

# Konforme Gradientenvektorfelder auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten

Vom Fachbereich 11/Mathematik der  
Gerhard-Mercator-Universität—Gesamthochschule Duisburg  
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Markus Becker

aus

Duisburg

Referent: Prof. Dr. W. Kühnel  
Korreferent: Prof. Dr. U. Dierkes

Tag der mündlichen Prüfung: 16.10.1998

## Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	1
<b>Kapitel 1: Der Satz von Liouville im pseudo-Euklidischen Raum</b> .....	4
Der Satz von Liouville für $\mathbb{R}_k^n$ .....	10
Der Satz von Liouville für $Q_k^n$ .....	16
Abwickelbare Mannigfaltigkeiten; Satz von Kuiper .....	16
Zeitorientierung auf Lorentz-Mannigfaltigkeiten .....	17
<b>Kapitel 2: Die lokale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld</b> .....	20
<b>Kapitel 3: Die globale Struktur von Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenfeld</b> .....	37
3.1 Das Gerüst der Mannigfaltigkeit $M$ .....	37
3.2 Benachbarte kritische Punkte .....	39
3.3 Konstruktion von Abwicklungsabbildungen .....	45
3.4 Abwickelbare Mannigfaltigkeiten .....	48
3.5 Konforme Klassifikation .....	52
3.6 Zwei weitere globale Sätze .....	60
<b>Kapitel 4: Beispiele</b> .....	67
Charakterisierung der Gerüste und Konstruktion von Mannigfaltigkeiten .....	67
Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit konformen Gradientenfeldern mit genau einer Nullstelle .....	71

Lokal konform flache Lorentz-Metriken auf dem $\mathbb{R}^n$ .....	73
Die universelle Überlagerung von $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ .....	75
<b>Anhang: Analytische Hilfsmittel</b> .....	<b>81</b>
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	<b>96</b>

## Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die globale konforme Struktur der Lorentz-Mannigfaltigkeiten zu bekommen, auf denen ein konformes Gradientenvektorfeld mit mindestens einer Nullstelle existiert. Dabei ist eine Lorentz-Mannigfaltigkeit eine  $n$ -dimensionale pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, ( $n \geq 3$ ), deren Metrik die Signatur  $(1, n - 1)$  hat, d.h. einen negativen und  $n - 1$  positive Eigenwerte. Die Mannigfaltigkeit ist also nicht notwendig vierdimensional. Ein Vektorfeld heißt konform, wenn sein (lokaler) Fluß aus (lokalen) konformen Diffeomorphismen besteht.

Für vollständige (und zusammenhängende) Riemannsche Mannigfaltigkeiten ist die Frage durch Tashiro [Ta], Bourguignon [Bo], und Kerbrat [Ke1] beantwortet worden:

Ein nicht identisch verschwindendes konformes Gradientenvektorfeld hat höchstens zwei Nullstellen. Hat das Vektorfeld zwei Nullstellen, so ist die Mannigfaltigkeit konform diffeomorph zur Standardsphäre, hat es eine Nullstelle, so ist die Mannigfaltigkeit zum Euklidischen Raum oder zum Hyperbolischen Raum konform diffeomorph und falls es keine Nullstelle hat zu einem Produkt  $I \times \tilde{M}$ ,  $I$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $\tilde{M}$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Der Satz zeigt, daß ein Unterschied zwischen konformen Gradientenvektorfeldern mit und ohne Nullstellen besteht. Im ersten Fall gibt es bis auf konforme Diffeomorphismen nur drei vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, die ein solches Vektorfeld zulassen. Alle drei sind überdies lokal konform flach. Im zweiten Fall gibt es unendlich viele nicht konform äquivalente vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten und unter diesen auch nicht konform flache.

Diesen Unterschied kann man außer an den Nullstellen noch an einer anderen, tiefer liegenden, Eigenschaft der Vektorfelder festmachen: ein konformes Vektorfeld heißt *wesentlich*, wenn es kein isometrisches Vektorfeld ist bzgl. jeder zur Ausgangsmetrik konformen Metrik. Andernfalls heißt es *unwesentlich*. Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sind konforme Gradientenvektorfelder mit Nullstellen wesentlich und ohne Nullstellen unwesentlich.

Ist nun ein wesentliches konformes Vektorfeld vollständig, so ist, wegen der erzeugten 1-Parameter Untergruppe, die konforme Gruppe der Mannigfaltigkeit *wesentlich*, d.h. keine Untergruppe der Isometriegruppe bzgl. einer Metrik aus der konformen Klasse. Also ist, kurz aber ungenau gesagt, die konforme Gruppe "wesentlich" größer als die Isometriegruppe. Nach einem Satz von Alekseevskii ([A1], siehe auch [Le], [Ob], [Laf] für den kompakten Fall) ist die konforme Gruppe wesentlich nur für den Euklidischen Raum und die Standardsphäre. Konforme Gradientenfelder mit Nullstellen sind auch auf pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeiten wesentlich und deuten auf eine "große" konforme Gruppe hin.

Im Gegensatz zum Riemannschen Fall gibt es aber für indefinite Metrik abzählbar unendlich viele konform nicht äquivalente Mannigfaltigkeiten mit solchen Vektorfeldern. Alle Mannigfaltigkeiten sind aber lokal konform flach. Kühnel und Rademacher [KR1]

fanden für jede natürliche Zahl  $N \geq 1$  (einschließlich  $N = \infty$ ) Beispiele von konformen Gradientenvektorfelder mit genau  $N$  (isolierten) Nullstellen. Für die Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , konstruierten sie abzählbar viele Standardmannigfaltigkeiten, die alle möglichen konformen Typen der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeiten mit vollständigen konformen Gradientenvektorfeldern umfassen. Der konforme Typ ist, bis auf eine evtl. Zweideutigkeit, durch die Anzahl der Nullstellen bestimmt.

Die Konstruktion der Standardmannigfaltigkeiten beschrieben sie durch lineare Graphen. In dieser Arbeit über Lorentz-Mannigfaltigkeiten treten an ihre Stelle 3-reguläre Graphen. Jeder Lorentz-Mannigfaltigkeit mit einem konformen Gradientenfeld wird ein solcher Graph, in dieser Arbeit *Gerüst* genannt, zugeordnet.

Da das Gerüst ein 3-regulärer Graph ist, können Zyklen im Gerüst auftreten. Das bedeutet, daß die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit nicht mehr einfach zusammenhängend ist. Dies behindert globale Konstruktionen wie z.B. die Konstruktion einer Abwicklung, d.i. eine konforme Immersion  $\delta : M \rightarrow Q_1^n$  von der Mannigfaltigkeit  $M$  in die Standardquadratik  $Q_1^n$ , (vgl. S. 11 ff). Außerdem treten Mannigfaltigkeiten mit verschiedenen Gerüsten auf, die diffeomorph zueinander sind. Als Beispiel werden im vierten Kapitel unendlich viele lokal konform flache Lorentz-Strukturen auf der differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $\mathbb{R}^n$  konstruiert, die paarweise nicht konform diffeomorph sind.

Falls die Mannigfaltigkeit abwickelbar ist, und nach dem Satz von Kuiper ist sie dies, falls sie einfach zusammenhängend ist, definieren wir mit Hilfe gewisser Abwicklungen zwei zusätzliche Daten für das Gerüst. Zum einen eine Zeitorientierung und zum anderen eine Gewichtung. Die Zeitorientierung des Gerüstes beschreibt eine Zeitorientierung der Mannigfaltigkeit und die Gewichtung mißt die (Un-) Vollständigkeit des Vektorfeldes.

Das so erweiterte Gerüst ist in vielen Fällen eine vollständige konforme Invariante. Es gilt die folgende zentrale Aussage (Sätze 3.1 und 3.2):

Gegeben seien zwei abwickelbare und geodätisch vollständige Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit je einem konformen Gradientenvektorfeld mit mindestens einer Nullstelle.

Sind die Gerüste mit den zwei zusätzlichen Daten Zeitorientierung und Gewichtung isomorph, so sind die Mannigfaltigkeiten konform diffeomorph.

Sind umgekehrt die Mannigfaltigkeiten konform diffeomorph und ist für eine Mannigfaltigkeit das Bild einer Abwicklung gleich  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$ , so sind die Gerüste mit den zusätzlichen Daten Zeitorientierung und Gewichtung isomorph.

Die zusätzliche Voraussetzung über das Bild einer Abwicklung ist für sehr viele Mannigfaltigkeiten erfüllt (s. S. 60).

Das zentrale Ergebnis wird auf die universelle Überlagerung nicht notwendig abwickelbarer Lorentz-Mannigfaltigkeiten angewendet und man erhält für weitere Mannigfaltigkeiten, daß das Gerüst eine konforme Invariante ist.

Die Standardräume konstanter Schnittkrümmung sind abwickelbar, erfüllen aber nicht die Voraussetzung über das Bild einer Abwicklung. Mit den entwickelten Methoden lassen sich auch hier die zeitorientierten und gewichteten Gerüste als vollständige konforme Invarianten nachweisen.

Desgleichen lassen sich alle Mannigfaltigkeiten, die ein Gradientenfeld mit genau einer Nullstelle tragen, konform klassifizieren.

Die Resultate gelten in angepaßter Form auch für den Fall der Signatur  $(k, n - k)$ ,  $2 \leq k \leq n - 2$ , und führen hier zu einer, bis auf den Fall zweier Nullstellen, vollständigen konformen Klassifikation. In der Arbeit wird hierauf nur in Anmerkungen hingewiesen.

Noch kurz zum Aufbau der Arbeit. Im einleitenden Kapitel wird der grundlegende Satz von Liouville für den pseudo-Euklidischen Raum  $\mathbb{R}_k^n$  (also beliebige Signatur) und die Standardquadrik  $Q_k^n$  hergeleitet. Er ist nötig für die Konstruktion von Abwicklungen, dem der erste Teil des dritten Kapitels gewidmet ist. Eine abwickelbare Mannigfaltigkeit ist notwendig lokal konform flach. Diese notwendige Eigenschaft wird im zweiten Kapitel nachgewiesen. Als Vorbereitung dazu wird gezeigt, daß die Metrik um jede Nullstelle des Vektorfeldes in Polarkoordinaten ein warped-product ist. Im zweiten Teil von Kapitel 3 werden dann die zentralen Sätze der Arbeit (Sätze 3.1 und 3.2) sowie weitere globale Resultate bewiesen. Im vierten Kapitel werden zunächst die Graphen charakterisiert, die als Gerüste auftreten. Dadurch gewinnt man die oben schon erwähnten lokal konform flachen Lorentz-Strukturen auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Sodann werden die Mannigfaltigkeiten mit einem konformen Gradientenvektorfeld mit genau einer Nullstelle klassifiziert. Zum Abschluß wird gezeigt, daß der universellen Überlagerung von  $Q_1^n \setminus Q_0^{n-2}$  als Gerüst der universelle 3-reguläre Baum zugeordnet werden kann. Deshalb kann jede einfach zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit mit einem konformen Gradientenvektorfeld mit mindestens einer Nullstelle konform in diese universelle Überlagerung eingebettet werden. Im Anhang befinden sich technische Hilfssätze.

Zum Schluß möchte ich mich bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Wolfgang Kühnel, für die geduldige Begleitung der Arbeit und die vielen hilfreichen Diskussionen bedanken. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. Dr. Klaus-Werner Wiegmann, der mir eine Mitarbeiterstelle in seinem Fachgebiet zur Verfügung stellte.