, so erhält man

$$\begin{aligned}
2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \epsilon_\nu &= \frac{2}{\rho^3} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_{jk} \right) \\
\Rightarrow \quad \sum_{\nu,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_\mu} \epsilon_\nu &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\rho^3} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_{jk} \right) \cdot \frac{\partial x_k}{\partial f_\mu}\ .
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\left(\frac{\partial x_k}{\partial f_\mu}\right)$ die inverse Matrix von $\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i}\right)$.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_\mu = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\rho^3} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial \rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial \rho}{\partial x_i} g_{jk} \right) \frac{\partial x_k}{\partial f_\mu}$$

Aus Gl. (1.1) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \epsilon_\mu &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\rho^2} g_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial f_\mu} = \frac{1}{\rho^2} \epsilon_i \frac{\partial x_i}{\partial f_\mu} \\
\Rightarrow \quad \frac{\partial x_i}{\partial f_\mu} &= \rho^2 \epsilon_i \epsilon_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\ .
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f_\mu}{\partial x_i \partial x_j} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_k} g_{ij} - \frac{\partial\rho}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial\rho}{\partial x_i} g_{jk}\right)\epsilon_k \cdot \frac{\partial f_\mu}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_\mu}{\partial x_k}\epsilon_k\right) g_{ij} - \frac{\partial\rho}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} - \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f_\mu}{\partial x_j}\right) .\end{aligned} \tag{1.2}$$

Weiter

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(\rho f_\nu)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} f_\nu + \rho\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial\rho}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} + \frac{\partial\rho}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} \\ &\overset{(1.2)}{=} \frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} f_\nu + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell g_{ij}\end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\partial^3(\rho f_\nu)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^3\rho}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f_\nu + \frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} + \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k \partial x_\ell}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell + \frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k \partial x_\ell}\epsilon_\ell\right) g_{ij} .$$

Da die linke Seite dieser Gleichung und der erste Term der rechten Seite symmetrisch in $i, j$ und $k$ sind, muß das gleiche für den Rest gelten:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} + \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k \partial x_\ell}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell + \frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k \partial x_\ell}\epsilon_\ell\right) g_{ij} \\ = &\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} + \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_j \partial x_\ell}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell + \frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_j \partial x_\ell}\epsilon_\ell\right) g_{ki} .\end{aligned} \tag{1.3}$$

Falls $i, j$ und $k$ paarweise verschieden sind, hat man also

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_j} \qquad \nu = 1, \ldots, n$$

oder vektoriell geschrieben $\left( \frac{\partial f}{\partial x_a} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_a}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_a}\right) \right)$ :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_k}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j} .$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ linear unabhängig sind, gilt

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i \partial x_j} = 0 . \tag{1.4}$$

Da $n \geq 3$ existiert zu je zwei verschiedenen Indizes $i$ und $j$ ein von beiden verschiedener Index $k$. Also gilt die letzte Gleichung für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$.

Mit Gleichung (1.4) lautet (1.3) für $i = j \neq k$ :

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}\epsilon_k\epsilon_i+\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k\partial x_\ell}\epsilon_\ell\epsilon_i=0\ .$$

Man hat

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_k\partial x_\ell}\epsilon_\ell\epsilon_i &= \sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell\epsilon_i\frac{1}{\rho}\left(\sum_{a=1}^n\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_a}\epsilon_a\right)g_{k\ell}-\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell}-\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}\right)\\
&= \frac{1}{\rho}\epsilon_i\left(\sum_{a=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_a}\epsilon_a\epsilon_k\epsilon_k\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell-\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}\epsilon_\ell\right)\\
&= -\frac{1}{\rho}\epsilon_i\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}\epsilon_\ell\ .\end{aligned}$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_k}\epsilon_k\epsilon_i-\frac{1}{\rho}\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell\epsilon_i\right)\frac{\partial f_\nu}{\partial x_k}=0\ .$$

Da $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}=\left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k},\ldots,\dfrac{\partial f_n}{\partial x_k}\right)\neq 0$ ist, folgt

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}\epsilon_i+\frac{\partial^2\rho}{\partial x_k\partial x_k}\epsilon_k\ =\ \frac{1}{\rho}\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell\ .$$

Betrachten wir diese Gleichung für $(i,k)$ und $(j,k)$ mit $i\neq k$ und $j\neq k$, so folgt durch Differenzbildung

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}\epsilon_i\ =\ \frac{\partial^2\rho}{\partial x_j\partial x_j}\epsilon_j$$

und daher

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_i}\epsilon_i\ =\ \frac{1}{2\rho}\sum_{\ell=1}^n\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell\ .$$

Zusammen mit (1.4) ergibt dies

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j}\ =\ \frac{1}{2\rho}\sum_{\ell=1}^n\left(\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial x_\ell}\epsilon_\ell\right)g_{ij}\ .$$

Für $f, df, \rho, d\rho$ hat man also folgendes partielle Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\nu}{\partial x_i} &= y_{\nu,i} \\
\frac{\partial \rho}{\partial x_i} &= z_i \\
\frac{\partial y_{\nu,i}}{\partial x_j} &= \frac{1}{\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(z_k y_{\nu,k}\epsilon_k\right) g_{ij} - z_j y_{\nu,i} - z_i y_{\nu,j}\right) \\
\frac{\partial z_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2\rho}\sum_{k=1}^{n}\left(z_k z_k \epsilon_k\right) g_{ij} \; .
\end{aligned}$$

Nun erfüllen $\varphi_1, \rho_1$ und $\varphi_2, \rho_2$ dieses System und haben im Punkt $x_0$ die gleichen Anfangswerte. Da $U$ zusammenhängend ist, folgt $\varphi_1 = \varphi_2$ (s. [Lau], S. 176 f.) □

**Bemerkungen:**

1) Das Lemma läßt sich auf lokal konform flache Mannigfaltigkeiten übertragen:

   Seien $M$ und $N$ zwei lokal konform flache pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Signatur $(k, n-k)$ . Weiter seien $U \subset M$ offen und zusammenhängend und $\varphi_1, \varphi_2 : U \to N$ zwei konforme lokale Diffeomorphismen. Dann sind bzgl. konformer Koordinatensysteme von $M$ und $N$ die Abbildungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ konforme lokale Diffeomorphismen des $\mathbb{R}^n_k$. Mit Lemma 1.1 erkennt man, daß die Menge

   $$\{p \in U \mid \varphi_1(p) = \varphi_2(p)\, ,\, d\varphi_1(p) = d\varphi_2(p)\, ,\, \rho_1(p) = \rho_2(p)\, ,\, d\rho_1(p) = d\rho_2(p)\}$$

   offen ist. Zugleich ist sie abgeschlossen. Gibt es nun einen Punkt in dieser Menge, so ist sie gleich $U$.

2) Die Aussage des Lemmas gilt auch für konforme lokale Diffeomorphismen zwischen beliebigen Mannigfaltigkeiten (vgl. [CK], S. 330).

Man hat im $\mathbb{R}^n_k$ die folgenden einfach zu beschreibenden konformen Diffeomorphismen (dabei ist jeweils der konforme Faktor, wie in Lemma 1.1 definiert, angegeben):

**Translationen:** $T : x \mapsto x + t$ , $t \in \mathbb{R}^n_k$ fest, $\rho \equiv 1$ .

**orthogonale Abbildungen:** $A : x \mapsto Ax$ , $A \in \mathcal{O}(k, n-k)$ = Menge aller bzgl. $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ orthogonalen Matrizen, $\rho \equiv 1$ .

**Homothetien:** $H : x \mapsto \lambda x$ , $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , $\rho \equiv \dfrac{1}{\lambda}$ .

**Sphäreninversionen:** Zunächst die Inversion an der Einheitssphäre:
$S : x \mapsto \dfrac{x}{\langle x, x\rangle}$ , $x \in \mathbb{R}^n_k \setminus \Gamma^n_k$ , $\Gamma^n_k := \{x \in \mathbb{R}^n_k \mid \langle x, x\rangle = 0\}$ = Lichtkegel im $\mathbb{R}^n_k$ ,
$\rho(x) = \langle x, x\rangle$ , grad $\rho(x) = 2x$. (Der Gradient ist bzgl. $g_0$ gebildet.)

Die Rechnung, um den konformen Faktor von $S$ zu bestimmen : Sei $X \in T_x\mathbb{R}^n_k \cong \mathbb{R}^n_k$

$$
\begin{aligned}
dS\big|_x(X) &= \frac{1}{\langle x, x\rangle}X - \frac{2}{\langle x, x\rangle^2}\langle x, X\rangle x \\
\Rightarrow \quad \langle dS\big|_x(X), dS\big|_x(X)\rangle &= \frac{1}{\langle x, x\rangle^2}\langle X, X\rangle - \frac{4\langle x, X\rangle}{\langle x, x\rangle^3}\langle x, X\rangle + \frac{4\langle x, X\rangle^2}{\langle x, x\rangle^4}\langle x, x\rangle \\
&= \frac{1}{\langle x, x\rangle^2}\langle X, X\rangle
\end{aligned}
$$

Ist der Mittelpunkt der Inversion nicht der Nullpunkt sondern der Punkt $m$ und der Radius der Sphäre, an der gespiegelt wird, nicht 1 sondern $\sqrt{\lambda}$ , $\lambda > 0$, so wird die Sphäreninversion durch die Formel

$$x \mapsto \lambda\frac{x - m}{\langle x - m, x - m\rangle} + m, \quad x \notin m + \Gamma^n_k$$

beschrieben. Diese Sphäreninversion ist die Komposition von $x \mapsto x - m =: y$ ,
$y \mapsto S(y) =: z$ , $z \mapsto \lambda z =: w$ und $w \mapsto w + m$ .
Es ist hier $\rho(x) = \dfrac{1}{\lambda}\langle x - m, x - m\rangle$, grad $\rho(x) = \dfrac{2}{\lambda}(x - m)$.
Für später wollen wir in obiger Formel auch $\lambda < 0$ zulassen. Das entspricht der Verkettung der obigen Inversion für $-\lambda$ mit $v \mapsto -v + 2m$.
Die Fixpunktmenge der Inversion ist $\{x | \langle x - m, x - m\rangle = \lambda\}$. Für $\lambda > 0$ ist das der raumartige Teil der Abstandssphäre und für $\lambda < 0$ der zeitartige Teil. Für die Begriffe "raumartig" und "zeitartig" siehe S. 23 unten.

Im indefiniten Fall, d.h. für $1 \le k \le n-1$, schreiben wir noch ausführlich die Komposition zweier Sphäreninversionen hin, wobei die Differenz der beiden Mittelpunkte lichtartig ist:

$$x \mapsto \frac{x}{\langle x, x\rangle} = y \;\text{ und }\; y \mapsto \frac{y - b}{\langle y - b, y - b\rangle} + b, \quad b \in \Gamma^n_k$$

liefern komponiert

$$Q : x \mapsto \frac{x - \langle x, x\rangle b}{1 - 2\langle x, b\rangle} + b\ , \quad \langle x, b\rangle \neq \frac{1}{2}\ , \quad \rho(x) = 1 - 2\langle x, b\rangle, \quad \text{grad}\,\rho(x) = -2b\ .$$

Die Translationen vertauschen sich in folgender Weise mit allen anderen Abbildungen: Zu jeder Translation $T$ und zu jeder orthogonalen Abbildung $A$ bzw. Homothetie $H$ existiert eine Translation $\widetilde{T}$ mit $A \circ T = \widetilde{T} \circ A$ bzw. $H \circ T = \widetilde{T} \circ H$ . Außerdem gibt es zu jeder Translation $T$ und jeder Sphäreninversion $S_1$ eine Translation $\widetilde{T}$ und eine Sphäreninversion $\widetilde{S}_1$ mit $S_1 \circ T = \widetilde{T} \circ \widetilde{S}_1$.

**Satz von Liouville**

Sei $n \geq 3$ , $f : U \to \mathbb{R}^n_k$ , $U \subset \mathbb{R}^n_k$ offen und zusammenhängend, ein konformer lokaler Diffeomorphismus. Dann läßt sich $f$ schreiben als Komposition von Translationen, orthogonalen Abbildungen, Homothetien und Sphäreninversionen, wobei man mit höchstens einer Abbildung von jedem Typ auskommt mit Ausnahme der Sphäreninversionen. Von diesen braucht man evtl. zwei, aber auch nur im indefiniten Fall, d.h. für $1 \leq k \leq n-1$.

**Beweis:**

Sei $x_0 \in U$ fest. Mit den Translationen $T : x \mapsto x - f(x_0)$ , $\widetilde{T} : x \mapsto x + x_0$ und der Homothetie $H : x \mapsto \rho_f(x_0) \cdot x$ ist

$$g := H \circ T \circ f \circ \widetilde{T}$$

auf $U - x_0$ definiert mit $0 \in U - x_0$, $g(0) = 0$, $\rho_g(0) = 1$, d.h. $dg\Big|_0 \in \mathcal{O}(k, n-k)$.

**1. Fall:** $\operatorname{grad} \rho_g(0) = 0$

Setze $A := dg\Big|_0 \in \mathcal{O}(k, n-k)$. Dann erfüllen $g$ und $A$ die Voraussetzungen von Lemma 1.1 im Punkt 0. Also

$$H \circ T \circ f \circ \widetilde{T} = A \qquad \text{in } U - x_0$$

oder

$$f = T^{-1} \circ H^{-1} \circ A \circ \widetilde{T}^{-1} = \widetilde{\widetilde{T}} \circ H^{-1} \circ A \qquad \text{in } U.$$

Wir betrachten in den folgenden zwei Fällen $f$ und alle anderen Funktionen zunächst in einer kleinen Umgebung von $x_0$, wo die Sphäreninversionen, die wir einführen werden, definiert sind.

**2. Fall:** $\operatorname{grad} \rho_g(0) \in \mathbb{R}^n_k \setminus \Gamma^n_k$

Suche eine Sphäreninversion $\widetilde{S}$ die 0 als Fixpunkt hat und $\operatorname{grad} \rho_{\widetilde{S}}(0) = \operatorname{grad} \rho_g(0)$ erfüllt. Dazu muß der Mittelpunkt der Inversion auf der Geraden durch 0 mit Richtung $\operatorname{grad} \rho_g(0)$ liegen. Durch nachrechnen sieht man, daß

$$\widetilde{S} : x \mapsto \lambda \frac{x - m}{\langle x - m, x - m \rangle} + m$$

mit $m := 2/\langle \operatorname{grad} \rho_g(0), \operatorname{grad} \rho_g(0) \rangle \operatorname{grad} \rho_g(0)$ , $\lambda := \langle m, m \rangle$ die Eigenschaften $\widetilde{S}(0) = 0$ , $\rho_{\widetilde{S}}(0) = \frac{1}{\lambda}\langle m, m \rangle = 1$ , $\operatorname{grad} \rho_{\widetilde{S}}(0) = \frac{2}{\lambda}(-m) = \operatorname{grad} \rho_g(0)$ hat. Insbesondere ist $d\widetilde{S}\Big|_0$ eine orthogonale Abbildung. Mit $A := dg\Big|_0 \circ (d\widetilde{S}\Big|_0)^{-1}$ erfüllen

$$H \circ T \circ f \circ \widetilde{T} \quad \text{und} \quad A \circ \widetilde{S}$$

die Voraussetzungen von Lemma 1.1 im Nullpunkt. Also in einer Umgebung von Null

$$H \circ T \circ f \circ \widetilde{T} = A \circ \widetilde{S}$$

oder in einer Umgebung von $x_0$

$$f = T^{-1} \circ H^{-1} \circ A \circ \widetilde{S} \circ \widetilde{T}^{-1} = \widetilde{\widetilde{T}} \circ H^{-1} \circ A \circ \widetilde{\widetilde{S}}. \tag{1.5}$$

**3. Fall:** $\operatorname{grad} \rho_g(0) \in \Gamma_k^n \setminus \{0\}$

Betrachte $T_1 : x \mapsto x - b$ und $R = T_1 \circ Q : x \mapsto \dfrac{x - \langle x, x\rangle b}{1 - 2\langle x, b\rangle}$ . Dann gilt $R(0) = 0$ , $\rho_R(0) = 1 - 2\langle 0, b\rangle = 1$ , $\operatorname{grad} \rho_R(0) = -2b$.
Setzte $b := -\dfrac{1}{2} \operatorname{grad} \rho_g(0)$ und $A := dg\big|_0 \circ (dR\big|_0)^{-1} \in \mathcal{O}(k, n-k)$.
Dann erfüllen $H \circ T \circ f \circ \widetilde{T}$ und $A \circ R$ die Voraussetzungen von Lemma 1.1. Also

$$H \circ T \circ f \circ \widetilde{T} = A \circ R = A \circ T_1 \circ Q$$

oder

$$\begin{aligned} f &= T^{-1} \circ H^{-1} \circ A \circ T_1 \circ Q \circ \widetilde{T}^{-1} \\ &= \widetilde{\widetilde{T}} \circ H^{-1} \circ A \circ \widetilde{Q} \end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei $\widetilde{Q}$ wieder die Komposition zweier Sphäreninversionen ist.

Nun gilt die Gleichheit in (1.5) und (1.6) in einer Umgebung von $x_0$ und dann nach Lemma 1.1 in der Zusammenhangskomponente des Durchschnitts von $U$ und dem maximalen Definitionsbereich der jeweils rechten Seite in (1.5) und (1.6), die den Punkt $x_0$ enthält. Wäre diese echt kleiner als $U$, so hätte sie Randpunkte in $U$. In diesen Randpunkten hat die jeweils rechte Seite einen Pol. Dann müßte aber auch $f$ dort einen Pol haben, ein Widerspruch. □

Die Sphäreninversionen haben den Nachteil, daß sie nicht auf ganz $\mathbb{R}_k^n$ definiert sind. Dies kann man beheben, wenn man zur "konformen Kompaktifizierung" $Q_k^n$ von $\mathbb{R}_k^n$ übergeht. Die im folgenden gegebene Einführung von $Q_k^n$ stammt aus [CK].

Ist $\pi : \mathbb{R}_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\} \to \mathbb{RP}^{n+1}$ die kanonische Projektion, so ist $Q_k^n := \pi(\Gamma_{k+1}^{n+2} \setminus \{0\})$ eine Quadrik in $\mathbb{RP}^{n+1}$. Man definiert wie folgt eine Metrik auf $Q_k^n$. Sei $S^{n+1}(\sqrt{2}\,)$ die euklidische Sphäre vom Radius $\sqrt{2}$ mit Mittelpunkt 0 in $\mathbb{R}^{n+2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_k^n &:= \Gamma_{k+1}^{n+2} \cap S^{n+1}(\sqrt{2}\,) = \Big\{ x \in \mathbb{R}_{k+1}^{n+2} \;\Big|\; \sum_{i=0}^{k} x_i^2 = 1 \;\wedge\; \sum_{j=k+1}^{n+1} x_j^2 = 1 \Big\} \\ &= S^k(1) \times S^{n-k}(1) \;\subset\; \mathbb{R}_{k+1}^{k+1} \times \mathbb{R}_0^{n-k+1} \;=\; \mathbb{R}_{k+1}^{n+2}\,, \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^{n+2} = \big\{ (x_0, \ldots, x_{n+1}) \mid x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R} \big\}\,,$$

eine pseudo-Riemannsche Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+2}_{k+1}$, deren Metrik $h$ die Signatur $(k, n-k)$ hat. Sie ist gleich dem metrischen Produkt $S^k(1) \times S^{n-k}(1)$, wobei $S^k(1)$ das negative der positiv-definiten Standardmetrik und $S^{n-k}(1)$ die Standardmetrik trägt.
$\pi_1 := \pi\big|_{\widetilde{Q}^n_k} : \widetilde{Q}^n_k \to Q^n_k$ ist eine zweiblättrige Überlagerung und die Decktransformationen $\pm id$ sind Isometrien. Also existiert auf $Q^n_k$ genau eine Metrik $g_{n,k}$, die $\pi_1$ zu einer lokalen Isometrie macht.
Man hat die folgende konforme Einbettung von $\mathbb{R}^n_k$ in $Q^n_k$

$$\begin{aligned} i: \ & \mathbb{R}^n_k \to Q^n_k \\ & x \mapsto \pi((1 + \langle x, x\rangle, 2x, 1 - \langle x, x\rangle)) \end{aligned}$$

$i$ ist eine konforme, injektive Immersion und das Bild $i(\mathbb{R}^n_k) = \{\pi(x_0, \ldots, x_{n+1}) \mid (x_0, \ldots, x_{n+1}) \in \Gamma^{n+2}_{k+1} \ \wedge \ x_0 + x_{n+1} \neq 0\}$ liegt dicht in $Q^n_k$.

Sei nun $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$. $A$ liefert eine Projektivität $\phi_A$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\} \\ \pi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\ \mathbb{RP}^{n+1} & \xrightarrow{\phi_A} & \mathbb{RP}^{n+1} \end{array}$$

Da $A$ den Lichtkegel $\Gamma^{n+2}_{k+1}$ in sich überführt, bildet $\phi_A$ die Quadrik $Q^n_k$ auf sich ab. Also ist $\phi_A\big|_{Q^n_k} : Q^n_k \to Q^n_k$ ein Diffeomorphismus. Wir bezeichnen diese eingeschränkte Abbildung auch mit $\phi_A$.

**Lemma 1.2** ([CK], Lemma 4)

Es ist

$$\phi_A : Q^n_k \to Q^n_k \ \ , \ \ A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1) \ ,$$

ein konformer Diffeomorphismus.

**Beweis:**

Seien $x \in \Gamma^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\}$, $\ X, Y \in T_x(\Gamma^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\}) = \{Z \in \mathbb{R}^{n+2}_{k+1} \mid \langle x, Z\rangle = 0\}$ und
$n : \Gamma^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\} \to S(\sqrt{2}\,)$, $\ x \mapsto \sqrt{2}\dfrac{x}{\|x\|}$, $\ \|x\| =$ euklidische Norm von $x$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\pi^* g_{n,k}\Big|_x(X,Y) &= (\pi_1 \circ n)^* g_{n,k}\Big|_x(X,Y) \\
&= n^*(\pi_1^* g_{n,k})\Big|_x(X,Y) \\
&= \pi_1^* g_{n,k}\Big|_{n(x)}(dn\Big|_x(X), dn\Big|_x(Y)) \\
&= h\Big|_{n(x)}(dn\Big|_x(X), dn\Big|_x(Y)) \\
&= \langle dn\Big|_x(X), dn\Big|_x(Y)\rangle \\
&= \langle \frac{\sqrt{2}}{\|x\|}X + \alpha x, \frac{\sqrt{2}}{\|x\|}Y + \beta x\rangle \\
&\phantom{=}\ \text{für gewisse, nicht näher interessierende, Zahlen } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
&= \frac{2}{\|x\|^2}\langle X, Y\rangle
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
\phi_A^* g_{n,k}\Big|_{\pi(x)}(d\pi\Big|_x(X), d\pi\Big|_x(Y)) &= \pi^*(\phi_A^* g_{n,k})\Big|_x(X,Y) \\
&= (\phi_A \circ \pi)^* g_{n,k}\Big|_x(X,Y) \\
&= (\pi \circ A)^* g_{n,k}\Big|_x(X,Y) \\
&= A^*(\pi^* g_{n,k})\Big|_x(X,Y) \\
&= \pi^* g_{n,k}\Big|_{Ax}(AX, AY) \\
&= \frac{2}{\|Ax\|^2}\langle AX, AY\rangle \\
&= \frac{2}{\|Ax\|^2}\langle X, Y\rangle \\
&= \frac{\|x\|^2}{\|Ax\|^2}\pi^* g_{n,k}\Big|_x(X,Y) \\
&= \frac{\|x\|^2}{\|Ax\|^2} g_{n,k}\Big|_{\pi(x)}(d\pi\Big|_x(X), d\pi\Big|_x(Y))
\end{aligned}$$

Da $d\pi\Big|_x : T_x(\Gamma^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\}) \to T_{\pi(x)}Q^n_k$ surjektiv ist, folgt $\phi_A^* g_{n,k} = \sigma \cdot g_{n,k}$ mit $\sigma \circ \pi(x) = \dfrac{\|x\|^2}{\|Ax\|^2}$. □

Im folgenden bezeichnet "$\langle \cdot\, , \cdot \rangle$" das pseudo-Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n_k$ und "$\cdot$" dasjenige in $\mathbb{R}^{n+2}_{k+1}$.

Sei $\mathbb{R}^n_k \supset U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n_k$ eine Translation, orthogonale Abbildung, Homothetie oder die Sphäreninversion $S$. Jetzt kann man, vermöge der Einbettung $i : \mathbb{R}^n_k \to Q^n_k$, $f$ als Abbildung von einer Teilmenge von $Q^n_k$ in $Q^n_k$ auffassen. Wir setzen diese Abbildung nun auf ganz $Q^n_k$ fort, indem wir ein $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ angeben, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{A} & \Gamma^{n+2}_{k+1} \setminus \{0\} \\
\pi\big\downarrow & & \big\downarrow\pi \\
Q^n_k & \xrightarrow{\phi_A} & Q^n_k \\
i\big\uparrow & & \big\uparrow i \\
\mathbb{R}^n_k \supset U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n_k
\end{array}$$

Für $f : x \mapsto Bx + t$, $B \in \mathcal{O}(k, n-k)$, $t \in \mathbb{R}^n_k$, wird das Diagramm kommutativ durch

$$A = \begin{pmatrix}
1 + \frac{1}{2}\langle t, t\rangle & \langle Be_1, t\rangle \ldots \langle Be_n, t\rangle & \frac{1}{2}\langle t, t\rangle \\
t & B & t \\
-\frac{1}{2}\langle t, t\rangle & -\langle Be_1, t\rangle \ldots - \langle Be_n, t\rangle & 1 - \frac{1}{2}\langle t, t\rangle
\end{pmatrix}$$

Hierbei sind $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren von $\mathbb{R}^n$.

*Begründung:* Es ist für alle $x \in \mathbb{R}^n_k$

$$\begin{aligned}
\phi_A \circ i(x) &= \phi_A \circ \pi(1 + \langle x, x\rangle\ ,\ 2x\ ,\ 1 - \langle x, x\rangle) \\
&= \pi \circ A(1 + \langle x, x\rangle\ ,\ 2x\ ,\ 1 - \langle x, x\rangle) \\
&= \pi \Big( (1 + \frac{1}{2}\langle t, t\rangle)(1 + \langle x, x\rangle) + 2\langle Bx, t\rangle + \frac{1}{2}\langle t, t\rangle(1 - \langle x, x\rangle), \\
&\qquad t(1 + \langle x, x\rangle) + 2Bx + t(1 - \langle x, x\rangle), \\
&\qquad -\frac{1}{2}\langle t, t\rangle(1 + \langle x, x\rangle) - 2\langle Bx, t\rangle + (1 - \frac{1}{2}\langle t, t\rangle)(1 - \langle x, x\rangle) \Big)
\end{aligned}$$

$$= \pi\left(1+\langle x,x\rangle+\langle t,t\rangle+2\langle Bx,t\rangle\ ,\ 2(Bx+t)\ ,\ 1-\langle x,x\rangle-\langle t,t\rangle-2\langle Bx,t\rangle\right)$$

$$= \pi\left(1+\langle Bx+t,Bx+t\rangle\ ,\ 2(Bx+t)\ ,\ 1-\langle Bx+t,Bx+t\rangle\right)$$

$$= i(Bx+t)$$

Außerdem ist $A \in \mathcal{O}(k+1,n-k+1)$, denn für alle $(x_0,x,x_{n+1}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2}$ ist

$$\begin{aligned} A(x_0,x,x_{n+1}) &= \Big(x_0+\frac{1}{2}\langle t,t\rangle(x_0+x_{n+1})+\langle Bx,t\rangle,\\ &\qquad (x_0+x_{n+1})t+Bx,\\ &\qquad x_{n+1}-\frac{1}{2}\langle t,t\rangle(x_0+x_{n+1})-\langle Bx,t\rangle\Big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A(x_0,x,x_{n+1})\cdot A(x_0,x,x_{n+1}) &= -\Big(x_0+\frac{1}{2}\langle t,t\rangle(x_0+x_{n+1})+\langle Bx,t\rangle\Big)^2\\ &\quad +\langle (x_0+x_{n+1})t+Bx,(x_0+x_{n+1})t+Bx\rangle\\ &\quad +\Big(x_{n+1}-\frac{1}{2}\langle t,t\rangle(x_0+x_{n+1})-\langle Bx,t\rangle\Big)^2\\ &= -x_0^2-x_0\langle t,t\rangle(x_0+x_{n+1})-2x_0\langle Bx,t\rangle\\ &\quad +(x_0+x_{n+1})^2\langle t,t\rangle+2(x_0+x_{n+1})\langle Bx,t\rangle+\langle Bx,Bx\rangle\\ &\quad +x_{n+1}^2-x_{n+1}\langle t,t\rangle(x_0+x_{n+1})-2x_{n+1}\langle Bx,t\rangle\\ &= -x_0^2+\langle Bx,Bx\rangle+x_{n+1}^2\\ &= -x_0^2+\langle x,x\rangle+x_{n+1}^2\\ &= (x_0,x,x_{n+1})\cdot(x_0,x,x_{n+1})\ . \end{aligned}$$

Für $f : x \mapsto \lambda x,\ \ \lambda > 0$ , macht die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda^2}{2} & 0 & \frac{1-\lambda^2}{2} \\ 0 & \lambda E_n & 0 \\ \frac{1-\lambda^2}{2} & 0 & \frac{1+\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(k+1,n-k+1)$$

und für $f : x \mapsto \dfrac{x}{\langle x, x\rangle}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$$

das obige Diagramm kommutativ, wie eine analoge Rechnung zeigt.

Nun ist $Q_k^n$ lokal konform flach, denn $i : \mathbb{R}_k^n \to Q_k^n$ ist eine konforme Immersion und die Projektivitäten $\phi_A$ , $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ , operieren transitiv auf $Q_k^n$ .

Sei $U \subset Q_k^n$ eine offene und zusammenhängende Menge und $f : U \to Q_k^n$ ein konformer Diffeomorphismus. Sei $x_0 \in U$. Dann existieren $A, B \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ mit $\phi_A(i(0)) = x_0$ und $\phi_B(f(x_0)) = i(0)$. Es ist dann $\phi_B \circ f \circ \phi_A$ lokal um $i(0)$ eine Abbildung von einer Teilmenge von $i(\mathbb{R}_k^n) \cong \mathbb{R}_k^n$ in $i(\mathbb{R}_k^n) \cong \mathbb{R}_k^n$. Nach dem Satz von Liouville läßt sich diese Abbildung als Komposistion von Translationen, orthogonalen Abbildungen, Homothetien und Sphäreninversionen schreiben. Da diese alle von der Form $\phi_C$ , $C \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ sind und $\phi_{C_1} \circ \phi_{C_2} = \phi_{C_1 \cdot C_2}$ gilt, $C_1, C_2 \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$, existiert ein $D \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ mit

$$\phi_B \circ f \circ \phi_A = \phi_D$$

lokal um $i(0)$. Nach Lemma 1.1 muß diese Gleichung dann auch auf $\phi_A^{-1}(U)$ gelten. Daher auf $U$

$$f = {\phi_B}^{-1} \circ \phi_D \circ {\phi_A}^{-1} = \phi_{B^{-1}DA^{-1}} \quad .$$

Also läßt sich $f$ zu einem globalen konformen Diffeomorphismus von $Q_k^n$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist, wieder nach Lemma 1.1, eindeutig.

Damit hat man gleichzeitig gezeigt, daß alle globalen konformen Diffeomorphismen von $Q_k^n$ von der Form $\phi_A$, $A \in \mathcal{O}(k+1, n-k+1)$ , sind. Man beachte, daß $\phi_A = \phi_{-A}$ . Die konforme Gruppe von $(Q_k^n, g_{n,k})$ ist isomorph zu $\mathcal{O}(k+1, n-k+1)/_{\pm}$ .
Insgesamt haben wir folgenden Satz bewiesen:

**Satz von Liouville für $Q_k^n$**

Jeder auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge $U$ von $Q_k^n$ definierte konforme lokale Diffeomorphismus $f : U \to Q_k^n$ läßt sich eindeutig zu einem globalen konformen Diffeomorphismus von $Q_k^n$ fortsetzen und die globalen konformen Diffeomorphismen sind genau die Projektivitäten von $\mathbb{RP}^{n+1}$, die von orthogonalen Abbildungen herrühren.

**Definition**

Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit $M$ der Signatur $(k, n-k)$ heißt **abwickelbar**, falls es eine konforme Immersion $\delta : M \to Q_k^n$ gibt. Jede solche Abbildung $\delta$ heißt eine **Abwicklung** von $M$.

Da $Q^n_k$ lokal konform flach ist, muß notwendig jede abwickelbare Mannigfaltigkeit $M$ auch lokal konform flach sein. Mit Hilfe des Satzes von Liouville für $Q^n_k$ beweist man den

**Satz von Kuiper** (s. [Kui])

Jede einfach zusammenhängende lokal konform flache pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit ist abwickelbar.

Sei jetzt $M$ eine, nicht notwendig einfach zusammenhängende, abwickelbare Mannigfaltigkeit und $\delta : M \to Q^n_k$ eine Abwicklung. Dann gilt folgender Satz

**Satz 1.1**

Die Abwicklung $\delta$ ist im wesentlichen eindeutig, d.h. ist $\delta_1$ eine weitere Abwicklung von $M$, so gibt einen konformen Diffeomorphismus $u$ von $Q^n_k$ mit $\delta_1 = u \circ \delta$. Außerdem läßt sich jede auf einer offenen und zusammenhängenden Teilmenge $U$ von $M$ definierte Abwicklung $\delta_2 : U \to Q^n_k$ eindeutig zu einer Abwicklung von $M$ fortsetzen.

**Beweis:**

Für eine kleine offene Menge $V$ von $M$ sind $\delta|V$ und $\delta_1|V$ Einbettungen. Daher ist $\delta_1|V \circ (\delta|V)^{-1} : Q^n_k \supset \delta(V) \to Q^n_k$ ein konformer lokaler Diffeomorphismus. Nach dem Satz von Liouville existiert ein konformer Diffeomorphismus $u$ von $Q^n_k$, so daß $\delta_1|V \circ (\delta|V)^{-1} = u|\delta(V)$ oder $\delta_1|V = u \circ \delta|V$. Nach Lemma 1.1 ist dann $\delta_1 = u \circ \delta$.

Nach Lemma 1.1 ist die Fortsetzung von $\delta_2$ eindeutig. Ist $V \subset U$ so klein, daß $\delta_2|V$ und $\delta|V$ Einbettungen sind, so erhält man analog zu oben einen globalen konformen Diffeomorphismus $\overline{u}$ von $Q^n_k$, so daß

$$\delta_2|V = \overline{u} \circ \delta|V.$$

Nach Lemma 1.1 ist dann $\delta_2 = \overline{u} \circ \delta|U$ und $\overline{u} \circ \delta$ ist die gesuchte Abwicklung von $M$. $\square$

Zum Schluß dieses Kapitels wollen wir den Begriff der Zeitorientierung auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten im Zusammenhang mit Abwicklungen behandeln.

Sei $M$ eine Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann zerfällt in jedem Tangentialraum $T_pM$, $p \in M$, die Menge der zeitartigen Vektoren in zwei Kegel (vgl. auch S. 24/25). Zeichnet man in $T_pM$ einen dieser Kegel aus, so spricht man von einer **Zeitorientierung** auf $T_pM$. Die Vektoren aus diesem ausgezeichneten Kegel sollen zeitartig-positiv heißen, die aus dem Gegenkegel zeitartig-negativ. Eine Zeitorientierung auf $M$ ist nun die Auswahl eines Zeitkegels in jedem Tangentialraum $T_pM$, $p \in M$, so daß diese ausgewählten Kegel in "stetiger Weise" von den Punkten $p \in M$ abhängen. Dabei wird die stetige Abhängigkeit wie folgt definiert. Es gibt lokal um jeden Punkt der Mannigfaltigkeit ein zeitartiges Vektorfeld $V$, so daß für alle Punkte $q$ im Definitionsbereich von $V$ gilt: $V(q) \in T_qM$ ist zeitartig-positiv.
Falls $M$ zeitorientiert ist, kann man mittels einer Zerlegung der Eins ein auf ganz $M$ definiertes zeitartig-positive Vektorfeld konstruieren. Hat man umgekehrt auf $M$ ein überall

zeitartiges Vektorfeld $V$ gegeben, so wird dadurch eine Zeitorientierung auf $M$ definiert, wenn man für alle $p \in M$ in $T_pM$ den Zeitkegel auswählt, der $V(p)$ enthält.

Falls eine (zusammenhängende) Lorentz-Mannigfaltigkeit zeitorientierbar ist, gibt es auf ihr offensichtlich genau zwei Zeitorientierungen.

Auf $(\mathbb{R}^n_1, g_0)$ ist $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ ein zeitartiges Vektorfeld. In dieser Arbeit betrachten wir immer die von diesem Vektorfeld erzeugte Zeitorientierung von $\mathbb{R}^n_1$.

Das Einheitstangentenvektorfeld von $S^1$, $S^1 \ni x = (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1) \in T_xS^1$, aufgefaßt als Vektorfeld auf $\widetilde{Q}^n_1 = S^1 \times S^{n-1}$, ist ein zeitartiges Vektorfeld bzgl. der Metrik $h$. Dieses Vektorfeld ist invariant unter den Decktransformationen $\pm$ id von $\pi_1 : \widetilde{Q}^n_1 \to Q^n_1$. Es induziert also ein zeitartiges Vektorfeld auf $Q^n_1$. Die davon erzeugte Zeitorientierung auf $Q^n_1$ sei gleichfalls in dieser Arbeit immer betrachtet.

Ein konformer lokaler Diffeomorphismus $F$ zwischen zeitorientierten Lorentz-Mannigfaltigkeiten $M$ und $N$ heißt zeitorientierungstreu (zeitorientierungsumkehrend), wenn für alle Punkte $p$ das Differential $dF\big|_p$ den positiven Zeitkegel in $T_pM$ auf den positiven (negativen) Zeitkegel in $T_{F(p)}N$ abbildet. Ist die Mannigfaltigkeit $M$ zusammenhängend, so ist jeder konforme lokale Diffeomorphismus $F$ entweder zeitorientierungstreu oder zeitorientierungsumkehrend.

Mit $\mathcal{O}^+(1, n-1)$ bezeichnen wir die Menge aller zeitorientierungstreuen orthogonalen Abbildungen $A \in \mathcal{O}(1, n-1)$. Jedes solche $A$ bildet den positiven Zeitkegel in $\mathbb{R}^n_1$ auf sich ab. Weiter sei $\mathcal{O}^-(1, n-1) := \mathcal{O}(1, n-1) \setminus \mathcal{O}^+(1, n-1)$.

Es ist die Sphäreninversion $S : \mathbb{R}^n_1 \backslash \Gamma^n_1 \to \mathbb{R}^n_1 \backslash \Gamma^n_1$, $x \mapsto \dfrac{x}{\langle x, x\rangle}$, ein zeitorientierungstreuer konformer Diffeomorphismus, denn für $x = (x_1, \ldots, x_n) \notin \Gamma^n_1$ ist

$$dS\Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x^1}}{\langle x, x\rangle} - \frac{2\langle x, \frac{\partial}{\partial x^1}\rangle}{\langle x, x\rangle^2} x$$

und

$$\begin{aligned}\langle dS\Big|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \frac{\partial}{\partial x^1}\rangle &= \frac{-1}{\langle x, x\rangle} - \frac{2\langle x, \frac{\partial}{\partial x^1}\rangle^2}{\langle x, x\rangle^2} = -\frac{\langle x, x\rangle + 2x_1^2}{\langle x, x\rangle^2} \\ &= -\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\langle x, x\rangle^2} < 0,\end{aligned}$$

also liegt $dS\Big|_x \left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)$ im gleichen Zeitkegel wie $\dfrac{\partial}{\partial x^1}$ (s. [ON], S. 143, Nr. 29).

Gleichfalls ist die Einbettung $i : \mathbb{R}^n_1 \to Q^n_1$ zeitorientierungstreu:

$$\begin{aligned}
di\Big|_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right) &= \frac{d}{dt} i(te_1)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\pi\left((1-t^2\ ,\ 2te_1\ ,\ 1+t^2)\right)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\pi_1\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \frac{2te_1}{1+t^2}\ ,\ 1\right)\Big|_{t=0} \\
&= d\pi_1\Big|_{(1,0,1)}(0, 2e_1, 0)
\end{aligned}$$

und $(0, 2e_1, 0) = (0, 2, 0, \ldots, 0) \in T_{(1,0,1)}(S^1 \times S^{n-1}) = T_{(1,0)}S^1 \oplus T_{(0,\ldots,0,1)}S^{n-1}$ ist das doppelte des oben betrachteten Einheitstangentenvektors an $S^1$ im Punkt $(1, 0)$.

Neben $i$ betrachten wir noch die Einbettung $j := \phi_A \circ i$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2, n) \ ,$$

also

$$j(x) = \pi((1 + \langle x, x\rangle, 2x\, , \langle x, x\rangle - 1))$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n_1$.
Es ist $j = i \circ S$ auf $\mathbb{R}^n_1 \setminus \Gamma^n_1$ , denn

$$\begin{aligned}
i \circ S(x) = i\left(\frac{x}{\langle x, x\rangle}\right) &= \pi\left(1 + \langle\frac{x}{\langle x, x\rangle}, \frac{x}{\langle x, x\rangle}\rangle, 2\frac{x}{\langle x, x\rangle}\, , 1 - \langle\frac{x}{\langle x, x\rangle}\, , \frac{x}{\langle x, x\rangle}\rangle\right) \\
&= \pi\left(1 + \frac{\langle x, x\rangle}{\langle x, x\rangle^2}, 2\frac{x}{\langle x, x\rangle}\, , 1 - \frac{\langle x, x\rangle}{\langle x, x\rangle^2}\right) \\
&= \pi(\langle x, x\rangle + 1, 2x\, , \langle x, x\rangle - 1) \\
&= j(x)\ .
\end{aligned}$$

Mit $i$ und $S$ ist auch $j$ zeitorientierungstreu.

Sei nun $M$ eine abwickelbare Lorentz-Mannigfaltigkeit und $\delta : M \to Q^n_1$ eine Abwicklung. Mit dem konformen lokalen Diffeomorphismus $\delta$ kann man unser oben betrachtetes zeitartige Vektorfeld auf $Q^n_1$ zurückholen zu einem zeitartigen Vektorfeld auf $M$. $\delta$ induziert auf diese Weise eine Zeitorientierung auf $M$. Insbesondere ist $M$ zeitorientierbar.