Meromorphe Funktionen
mit
geteilten Grenzwerten

Vom Fachbereich Mathematik
der
Gerhard-Mercator-Universität
Gesamthochschule
Duisburg
zur Erlangung der Lehrbefähigung im
Lehrgebiet Mathematik
genehmigte Habilitationsschrift

von
Dr. Andreas Sauer
aus
Duisburg

Genehmigt am: 5. Juli 2000

Inhalt

Vorwort

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Verhalten meromorpher Funktionen in der Nähe von wesentlichen Singularitäten. Die grundlegende Aussage zu wesentlichen Singularitäten ist der große Satz von Picard, der besagt, daß eine meromorphe Funktion jeden Wert der Sphäre mit höchstens zwei Ausnahmen in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität unendlich oft annimmt. Betrachtet man meromorphe Funktionen f in der Ebene mit einer wesentlichen Singularität in ∞, so gibt es also insbesondere zu jedem $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ eine Folge $z_n \to \infty$ mit $f(z_n) \to a$.
Die von R. Nevanlinna [37] begründete Theorie meromorpher Funktionen verschärft diese Aussagen wesentlich. Mit Hilfe der charakteristischen Funktion, welche als Verallgemeinerung des Grades rationaler Funktionen angesehen werden kann, zeigte Nevanlinna in seinem zweiten Hauptsatz, daß, bis auf gewisse Ausnahmewerte, alle Werte in einem geeigneten Sinn gleich häufig angenommen werden. Wir verweisen hier auf die einführenden Monographien [21], [31], [39] und [40].
Eine überraschende Anwendung des zweiten Haupsatzes ist der Fünf-Werte-Satz von Nevanlinna [38]. Er besagt, daß zwei meromorphe Funktionen in der Ebene deren Urbilder zu fünf Werten aus $\widehat{\mathbb{C}}$ gleich sind, notwendig identisch sind (sofern nicht beide Funktionen konstant sind).
Nevanlinnas zweiter Hauptsatz ist in seiner Struktur der klassischen Riemann-Hurwitz-Formel sehr ähnlich. Tatsächlich gelang es Ahlfors [2] in seiner Theorie der Überlagerungsflächen aus der Riemann-Hurwitz-Formel eine sehr allgemeine Werteverteilungstheorie herzuleiten. Dabei spielen Urbilder von Gebieten die Rolle, welche die Urbilder von Punkten in der Nevanlinnaschen Theorie innehaben. Spezialisierungen der Ahlforsschen Theorie liefern wesentliche Aussagen der Nevanlinna Theorie, wir werden im ersten Kapitel darauf eingehen.
Der zentrale Begriff dieser Arbeit ist das *Teilen von Grenzwerten*. Wir untersuchen dabei die Zusammenhänge zwischen meromorphen Funktionen, die zu gegebenem $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ auf denselben Folgen $z_n \to \infty$ gegen a konvergieren. Unseres Wissens existiert zu diesem Thema bisher keine Veröffentlichung. Zur Behandlung dieser Frage ist die Ahlforssche Theorie sehr gut geeignet. Dies liegt daran, daß das Teilen von Grenzwerten eine Art Teilen von Inseln bewirkt. Dies führt insbesondere dazu, daß die Charkteristiken von Funktionen die Grenzwerte teilen vergleichbare Größenordnung haben. Es ist jedoch nicht möglich, den Beweis des Fünf-Werte-Satzes auf

diese Situation zu übertragen. So zeigen einfache Beispiele wie f und $f + 1/z$, daß meromorphe Funktionen alle Grenzwerte teilen können, ohne identisch zu sein. Wir werden dennoch nachweisen, daß wie beim Werteteilen zwischen vier und fünf geteilten Grenzwerten ein nicht-trivialer Unterschied besteht. Am deutlichsten zeigen sich die Parallelen zwischen Werteteilen und Grenzwerteteilen bei elliptischen Funktionen mit gleichen Perioden. In diesem Fall sind beide Begriffe identisch, wie man leicht durch Übergang zum Torus sieht.
Die Arbeit ist wie folgt organisiert. Im ersten Kapitel stellen wir zunächst die Ergebnisse zur Werteverteilungstheorie und zu normalen Familien zusammen, die wir später benötigen. Im zweiten Kapitel leiten wir dann unsere Ergebnisse zum Grenzwerteteilen her. Nach den angesprochenen Wachstumsabschätzungen konstruieren wir Beispiele von meromorphen Funktionen, die alle Grenzwerte teilen, aber nicht durch einfache Modifikationen auseinander hervorgehen. Diese Beispiele wurden uns von J.K. Langley mitgeteilt. Wir möchten ihm an dieser Stelle herzlich für die Erlaubnis danken, die Beispiele in diese Arbeit aufzunehmen. Danach wenden wir uns der Konstruktion von Beispielen zu, bei denen nur endlich viele Grenzwerte geteilt werden. Dabei spielen rationale Funktionen, die Werte auf der Sphäre teilen eine wichtige Rolle. Damit haben wir dem theoretischen Teil einige Beispiele vorangestellt. Wir meinen, daß eine Theorie ohne Beispiele unbefriedigend ist. Im übrigen ist die Konstruktion solcher Beispiele nicht trivial. Mancher Beweis eines theoretischen Satzes war leichter zu finden als die Beispiele in Abschnitt 2.4. Im nächsten Abschnitt gehen wir dann auf den Fall fünf geteilter Grenzwerte ein. Die beiden folgenden Paragraphen beschäftigen sich mit der Fortsetzbarkeit des Grenzwerteteilens. Wir beweisen, daß, falls zwei Funktionen alle Grenzwerte aus einer offenen Menge teilen, sie notwendig alle Grenzwerte teilen. Es wäre interessant zu entscheiden, ob schwächere Voraussetzungen zur Fortsetzbarkeit führen, etwa wenn man die offene durch eine nicht-diskrete Menge ersetzt. (Vielleicht reichen ja schon fünf geteilte Grenzwerte.) Überhaupt sind weitere Untersuchungen zur Struktur der Menge der geteilten Grenzwerte nötig. So ist es uns z.B. nicht gelungen zu entscheiden, ob die Menge der geteilten Grenzwerte grundsätzlich abgeschlossen ist. Weiter gehen wir auf den Zusammenhang von Grenzwerteteilen und Julia-Richtungen ein. Im dritten Kapitel stellen wir dann weitere Anwendungen der Ahlforsschen Theorie dar, die nicht direkt im Zusammenhang mit Grenzwerten stehen.

Ich möchte meinem Lehrer Herrn Prof. Dr. F. Pittnauer herzlich danken. Er hat mich auf die Fragestellung des Grenzwerteteilens aufmerksam gemacht und mir die Beispiele von J.K. Langley zur Verfügung gestellt. Diese haben mich vor vielen naheliegenden aber falschen Vermutungen bewahrt.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Werteverteilungstheorie

Wir stellen zunächst einige grundlegende Ergebnisse der von R. Nevanlinna [37] begründeten Theorie meromorpher Funktionen in der Ebene dar. Als Zugang wählen wir die Ahlforssche Theorie der Überlagerungsflächen [2], eine topologische Version der Nevanlinnaschen Theorie.

Wir bezeichnen mit $\widehat{\mathbb{C}} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ die Riemannsche Sphäre, welche durch stereographische Projektion auf die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ bezogen ist. Der Nordpol $\infty := (0, 0, 1)$ macht $\widehat{\mathbb{C}}$ zu einem Modell der Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$. Wir werden im folgenden die stereographische Projektion unterdrücken, d.h., $\mathbb{C}$ als Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}}$ betrachten.

Die Topologie von $\widehat{\mathbb{C}}$ läßt sich mit der chordalen Metrik χ vollständig metrisieren:

$$\chi(a, b) := \frac{|a - b|}{\sqrt{1 + |a|^2}\sqrt{1 + |b|^2}}$$

für $a, b \in \mathbb{C}$ und

$$\chi(a, \infty) := \frac{1}{\sqrt{1 + |a|^2}}$$

für $a \in \mathbb{C}$. Damit ist $\chi(a, b)$ gerade der euklidische Abstand der Projektionen von a und b im $\mathbb{R}^3$. Die sphärische Metrik d ergibt sich, wenn man durch a und b den eindeutigen Großkreis K auf $\widehat{\mathbb{C}}$ legt und als Abstand die Länge des kürzeren der beiden Bögen nimmt, in die K von a und b geteilt wird. Etwa mit

$$\lim_{a \to b} \frac{\chi(a, b)}{|a - b|} = \frac{1}{1 + |a|^2}$$

zeigt man

$$d(a, b) = \inf_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{1}{1 + |z|^2} |dz|.$$

Dabei durchläuft γ alle Wege, die a und b verbinden.
Elementar ergibt sich

$$\chi(a,b) \leq d(a,b) \leq \frac{\pi}{2}\chi(a,b).$$

Insbesondere induzieren χ und d dieselbe Topologie. Begriffe wie offene Menge, Gebiet etc. sind im topologischen Raum $\widehat{\mathbb{C}}$ erklärt.
Wie üblich betrachten wir $\widehat{\mathbb{C}}$ als kompakte Riemannsche Fläche. Damit ist der Begriff einer meromorphen Abbildung $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $U \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen erklärt. Eine meromorphe Abbildung $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \notin f(U)$ bezeichnen wir als holomorph.
Ist $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ meromorph, so ist die sphärische Ableitung von f:

$$f^{\#}(z) := \lim_{w \to z} \frac{\chi(f(z), f(w))}{|z-w|} = \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

für $z \in U$. Es gilt $f^{\#} = (1/f)^{\#}$ und somit ist $f^{\#}$ in Polen von f definiert. Weiter ist $f^{\#}\colon U \to \mathbb{R}^+$ stetig.
Ist γ ein rektifizierbarer Weg in U, so ergibt sich als sphärische Länge $L(f \circ \gamma)$ des Bildweges $f \circ \gamma$

$$L(f \circ \gamma) = \int_\gamma f^{\#}(z)|dz|.$$

Wir setzen weiter $\mathbb{D}_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| < r\}$, $\mathbb{D}_r := \mathbb{D}_r(0)$ und $\mathbb{D} := \mathbb{D}_1$. Den topologischen Abschluß von $\mathbb{D}_r$ bezeichnen wir mit $\overline{\mathbb{D}}_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Definition 1.1 Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Die beschränkten Komponenten von $f^{-1}(D)$ heißen *Inseln* (über D) und die unbeschränkten Komponenten *Zungen* (über D). Mit $\overline{n}(r,f,D)$ bezeichnen wir die Anzahl der in $\overline{\mathbb{D}}_r$ enthaltenen Inseln von f über D und mit $\overline{n}_e(r,f,D)$ die Anzahl der einfach zusammenhängenden Inseln in $\overline{\mathbb{D}}_r$. Weiter sei

$$L(r,f) := \int_{\partial \mathbb{D}_r} f^{\#}(z)|dz| = \int_0^{2\pi} \frac{|f'(re^{i\varphi})|r}{1+|f(re^{i\varphi})|^2} d\varphi$$

und

$$A(r,f) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}_r} (f^{\#}(z))^2 dz = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{|f'(\rho e^{i\varphi})|^2 \rho}{(1+|f(\rho e^{i\varphi})|^2)^2} d\rho\, d\varphi.$$

$L(r,f)$ ist die in der sphärischen Metrik gemessene Länge des Bildwegs von $\partial\mathbb{D}_r$ unter f. Die Größe $\pi \cdot A(r,f)$ gibt die mit Vielfachheiten gemessene sphärische Fläche des Bildes von $\mathbb{D}_r$ unter f an.

Als Jordanbogen bezeichnen wir einen stetigen Weg $\gamma : [a,b] \to \widehat{\mathbb{C}}$ der auf $[a,b)$ injektiv ist. Ein geschlossener Jordanbogen ist eine Jordankurve. Ein Jordangebiet ist das Innere einer Jordankurve. Jordangebiete sind nach dem Jordanschen Kurvensatz einfach zusammenhängend.

Das zentrale Ergebnis der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen ist der sogenannte *Zweite Hauptsatz*. Wir formulieren ihn für den von uns betrachteten Fall meromorpher Funktionen in $\mathbb{C}$.

Satz 1.2 (2. Hauptsatz, Ahlfors) *Seien $f:\mathbb{C}\to\widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $D_1,\ldots,D_q$ Jordangebiete mit disjunkten topologischen Abschlüssen. Dann gilt*

$$(q-2)A(r,f)\le\sum_{k=1}^{q}\overline{n}_e(r,f,D_k)+O(L(r,f)). \tag{1}$$

Zu den topologischen Anforderungen an die Zielgebiete $D_1,\ldots,D_q$ bemerken wir, daß Ahlfors [2], S. 178, von *ausserhalb einander liegenden, einfach zusammenhängenden* Gebieten spricht. Hayman [21] verlangt in seiner Darstellung, daß die $D_1,\ldots,D_q$ disjunkte Abschlüsse haben und die Ränder stückweise analytische Jordankurven ohne Spitzen sind. Die in Satz 1.2 scheinbar schwächere Forderung läßt sich problemlos durch Haymans Formulierung rechtfertigen. Jedes Jordangebiet D_j läßt sich in ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\widetilde{D}_j$ mit stückweise analytischem Rand ohne Spitzen einbetten (etwa mit Hilfe von Polygonzügen), so daß die $\widetilde{D}_j$ disjunkte Abschlüsse haben. Die Ungleichung $\overline{n}_e(r,f,\widetilde{D}_j)\le\overline{n}_e(r,f,D_j)$ zeigt dann die Gültigkeit von (1). Wir werden als Zielgebiete fast ausschließlich Kreisscheiben betrachten, womit keinerlei topologische Probleme entstehen. Insbesondere werden die Ränder der entstehenden Inseln und Zungen stückweise analytisch sein.
Wir werden nun die Ungleichung (1) *logarithmisch integrieren*. Dies führt zu den von Nevanlinna ursprünglich betrachteten Größen.
Die Ahlfors-Shimizu Charakteristik ist definiert durch (siehe [21], S. 10)

$$T(r,f):=\int_0^r\frac{A(t,f)}{t}dt. \tag{2}$$

Eine wesentliche Eigenschaft von T ist ihre als *Erster Hauptsatz* bezeichnete Möbius-Invarianz: Für jede Möbius Transformation M gilt

$$T(r,M\circ f)=T(r,f)+O(1).$$

Die Funktion $T(r,f)$ unterscheidet sich von der von Nevanlinna eingeführten Charakteristik nur um eine beschränkte Größe. Wir wollen die beiden Charakteristiken daher im folgenden nicht unterscheiden. Analog zu (2) definieren wir

$$\overline{N}(r,f,D):=\int_0^r\frac{\overline{n}(t,f,D)}{t}dt$$

und entsprechend

$$\overline{N}_e(r,f,D):=\int_0^r\frac{\overline{n}_e(t,f,D)}{t}dt.$$

Es bleibt $\int_0^r L(t,f)/tdt$ zu betrachten. Wir benötigen die Abschätzung

$$\int_0^r \frac{L(t,f)}{t}dt = o(T(r,f))$$

außerhalb einer möglicherweise auftretenden Ausnahmemenge (bzgl. r) von endlichem linearen Maß. Diese Aussage wurde von Miles [33] bewiesen. Im Fall, daß f von endlicher Ordnung ist, d.h., falls

$$\rho(f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r} < \infty$$

tritt keine Ausnahmemenge auf. Im folgenden werden wir wie üblich mit $S(r,f)$ Funktionen bezeichnen, für die $S(r,f) = o(T(r,f))$ gilt (außerhalb einer möglichen Ausnahmemenge von endlichem linearen Maß, falls f unendliche Ordnung besitzt). Wir erhalten:

Satz 1.3 *Seien $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $D_1, \dots, D_q$ Jordangebiete mit disjunkten Abschlüssen. Dann gilt*

$$(q-2)T(r,f) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{N}_e(r,f,D_k) + S(r,f). \tag{3}$$

Seien nun $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $D_1, \dots, D_q$ Kreisscheiben mit disjunkten Abschlüssen und $a_k \in D_k$ für $k = 1, \dots, q$. Analog zu Definition 1.1 sei $\overline{n}(r,f,a_k)$ die Anzahl der in $\overline{\mathbb{D}}_r$ enthaltenen Urbilder aus $f^{-1}(\{a_k\})$. Die triviale Ungleichung $\overline{n}(r,f,D_k) \leq \overline{n}(r,f,a_k)$ liefert mit Satz 1.3 den von Nevanlinna früher bewiesenen zweiten Hauptsatz der Nevalinna Theorie.

Satz 1.4 (2. Hauptsatz, Nevanlinna) *Seien $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt*

$$(q-2)T(r,f) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{N}(r,f,a_k) + S(r,f) \tag{4}$$

Dabei ist natürlich

$$\overline{N}(r,f,a_k) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,f,a_k)}{t}dt.$$

(Auf die formal nötige Modifikation im Fall $f(0) = a_k$ verzichten wir.) Es gilt für alle $a \in \widehat{\mathbb{C}}$

$$\overline{N}(r,f,a) \leq T(r,f) + O(1),$$

und damit die gleiche Ungleichung für alle bisher definierten logarithmisch integrierten Anzahlfunktionen.

Wir merken noch an, daß der von Nevanlinna hergeleitete Fehlerterm $S(r,f)$ in (4) kleiner ist als der hier benutzte aus [33]. Außerdem gibt es schärfere Versionen der

Ungleichung (4) (siehe [31], Theorem 1.5'). Dies wird in der vorliegenden Arbeit jedoch keine Rolle spielen.

Ungleichung (4) kann als weitreichende Verallgemeinerung des großen Picardschen Satzes angesehen werden. Da nämlich grundsätzlich

$$\frac{T(r,f)}{\log r} \to \infty$$

für transzendentes f gilt, folgt, daß f mindestens einen von drei Werten unendlich oft annimmt und zwar so, daß T und $\overline{N}$ von ähnlichem Wachstum sind.

Wir kehren nun zu Satz 1.3 zurück. Es sei I eine Insel von f über D. Falls $f : I \to D$ bijektiv ist, so nennt man I eine schlichte Insel. Wir bezeichnen mit $\overline{N}_s(r, f, D)$ die logarithmisch integrierte Anzahlfunktion der schlichten Inseln von f über D die in $\mathbb{D}_r$ enthalten sind.

Satz 1.5 *Seien $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $D_1, \ldots, D_q$ Jordangebiete mit disjunkten Abschlüssen. Dann gilt*

$$(q-4)T(r,f) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{N}_s(r, f, D_k) + S(r,f). \tag{5}$$

Beweis. Man findet diese Aussage im allgemeinen Kontext der Ahlforsschen Theorie bei Tsuji ([56], Theorem VI. 6.). Wir leiten (5) aus (3) her. Durch Möbius-Transformation können wir annehmen, daß alle D_k beschränkt sind. Sei I eine einfach zusammenhängende Insel von f über D_k die nicht schlicht ist. D.h., $f : I \to D_k$ ist mindestens zweiblättrig. Die Riemann-Hurwitz-Formel (siehe [52]) zeigt, daß f auf I verzweigt ist. Also enthält I eine Nullstelle von f'. Daher gilt

$$\sum_{k=1}^{q} \overline{N}_e(r, f, D_k) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{N}_s(r, f, D_k) + \overline{N}(r, f', 0).$$

Bekanntermaßen gilt $\overline{N}(r, f', 0) \leq T(r, f') + O(1) \leq 2T(r,f) + S(r,f)$ und (5) folgt. $\square$

Wir stellen kurz die üblichen Folgerungen aus dem zweiten Hauptsatz von Nevanlinna bzw. Ahlfors dar.

Satz 1.6 *Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine transzendente meromorphe Funktion. Dann gilt:*

i) f nimmt jeden Wert in $\widehat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft an.

ii) Über mindestens einem von drei gegebenen Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen besitzt f unendlich viele einfach zusammenhängende Inseln.

iii) Über mindestens einem von fünf gegebenen Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen besitzt f unendlich viele schlichte Inseln.

Die Beweise führt man mit den Sätzen 1.3, 1.4 und 1.5. Aussage i) ist der große Satz von Picard und iii) der Fünf-Insel-Satz von Ahlfors. Wird $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ von f nur endlich oft angenommen, so heißt a Picardscher Ausnahmewert. Nach Satz 1.6, i) hat f höchstens zwei Picardsche Ausnahmewerte. Analog nennen wir $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ einen Ahlforsschen Ausnahmewert von f falls für alle $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Inseln von f über $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$ existieren. Nach Satz 1.6, ii) hat f höchstens zwei Ahlforssche Ausnahmewerte. Man sieht leicht, daß Picardsche Ausnahmewerte auch Ahlforssche Ausnahmewerte sind, die Umkehrung gilt jedoch nicht. Dies zeigt z.B. $f(z) := \exp(z) + 1/z$ mit dem Ahlforsschen Ausnahmewert 0. Jedoch ist der Wert 0 für f im Sinne der Nevanlinna-Theorie nicht einmal defekt.

Wir werden im folgenden häufig implizit benutzen, daß für Jordangebiete $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ die Komponenten von $f^{-1}(D)$ nach ∞ wandern, d.h., jede Kreisscheibe $\mathbb{D}_r$ nur endliche viele Komponenten von $f^{-1}(D)$ schneidet. Intuitiv scheint dies klar zu sein, einen trivialen Beweis konnten wir jedoch nicht finden. Wir wollen daher einen Beweis angeben. Dazu benötigen wir lediglich, daß f stetig und diskret ist. Die Behauptung gilt also z.B. auch für quasimeromorphe Funktionen. Wir erinnern daran, daß f diskret ist, falls für Bildpunkte a die Urbildmenge $f^{-1}(\{a\})$ diskret ist.

Lemma 1.7 *Es sei $0 < r < R$, $A := \overline{\mathbb{D}}_R \setminus \mathbb{D}_r$ und $f : A \to \mathbb{C}$ stetig. Weiter sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Jordangebiet und $\gamma_n : [0,1] \to A$ eine disjunkte Folge von Jordanbögen die $\partial\mathbb{D}_R$ und $\partial\mathbb{D}_r$ verbinden. Gilt $f(\gamma_n) \subset \partial D$ für alle n, so ist f nicht diskret.*

Beweis. Angenommen f ist diskret. Sei α_n der Anfangspunkt von γ_n auf $\mathbb{D}_r$ und β_n der Endpunkt auf $\mathbb{D}_R$. Wir können $\alpha_n \to \alpha \in \partial\mathbb{D}_r$ und $\beta_n \to \beta \in \partial\mathbb{D}_R$ annehmen. Da f stetig ist, gilt $f(\alpha_n) \to f(\alpha)$ und $f(\beta_n) \to f(\beta)$. Angenommen $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Sei $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \partial D$ ein Homöomorphismus und $F_n := \varphi^{-1} \circ f \circ \gamma_n : [0,1] \to \partial\mathbb{D}$. Da F_n stetig ist und φ bijektiv gilt für $a := \lim_{n\to\infty} F_n(0) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-1} \circ f(\alpha_n) = \varphi^{-1} \circ f(\alpha)$ und $b := \lim_{n\to\infty} F_n(1) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-1} \circ f(\beta_n) = \varphi^{-1} \circ f(\beta)$ offensichtlich $a, b \in \partial\mathbb{D}$ und $a \neq b$. Nun zeigen einfache Argumentationen mit dem Zwischenwertsatz, daß ein $c \in \partial\mathbb{D}$ existiert mit $c \in F_n([0,1])$ für unendlich viele n. Also gibt es einen Punkt $\omega_0 \in \partial D$, der von unendlich vielen $f \circ \gamma_n$ überdeckt wird. Wegen der Disjunktheit der γ_n ist $f^{-1}(\omega_0)$ unendlich, besitzt also einen Häufungspunkt in A, im Widerspruch zur Diskretheit von f. Es folgt $f(\alpha) = f(\beta)$. Wiederholen wir die obige Argumentation für $A' := \overline{\mathbb{D}}_{R'} \setminus \mathbb{D}_r$ mit $r < R' < R$, so erhalten wir für alle $R' \in (r, R)$ ein $\alpha_{R'} \in \partial\mathbb{D}_{R'}$ mit $f(\alpha_{R'}) = f(\alpha)$. Dies widerspricht der Diskretheit von f. $\square$

Daraus folgt:

Lemma 1.8 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph, nicht-konstant und $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Jordangebiet. Dann schneidet jede Kreisscheibe $\mathbb{D}_r$ nur endlich viele Komponenten von $f^{-1}(D)$.*

Beweis. Angenommen $\mathbb{D}_r$ schneidet unendlich viele Komponenten von $f^{-1}(D)$. Wähle $R > r$. Dann schneidet $\partial\mathbb{D}_R$ unendlich viele der Komponenten von $f^{-1}(D)$ die $\mathbb{D}_r$ schneiden. Sonst enthält $\mathbb{D}_R$ unendlich viele Inseln von f über D im Widerspruch zur Diskretheit von f. Es lassen sich in den Rändern dieser Komponenten unendlich viele disjunkte Jordanbögen finden, die $\partial\mathbb{D}_r$ und $\partial\mathbb{D}_R$ verbinden. Lemma 1.7 zeigt die Behauptung. □

Aufgrund der engen Beziehungen zwischen dem von uns später betrachteten Teilen von Grenzwerten und dem klassischen Begriff des Werteteilens erwähnen wir noch:

Definition 1.9 Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Dann teilen f und g den Wert a, falls für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) = a \Longleftrightarrow g(z) = a,$$

d.h., falls f und g bzgl. a dieselben Urbilder haben.

Einen Übersichtsartikel zum Werteteilen findet man in [35].
Das grundlegende Resultat zu diesem Begriff ist der Fünf-Werte-Satz von Nevanlinna [38].

Satz 1.10 (Fünf-Werte-Satz) *Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und nicht beide konstant. Teilen f und g fünf Werte aus $\widehat{\mathbb{C}}$, so gilt $f = g$.*

In Abschnitt 3.1 werden wir ein etwas allgemeineres Resultat beweisen.
Aus dem zweiten Haupsatz von Nevanlinna folgt leicht:

Proposition 1.11 *Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph.*

i) Teilen f und g drei Werte aus $\widehat{\mathbb{C}}$, so gilt

$$T(r, f) \leq 3 \cdot T(r, g) + S(r, f).$$

ii) Teilen f und g vier Werte aus $\widehat{\mathbb{C}}$, so gilt

$$T(r, f) = T(r, g) + S(r, f).$$

1.2 Normale Familien

Neben der Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen werden wir ausgiebig Montels Theorie normaler Familien meromorpher Funktionen nutzen. Wie üblich betrachten wir dabei die Menge aller meromorphen Funktionen auf einem Gebiet G, versehen mit der Topologie der kompakten Konvergenz. D.h., eine Folge meromorpher Funktionen f_n auf G konvergiert gegen f, falls für alle Kompakta $K \subset G$ die Folge f_n gleichmäßig auf K (in der chordalen Metrik) gegen f konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} \chi(f_n(z), f(z)) = 0. \tag{6}$$

Die Grenzfunktion f ist dann selbst meromorph auf G. (Die meromorphe Funktion $f \equiv \infty$ ist dabei nicht ausgeschlossen.)
Eine normale Familie ist eine prä-kompakte Menge im Raum der meromorphen Funktionen mit kompakter Konvergenz.

Definition 1.12 Eine Familie $\mathcal{F}$ meromorpher Funktionen auf einem Gebiet G heißt *normal*, falls jede Folge in $\mathcal{F}$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Der Grenzwert muß dabei nicht in $\mathcal{F}$ liegen.

Wir verweisen auf die Monographien [34] und [50]. Insbesondere in [50] findet man alle Aussagen dieses Abschnitts.

Betrachtet man Familien holomorpher Funktionen, so ist es oft natürlicher mit der euklidischen Metrik zu arbeiten, d.h., statt (6)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

zu verlangen.
Das grundlegende Kriterium für Normalität ist die folgende Aussage, die auf Montel zurückgeht.

Satz 1.13 *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie holomorpher Funktionen auf einem Gebiet G. Ist $\mathcal{F}$ lokal gleichgradig beschränkt, d.h., gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset G$ eine Konstante $M(K)$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt:*

$$\max_{z\in K} |f(z)| < M(K),$$

dann ist $\mathcal{F}$ eine normale Familie.

Wir benötigen weiter:

Satz 1.14 (Vitali) *Es sei f_n eine normale Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet G. Konvergiert f_n punktweise auf einer nicht diskreten Menge in G, dann konvergiert f_n kompakt auf G.*

Das wohl wichtigste hinreichende Kriterium für Normalität stammt von Montel. Wir werden es im folgenden als Satz von Montel bezeichnen.

Satz 1.15 (Montel) *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie meromorpher Funktionen auf einem Gebiet G. Falls es drei feste Werte in $\widehat{\mathbb{C}}$ gibt, die von keinem $f \in \mathcal{F}$ angenommen werden, dann ist $\mathcal{F}$ normal.*

Aus diesem Kriterium folgt beispielsweise der Satz von Picard.

Wir werden weiterhin die folgende Charakterisierung normaler Familien von Marty benötigen.

Satz 1.16 (Marty) *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie meromorpher Funktionen auf einem Gebiet G. $\mathcal{F}$ ist genau dann normal, wenn die sphärischen Ableitungen aller $f \in \mathcal{F}$ lokal gleichgradig beschränkt sind, d.h., falls es zu jedem Kompaktum $K \subset G$ eine Konstante $M(K)$ gibt, sodaß für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt:*

$$\max_{z \in K} f^{\#}(z) \leq M(K).$$

Wir erwähnen, daß Lappan [27] dieses Kriterium wesentlich verschärft hat.

Zum Schluß dieses Abschnitts geben wir noch zwei klassische Sätze der Funktionentheorie an, mit deren Hilfe man auf die Existenz von Nullstellen für gewisse Funktionen schließen kann.

Satz 1.17 (Rouché) *Seien f und g holomorph auf einem Gebiet G und γ ein nullhomologer rektifizierbarer Weg in G mit nichtleerem Inneren. Gilt $|f - g| < |f|$ auf γ, so haben f und g die gleiche Anzahl Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) im Inneren von γ.*

Mit dem Satz von Rouché zeigt man leicht:

Satz 1.18 (Hurwitz) *Sei f_n eine konvergente Folge meromorpher Funktionen in einem Gebiet G mit $f_n \to f \neq \mathrm{const}$. Besitzt f eine Nullstelle in G, so auch alle f_n mit $n \geq n_0$.*

Kapitel 2

Geteilte Grenzwerte

2.1 Definition des Begriffs Grenzwerteteilen

Wir definieren nun den zentralen Gegenstand dieser Arbeit. Wir bezeichnen dabei für $M \subset \mathbb{C}$ das Komplement bzgl. $\mathbb{C}$ mit M^c. Nach dem Satz von Casorati-Weiertraß liegt für alle $r > 0$ das Bild von $\mathbb{D}_r^c$ unter f dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$ für ganze Funktionen f. Satz 1.6 zeigt, daß sogar $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\} \subset f(\mathbb{D}_r^c)$ für alle $r > 0$ und transzendentes meromorphes f mit geeignet gewählten $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt. Es gibt also zu jedem $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ eine Folge $z_n \in \mathbb{C}$ mit $z_n \to \infty$ und $f(z_n) \to a$. Wir betrachten in Zukunft transzendente meromorphe Funktionen f und g, die für gewisse Werte $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ auf denselben Folgen $z_n \to \infty$ gegen a konvergieren.

Definition 2.1 Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen und $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Wir sagen f und g *teilen den Grenzwert* a, falls für jede Folge $z_n \to \infty$ gilt:

$$f(z_n) \to a \Longleftrightarrow g(z_n) \to a.$$

Die formale Ähnlichkeit der Begriffe Werteteilen und Grenzwerteteilen läßt zunächst auf ähnliche Resultate hoffen. Wir erläutern an einigen einfachen Beispielen, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Sei z.B. f beliebig vorgegeben und $f_1 := (z+1)f$ und $f_2 := zf$. Wegen $f_1/f_2 = (z+1)/z$ teilen f_1 und f_2 alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$, die Differenz $f_1 - f_2 = f$ ist jedoch beliebig. Ähnlich kann man mit geeignetem g erreichen, daß der Quotient $(g + 1/z)/g = f$ mit beliebigem f ist. Wieder teilen sich $g + 1/z$ und g alle Grenzwerte und dies sogar bei gleichmäßiger Konvergenzgeschwindigkeit $1/z$. Beide Beispiele sind jedoch insofern trivial, als entweder der Quotient oder die Differenz rationale Funktionen sind. Wir werden in Abschnitt 2.3 ein Beispiel konstruieren, bei dem dies nicht der Fall ist.

Das folgende Lemma ermöglicht die Ahlforssche Theorie zu nutzen.

Dabei ist es von Vorteil folgende Notation einzuführen: Für $M, N \subset \mathbb{C}$ schreiben wir $N \mathrel{\tilde{\subset}} M$, falls $N \setminus M$ beschränkt ist.

Lemma 2.2 *Meromorphe Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ teilen den Grenzwert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit*

$$g^{-1}(\mathbb{D}_\delta(a)) \tilde{\subset} f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a)) \text{ und } f^{-1}(\mathbb{D}_\delta(a)) \tilde{\subset} g^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a)).$$

Beweis. "$\Rightarrow$" Angenommen es gibt ein $\varepsilon > 0$, so daß die Mengen $M_n := g^{-1}(\mathbb{D}_{\frac{1}{n}}(a)) \setminus f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt sind. Wähle $z_n \in M_n$ mit $|z_n| \geq n$. Dann gilt $z_n \to \infty$ und wegen $|g(z_n) - a| < \frac{1}{n}$ auch $g(z_n) \to a$. Da $z_n \notin f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$ gilt $|f(z_n) - a| \geq \varepsilon$ also $f(z_n) \not\to a$, im Widerspruch dazu, daß f und g den Grenzwert a teilen. Symmetrie zeigt die Notwendigkeit.

"$\Leftarrow$" Angenommen es existiert eine Folge $z_n \to \infty$ mit $f(z_n) \to a$ aber $g(z_n) \not\to a$. Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, daß $\varepsilon > 0$ existiert mit $|g(z_n) - a| > \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\{z_n\} \tilde{\subset} f^{-1}(\mathbb{D}_\delta(a))$ für alle $\delta > 0$ und $\{z_n\} \cap g^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a)) = \emptyset$ ist $f^{-1}(\mathbb{D}_\delta(a)) \setminus g^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$ unbeschränkt für alle $\delta > 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Symmetrie zeigt den Rest. $\square$

Das folgende Lemma erleichtert es manchmal nachzuweisen, daß sich f und g alle Grenzwerte teilen.

Lemma 2.3 *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) f und g teilen alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$.

ii) f und g teilen alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_0\}$.

iii) Für alle $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $z_n \to \infty$ gilt: $f(z_n) \to a \Rightarrow g(z_n) \to a$.

Beweis. $i) \Rightarrow ii)$ ist trivial. $ii) \Rightarrow iii)$. O.B.d.A. sei $a_0 = \infty$. Falls $a \in \mathbb{C}$ folgt sofort $f(z_n) \to a \Rightarrow g(z_n) \to a$. Angenommen $f(z_n) \to \infty$ aber $g(z_n) \not\to \infty$. Durch Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir wegen der Kompaktheit von $\widehat{\mathbb{C}}$ annehmen, daß $g(z_n) \to a \in \mathbb{C}$. Es folgt der Widerspruch $f(z_n) \to a \in \mathbb{C}$. $iii) \Rightarrow i)$. Angenommen es gibt $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $z_n \to \infty$ mit $g(z_n) \to a$ aber $f(z_n) \not\to a$. Durch Übergang zu einer Teilfolge und wegen Kompaktheit können wir $f(z_n) \to b \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $b \neq a$ annehmen. Also gilt $g(z_n) \to b$. Widerspruch. $\square$

Weiter benötigen wir die folgende Aussage:

Lemma 2.4 *Es sei $a \in \mathbb{C}$ ein geteilter Grenzwert von f und g. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß g auf $f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$ asymptotisch beschränkt ist. D.h., es existieren $r > 0$ und $M > 0$, so daß für $z \in f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$ mit $|z| > r$ gilt*

$$|g(z)| \leq M.$$

Beweis. Wähle $\varepsilon_1 > 0$. Nach Lemma 2.2 existiert $\varepsilon > 0$ mit $f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a)) \tilde{\subset} g^{-1}(\mathbb{D}_{\varepsilon_1}(a))$. Mit geeignetem $r > 0$ gilt dann für $z \in f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$ mit $|z| > r$:

$$|g(z)| \leq |a| + \varepsilon_1 =: M.$$

□

Zum Schluß dieses Abschnitts führen wir noch einen Begriff ein.

Definition 2.5 Seien f und g meromorphe Funktionen und $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Wir sagen a ist ein *vollständig ungeteilter Grenzwert* für f und g, falls keine Folge $z_n \to \infty$ existiert mit $f(z_n) \to a$ und $g(z_n) \to a$.

Proposition 2.6 *Seien f und g meromorphe Funktionen. Dann ist die Menge der von f und g vollständig ungeteilten Grenzwerte offen.*

Beweis. Es sei $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ Häufungspunkt von nicht vollständig ungeteilten Grenzwerten a_n. Dann gibt es Folgen $z_j^{(n)} \to \infty$ mit $f(z_j^{(n)}) \to a_n$ und $g(z_j^{(n)}) \to a_n$ für $j \to \infty$. Wähle j_n so, daß $|z_{j_n}^{(n)}| > n$, $|f(z_{j_n}^{(n)}) - a_n| < \frac{1}{n}$ und $|g(z_{j_n}^{(n)}) - a_n| < \frac{1}{n}$. Mit $n \to \infty$ gilt dann $z_{j_n}^{(n)} \to \infty$ sowie $f(z_{j_n}^{(n)}) \to a$ und $g(z_{j_n}^{(n)}) \to a$. Die Menge der nicht vollständig ungeteilten Grenzwerte ist also abgeschlossen. □

Proposition 2.7 *Seien f und g transzendente meromorphe Funktionen. Dann gilt für die Menge V aller von f und g vollständig ungeteilten Grenzwerte $V \neq \widehat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Angenommen $V = \widehat{\mathbb{C}}$. Dann sind $f - g$ und f/g nicht transzendent, da sonst Folgen existierten mit $(f - g)(z_n) \to 0$ bzw. $(f/g)(w_n) \to 1$. Nach Übergang zu Teilfolgen erhielte man einen Widerspruch zu $V = \widehat{\mathbb{C}}$. Also gibt es rationale Funktionen R_1, R_2 mit $f - g = R_1$ und $f/g = R_2$. Es folgt dann leicht $g = R_1/(R_2 - 1)$, im Widerspruch zur Transzendenz von g. (Der Fall $R_2 \equiv 1$ ist trivial.) □

Sei f eine ganze transzendente Funktion und $g := e^f + f$. Man zeigt leicht, daß f und g keinen Grenzwert teilen und daß hier $V = \mathbb{C}$ maximale Größe hat. Ein anderes Beispiel ist $f(z) := e^z + e^{-z}$ und $g(z) := e^z - e^{-z}$. Wieder gilt $V = \mathbb{C}$ aber f und g teilen den Grenzwert ∞.

2.2 Wachstumsabschätzungen

Wie beim Werteteilen haben f und g im Fall, daß mindestens drei Grenzwerte geteilt werden, vergleichbare Charakteristiken.

Satz 2.8 *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, welche $q \geq 3$ Grenzwerte teilen. Dann gilt*

$$T(r, f) \leq \frac{q}{q-2} T(r, g) + S(r, f).$$

Beweis. Es seien $a_1, \ldots, a_q$ die geteilten Grenzwerte. Wähle $\varepsilon > 0$ so, daß die Kreisscheiben $\mathbb{D}_\varepsilon(a_1), \ldots, \mathbb{D}_\varepsilon(a_q)$ disjunkte Abschlüsse haben. Gemäß Lemma 2.2 existiert $\delta > 0$ mit $g^{-1}(\mathbb{D}_\delta(a_k)) \tilde{\subset} f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a_k))$ für $k = 1, \ldots, q$. Wir zeigen, daß, bis auf endlich viele, jede Insel von f über $\mathbb{D}_\varepsilon(a_k)$ eine Insel von g über $\mathbb{D}_\delta(a_k)$ enthält. Angenommen es existiert eine Folge von Inseln I_n von f über $\mathbb{D}_\varepsilon(a_k)$, die keine Inseln von g über $\mathbb{D}_\delta(a_k)$ enthalten. Wegen $g^{-1}(\mathbb{D}_\delta(a_k)) \tilde{\subset} f^{-1}(\mathbb{D}_\varepsilon(a_k))$ gilt dann $I_n \cap g^{-1}(\mathbb{D}_\delta(a_k)) = \emptyset$ für $n \geq n_0$. Jedes I_n enthält ein z_n mit $f(z_n) = a_k$, also $f(z_n) \to a_k$. Nun ergibt $|g(z_n) - a_k| \geq \delta$ einen Widerspruch. Es folgt $\overline{n}(r, f, \mathbb{D}_\varepsilon(a_k)) \leq \overline{n}(r, g, \mathbb{D}_\delta(a_k)) + O(1) \leq \overline{n}(r, g, a_k) + O(1)$. Integriert man logarithmisch, so folgt mit Satz 1.3:

$$(q-2) T(r, f) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{N}(r, g, a_k) + S(r, f) \leq q \cdot T(r, g) + S(r, f).$$

□

Korollar 2.9 *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, welche unendlich viele Grenzwerte teilen. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}_+$ von endlichem linearen Maß außerhalb der gilt:*

$$T(r, f) \leq (1 + \varepsilon) T(r, g).$$

Beweis. Unmittelbare Folge von Satz 2.8 mit großem q. □

Das Beispiel f und $g := f^n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$ zeigt, daß zwei geteilte Grenzwerte im allgemeinen für eine Abschätzung der Charakteristiken nicht genügen, denn f und g teilen die Grenzwerte 0 und ∞. Es gilt aber $T(r,g) \sim n \cdot T(r,f)$.

Die Beweise zeigen, daß Grenzwerteteilen eine Art *Inselteilen* impliziert. Identitätssätze gelten jedoch nicht ohne weiteres, da man nicht auf die Existenz einer Nullstelle von $f - g$ in den Inseln schließen kann.

Unter speziellen Annahmen lassen sich die vorangegangenen Ungleichungen verbessern:

Satz 2.10 *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, welche einen Grenzwert $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ teilen. Hat f die Ahlforsschen Ausnahmewerte* 0 *und* ∞*, so gilt:*

$$T(r,f) \leq T(r,g) + S(r,f).$$

Beweis. Da 0 und ∞ Ahlforssche Ausnahmewerte sind, gilt nach Satz 1.3

$$T(r,f) \leq \overline{N}(r,f,\mathbb{D}_\varepsilon(a)) + S(r,f).$$

Der Rest folgt wie im Beweis von Satz 2.8. □

Die Voraussetzungen sind z.B. dann erfüllt, wenn f ganz und nullstellenfrei ist.

Wir geben nun noch einen echten Identitätssatz an. Es ist ein partielles, in dieser Arbeit etwas isoliertes, Resultat. Dennoch finden wir es erwähnenswert. Es stellt sich die Frage ob man die Voraussetzungen (insbesondere bzgl. des Wachstums) abschwächen kann.
Zum Beweis benötigen wir eine einfache Folgerung aus dem Satz von Wiman ([11], S. 224):

Satz 2.11 (Wiman) *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante ganze Funktion mit $\rho(f) < 1/2$ und $M \subset \mathbb{C}$ unbeschränkt und zusammenhängend. Dann ist $f(M)$ unbeschränkt.*

Satz 2.12 *Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nullstellenfreie ganze Funktionen, die alle Grenzwerte aus einer Umgebung von* 0 *teilen. Gilt*

$$\rho_1(f) := \frac{\log\log T(r,f)}{\log r} < \frac{1}{2},$$

so folgt $f = g$.

Beweis. Da $\rho_1(f) < 1/2$ gilt $f = \exp(\varphi)$ mit einer ganzen Funktion φ mit $\rho(\varphi) < 1/2$. Aus der Wachstumsabschätzung aus Satz 2.10 folgt $g = \exp(\psi)$ mit $\rho(\psi) < 1/2$. Sei $\varepsilon > 0$ so, daß $\partial\mathbb{D}_\varepsilon$ in der von f und g geteilten Menge von Grenzwerten enthalten ist. Sei γ eine Komponente von $f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\varepsilon)$. Dann ist γ unbeschränkt und zusammenhängend. Betrachte $f/g = \exp(\varphi - \psi)$. Angenommen $\varphi - \psi$ ist nicht konstant. Da $\rho(\varphi - \psi) < 1/2$ folgt aus dem Satz von Wiman, daß $\Gamma := (\varphi - \psi)(\gamma)$ unbeschränkt (und natürlich zusammenhängend) ist. Weiter gilt $(f/g)(z) \to 1$ für $z \to \infty$ in $f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\varepsilon)$, da $\partial\mathbb{D}_\varepsilon$ kompakt ist, also insbesondere $f/g \to 1$ auf γ. Für alle $\delta > 0$ gilt also $\Gamma \mathrel{\tilde{\subset}} \exp^{-1}(\mathbb{D}_\delta(1))$. Da für geeignetes $\delta > 0$ die Urbildmenge $\exp^{-1}(\mathbb{D}_\delta(1))$ nur aus Inseln besteht, führt dies zu einem Widerspruch. Also ist $\varphi - \psi$ konstant und es folgt $f = g$. $\square$

2.3 Beispiele von Funktionen die alle Grenzwerte teilen

In diesem Abschnitt konstruieren wir eine Familie von ganzen Funktionen f und g, die alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$ teilen aber nicht durch rationale Transformationen ineinander überführbar sind.
Die Konstruktion wurde uns von J.K. Langley [26] mitgeteilt.
Wir benötigen einige technische Vorbereitungen. Sei $a_n \to \infty$ eine komplexe Folge mit $|a_n| \le |a_{n+1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$\operatorname{dist}(r) := \inf\{|a_j - a_k| \mid j \neq k, |a_j| \ge r, |a_k| \ge r\}.$$

Weiter bezeichnen wir für $z \in \mathbb{C}$ mit $k(z)$ den Index so, daß $|z - a_{k(z)}| \le |z - a_j|$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Falls mehrere a_j minimalen Abstand von z haben, wählen wir $k(z)$ maximal.

Lemma 2.13 *Sei $a_n \to \infty$ eine komplexe Folge mit $\operatorname{dist}(r) \to \infty$ für $r \to \infty$. Dann existiert eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\varphi(r) \to \infty$ für $r \to \infty$ so, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ und $j \neq k(z)$ gilt:*

$$|z - a_j| \ge \varphi(|z|).$$

Beweis. Sei $|z| = r$ und $j \in \mathbb{N}$ so, daß a_j den zweitgeringsten Abstand von z hat. (Beachte: $|a_{k(z)} - z| = |a_j - z|$ ist möglich.) Wir nehmen zunächst $|z - a_j| < \frac{r}{2}$ an. Dies zeigt sofort $|a_j|, |a_{k(z)}| \ge \frac{r}{2}$ und damit $|z - a_j| \ge \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\frac{r}{2}\right)$. Sonst ergibt $|a_j - a_{k(z)}| \le |z - a_j| + |z - a_{k(z)}| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\frac{r}{2}\right) = \operatorname{dist}\left(\frac{r}{2}\right)$ einen Widerspruch. Es folgt $|z - a_j| \ge \min\left\{\frac{r}{2}, \frac{1}{2}\operatorname{dist}\left(\frac{r}{2}\right)\right\} =: \varphi(r)$. $\square$

Satz 2.14 *Für jedes $\delta \in [0,1)$ existieren ganze Funktionen f und g mit $\delta = \rho(f) = \rho(g) = \rho(f/g)$, die alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$ teilen.*

Beweis. Wir setzen

$$f(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)$$

mit $a_k := 2^k$ falls $\delta = 0$ und $a_k := k^{1/\delta}$ für $\delta \in (0,1)$. Diese Funktionen sind wohlbekannt und es folgt aus den grundlegenden Resultaten über den Konvergenzexponenten und kanonischen Weierstraß-Produkten, daß $\rho(f) = \delta$ für $\delta \in [0,1)$ (siehe [40]). Weiter wählen wir eine Folge b_k mit $|b_k| = a_k$ und $|b_k - a_k| = \varepsilon_k \to 0$ mit einer positiven Folge ε_k, die wir später festlegen. Wir setzen

$$h(z) := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right).$$

Es ergibt sich sofort, daß die Konvergenzexponenten von f und h übereinstimmen, also $\rho(h) = \delta$. Für große z gilt

$$|f(z)| + |h(z)| \leq \exp(|z|).$$

Auf den Kreisen $|z - a_k| = \frac{1}{2}(a_k - a_{k-1})$ mit großen z und k gilt also

$$\frac{|f(z)|}{|z - a_k|} \leq \frac{\exp(2a_k)}{\frac{1}{2}(a_k - a_{k-1})} \leq \exp(2a_k),$$

da $\frac{1}{2}(a_k - a_{k-1}) \to \infty$. Nun ist $f(z)/(z - a_k)$ holomorph auf $|z - a_k| \leq \frac{1}{2}(a_k - a_{k-1})$. Nach dem Maximumprinzip gilt also auf $|z - a_k| \leq \exp(-3a_k)$ die Abschätzung $|f(z)| \leq \exp(-a_k)$. Dieselbe Ungleichung gilt für h auf $|z - b_k| \leq \exp(-3a_k)$. Wir setzen $\varepsilon_k := \exp(-4a_k)$. Dann gilt

$$|f(z)| \leq \exp(-a_k) \quad \text{und} \quad |h(z)| \leq \exp(-a_k) \tag{7}$$

gleichzeitig auf $|z - c_k| < \frac{1}{2}\exp(-3a_k)$, wobei $c_k := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$. Die Vereinigung dieser Kreisscheiben bezeichnen wir mit E, d.h.,

$$E := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c_k| < \frac{1}{2}\exp(-3a_k)\}.$$

Wir schätzen nun h/f außerhalb von E ab. Dabei bezeichnen wir wieder mit $k(z)$ den Index, so daß $|z - a_{k(z)}|$ minimal wird. Man zeigt leicht, daß die Folge a_k die Voraussetzungen von Lemma 2.13 erfüllt, also gibt es eine Funktion φ mit $\varphi(r) \to \infty$ und $|z - a_j| \geq \varphi(|z|)$ für $j \neq k(z)$. Die Funktion

$$u_k(z) := \frac{z - b_k}{z - a_k}$$

erfüllt

$$|u_k(z) - 1| = \frac{\varepsilon_k}{|z - a_k|}.$$

Wir zeigen $|u_{k(z)}(z) - 1| \to 0$ für $z \to \infty$ außerhalb von E. Sei $z_n \to \infty$ eine Folge außerhalb von E und betrachte $k(z_n)$. Falls $k(z_n)$ beschränkt ist, so auch $a_{k(z_n)}$ und es folgt $|u_{k(z_n)}(z_n) - 1| \to 0$. Falls $k(z_n)$ unbeschränkt ist, können wir annehmen, daß $k(z_n) \to \infty$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} |u_{k(z_n)}(z_n) - 1| &= \frac{\varepsilon_{k(z_n)}}{|z_n - a_{k(z_n)}|} \le 2\frac{\exp(-4a_{k(z_n)})}{\exp(-3a_{k(z_n)}) - \exp(-4a_{k(z_n)})} \\ &\le 12\exp(-a_{k(z_n)}) \to 0, \end{aligned}$$

da $a_{k(z_n)} \to \infty$. Wir haben für $z \notin E$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(z) - 1| \le \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne k(z)}}^{\infty} |u_k(z) - 1| + o(1) \le \frac{1}{\varphi(|z|)} \sum_{k=1}^{\infty} |\varepsilon_k| + o(1) = o(1).$$

Es folgt, daß $v(z) := \prod_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ in $\mathbb{C} \setminus E$ kompakt konvergiert und daß $v(z) \to 1$ für $z \to \infty$ in $\mathbb{C} \setminus E$. Man zeigt leicht, daß

$$\alpha := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{a_k} \ne 0$$

konvergiert, so daß für $z \to \infty$ in $\mathbb{C} \setminus E$ folgt

$$\frac{h(z)}{f(z)} = \frac{v(z)}{\alpha} \to \frac{1}{\alpha}.$$

Wir setzen $g := \alpha h$ und behaupten, daß sich f und g alle Grenzwerte aus $\widehat{\mathbb{C}}$ teilen. Sei $z_n \to \infty$ eine Folge mit $f(z_n) \to a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Aus (7) folgt $z_n \notin E$ für $n \ge n_0$. Das Verhalten von v zeigt $g(z_n) \to a$. Ebenso folgt aus $g(z_n) \to a \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ auch $f(z_n) \to a$. Lemma 2.3 zeigt, daß f und g alle Grenzwerte teilen.

Zunächst gilt $\rho(f/g) \le \delta$. Da die Nullstellen von f auch Nullstellen von f/g sind folgt durch Betrachtung des Konvergenzexponenten $\rho(f/g) = \delta$. □

Betrachtet man $f(z^n)$ und $g(z^n)$ mit den eben konstruierten Funktionen f und g, so erhält man Beispiele für jede beliebige endliche Wachstumsordnung. Falls $F : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine auf E beschränkte meromorphe Funktion ist, so teilen $F \cdot f$ und $F \cdot g$ ebenfalls alle Grenzwerte, wie man durch Betrachtung des Quotienten sofort einsieht. Die Beschränktheit von F auf E ermöglicht dann wieder (7) zu benutzen. Ein solches F läßt sich problemlos mit Sätzen der Approximationstheorie konstruieren.

2.4 Beispiele von Funktionen die endlich viele Grenzwerte teilen

Bei der Konstruktion von Funktionen, die nur endlich viele Grenzwerte teilen, liegt es nahe, wie beim Werteteilen den Ansatz $f = p \circ \varphi$ und $g = q \circ \varphi$ mit $p, q : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ rational und $\varphi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph zu versuchen. Ein bekanntes Beispiel von Gundersen [19] ist

$$f(z) := \frac{e^z + 1}{(e^z - 1)^2} \text{ und } g(z) := \frac{(e^z + 1)^2}{8(e^z - 1)}.$$

Es teilen sich f und g die vier Werte $0, 1, -\frac{1}{8}$ und ∞. Dabei ist $f(z) = p \circ e^z$ und $g(z) = q \circ e^z$ mit

$$p(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)^2} \text{ und } q(z) = \frac{(z + 1)^2}{8(z - 1)}.$$

Da $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sind die Urbilder von p und q bzgl. der geteilten Werte gleich in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, es gilt jedoch $p(0) = 1$, $q(0) = -1/8$, $p(\infty) = 0$ und $q(\infty) = \infty$. Daraus folgt, daß f und g die Grenzwerte $0, 1, -1/8$ und ∞ nicht teilen. Es gilt z.B. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -1/8$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \infty$.
Um die gewünschten Beispiele zu erhalten, müssen sich die rationalen Funktionen p und q die zu teilenden Grenzwerte im Sinne der Werteteilung auf der gesamten Sphäre teilen. Dies zeigt, daß ein Beispiel mit vier geteilten Grenzwerten mit der oben beschriebenen Methode nicht konstruiert werden kann. Es ist nämlich bekannt, daß rationale Funktionen, die vier Werte auf der Sphäre teilen, notwendig identisch sind (siehe [1]). Da uns keine Referenz für einen vollständigen Beweis bekannt ist und wir die zum Beweis nötigen Hilfsmittel zur Diskussion von Beispielen mit drei geteilten Grenzwerten ohnehin benötigen, wollen wir einen kurzen Beweis angeben.

Ist p im Punkt $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ holomorph, so gilt für einen geeigneten lokalen Parameter $p(z) \sim (z - z_0)^n$ (mit geeigneter Modifikation für $z_0 = \infty$). Die Multiplizität von p bei z_0 ist dann $\mathrm{mult}_p(z_0) := n$ und die Verzweigung $r_p(z_0) := \mathrm{mult}_p(z_0) - 1$. Ist $p : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ rational und nicht-konstant, so ist die Verzweigung von p auf $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ definiert: $r_p(M) := \sum_{a\in M} r_p(z)$. Es folgt sofort $r_p(\widehat{\mathbb{C}}) = r_p(M) + r_p(\widehat{\mathbb{C}} \setminus M)$. Der Grad $\deg p$ ist die Anzahl der Urbilder von $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit Vielfachheiten gezählt. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von a. Es gilt also für alle $a \in \widehat{\mathbb{C}}$:

$$\deg p = |p^{-1}(\{a\})| + r_p(p^{-1}(\{a\}))$$

wobei hier $|\cdot|$ die Kardinalität bedeutet. Sind nun $a_1, \ldots, a_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ und setzt man $M := p^{-1}(\{a_1, \ldots, a_n\})$, so erhält man durch Summation: $n \deg p = |M| + r_p(M)$.

Elementar läßt sich zeigen (siehe [24], S. 87) $r_p(\widehat{\mathbb{C}}) = 2\deg p - 2$ für alle rationalen Funktionen. Kombiniert man die letzten Gleichungen, so erhält man

$$(n-2)\deg p = |M| - 2 - r_p(\widehat{\mathbb{C}} \setminus M) \tag{8}$$

Dies ist eine Version der Riemann-Hurwitz-Formel für rationale Funktionen. Die Ähnlichkeit zu den Formeln aus den Sätzen 1.2, 1.3 und 1.4 ist offensichtlich.

Satz 2.15 *Teilen rationale Funktionen $p, q : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ vier Werte, so gilt $p = q$.*

Beweis. Angenommen $p - q$ ist nicht konstant und seien $a_1, \dots, a_4$ die geteilten Werte. Wir dürfen ohne Einschränkung $a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{C}$ annehmen. Dann gilt $M = p^{-1}(\{a_1, \dots, a_4\}) = q^{-1}(\{a_1, \dots, a_4\}) \subset (p-q)^{-1}(\{0\})$. Mit (8) für $n = 4$ folgt

$$\begin{aligned} 2\deg p &\leq |(p-q)^{-1}(\{0\})| - 2 \leq \deg(p-q) - 2 \\ &\leq \deg p + \deg q - 2 \end{aligned}$$

Also $\deg p \leq \deg q - 2$ und wegen Symmetrie $\deg q \leq \deg p - 2$. Addition ergibt den Widerspruch $0 \leq -4$. □

Wie in Proposition 1.11 erwähnt, gilt $T(r, f) \leq 3 \cdot T(r, g) + S(r, f)$, falls zwei transzendente meromorphe Funktionen $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ drei Werte teilen. Siehe dazu [18], wo auch mit einem ähnlichen Beispiel wie oben nachgewiesen wird, daß die Konstante 3 hier bestmöglich ist. Analog erhält man für rationale Funktionen:

Proposition 2.16 *Teilen rationale Funktionen $p, q : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ drei Werte, so gilt*

$$\deg p \leq 3\deg q - 2.$$

Beweis. Für $M := p^{-1}(\{a_1, a_2, a_3\}) = q^{-1}(\{a_1, a_2, a_3\})$ gilt $|M| \leq 3\deg q$. Aus (8) mit $n = 3$ folgt $\deg p \leq 3\deg q - 2$. □

Ein erstes Beispiel zweier verschiedener rationaler Funktionen, die drei Werte auf der Sphäre teilen, wurde in [44] angegeben:

$$p(z) := \frac{(z+1)^3(z-1)}{(z+i)^3(z-i)}, \quad q(z) := \frac{(z+1)(z-1)^3}{(z+i)(z-i)^3}. \tag{9}$$

Man zeigt leicht, daß p und q die Werte $0, 1, \infty$ teilen. Es gilt hier jedoch $\deg p = \deg q$, was zu $T(r, p \circ \varphi) \sim T(r, q \circ \varphi)$ führt.
Wir wollen nun zwei Beispiele angeben, die für die Ungleichung in Proposition 2.16 extremal sind. Wir zeigen damit, daß die Antwort auf eine Frage in [44] (Question III) positiv ist.

Beispiele 2.17 Wir betrachten also rationale Funktionen, die drei Werte auf der Sphäre teilen. Zunächst sei bemerkt, daß, falls $\deg q = 1$, nach Proposition 2.16 $\deg p = 1$ gilt. Es folgt sofort $p = q$. Für den Fall $\deg p = 4$ und $\deg q = 2$ haben wir folgendes Beispiel:

$$p(z) := \frac{(z+1)^3(z-3)}{(z-1)^3(z+3)}, \quad q(z) := \frac{(z+1)(z-3)}{(z-1)(z+3)}; \tag{10}$$

p und q teilen sich $0, 1, \infty$.

Der nächste Extremfall ist $\deg p = 7$ und $\deg q = 3$. Wir können kein solches Beispiel angeben.
Für den Fall $\deg p = 10$ und $\deg q = 4$ haben wir

$$\begin{aligned} p(z) &:= \frac{(z-1)^7(z+3)(z+2-i\sqrt{3})(z+2+i\sqrt{3})}{(z+1)^7(z-3)(z-2+i\sqrt{3})(z-2-i\sqrt{3})} \\ &= \frac{z^{10} - 9z^8 + 42z^6 - 210z^4 + 384z^3 - 315z^2 + 128z - 21}{z^{10} - 9z^8 + 42z^6 - 210z^4 - 384z^3 - 315z^2 - 128z - 21} \end{aligned}$$

und (11)

$$\begin{aligned} q(z) &:= \frac{(z-1)(z+3)(z+2-i\sqrt{3})(z+2+i\sqrt{3})}{(z+1)(z-3)(z-2+i\sqrt{3})(z-2-i\sqrt{3})} \\ &= \frac{z^4 + 6z^3 + 12z^2 + 2z - 21}{z^4 - 6z^3 + 12z^2 - 2z - 21}; \end{aligned}$$

p und q teilen wieder $0, 1, \infty$. Es ist uns nicht gelungen, Beispiele von höherem Grad zu konstruieren.

Sei nun $\varphi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine beliebige transzendente meromorphe Funktion. Dann folgt mit den rationalen Funktionen p, q aus (10) und (11), daß sich

$$f := p \circ \varphi \quad \text{und} \quad g := q \circ \varphi$$

die Werte und die Grenzwerte $0, 1$ und ∞ teilen. Es folgt (siehe [25], Theorem 2.2.5) $T(r, f) = 2 \cdot T(r, g) + S(r, f)$ bzw. $T(r, f) = 2.5 \cdot T(r, g) + S(r, f)$. Satz 2.8 zeigt, daß bei drei geteilten Grenzwerten grundsätzlich $T(r, f) \leq 3 \cdot T(r, g) + S(r, f)$ gilt. Wir vermuten, daß Beispiele im Sinne von 2.17 von beliebig hohem Grad existieren, so daß die Konstante 3 asymptotisch scharf sein dürfte.

Funktionen, die genau vier Grenzwerte teilen, liefert ein Beispiel von Reinders[46]. Es werden dort zwei elliptische Funktionen angegeben, die vier Werte teilen. Wie bereits im Vorwort erwähnt, fallen die Begriffe Werteteilen und Grenzwerteteilen bei elliptischen Funktionen mit gleichen Perioden zusammen. Eine Möglichkeit das

Beispiel von Reinders herzuleiten ist folgende Idee: Man betrachte $p, q : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ rational, die $0, 1, \infty$ teilen. Man ziehe aus p und q die Wurzel, so daß die entstehenden algebraischen Funktionen evtl. die vier Werte $0, 1, -1, \infty$ teilen. Die entstehenden Wurzelterme uniformisiere man mit einer elliptischen Funktion. Die Funktionen p, q aus (10) und (11) sind dafür ungeeignet, da meromorphe Funktionen die vier Werte teilen (bis auf $S(r, f)$) die gleiche Charakteristik haben (Proposition 1.11). Beispiel (9) führt ebenfalls nicht zum Ziel, da hier p und q den Wert 1 mit gleichen Multiplizitäten teilen. Für elliptische Funktionen führt dies zu Widersprüchen zu bekannten Resultaten über geteilte Werte (siehe [19]). Führt man den oben beschriebenen Ansatz jedoch mit

$$p(z) := \frac{(z+1)^3(z-3)}{(z-1)^3(z+3)}, \quad q(z) := \frac{(z+1)(z-3)^3}{(z-1)(z+3)^3} \tag{12}$$

durch, so erhält man mit der elliptischen Funktion $\varphi : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$, welche die Differentialgleichung

$$(\varphi')^2 = (\varphi+1)(\varphi-1)(\varphi+3)(\varphi-3)$$

löst, das Beispiel

$$f = \sqrt{p} \circ \varphi = \varphi' \cdot \frac{\varphi+1}{(\varphi-1)^2(\varphi+3)}, \quad g = \sqrt{q} \circ \varphi = \varphi' \cdot \frac{\varphi-3}{(\varphi-1)(\varphi+3)^2}.$$

Es teilen sich f und g die Werte und die Grenzwerte $0, 1, -1, \infty$. Die hier entstandenen Koeffizienten unterscheiden sich von Reinders ursprünglich gewählten. Der Eindeutigkeitssatz in [46] zeigt jedoch, daß beide Beispiele bis auf Möbius-Transformation identisch sind.

Es gilt $p = q$ mit p, q aus (12) für $z \in \{0, 1, -1, 3, -3, \infty, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$. In 0, 1, -1, 3, -3, ∞ werden die geteilten Grenzwerte angenommen. Für $\varphi \to \pm i\sqrt{3}$ gilt

$$\frac{f}{g} \to \frac{(\pm i\sqrt{3}+1)(\pm i\sqrt{3}+3)}{(\pm i\sqrt{3}-1)(\pm i\sqrt{3}-3)} = -1.$$

Also ist hier die Menge der vollständig ungeteilten Grenzwerte $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, -1, \infty\}$. Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß bei fünf geteilten Grenzwerten die Menge der vollständig ungeteilten Grenzwerte leer ist.

Alle in diesem Abschnitt konstruierten Beispiele haben gemeinsam, daß die geteilten Grenzwerte auch als Werte geteilt werden. Dies ist nicht notwendig. Sind z.B. p_1, p_2, q_1, q_2 rationale Funktionen mit $p_1(\infty) = q_1(\infty) = 1$ und $p_2(\infty) = q_2(\infty) = 0$, so erhält man aus den obigen Beispielen durch $\widetilde{f} := p_1 \cdot f + p_2$, $\widetilde{g} := q_1 \cdot g + q_2$ neue Beispiele, welche die Grenzwerte aber nicht die Werte teilen.

2.5 Ein Fünf-Grenzwerte-Satz

Wir geben zunächst eine Aussage an, die in der Literatur als Zalcman-Lemma [58] bekannt ist. Die Idee geht wesentlich auf Lohwater und Pommerenke [32] zurück.

Lemma 2.18 *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie meromorpher Funktionen in $\mathbb{D}_r$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) $\mathcal{F}$ ist nicht normal in $\mathbb{D}_r$.

ii) Es gibt eine Folge $f_j \in \mathcal{F}$, eine Folge von linearen Transformationen M_j mit $M_j \to c \in \mathbb{D}_r$ kompakt auf ganz $\mathbb{C}$, so daß $f_j \circ M_j \to F$ kompakt auf $\mathbb{C}$ mit einer nicht-konstanten meromorphen Funktion F.

Wir benötigen folgendes Resultat von Lehto [28].

Satz 2.19

i) Es sei f eine transzendente ganze Funktion. Dann existiert eine Folge $w_j \to \infty$ mit

$$|w_j| f^{\#}(w_j) \to \infty.$$

ii) Es sei f eine transzendente meromorphe Funktion. Dann existiert eine Folge $w_j \to \infty$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} |w_j| f^{\#}(w_j) \geq \frac{1}{2}.$$

In diesem Abschnitt benutzen wir nur Aussage ii), welche ohne die scharfe Konstante 1/2 bereits in [29] zu finden ist. Punkt i) des Satzes verwenden wir später im Zusammenhang mit Julia-Richtungen. Wir erwähnen noch, daß i) von Clunie und Hayman [9] wesentlich verschärft wurde. Siehe dazu auch Pommerenke [45].
Wie bereits angekündigt, beweisen wir nun, daß das Teilen von fünf Grenzwerten großen Einfluß auf das asymptotische Verhalten von f und g hat. Ein wichtiges Argument ist dabei der Fünf-Werte-Satz von Nevanlinna.

Satz 2.20 *Seien f und g transzendente meromorphe Funktionen, die fünf Grenzwerte teilen. Dann gibt es zu jedem $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ eine Folge $z_j \to \infty$ mit $f(z_j) \to a$ und $g(z_j) \to a$, d.h., die Menge der vollständig ungeteilten Grenzwerte ist leer.*

Beweis. Nach Satz 2.19, ii) gibt es eine Folge $w_j \to \infty$ mit $\limsup_{j\to\infty} |w_j| f^{\#}(w_j) \geq \frac{1}{2}$. Wir können also $f^{\#}(w_j) \geq (3|w_j|)^{-1}$ annehmen. Wir setzen für $z \in \mathbb{D}$:

$$\Phi_j(z) := w_j |w_j|^{z/(1-z)}.$$

Dann gilt $\Phi_j(0) = w_j$. Weiter bildet $z/(1-z)$ den Einheitskreis auf die Halbebene $\{\operatorname{Re} z \geq -1/2\}$ ab. Damit gilt

$$|\Phi_j(z)| \geq |\Phi_j(-1)| = |w_j||w_j|^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{|w_j|} \to \infty.$$

Wir setzen $f_j := f \circ \Phi_j : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Es folgt

$$\begin{aligned} f_j^{\#}(0) &= |\Phi_j'(0)| f^{\#}(\Phi_j(0)) = |w_j| \log |w_j| f^{\#}(w_j) \\ &\geq |w_j| \log |w_j| \cdot \frac{1}{3|w_j|} = \frac{1}{3} \cdot \log |w_j| \to \infty. \end{aligned}$$

Also besitzt f_j keine konvergente Teilfolge, denn $f_j \to F$ impliziert $f_j^{\#} \to F^{\#}$.

Gemäß dem Zalcman-Lemma existiert eine Folge von linearen Transformationen $M_j \to c \in \mathbb{D}$ (hier kann sogar $c = 0$ gewählt werden), so daß für eine Teilfolge $f_j \circ M_j \to F$ kompakt auf $\mathbb{C}$ mit F meromorph und nicht-konstant gilt. Wir behaupten, daß $g_j \circ M_j$ normal auf $\mathbb{C}$ ist. Angenommen dies gilt nicht und $g_j \circ M_j$ ist nicht normal auf $\mathbb{D}_r$ mit $r > 0$. Das Zalcman-Lemma liefert eine Folge von linearen Transformationen $T_j \to d \in \mathbb{D}_r$, so daß eine Teilfolge $g_j \circ M_j \circ T_j$ kompakt auf $\mathbb{C}$ gegen eine nicht-konstante meromorphe Funktion H konvergiert. Da $f_j \circ M_j$ auf ganz $\mathbb{C}$ kompakt gegen F konvergiert, gilt $f_j \circ M_j \circ T_j \to F(d)$ kompakt auf $\mathbb{C}$. Seien $a_1, \ldots, a_5$ die fünf geteilten Grenzwerte. Da H nicht konstant ist, nimmt H einen der geteilten Grenzwerte an. O.B.d.A. sei $H(z_0) = a_1$. Dann gilt also $z_j := \Phi_j \circ M_j \circ T_j(z_0) \to \infty$ und $g(z_j) \to a_1$. Da a_1 geteilter Grenzwert ist, gilt $f(z_j) \to a_1$ und damit $F(d) = a_1$. Es folgt $f \circ \Phi_j \circ M_j \circ T_j(z) \to a_1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und damit wegen $\Phi_j \circ M_j \circ T_j(z) \to \infty$ auch $g \circ \Phi_j \circ M_j \circ T_j(z) \to a_1$, im Widerspruch zu $H \neq \text{const}$.
Es konvergiert also eine Teilfolge $g_j \circ M_j$ kompakt auf $\mathbb{C}$ gegen eine meromorphe Funktion G.

Sei nun a_i einer der fünf geteilten Grenzwerte von f und g und $F(z_0) = a_i$. Dann gilt $z_j := \Phi_j \circ M_j(z_0) \to \infty$ und $f(z_j) \to a_i$. Also auch $g(z_j) \to a_i$ und damit $G(z_0) = a_i$. Ein Symmetrieargument zeigt, daß F und G die fünf geteilten Grenzwerte als Werte teilen. Da F nicht konstant ist, gilt nach dem Fünf-Werte-Satz von Nevanlinna $F = G$. Nach dem Satz von Picard gibt es zu jedem $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen ein $z_a \in \mathbb{C}$ mit $F(z_a) = a$ und damit die Folge $z_j^a := \Phi_j \circ M_j(z_a) \to \infty$ mit $f(z_j^a) \to a$. Wegen $F = G$ gilt dann auch $g(z_j^a) \to a$. Da die Menge der vollständig ungeteilten Grenzwerte offen ist (Proposition 2.6), gibt es auch zu den möglichen zwei Ausnahmewerten entsprechende Folgen. $\square$

Falls f und g ganz sind, so sind auch F und G ganz. Es folgt:

Satz 2.21 *Seien f und g zwei ganze transzendente Funktionen, die vier endliche Grenzwerte teilen, so gibt es zu jedem $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ eine Folge $z_j \to \infty$ mit $f(z_j) \to a$ und $g(z_j) \to a$.*

Das obige Beweisverfahren gibt zu jedem Identitätssatz bzgl. des Werteteilens ohne Multiplizitäten (von mindestens drei Werten) eine entsprechende Aussage zum Grenzwerteteilen. Es gilt z.B. (siehe [36]):

Satz 2.22 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und nicht-konstant. Teilen f und f' drei endliche Werte, so gilt $f = f'$.*

Daraus folgt:

Satz 2.23 *Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendent und meromorph. Teilen f und f' drei endliche Grenzwerte, so gibt es zu jedem $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ eine Folge $z_j \to \infty$ mit $f(z_j) \to a$ und $f'(z_j) \to a$.*

Ein wichtiges technisches Hilfsmittel in den Beweisen ist die Abbildung Φ_j. Sie ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{|z| \leq \sqrt{|w_j|}\}$. Es überrascht nicht, daß Φ_j in gewissem Sinn extremal ist für die scharfe Form des Landauschen Satzes von Hayman [20]. Wir werden im dritten Kapitel die Abbildung Φ_j noch einmal im Zusammenhang mit alternativen Beweisen von Satz 1.6, ii) und iii) benutzen.

2.6 Fortsetzbarkeit des Grenzwerteteilens

Wir verlangen nun, daß f und g alle Grenzwerte aus einer offenen Menge teilen. Wie sich zeigt, müssen dann f und g bereits alle Grenzwerte aus $\widehat{\mathbb{C}}$ teilen. Wir beschreiben kurz die Idee des Beweises in einem Spezialfall.
Sei also $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ die offene geteilte Menge von Grenzwerten. O.B.d.A. sei $\mathbb{D}_r^c \subset M$ für ein $r > 0$. Es bleibt zu zeigen, daß f und g alle Werte aus $\mathbb{D}_r$ teilen. Falls $f^{-1}(\mathbb{D}_r)$ und $g^{-1}(\mathbb{D}_r)$ nur aus Inseln bestehen (dies ist unsere spezielle Annahme), folgt aus dem Maximumprinzip, daß $(f-g)(z) \to 0$ für $z \to \infty$ in diesen Inseln. Denn es gilt $\partial f^{-1}(\mathbb{D}_r) \subset f^{-1}(\partial\mathbb{D}_r)$ und da $\partial\mathbb{D}_r \subset M$ kompakt ist, gilt $f - g \to 0$ auf $\partial f^{-1}(\mathbb{D}_r)$. Symmetrie zeigt, daß f und g alle Grenzwerte aus $\mathbb{D}_r$ teilen.
Das mögliche Auftreten von Zungen bereitet einige Schwierigkeiten. Wir verfolgen jedoch im wesentlichen die obige Strategie, dazu benötigen wir jedoch Aussagen, die als Ersatz für das Maximumprinzip im Fall von unbeschränkten Mengen dienen können. In der Literatur sind solche Aussagen als *universelle Phragmén-Lindelöf*

Sätze bekannt (siehe [13]). Der folgende Satz wurde von Newman [41] vermutet und von Fuchs [15] bewiesen.

Satz 2.24 *Sei G ein unbeschränktes Gebiet und f holomorph auf G so, daß für jeden endlichen Randpunkt $w \in \partial G$ gilt*

$$\limsup_{z \to w, z \in G} |f(z)| \leq 1.$$

Weiter sei

$$M_G(r, f) := \sup_{z \in \partial \mathbb{D}_r \cap G} |f(z)|.$$

Falls $\liminf_{r \to \infty} M_G(r, f)/r = 0$*, so gilt* $|f(z)| \leq 1$ *für alle* $z \in G$*.*

Das bemerkenswerte an diesem Satz ist, daß keinerlei topologische Anforderungen an das Gebiet G gestellt werden. Die Wachstumsbedingung gilt also *universell*.
Weiter benötigen wir eine allgemeine Version eines Satzes von Lindelöf (siehe z.B. [11], S. 226), der besagt, daß z.B. in einem Winkelraum jede beschränkte holomorphe Funktion, die auf dem Rand für $z \to \infty$ gegen 0 geht, auch im Inneren des Winkelraums gegen 0 konvergiert. Eine solche Aussage ergibt sich aus dem folgenden Satz von Sakai [49] (siehe auch [13]).

Satz 2.25 (Sakai) *Sei G ein unbeschränktes Gebiet mit unbeschränktem Rand und f auf G holomorph. Gilt für jeden Randpunkt $w \in \partial G$ mit $w \notin \overline{\mathbb{D}}$ bei Annäherung in $G \setminus \overline{\mathbb{D}}$:*

$$\limsup_{z \to w} |f(z)| \leq 1$$

und gilt

$$|f(z)| \leq a|z|^b$$

in $G \setminus \mathbb{D}$ mit $a, b > 0$ geeignet, so folgt

$$\limsup_{z \to \infty, z \in G} |f(z)| \leq 1.$$

Korollar 2.26 *Sei G ein unbeschränktes Gebiet mit unbeschränktem Rand und f auf $\overline{G}$ stetig und beschränkt sowie holomorph in G. Konvergiert f auf dem Rand gegen 0, d.h., gilt*

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \partial G}} f(z) = 0,$$

so konvergiert f auch in G gegen 0:

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in G}} f(z) = 0.$$

Beweis. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $r > 0$, so daß $\frac{1}{\varepsilon}f(rz)$ auf $\frac{1}{r}G$ die Bedingungen von Satz 2.25 erfüllt, also $\limsup_{z\to\infty, z\in G}|f(z)| \leq \varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung. □

Damit können wir den angestrebten Satz beweisen.

Satz 2.27 *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, die alle Grenzwerte aus einer offenen Menge teilen. Dann teilen f und g alle Grenzwerte aus $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Es sei $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ die offene geteilte Menge und o.B.d.A. $\mathbb{D}_r^c \subset M$. Wir betrachten $f^{-1}(\mathbb{D}_r)$. Nach den einleitenden Bemerkungen dieses Abschnitts reicht es, die unbeschränkten Komponenten von $f^{-1}(\mathbb{D}_r)$ zu untersuchen. Angenommen, es existiert eine Folge $z_n \to \infty$ mit $f(z_n) \to a \in \mathbb{D}_r$ aber $g(z_n) \not\to a$. Es gibt dann wie erwähnt eine Teilfolge z_n, die in den unbeschränkten Komponenten von $f^{-1}(\mathbb{D}_r)$ liegt. Sei Z_n die Komponente in der z_n liegt. Falls die Z_n nach ∞ wandern, dann gilt

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\partial f^{-1}(\mathbb{D}_r)}} (f-g)(z) = 0.$$

Weiter ist $f - g$ auf $f^{-1}(\mathbb{D}_r)$ asymptotisch beschränkt. Denn sonst gibt es eine Folge $w_n \to \infty$ in $f^{-1}(\mathbb{D}_r)$ mit $g(w_n) \to \infty$ aber $f(w_n)$ beschränkt, was im Widerspruch dazu steht, daß f und g den Grenzwert ∞ teilen. Nach Satz 2.24 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{z\in Z_n}(f-g)(z) = 0,$$

was $(f-g)(z_n) \not\to 0$ widerspricht. Also liegen fast alle z_n in einer festen Zunge Z. Da

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in\partial Z}} (f-g)(z) = 0$$

und $f - g$ auf Z asymptotisch beschränkt ist, gilt nach Korollar 2.26

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in Z}} (f-g)(z) = 0,$$

im Widerspruch zu $(f-g)(z_n) \not\to 0$. Symmetrie zeigt die Behauptung. □

2.7 Eine Verallgemeinerung

Eine natürliche Verallgemeinerung des Grenzwerteteilens ist es, vorauszusetzen, daß für $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen eine Funktion $\varphi : M \to \widehat{\mathbb{C}}$ existiert mit

$$f(z_n) \to a \in M \iff g(z_n) \to \varphi(a) \in \varphi(M).$$

Wir werden zeigen, daß dann φ notwendig eine schlichte Abbildung ist. Es besteht jedoch keine große Vielfalt bzgl. der wirklich auftretenden Funktionen φ. Wir beweisen, daß φ die Restriktion einer Möbius-Transformation auf M ist und, daß sich das Grenzwerteverhalten von f und g in naheliegender Weise auf ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ fortsetzt.

Lemma 2.28 *Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ und $\varphi : M \to \widehat{\mathbb{C}}$ so, daß für alle Folgen $z_n \to \infty$ gilt:*

$$f(z_n) \to a \in M \Rightarrow g(z_n) \to \varphi(a).$$

Dann ist φ stetig.

Beweis. Sei $a \in M$ und a_k eine Folge in M mit $a_k \to a$. O.B.d.A. nehmen wir $a, \varphi(a), a_k, \varphi(a_k) \in \mathbb{C}$ an. Wähle eine Folge $z_n^{(k)} \to \infty$ mit $f(z_n^{(k)}) \to a_k$ für $n \to \infty$ und somit $g(z_n^{(k)}) \to \varphi(a_k)$. Sei nun n_k so, daß $|f(z_{n_k}^{(k)}) - a_k| < \frac{1}{k}$, $|g(z_{n_k}^{(k)}) - \varphi(a_k)| < \frac{1}{k}$ und $|z_{n_k}^{(k)}| \geq k$. Dann gilt $z_{n_k}^{(k)} \to \infty$ mit $k \to \infty$ und $f(z_{n_k}^{(k)}) \to a$. Also $g(z_{n_k}^{(k)}) \to \varphi(a)$ und somit auch $\varphi(a_k) \to \varphi(a)$. □

Bemerkenswert ist, daß nicht einmal die Stetigkeit von f und g benutzt wurde. Der vorausgegangene Beweis läßt sich also unter viel allgemeineren Voraussetzungen durchführen. Wir verzichten jedoch hier darauf.

Weniger offensichtlich ist, daß φ meromorph sein muß.

Lemma 2.29 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.28 mit offenem $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ist $\varphi : M \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph.*

Beweis. Sei $a \in M$. Ohne Einschränkung nehmen wir $a \in \mathbb{C}, \varphi(a) \in \mathbb{C}$ und $\varphi \neq \infty$ auf $\overline{\mathbb{D}}_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon > 0$ geeignet an. Der Fünf-Insel-Satz zeigt, daß, bis auf höchstens vier Ausnahmepunkte, zu jedem $a \in M$ (nach eventueller Verkleinerung von $\varepsilon > 0$) f unendlich viele schlichte Inseln über $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$ besitzt. Seien I_n eine Folge schlichter Inseln von f über $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$ und $f_n^{-1} : \mathbb{D}_\varepsilon(a) \to I_n$ die entsprechenden Zweige der Umkehrfunktion von f. Wir betrachten $F_n : \mathbb{D}_\varepsilon(a) \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $F_n := g \circ f_n^{-1}$. Nun ist g auf $I := \bigcup I_n$ asymptotisch beschränkt. Sonst gibt es eine Folge $z_n \in I$ mit $z_n \to \infty$ und $g(z_n) \to \infty$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir $f(z_n) \to b \in \overline{\mathbb{D}}_\varepsilon(a)$ annehmen. Es folgt $\varphi(b) = \lim_{n\to\infty} g(z_n) = \infty$ im Widerspruch zur Wahl von ε. Also ist F_n eine normale Folge und konvergiert punktweise gegen die stetige Funktion $\varphi|_{\mathbb{D}_\varepsilon(a)}$. Nach dem Satz von Vitali konvergiert F_n kompakt. Also ist φ holomorph auf $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$. Die Stetigkeit von φ zeigt die Hebbarkeit der vier möglichen Ausnahmepunkte. □

Satz 2.30 *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$ offen und $\varphi : M \to \widehat{\mathbb{C}}$ derart, daß für jede Folge $z_n \to \infty$ gilt:*

$$f(z_n) \to a \in M \Longleftrightarrow g(z_n) \to \varphi(a) \in \varphi(M).$$

Dann läßt sich φ zu einer Möbius-Transformation fortsetzen und es gilt

$$f(z_n) \to a \in \widehat{\mathbb{C}} \Longleftrightarrow g(z_n) \to \varphi(a) \in \widehat{\mathbb{C}},$$

d.h., $\varphi \circ f$ und g teilen alle Grenzwerte.

Beweis. O.B.d.A. sei $\mathbb{D}^c \subset M$ und $\varphi(\infty) = \infty$, d.h., f und g teilen den Grenzwert ∞. Wir zeigen zunächst, daß φ nach ganz $\widehat{\mathbb{C}}$ holomorph fortgesetzt werden kann. Angenommen die Potenzreihenentwicklung von φ um ∞ hat den Konvergenzkreis $\partial\mathbb{D}_r$ mit $0 < r < 1$. Sei $a \in \partial\mathbb{D}_r$. Wir wählen ε mit $0 < \varepsilon < r$ und betrachten die offenen Ringsektoren

$$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid r - \varepsilon < |z| < 2, |\arg z - \arg a| < \varepsilon\}.$$

Nach dem Fünf-Insel-Satz gibt es höchstens vier Punkte $a \in \partial\mathbb{D}_r$ derart, daß f für alle $\varepsilon > 0$ nur endlich viele schlichte Inseln über $U_\varepsilon(a)$ besitzt. Sei a zunächst kein solcher Ausnahmepunkt. Dann gibt es eine Folge I_n schlichter Inseln über $U_\varepsilon(a)$ mit $\varepsilon > 0$ geeignet. Es seien wieder $f_n^{-1} : U_\varepsilon(a) \to I_n$ die entsprechenden Zweige der Umkehrfunktion. Da f und g den Grenzwert ∞ teilen, zeigt man wieder, daß g auf $f^{-1}(U_\varepsilon(a))$ asymptotisch beschränkt ist. Damit ist die Folge $F_n := g \circ f_n^{-1}$ normal auf $U_\varepsilon(a)$ und konvergiert auf dem in $\mathbb{D}^c$ gelegenen Teil von $U_\varepsilon(a)$ gegen φ. Nach dem Satz von Vitali konvergiert F_n auf ganz $U_\varepsilon(a)$ gegen die Fortsetzung von φ.

Sei nun $a \in \partial\mathbb{D}_r$ so, daß f über allen $U_\varepsilon(a)$ nur endlich viele schlichte Inseln besitzt. Wir bezeichnen mit $V_{\varepsilon,\delta}(a)$ die verbundenen Ringsektoren $V_{\varepsilon,\delta}(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \overline{U_\delta(a)}$ mit $\delta < \varepsilon$.

Wir behaupten, daß ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß f für alle $\delta \in (0, \varepsilon)$ unendlich viele schlichte Inseln über $V_{\varepsilon,\delta}(a)$ besitzt. Angenommen solch ein ε existiert nicht. Wähle zu $\varepsilon_1 > 0$ ein $\delta_1 > 0$, so daß f über $V_{\varepsilon_1,\delta_1}(a)$ nur endliche viele schlichte Inseln besitzt. Zu $\varepsilon_2 > 0$ mit $\varepsilon_2 < \delta_1$ wähle δ_2, so daß f nur endlich viele schlichte Inseln über $V_{\varepsilon_2,\delta_2}(a)$ besitzt usw. Da die $V_{\varepsilon_k,\delta_k}(a)$ Jordangebiete mit disjunkten Abschlüssen sind, bricht das Verfahren nach dem Fünf-Insel-Satz spätestens nach drei Wiederholungen ab und wir erhalten einen Widerspruch. (Beachte: f besitzt nur endlich viele schlichte Inseln über jedem $U_\varepsilon(a)$.) Also existiert $\varepsilon > 0$, so daß f für alle $\delta > 0$ unendlich viele schlichte Inseln über $V_{\varepsilon,\delta}(a)$ besitzt. Wie oben zeigt man, daß φ für alle δ mit $\varepsilon > \delta > 0$ nach $\overline{\mathbb{D}_r^c} \cup V_{\varepsilon,\delta}(a)$ fortsetzbar ist. Nun zeigt $\delta \to 0$, daß a eine isolierte Singularität für φ ist. Da ∞ geteilter Grenzwert ist, ist g auf $\cup_{0<\delta<\varepsilon} f^{-1}(V_{\varepsilon,\delta}(a))$ asymptotisch beschränkt. Daraus folgt, daß φ bei a beschränkt ist. Also ist φ auch nach a fortsetzbar. Also ist der Konvergenzkreis von φ um ∞

nicht endlich, d.h., φ ist holomorph in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. In den Nullpunkt setzt man wieder wegen Beschränktheit fort. Also ist $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ rational mit einem einzigen Pol in ∞. Dieser ist einfach, da φ in einer Umgebung von ∞ bijektiv ist. Also ist φ ein Polynom erster Ordnung. Betrachtet man $\widetilde{f} := \varphi \circ f$ und g, so teilen sich $\widetilde{f}$ und g alle Werte in M. Nach Satz 2.27 teilen $\widetilde{f}$ und g alle Grenzwerte aus $\widehat{\mathbb{C}}$, womit der Rest der Behauptung folgt. $\square$

Wir verallgemeinern den vorangegangenen Satz und benötigen dazu folgende Charakterisierung für das Teilen aller Grenzwerte. Dies könnte also als zusätzlicher Punkt zu Lemma 2.3 hinzugefügt werden.

Lemma 2.31 *Seien f und g meromorphe Funktionen, die einen Grenzwert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ teilen. Existiert eine Umgebung $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$, so daß für alle $b \in \mathbb{D}_\varepsilon(a)$ und alle Folgen $z_n \to \infty$ gilt:*

$$f(z_n) \to b \Rightarrow g(z_n) \to b,$$

dann teilen f und g alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. O.B.d.A. teilen f und g den Grenzwert $a = 0$. Nach Lemma 2.2 existiert dann ein δ mit $0 < \delta < \varepsilon$, so daß $g^{-1}(\mathbb{D}_\delta) \tilde{\subset} f^{-1}(\mathbb{D}_{\varepsilon/2})$. Angenommen es existiert eine Folge $z_n \to \infty$ mit $g(z_n) \to b \in \mathbb{D}_\delta$ aber $f(z_n) \not\to b$. Dann existiert eine Teilfolge $z_n \to \infty$ mit $f(z_n) \to c \neq b$. Da $\{z_n\} \tilde{\subset} f^{-1}(\mathbb{D}_{\varepsilon/2})$ folgt $c \in \mathbb{D}_\varepsilon$ und damit $g(z_n) \to c$. Widerspruch. Also teilen f und g alle Grenzwerte in $\mathbb{D}_\delta$ und damit nach Satz 2.27 alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$. $\square$

Satz 2.32 *Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, die den Grenzwert ∞ teilen. Weiter sei M eine Umgebung von ∞ und $\varphi : M \to \widehat{\mathbb{C}}$ so, daß für alle $z_n \to \infty$ gilt:*

$$f(z_n) \to a \in M \Rightarrow g(z_n) \to \varphi(a).$$

Dann läßt sich φ zu einem Polynom fortsetzen und $\varphi \circ f$ und g teilen alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Die Fortsetzbarkeit von φ zu einem Polynom folgt wie im vorangegangenen Satz. Wir können jedoch nicht schließen, daß $\deg \varphi = 1$.
Wir setzen $K := \max_{z \notin M} |\varphi(z)| < \infty$ und wählen $R > K$. Dann gilt $\varphi^{-1}(\overline{\mathbb{D}}_R^c) \subset M$. Weiter teilen sich $\varphi \circ f$ und g den Grenzwert ∞, da $\varphi^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$. Sei nun $a \in \overline{\mathbb{D}}_R^c$ und $z_n \to \infty$ so, daß $\varphi \circ f(z_n) \to a$. Dann sind alle Häufungspunkte von $f(z_n)$ enthalten in $\varphi^{-1}(\{a\}) \subset M$. Nach Voraussetzung gilt daher

$g(z_n) \to \varphi(\varphi^{-1}(\{a\})) = a$. D.h., mit der Umgebung $\overline{\mathbb{D}}_R^c$ von ∞ sind die Voraussetzungen von Lemma 2.31 erfüllt. Also teilen $\varphi \circ f$ und g alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$. $\square$

Wichtig ist, daß der Grenzwert ∞ geteilt wird. Es lassen sich etwa mit einem Approximationssatz von Arakelian (siehe [16]) ganze Funktionen g konstruieren mit

$$\exp(z_n) \to a \in \mathbb{D} \Rightarrow g(z_n) \to \varphi(a)$$

mit einer (beliebigen) holomorphen Funktion $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, die stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$ ist.

Setzt man voraus, daß φ global definiert ist, so erhält man:

Satz 2.33 *Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen und $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ so, daß für alle $z_n \to \infty$ gilt:*

$$f(z_n) \to a \in \widehat{\mathbb{C}} \Rightarrow g(z_n) \to \varphi(a).$$

Dann ist φ rational und $\varphi \circ f$ und g teilen alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. Lemma 2.29 zeigt sofort, daß φ rational ist. Sei nun $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $z_n \to \infty$ so, daß $\varphi \circ f(z_n) \to a$. Wieder sind alle Häufungspunkte von $f(z_n)$ in $\varphi^{-1}(\{a\})$ enthalten. Nach Voraussetzung gilt daher $g(z_n) \to \varphi(\varphi^{-1}(\{a\})) = a$. Also teilen $\varphi \circ f$ und g alle Grenzwerte in $\widehat{\mathbb{C}}$. $\square$

Durch Kontraposition von Satz 2.32 erhalten wir noch:

Korollar 2.34 *Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen. Weiter sei M offen und $\varphi : M \to \widehat{\mathbb{C}}$ so, daß für alle $z_n \to \infty$ gilt:*

$$f(z_n) \to a \in M \Rightarrow g(z_n) \to \varphi(a).$$

Ist φ nicht die Einschränkung eines Möbiustransformierten Polynoms, so gibt es zu jedem $a \in M$ eine Folge $z_n \to \infty$ mit $g(z_n) \to \varphi(a)$ aber $f(z_n) \not\to a$.

2.8 Julia-Richtungen und Juliasche Ausnahmefunktionen

Eine Folge von Kreisscheiben

$$\mathbb{D}_j := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_j| < \varepsilon_j |z_j|\} \tag{13}$$

mit $z_j \to \infty$ und $\varepsilon_j \to 0$ wird als eine Folge von *filling disks* für $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph bezeichnet, falls f auf jeder unendlichen Vereinigung $\bigcup \mathbb{D}_{j_k}$ alle Werte in $\widehat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft animmt. Man kann also in gewissem Sinn sagen, daß auf den (kleinen) Mengen $\bigcup \mathbb{D}_{j_k}$ der Satz von Picard gelten soll. Jede ganze transzendente Funktion besitzt eine Folge von filling disks. Die Folge z_j wählt man dabei so, daß $f^{\#}(z_j)$ möglichst groß ist. Satz 2.19 zeigt die Existenz einer Folge z_j mit $M_j := |z_j| f^{\#}(z_j) \to \infty$. Setzt man z.B. $\varepsilon_j := 1/\sqrt{M_j}$ und betrachtet auf $\mathbb{D}$ die meromorphen Funktionen

$$f_j(z) := f(\varepsilon_j |z_j| z + z_j),$$

so gilt $f_j^{\#}(0) = \varepsilon_j |z_j| f^{\#}(z_j) = \sqrt{M_j} \to \infty$. Also besitzt f_j keine konvergente Teilfolge. Damit nimmt jede Teilfolge von f_j nach dem Satz von Montel alle Werte aus $\widehat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft an. D.h., f nimmt auf jeder Teilfolge $\mathbb{D}_{j_k}$ alle Werte mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft an.
Die Funktionen f_j sind ähnlich wie in Abschnitt 2.5 von der Form $f_j = f \circ \Phi_j$. Für $\Phi_j : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ gilt dabei $\Phi_j(\mathbb{D}) \to \infty$, d.h., die Bildgebiete der Φ_j gehen gegen ∞.

Es besteht einer enger Zusammenhang zum Teilen von Grenzwerten:

Lemma 2.35 *Es seien f und g transzendente meromorphe Funktionen, die drei Grenzwerte teilen und Φ_j:$\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph, so daß die Bilgebiete $\Phi_j(\mathbb{D})$ nach ∞ gehen. Weiter seien $f_j := f \circ \Phi_j$ und $g_j := g \circ \Phi_j$. Dann ist f_j normal in $\mathbb{D}$ genau dann, wenn g_j normal in $\mathbb{D}$ ist.*

Beweis. Angenommen, f_j ist nicht normal in $\mathbb{D}$ aber g_j normal. Nach dem Zalcman-Lemma existiert eine Folge linearer Transformationen $M_j \to c \in \mathbb{D}$, so daß nach Übergang zu einer Teilfolge j der natürlichen Zahlen $f_j \circ M_j \to F$ kompakt auf $\mathbb{C}$ mit einer nicht-konstanten meromorphen Funktion F.

Da g_j normal ist, konvergiert eine Teilfolge $g_j \to G$ mit einer in $\mathbb{D}$ meromorphen Funktion G und damit $g_j \circ M_j \to G(c)$ kompakt auf $\mathbb{C}$. Da F nicht konstant ist, nimmt F einen der drei geteilten Grenzwerte a_1, a_2, a_3 an, o.B.d.A. $F(z_0) = a_1$. Es gilt also $f_j \circ M_j(z_0) = f \circ \Phi_j \circ M_j(z_0) \to a_1$. Aus den Eigenschaften von M_j und Φ_j folgt $z_j := \Phi_j \circ M_j(z_0) \to \infty$. Da a_1 geteilter Grenzwert von f und g ist, folgt $g(z_j) = g_j \circ M_j(z_0) \to a_1$ und somit $G(c) = a_1$. Es gilt also $g_j \circ M_j(z) \to a_1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und wegen $\Phi_j \circ M_j(z) \to \infty$ dann auch $f_j \circ M_j(z) \to a_1$. Daraus folgt $F \equiv a_1$ im Widerspruch zu $F \neq$ const. $\square$

Falls f eine ganze Funktion ist, so ist die aus dem Zalcman-Lemma resultierende Funktion F ebenfalls ganz. Damit ergibt sich:

Lemma 2.36 *Seien f und g ganze transzendente Funktionen, die zwei endliche Grenzwerte teilen. Weiter seien Φ_j, f_j und g_j wie in Lemma 2.35. Dann ist f_j normal in $\mathbb{D}$, genau dann, wenn g_j normal in $\mathbb{D}$ ist.*

Es besitze nun eine meromorphe Funktion f eine Folge von filling disks mit Mittelpunkten z_j. Ist α ein Häufungspunkt der Folge $\arg z_j$, so liegen in jedem Winkelraum

$$J_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z - \alpha| < \varepsilon\}$$

um den Strahl $J := \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \alpha\}$ unendlich viele filling disks, f nimmt daher in jedem J_ε jeden Wert mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft an.

Definition 2.37 Seien f eine transzendente meromorphe Funktion und J ein Strahl so, daß f in jedem Winkelraum J_ε um J jeden Wert mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft animmt. Dann heißt J *Julia-Richtung* von f.

Es folgt aus der oben gezeigten Existenz von filling disks, daß jede ganze Funktion eine Julia-Richtung besitzt.
Bei meromorphen Funktionen sind die Verhältnisse komplizierter. Man kann nicht auf die Existenz von Folgen z_j mit $|z_j|f^\#(z_j) \to \infty$ schließen. In der Tat gibt es meromorphe Funktionen mit

$$f^\#(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \tag{14}$$

in ganz $\mathbb{C}$. Funktionen, die (14) genügen, werden als *Juliasche Ausnahmefunktionen* bezeichnet [43] und sind äquivalent zu den von Lehto und Virtanen ([29], Theorem 3) betrachteten schwach normalen Funktionen.
Die Bedingung (14) hat großen Einfluß auf das Verhalten von $T(r,f)$. Wegen $A(r,f) = \int_{\mathbb{D}_r}(f^\#(z))^2 dz$ folgt mit (2) aus (14) völlig elementar $T(r,f) = O((\log r)^2)$. Man kann also sicher sagen, daß Juliasche Ausnahmefunktionen von sehr geringem Wachstum sind, insbesondere haben sie die Wachstumsordnung 0. Wir werden uns später eingehender mit Juliaschen Ausnahmefunktionen beschäftigen.
Falls also

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{T(r,f)}{(\log r)^2} = \infty, \tag{15}$$

so gilt nicht (14), es gibt also eine Folge $z_j \to \infty$ mit $|z_j|f^\#(z_j) \to \infty$. Somit besitzt f nach der obigen Argumentation eine Folge von filling disks und damit eine Julia-Richtung.

Für ganze transzendente Funktionen und meromorphe Funktionen f mit (15) kann man also auf die oben beschriebene Weise die Existenz einer Julia-Richtung nachweisen. Eine Julia-Richtung muß jedoch nicht von filling disks erzeugt werden. Ein Beispiel einer meromorphen Funktion f mit (14) und einer Julia-Richtung wird in [60] gegeben. Wir werden später sehen, daß Juliasche Ausnahmefunktionen keine filling disks besitzen, die Julia-Richtung in diesem Beispiel kann also nicht von filling disks erzeugt sein. Ein Beispiel einer ganzen Funktion mit einer Julia-Richtung ohne filling disks wurde in [5] gegeben. Wir wollen in Anlehnung an [5] eine Julia-Richtung, die durch eine Folge von filling disks erzeugt wird, eine *Milloux-Richtung* nennen.

Ein Nachteil der in (13) definierten filling disks ist, daß man nicht umgekehrt darauf schließen kann, daß die oben betrachteten f_j nicht normal in $\mathbb{D}$ sind. So lassen sich mit Sätzen aus der Approximationstheorie problemlos zu vorgegebenen Kreisen (13) Funktionen f konstruieren, so daß sich die f_j im wesentlichen wie $j \cdot z^j$ verhalten. Die $\mathbb{D}_j$ sind dann filling disks, die Folge f_j ist jedoch sogar konvergent.

Wir umgehen dieses Problem, indem wir nicht wie in (13) fordern, daß $\varepsilon_j \to 0$ gilt. Wir bezeichnen $z_j \to \infty$ als eine *singuläre Folge* für f, falls f für alle ε mit $0 < \varepsilon < 1$ und jede Teilfolge $\mathbb{D}_{j_k}^\varepsilon$ der Kreisscheiben

$$\mathbb{D}_j^\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_j| < \varepsilon |z_j|\} \tag{16}$$

auf der Vereinigung $\bigcup \mathbb{D}_{j_k}^\varepsilon$ alle Werte in $\widehat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft annimmt. Ein ähnlicher Begriff wurde in [12] definiert.

Für singuläre Folgen beweisen wir:

Lemma 2.38 *Seien $f\colon \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und $z_j \to \infty$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

i) z_j ist eine singuläre Folge für f.

ii) Für alle $\varepsilon \in (0,1)$ besitzt $f_j : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$ mit $f_j(z) := f(\varepsilon |z_j| z + z_j)$ keine konvergente Teilfolge.

iii) Es gibt eine Folge u_j mit $|z_j - u_j| = o(|z_j|)$ und $|u_j| \cdot f^\#(u_j) \to \infty$.

iv) Es existiert eine Folge $\varepsilon_j \to 0$, so daß die Kreisscheiben aus (13) filling disks für f sind.

Beweis. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Angenommen, es existiert eine konvergente Teilfolge $f_j \to F$ mit F meromorph in $\mathbb{D}$ (evtl. konstant ∞). Dann gibt es eine Umgebung $\mathbb{D}_r$ von 0 mit $0 < r < 1$, so daß F auf $\mathbb{D}_r$ drei Werte nicht annimmt. Setze $\varepsilon' := \frac{1}{2}\varepsilon \cdot r$. Nach Voraussetzung nehmen die f_j bzgl. ε' auf $\mathbb{D}$ alle Werte mit höchstens zwei Ausnahmen an. Es folgt, daß F in $\{|z| \leq \frac{r}{2}\}$ alle Werte bis auf zwei annimmt, was einen Widerspruch ergibt.
ii) $\Rightarrow$ *iii)* Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und betrachte

$$f_j(z) = f\left(\frac{|z_j|}{2} \cdot z + z_j\right).$$

Wir zeigen zunächst die Existenz einer Folge $w_j \to 0$ mit $f_j^{\#}(w_j) \to \infty$. Angenommen, w_j existiert nicht. Dann gibt es eine Teilfolge f_j, für die in einer Umgebung von 0 die sphärische Ableitung beschränkt ist, etwa $f_j^{\#}(z) < K$ für alle $|z| < \delta$. Setze $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon \cdot \delta$, dann gilt für die zu $\widetilde{\varepsilon}$ gehörige Teilfolge $\widetilde{f}_j$

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_j^{\#}(z) &= (f(\widetilde{\varepsilon}|z_j|z + z_j))^{\#} = \widetilde{\varepsilon}|z_j|f^{\#}(\widetilde{\varepsilon}|z_j|z + z_j) \\ &= \delta\varepsilon|z_j|f^{\#}(\varepsilon|z_j|\delta z + z_j) = \delta f_j^{\#}(\delta z) < \delta K \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Nach dem Marty-Kriterium besitzt $\widetilde{f}_j$ eine konvergente Teilfolge, was der Voraussetzung widerspricht. Setze $u_j := \frac{|z_j|}{2} w_j + z_j$. Dann gilt

$$f_j^{\#}(w_j) = \frac{|z_j|}{2} f^{\#}(u_j) = \frac{|z_j|}{||z_j|w_j + 2z_j|} \cdot |u_j| f^{\#}(u_j).$$

Da $f_j^{\#}(w_j) \to \infty$ und $|z_j|/||z_j|w_j + 2z_j| \to 1/2$, gilt $|u_j|f^{\#}(u_j) \to \infty$. Aus $w_j \to 0$ folgt $|z_j - u_j| = o(|z_j|)$. Wie oben beschrieben, gibt es also eine Folge $\varepsilon'_j \to 0$ so, daß die Kreisscheiben

$$\mathbb{D}'_j := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - u_j| < \varepsilon'_j |u_j|\}$$

filling disks für f sind.
iii) $\Rightarrow$ *iv)* Setzen wir $\varepsilon_j := \varepsilon'_j \left(\frac{|w_j|}{2} + 1\right) + \frac{|w_j|}{2}$, so gilt $\varepsilon_j \to 0$ und es ist elementar zu zeigen, daß die $\mathbb{D}_j$ aus (13) die filling disks $\mathbb{D}'_j$ enthalten, also selbst filling disks sind.
iv) $\Rightarrow$ *i)* ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß für festes $\varepsilon > 0$ fast alle Kreisscheiben aus (13) in den Kreisscheiben (16) enthalten sind. □

Singuläre Folgen sind also gerade die möglichen Mittelpunkte von filling disks.

Die Beziehung zwischen singulären Folgen und Grenzwerteteilen klärt die folgende Aussage:

Satz 2.39 *Seien f und g tranzendente meromorphe Funktionen, die drei Grenzwerte teilen. Dann haben f und g dieselben singulären Folgen.*

Beweis. Sei z_j singuläre Folge von f. Setze für festes $\varepsilon \in (0,1)$

$$\Phi_j(z) := \varepsilon \cdot |z_j| \cdot z + z_j$$

und betrachte Φ_j auf $\mathbb{D}$. Da $\varepsilon < 1$ gilt $\Phi_j(\mathbb{D}) \to \infty$. Nach Lemma 2.38 besitzt $f_j = f \circ \Phi_j$ keine konvergente Teilfolge. Angenommen $g_j = g \circ \Phi_j$ besitzt eine konvergente Teilfolge g_j. Nach Lemma 2.35 ist die entsprechende Teilfolge f_j normal und besitzt daher eine konvergente Teilfolge, im Widerspruch zu Lemma 2.38. Also hat auch g_j keine konvergente Teilfolge und mit Lemma 2.38 ist z_j daher auch eine singuläre Folge für g. Symmetrie zeigt die Behauptung. $\square$

Es ergeben sich folgende Aussagen. Dabei sind in Korollar 2.42 die Wachstumsabschätzungen aus Abschnitt 2.2 zu benutzen.

Korollar 2.40 *Seien f und g transzendente meromorphe Funktionen, die drei Grenzwerte teilen. Dann haben f und g dieselben Milloux-Richtungen.*

Korollar 2.41 *Seien f und g transzendente meromorphe Funktionen, die drei Grenzwerte teilen. Dann sind entweder f und g beide Juliasche Ausnahmefunktionen, oder f und g besitzen eine gemeinsame Milloux-Richtung.*

Korollar 2.42 *Sei f eine transzendente meromorphe Funktion welche (15) genügt. Teilt f mit einer meromorphen Funktion g drei Grenzwerte, so genügt auch g (15) und f und g haben eine gemeinsame Milloux-Richtung.*

Korollar 2.43 *Seien f und g transzendente ganze Funktionen, die zwei endliche Grenzwerte teilen. Dann haben f und g dieselben Milloux-Richtungen.*

Korollar 2.44 *Seien f und g transzendente ganze Funktionen, die zwei endliche Grenzwerte teilen. Dann haben f und g eine gemeinsame Milloux-Richtung.*

Wir bemerken noch, daß in [55] gezeigt wurde, daß bereits die Existenz eines Valiron-defekten Wertes hinreichend dafür ist, daß f keine Juliasche Ausnahmefunktion ist. Dies wurde früher in [3] für Nevanlinna-defekte Werte gezeigt. Man kann also Satz

2.19, i) allgemeiner für Funktionen mit einem Valiron-Defekt formulieren. Dies erlaubt offensichtliche Versionen der vorangegangenen Korollare für solche Funktionen.

Für den Rest dieses Paragraphen verlassen wir das Grenzwerteteilen (mit Ausnahme von Satz 2.53) und betrachten wie angekündigt die Klasse der Juliaschen Ausnahmefunktionen. Aus der obigen Diskussion ergibt sich:

Proposition 2.45 *Es sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

i) f ist eine Juliasche Ausnahmefunktion.

ii) Es gilt $f^{\#}(z) = O(1/|z|)$ in der ganzen Ebene.

iii) f besitzt keine Folge von filling disks.

iv) f besitzt keine Milloux-Richtung.

v) Für jede Folge $\sigma_j \to \infty$ ist $f_j(z) := f(\sigma_j z)$ normal in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Der einzige Punkt, der nicht sofort aus dem bisher Bewiesenen folgt, ist v). Es ist Ostrowskis [43] ursprüngliche Definition Juliascher Ausnahmefunktionen. Die Äquivalenz von ii) und v) läßt sich jedoch leicht mit dem Marty-Kriterium nachweisen. Wir zitieren Ostrowskis Charakterisierung [43] Juliascher Ausnahmefunktionen:

Satz 2.46 (Ostrowski) *Es sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph. Dann ist f eine Juliasche Ausnahmefunktion genau dann, wenn f der Quotient zweier ganzer Funktionen der Ordnung 0 ist:*

$$f(z) = dz^p \frac{\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)}{\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right)},$$

($d \neq 0$, $p \in \mathbb{Z}$) wobei die Pole und Nullstellen folgenden Bedingungen genügen

a) $|n(r, f, 0) - n(r, f, \infty)| = O(1)$.

b) $|n(r, f, 0) - n(2r, f, 0)| = O(1)$ und $|n(r, f, \infty) - n(2r, f, \infty)| = O(1)$.

c) Setzt man

$$\mathcal{M}(r) := r^p \frac{\prod_{|a_n| \le r} \frac{r}{|a_n|}}{\prod_{|b_n| \le r} \frac{r}{|b_n|}},$$

so gibt es eine von k unabhängige Konstante $C_1 > 0$ mit $\mathcal{M}(|a_k|) \leq C_1$ und $\mathcal{M}(|b_k|) \geq 1/C_1$ für alle k.

d) Es gibt eine von k und l unabhängige Konstante $C_2 > 0$, so daß

$$\left|\frac{a_k}{b_l} - 1\right| \geq C_2$$

für alle k und l.

Vielfach wird in der Literatur für ein Beispiel einer meromorphen Funktion ohne Julia-Richtung auf Ostrowski verwiesen. Uns ist jedoch keine Referenz bekannt, wo dieses Beispiel explizit benannt wird (etwa mittels einer Seitenangabe) oder gar ein vollständiger Nachweis für die nicht-Existenz einer Julia-Richtung für diese Funktion geführt wird. Ostrowskis Arbeit ist recht umfangreich, jedoch ist wohl der einzig mögliche Kandidat das Beispiel auf Seite 258:

$$f(z) = \frac{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{q^n}\right)}{\prod_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{q^n}\right)} \tag{17}$$

mit $q > 1$. Unseres Erachtens weist Ostrowski mit Satz 2.46 jedoch nur nach, daß f eine Juliasche Ausnahmefunktion ist. (Dieser Nachweis findet sich auch bei Montel [34], S. 159.) Diese Unklarheiten rühren vielleicht daher, daß Ostrowskis Definition von Julia-Richtungen mit unseren Milloux-Richtungen zusammenfällt.
Wir wollen im folgenden einen vollständigen Beweis dafür geben, daß f tatsächlich keine Julia-Richtungen hat. (J. Rossi hat mir einen alternativen Beweis mitgeteilt. Dieser beruht auf Valirons Integraldarstellung für Weierstraßprodukte mit negativen Nullstellen und einem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen. Wir werden jedoch durch meine Sichtweise, wie ich finde, auf interessante Probleme geführt.)
Da f eine Juliasche Ausnahmefunktion ist, kann eine Julia-Richtung von f keine Milloux-Richtung sein. Wir beweisen dazu das folgende notwendige Kriterium:

Satz 2.47 *Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und J eine Julia-Richtung von f. Ist J keine Milloux-Richtung, so liegt $f(J)$ dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Beweis. Angenommen $f(J)$ ist nicht dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann existiert eine sphärische Kreischeibe D mit Radius δ, so daß $D \cap f(J) = \emptyset$. Weiter existiert ein Sektor J_ε um J so, daß $f^{\#}(z) < K/|z|$ auf J_ε. Sonst gibt es eine Folge $z_j \to \infty$ mit $\arg z_j \to \arg J$ und $|z_j| f^{\#}(z_j) \to \infty$. Damit wäre J eine Milloux-Richtung. Wir wählen $\mu > 0$ mit

$\mu < \varepsilon$ und $\mu < \delta/(4K)$. Sei $z \in J_\mu$ und $z_0 \in J$ mit $|z| = |z_0|$. Die sphärische Distanz von $f(z)$ und $f(z_0)$ kann abgeschätzt werden durch

$$d(f(z), f(z_0)) \leq \int_{\arg J-\mu}^{\arg J+\mu} f^{\#}(|z_0|e^{i\varphi})|z_0|d\varphi \leq 2\mu K < \delta/2.$$

Also ist der sphärische Abstand jedes Punktes in $f(J_\mu)$ von $f(J)$ geringer als $\delta/2$. Da $f(J)$ nicht D schneidet, folgt, daß $f(J_\mu)$ die konzentrische Kreisscheibe in D mit Radius $\delta/2$ nicht trifft. Dies widerspricht der Annahme, daß J eine Julia-Richtung ist. □

Der Fall $\overline{f(J)} = \widehat{\mathbb{C}}$ kann tatsächlich auftreten, wie das in [60] gegebene Beispiel zeigt. Die dort konstruierte Julia-Richtung kann keine Milloux-Richtung sein, da die Funktion eine Juliasche Ausnahmefunktion ist.
Zu bemerken ist, daß $f(J)$ grundsätzlich von erster Bairescher Kategorie ist, da $f([ne^{i\varphi}, (n+1)e^{i\varphi}])$ nirgends dicht ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir erhalten sofort eine Folgerung.

Korollar 2.48 *Es sei f eine transzendente meromorphe Funktion und J eine Julia-Richtung von f. Ist f auf J beschränkt, so ist J eine Milloux-Richtung.*

Dies ist z.B. für die Exponentialfunktion auf der imaginären Achse der Fall.

Sei nun f eine Juliasche Ausnahmefunktion und $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Wir bezeichnen mit a_n die Urbilder von a geordnet so, daß $|a_n|$ monoton wächst. Zu bemerken ist, daß Juliasche Ausnahmefunktionen keine Picardschen Ausnahmewerte haben können, wie aus Satz 2.46 leicht folgt. Dies kann aber auch folgendermaßen begründet werden: Da ein Picardscher Ausnahmewert nach dem Satz von Iversen (siehe Abschnitt 3.3) ein asymptotischer Wert ist, funktioniert Julias [22] Argumentation zum Nachweis einer Milloux-Richtung.
In [60] wurde mit Ostrowskis Satz gezeigt, daß entweder

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \infty \tag{18}$$

für alle $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ oder

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$$

für alle $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Das oben betrachtete Beispiel (17) erfüllt (18), wie man an der Verteilung der Pole und Nullstellen sofort sieht.

Wir bezeichnen die Menge der Juliaschen Ausnahmefunktionen, die (18) genügen, mit $\mathcal{F}$.

Weiter wird in [60] für Juliasche Ausnahmefunktionen f gezeigt:

Satz 2.49 *Es gilt $f \in \mathcal{F}$ genau dann, wenn für alle Folgen $\sigma_j \to \infty$ die normale Folge $f_j(z) := f(\sigma_j z)$ nur transzendente (also insbesondere nicht-konstante) Grenzfunktionen in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.*

Wir geben der Vollständigkeit halber einen Beweis für die von uns benötigte Implikation:

Sei $f \in \mathcal{F}$ und es gelte $f_j \to f_0$ kompakt in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir bezeichnen mit a_n die Nullstellen von f und mit b_n die Pole. Da $f \in \mathcal{F}$, gibt es eine Konstante $K > 1$ mit $|a_n| \leq K|a_{n+1}|$ und $|b_n| \leq K|b_{n+1}|$ für alle n. (Für f aus (17) kann man offensichtlich $K = q$ setzen.) Für festes $k \in \mathbb{N}$ besitzt dann f_j für $j > j_0$ in dem Ring $\{z \in \mathbb{C} \mid K^{k-1} \leq |z| \leq K^k\}$ eine Nullstelle und einen Pol. Damit hat f_0 für alle $k \in \mathbb{N}$ in $\{z \mid K^{k-1} \leq |z| \leq K^k\}$ eine Nullstelle und einen Pol, ist also transzendent. $\square$

Damit können wir folgende Aussage beweisen.

Satz 2.50 *Sei $f \in \mathcal{F}$. Dann ist J eine Julia-Richtung von f genau dann, wenn $\overline{f(J)} = \widehat{\mathbb{C}}$. Eine Julia-Richtung von f hat keine Ausnahmewerte, d.h., jeder Wert in $\widehat{\mathbb{C}}$ wird unendlich oft angenommen*

Beweis. Falls J eine Julia-Richtung ist, so folgt aus Satz 2.47 $\overline{f(J)} = \widehat{\mathbb{C}}$. Ist $f(J)$ dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$, so wählen wir zu $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ eine Folge $\sigma_j \to \infty$ auf J, so daß $f(\sigma_j) \to a$. Wir betrachten eine konvergente Teilfolge $f_j(z) := f(\sigma_j z)$ mit $f_j \to F$. Dann ist F nach dem vorangegangenen Beweis nicht-konstant und $F(1) = a$. Der Satz von Hurwitz zeigt die Existenz einer Folge $w_j \to 1$ mit $f_j(w_j) = f(\sigma_j w_j) = a$. Aus $\sigma_j w_j \to \infty$ und $\arg(\sigma_j w_j) \to \arg J$ folgt, daß J eine Julia-Richtung ohne Ausnahmewerte ist. $\square$

Damit ist klar, daß f aus (17) keine Julia-Richtung besitzt. Da nämlich alle Nullstellen auf der positiven reellen Achse liegen und alle Pole auf der negativen Achse sind, gibt es zu jedem Strahl J einen Winkelraum um J in dem f keine Nullstellen oder keine Pole hat. Eine Julia Richtung hätte also einen Ausnahmewert, was Satz 2.49 widerspricht.

Wir bemerken noch, daß f aus (17) das extremale Wachstum $T(r, f) \sim (\log r)^2$ besitzt. Man zeigt leicht $n(r, f, 0) \geq C \log r$ und damit $T(r, f) \geq N(r, f, 0) + O(1) \geq \frac{C}{2}(\log r)^2 + O(1)$.

Beispiel 2.51 Es ist überraschend, daß eine geringfügige Änderung von q in (17) dazu führt, daß jeder Strahl für f eine Julia-Richtung ist. Dies ist der Fall, wenn man $q \in \mathbb{C}$ wählt mit $|q| > 1$ und $\arg q$ irrational. Wie man an Ostrowskis Satz 2.46 leicht überprüft, ist f dann wieder eine Juliasche Ausnahmefunktion und offensichtlich $f \in \mathcal{F}$. Wir erhalten somit ein Beispiel einer Juliaschen Ausnahmefunktion mit Julia-Richtungen, daß einfacher ist als das in [60] konstruierte.
Zunächst weist man für f leicht die folgende Funktionalgleichung nach:

$$f(qz) = \frac{1-qz}{1+qz} \cdot f(z)$$

und damit

$$f(q^2 z) = \frac{1-q^2 z}{1+q^2 z} \cdot \frac{1-qz}{1+qz} \cdot f(z). \tag{19}$$

Wir setzen

$$r(z) := \frac{1-q^2 z}{1+q^2 z} \cdot \frac{1-qz}{1+qz}.$$

Offensichtlich gilt $r(\infty) = 1$. Etwas Rechnung liefert für $|z| > 2$:

$$|r(z) - 1| \leq \frac{4}{|q|} \cdot \frac{1}{|z|}. \tag{20}$$

Mit (19) und (20) erhalten wir für $|z| > 2$:

$$|f(q^2 z) - f(z)| \leq \frac{4}{q} \cdot \frac{|f(z)|}{|z|}.$$

Division durch $\sqrt{1+|f(z)|^2}\sqrt{1+|f(q^2 z)|^2}$ liefert sofort:

$$\chi(f(q^2 z), f(z)) \leq \frac{4}{|q|} \cdot \frac{1}{|z|}. \tag{21}$$

Es sei nun $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $\varepsilon > 0$. Da f keinen Picardschen Ausnahmewert besitzt, gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $f(z_0) = a$, $|z_0| > 2$ und

$$\frac{1}{|z_0|} < \frac{\varepsilon}{8}\left(|q| - \frac{1}{|q|}\right).$$

Wir setzen $z_n := q^{2n} z_0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\chi(a, f(z_n)) &= \chi(f(z_0), f(z_n)) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \chi(f(z_n), f(z_{n+1})) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \chi(f(z_n), f(q^2 z_n)) \\
&\overset{(21)}{\leq} \frac{4}{|q| \cdot |z_0|} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|q|^{2n}} = \frac{1}{|z_0|} \cdot \frac{4}{|q|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|q|^2}} < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Da $\arg q$ irrational ist, ist auch $\arg q^2$ irrational. Damit liegt die Folge $\arg q^{2n} z_0 = \arg z_n$ dicht in $[0, 2\pi]$. Ist J nun ein beliebiger Strahl von 0 nach ∞, so gibt es ein z_n mit $|\arg J - \arg z_n| < \varepsilon/(2K)$. Dabei ist K wieder eine Konstante mit $f^{\#}(z) \leq K/|z|$. Wählt man nun $\tilde{z} \in J$ mit $|\tilde{z}| = |z_n|$, so folgt

$$\begin{aligned} d(f(\tilde{z}), f(z_n)) &\leq \left| \int_{\arg z_n}^{\arg J} f^{\#}(|\tilde{z}|e^{i\varphi})|\tilde{z}|d\varphi \right| \\ &\leq \left| \int_{\arg z_n}^{\arg J} \frac{K}{|\tilde{z}|}|\tilde{z}|d\varphi \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es also für alle $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{z} \in J$ mit $\chi(a, f(\tilde{z})) \leq \chi(a, f(z_n)) + d(z_n, f(\tilde{z})) < \varepsilon$. Daher ist $f(J)$ dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$ und somit J nach Satz 2.49 eine Julia-Richtung von f.

Eine Frage die sich stellt ist, ob, falls $f(J)$ mit einem Strahl J dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$ liegt, J grundsätzlich eine Julia-Richtung ist. Mittels elementarer konformer Abbildung eines Winkelraums um J stellt sich die Frage, ob es eine in $\mathbb{D}$ meromorphe Funktion F gibt, die drei Werte ausläßt und einen Plessner-Punkt besitzt. Ein Plessner-Punkt ist ein $z_0 \in \partial\mathbb{D}$, so daß das Bild jedes Stolz-Winkelraums mit Spitze z_0 unter F dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$ liegt (siehe [10], S. 147). J geht bei geeigneter konformer Abbildung im wesentlichen in den Radius $[0, 1)$ über, so daß $F([0, 1))$ dicht liegt. Umgekehrt zeigt man mit einem Argument ähnlich wie im Beweis von Satz 2.47, daß, falls F drei Punkte ausläßt und z_0 ein Plessner-Punkt von F ist, das Bild des Radius $[0, z_0)$ schon dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$ liegen muß. Nun ist bekannt, daß die elliptische Modulfunktion μ Plessner-Punkte besitzt. Die Menge der nicht-Plessner-Punkte ist sogar eine Nullmenge. Wir verweisen auf [17]. Jedoch läßt μ drei Werte aus. Dies zeigt, daß eine rein lokale Argumentation nicht genügt bzw. den Eindruck vermittelt, daß es möglich ist, daß $f(J)$ dicht liegt, aber J keine Julia-Richtung ist.
Wir beweisen hier

Proposition 2.52 *Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorph und J ein Strahl mit $\overline{f(J)} = \widehat{\mathbb{C}}$. Gilt*

$$\liminf_{z \to \infty, z \in J} |z| f^{\#}(z) > 0,$$

so ist J eine Julia-Richtung von f. Ist J keine Milloux-Richtung, so nimmt f sogar jeden Wert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ in jedem Winkelraum um J unendlich oft an.

Beweis. Falls J eine Milloux-Richtung ist, ist nichts zu beweisen. Angenommen, J ist keine Milloux-Richtung. Wie im Beweis von Satz 2.47 bereits erläutert, gibt es dann einen Winkelraum J_ε um J mit $f^{\#}(z) \leq K/|z|$ auf J_ε. Sei $0 < \delta \leq \varepsilon \leq \pi/2$ und $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Da $f(J)$ dicht in $\widehat{\mathbb{C}}$ liegt, gibt es eine Folge $z_j \in J$ mit $z_j \to \infty$ und $f(z_j) \to a$. Nach Voraussetzung existiert ein $c > 0$ mit $|z_j| f^{\#}(z_j) > c$ für $j > j_0$.

Wir betrachten nun für $|z| < 1$ die Folge

$$f_j(z) := f(\sin(\delta)|z_j| \cdot z + z_j).$$

Dann gilt $f_j(0) = f(z_j) \to a$ und

$$\begin{aligned} f_j^{\#}(z) &= \sin(\delta)|z_j| f^{\#}(\sin(\delta)|z_j|z + z_j) \\ &\leq \sin(\delta)|z_j| \frac{K}{|\sin(\delta)|z_j|z + z_j|} < K' \end{aligned}$$

wegen $\sin\delta < 1$. Nach dem Marty-Kriterium ist f_j normal. Es existiert also eine konvergente Teilfolge $f_j \to F$ mit F meromorph in $|z| < 1$. Weiter gilt

$$F(0) = \lim_{j\to\infty} f_j(0) = a$$

und

$$F^{\#}(0) = \lim_{j\to\infty} f_j^{\#}(0) = \lim_{j\to\infty} \sin(\delta)|z_j| f^{\#}(z_j) \geq \sin\delta \cdot c > 0.$$

Also ist F nicht konstant. Nach dem Satz von Hurwitz nehmen unendlich viele f_j den Wert a an, d.h., f nimmt den Wert a unendlich oft in J_δ an. $\square$

Die Klasse $\mathcal{F}$ hat auch bezüglich des Grenzwerteteilens interessante Eigenschaften. Teilen nämlich $f, g \in \mathcal{F}$ fünf Grenzwerte, so teilen sie schon alle Grenzwerte. Es gilt also in der Klasse $\mathcal{F}$ das bestmögliche Analogon zum Fünf-Werte-Satz von Nevanlinna.

Satz 2.53 *Seien $f, g \in \mathcal{F}$ meromorphe Funktionen, die fünf Grenzwerte teilen. Dann teilen f und g alle Grenzwerte.*

Beweis. Angenommen, f und g teilen nicht alle Grenzwerte. Dann gibt es eine Folge $z_j \to \infty$ mit $f(z_j) \to a$ und $g(z_j) \to b$ mit $a \neq b$. Die Folgen $f_j(z) := f(z_j z)$ und $g_j(z) := g(z_j z)$ sind nach Proposition 2.45 normal in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir $f_j \to F$ und $g_j \to G$ annehmen. Die vor Satz 2.49 erwähnten Ergebnisse in [60] zeigen, daß F und G transzendent sind. Weiter gilt $F(1) = \lim f(z_j) = a$ und $G(1) = \lim g(z_j) = b$. Andererseits teilen F und G die fünf Grenzwerte als Werte. Denn falls $F(w) = a_1$ mit einem geteilten Grenzwert a_1, so folgt $f(z_j w) \to a_1$. Damit gilt $g(z_j w) \to a_1$ und somit $G(w) = a_1$. Nun gilt der Fünf-Werte-Satz schon lokal (siehe [38], Satz 2), d.h., die betrachteten Funktionen müssen nur für $|z| > r$ definiert sein. Dies ist für F und G mit $r = 0$ der Fall und es folgt $F = G$. Dies widerspricht $F(1) \neq G(1)$. $\square$

Wie wir gesehen haben, besitzen, abgesehen von Juliaschen Ausnahmefunktionen, alle transzendenten meromorphen Funktionen eine Folge von filling disks. Aus den entsprechenden Normalitätskriterien folgt, daß praktisch alle nicht-quantitativen Aussagen der Werteverteilungstheorie schon in den filling disks gelten. Man kann sich fragen, ob etwas ähnliches für Juliasche Ausnahmefunktionen auf größeren Mengen gilt. Wir beweisen dazu:

Satz 2.54 *Sei f eine transzendente Juliasche Ausnahmefunktion. Dann gibt es Folgen $r_j \to \infty$ und $\varepsilon_j \to 0$, so daß f jeden Wert in $\widehat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft in jeder Teilfolge der Ringgebiete:*

$$\mathcal{R}_j := \{z \in \mathbb{C} \mid r_j^{1-\varepsilon_j} < |z| < r_j^{1+\varepsilon_j}\}$$

annimmt.

Beweis. Nach Satz 2.19, ii) gibt es eine Folge $z_j \to \infty$ mit $f^{\#}(z_j) \geq (3|z_j|)^{-1}$. Wir betrachten wie im Beweis zu Satz 2.20:

$$\Phi_j(z) := z_j |z_j|^{z/(1-z)}$$

und $f_j := f \circ \Phi_j : \mathbb{D} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt wieder

$$M_j := f_j^{\#}(0) \geq \frac{1}{3} \cdot \log|z_j| \to \infty.$$

Wir setzen $\delta_j := 1/\sqrt{M_j} \to 0$ und $F_j(z) := f_j(\delta_j z)$ für $z \in \mathbb{D}$. Es folgt $F_j^{\#}(0) = \delta_j f_j^{\#}(0) = \sqrt{M_j} \to \infty$. Also besitzt F_j keine konvergente Teilfolge. Der Satz von Montel zeigt, daß jede Teilfolge von F_j jeden Wert in $\widehat{\mathbb{C}}$ mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft annimmt. Man überprüft leicht für $z \in \mathbb{D}$

$$|z_j|^{1 - \dfrac{\delta_j}{1+\delta_j}} \leq |\Phi_j(\delta_j z)| \leq |z_j|^{1 + \dfrac{\delta_j}{1-\delta_j}}.$$

Setzt man $r_j := |z_j|$ und $\varepsilon_j := 2\delta_j$, so folgt die Behauptung. □

Geht man im obigen Beweis etwas genauer vor, so sieht man, daß $\varepsilon_j = c(\log r_j)^{-\alpha}$ mit $\alpha \in (0,1)$ und $c > 0$ gewählt werden kann.

Kapitel 3

Weiteres zur Ahlforsschen Theorie

3.1 Defekte rationale Funktionen

Im ersten Abschnitt dieser Arbeit haben wir Nevanlinnas zweiten Hauptsatz zitiert. Er gibt eine Abschätzung für die charakterisitische Funktion $T(r,f)$ gegen die Anzahlfunktionen der Nullstellen von Funktionen der Form $f - a_k$ mit $a_k \in \widehat{\mathbb{C}}$:

$$(q-2)T(r,f) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{N}(r, f - a_k, 0) + S(r,f). \tag{22}$$

Es ist naheliegend zu untersuchen, inwieweit sich die a_k durch allgemeinere meromorphe Funktionen ersetzen lassen, ohne daß (22) seine Gültigkeit verliert. Dabei ist es natürlich nötig, die Klasse der zulässigen Funktionen a_k zu beschränken. Eine Funktionenklasse in Abhängigkeit von f, die sich in vielerlei Hinsicht als interessant erwiesen hat, sind die sogenannten *kleinen* Funktionen (zu f). Dabei ist a eine kleine Funktion, falls

$$T(r,a) = o(T(r,f)).$$

Ist f transzendent, so ist insbesondere jede rationale Funktion a eine kleine Funktion, da $T(r,a) = O(\log r)$. Schon Nevanlinna ([39], S. 75) hat (22) in folgender Weise verallgemeinert:

Satz 3.1 (Nevanlinna) *Seien f transzendent und meromorph und a_1, a_2, a_3 paarweise verschiedene kleine meromorphe Funktionen zu f. Dann gilt*

$$T(r,f) \leq \overline{N}(r, f - a_1, 0) + \overline{N}(r, f - a_2, 0) + \overline{N}(r, f - a_3, 0) + S(r,f). \tag{23}$$

Nevanlinna führt (23) mit Hilfe einer Möbius-Transformation auf (22) zurück. Für $q > 3$ ergeben sich jedoch schwierige Probleme. Einen gewissen Abschluß fanden die Untersuchungen zu diesem Thema im folgenden Satz von Steinmetz [53].

Satz 3.2 (Steinmetz) *Seien f meromorph und transzendent und $a_1, \ldots, a_q$ paarweise verschiedene kleine Funktionen zu f. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $S(r, f)$, so daß*

$$(q - 2 - \varepsilon)T(r, f) \leq \sum_{k=1}^{q} N(r, f - a_k, 0) + S(r, f). \tag{24}$$

Einen unabhängigen Beweis hat Osgood [42] gegeben und für rationale Funktionen a_k wurde (24) früher von Frank und Weissenborn [14] bewiesen. Eine recht ausführliche Darstellung findet man in [31].

Die Ungleichung (24) von Steinmetz unterscheidet sich jedoch insofern von (22) und (23), als in (24) N statt $\overline{N}$ verwendet wird. Dieser Umstand ist nicht zu unterschätzen, da viele Beweise wesentlich auf der Betrachtung von $\overline{N}$ beruhen, z.B. Sätze über geteilte Werte und über verzweigte Werte. Es ist jedoch ein offenes Problem ob (24) mit $\overline{N}$ statt N gilt. Wir wollen nun eine Version von (22) beweisen, die viel weniger allgemein als (24) ist, wo aber ohne jede Einschränkung $\overline{N}$ statt N verwendet werden kann.

Satz 3.3 *Seien f eine transzendente meromorphe Funktion und $a_1, \ldots, a_q$ rationale Funktionen mit paarweise verschiedenen Werten in ∞. Dann gilt*

$$(q - 2)T(r, f) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{N}(r, f - a_k, 0) + S(r, f).$$

Beweis. Sei $\alpha_k := a_k(\infty)$. O.B.d.A. können wir annehmen, daß alle α_k endlich sind, sonst betrachten wir $1/(f - c)$ und $1/(a_k - c)$ mit geeigentem $c \in \mathbb{C}$. Wir wählen offene Kreisscheiben $D_k := \mathbb{D}_r(\alpha_k)$ mit $r > 0$ so, daß die D_k disjunkte Abschlüsse haben. Gemäß Satz 1.2 gilt

$$(q - 2)A(r, f) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{n}(r, f, D_k) + O(L(r, f)). \tag{25}$$

Wir zeigen nun, daß, bis auf endlich viele, jede Insel von f über D_k eine Nullstelle von $f - a_k$ enthält.

Auf den Rändern der Inseln von f über D_k gilt $|f - \alpha_k| = r$. Da $a_k(\infty) = \alpha_k$, existiert ein $R_k > 0$, so daß $|a_k(z) - \alpha_k| < r/2$ für alle z mit $|z| > R_k$. Nun liegen alle, bis auf endlich viele, Inseln von f über D_k außerhalb von $|z| \leq R_k$. Es gilt auf den Rändern

$$|f - \alpha_k - (f - a_k)| = |a_k - \alpha_k| < r/2 < |f - \alpha_k|.$$

Da jede Insel I von f über D_k eine α_k-Stelle von f enthält, besitzt nach dem Satz von Rouché $f - a_k$ eine Nullstelle in I. Wir haben gezeigt:

$$\overline{n}(r, f, D_k) \leq \overline{n}(r, f - a_k, 0) + O(1).$$

Setzt man dies in (25) ein und integriert logarithmisch, so folgt die Behauptung. □

Es ist naheliegend die folgende Größe zu betrachten:

$$\Theta_N(f, a) := \liminf_{r\to\infty} \left(1 - \frac{\overline{N}(r, f - a, 0)}{T(r, f)}\right)$$

für kleine Funktionen a.

Satz 3.3 zeigt sofort folgende Verallgemeinerung der Defekt-Relation.

Korollar 3.4 *Seien f eine transzendente meromorphe Funktion und R_a eine Familie rationaler Funktionen mit $R_a(\infty) = a$, $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Dann gilt*

$$\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}} \Theta_N(f, R_a) \leq 2.$$

Daraus ergibt sich sofort

Korollar 3.5 *Sei f eine transzendente meromorphe Funktion. Die Menge aller $a \in \widehat{\mathbb{C}}$, so daß eine rationale Funktion R_a mit $R_a(\infty) = a$ und $\Theta_N(f, R_a) > 0$ existiert, ist höchstens abzählbar.*

Wir setzen für $a \in \widehat{\mathbb{C}}$:

$$\Theta_A(f, a, \varepsilon) := \liminf_{r\to\infty} \left(1 - \frac{\overline{N}(r, f, \mathbb{D}_\varepsilon(a))}{T(r, f)}\right)$$

und

$$\Theta_A(f, a) := \lim_{\varepsilon\to 0} \Theta_A(f, a, \varepsilon).$$

Satz 1.3 zeigt

$$\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}} \Theta_A(f,a) \leq 2.$$

Man könnte Θ_A als Ahlforsschen Defekt bezeichnen.

Satz 3.6 *Seien f eine transzendente meromorphe Funktion und $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\Theta_A(f,a) = 0$. Dann gilt $\Theta_N(f,R_a) = 0$ für alle rationalen Funktionen R_a mit $R_a(\infty) = a$.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 3.3 zeigt man

$$\overline{n}(r,f,\mathbb{D}_\varepsilon(a)) \leq \overline{n}(r,f-R_a,0) + O(1).$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}
\Theta_N(r,f-R_a,0) &= \liminf_{r\to\infty}\left(1 - \frac{\overline{N}(r,f-R_a,0)}{T(r,f)}\right) \\
&\leq \liminf_{r\to\infty}\left(1 - \frac{\overline{N}(r,f,\mathbb{D}_\varepsilon(a))}{T(r,f)}\right) \\
&= \Theta_A(f,a,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Also $\Theta_N(r,f-R_a,0) \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\Theta_A(f,a,\varepsilon) = 0$. □

Korollar 3.7 *Sei f eine transzendente meromorphe Funktion mit*

$$\sum_{a\in\widehat{\mathbb{C}}} \Theta_A(f,a) = 0,$$

dann hat f keine defekte rationale Funktion.

Man sagt, f und g teilen die Funktion a, falls die Gleichungen $f = a$ und $g = a$ dieselben Lösungen haben. Wie bereits erwähnt, folgt aus dem Teilen von fünf Konstanten bereits $f = g$. Es ist bekannt, daß zwei nicht-konstante meromorphe Funktionen, die sieben kleine Funktionen teilen, identisch sind [54]. Für ganze Funktionen reichen schon vier geteilte kleine Funktionen, um $f = g$ zu folgern [30]. Satz 3.3 zeigt:

Satz 3.8 *Seien f, g transzendente meromorphe Funktionen, die fünf rationale Funktionen mit paarweise verschiedenen Werten in ∞ teilen. Dann gilt $f = g$.*

Beweis. Es seien $a_1, \ldots, a_5$ die geteilten rationalen Funktionen. Da rationale Funktionen nur endliche viele Pole haben, stimmen die Lösungen von $f = a_i$ und $g = a_i$,

$i = 1, \dots, 5$, bis auf endlich viele, mit den Nullstellen von $f - a_i$ und $g - a_i$ überein. Angenommen $f - g$ ist nicht konstant, dann gilt $\overline{N}(r, f - g, 0) \le T(r, f - g) + O(1)$ und daher nach Satz 1.4

$$\begin{aligned} 3(T(r,f) + T(r,g)) &\le \sum_{k=1}^{5} \left(\overline{N}(r, f - a_k, 0) + \overline{N}(r, g - a_k, 0)\right) + S(r,f) + S(r,g) \\ &\le 2\overline{N}(r, f - g) + S(r,f) + S(r,g) \\ &\le 2(T(r,f) + T(r,g)) + S(r,f) + S(r,g), \end{aligned}$$

was den Widerspruch $T(r,f) + T(r,g) \le S(r,f) + S(r,g)$ ergibt. □

Weiter läßt sich Satz 1.5 auf unsere Situation verallgemeinern. Dabei bezeichnen wir mit $N_{1)}$ die Anzahlfunktion einfacher Nullstellen.

Satz 3.9 *Seien f eine transzendente meromorphe Funktion und $a_1, \dots, a_q$ rationale Funktionen mit paarweise verschiedenen Werten in ∞. Dann gilt*

$$(q - 4)T(r,f) \le \sum_{k=1}^{q} N_{1)}(r, f - a_k, 0) + S(r,f).$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 3.3. Statt Satz 1.2 benutzen wir jedoch Satz 1.5. Die Nullstellen, die man aus dem Satz von Rouché gewinnt, sind in schlichten Inseln einfach. □

Aus Satz 1.4 folgt sofort, daß zu fünf vorgegebenen $a_i \in \widehat{\mathbb{C}}$ mindestens eine der Gleichungen $f = a_i$ unendlich viele einfache Lösungen haben muß. Mit Satz 3.9 läßt sich dies verallgemeinern:

Korollar 3.10 *Seien f eine transzendente meromorphe Funktion und R_a eine Familie von rationalen Funktionen mit $R_a(\infty) = a$, $a \in \widehat{\mathbb{C}}$. Bis auf vier mögliche Ausnahmen besitzt jede Gleichung $f = R_a$ unendlich viele einfache Lösungen.*

Beweis. Angenommen dies gilt nicht, dann gibt es $R_1, \dots, R_5$ mit $N_{1)}(r, f - R_k, 0) = O(\log r)$ und somit $T(r,f) \le O(\log r) + S(r,f)$. Widerspruch. □

3.2 Nullstellen von zusammengesetzten meromorphen Funktionen

In [47] und [48] wurden von Rosenbloom die Fixpunkte von $f \circ g$ mit ganzen Funktionen f und g betrachtet. Eines von Rosenblooms Resultaten ist, daß, falls f transzendent ist, $f \circ f$ unendlich viele Fixpunkte besitzt (siehe dazu auch [4]). Dieser Satz ist in vielfältiger Weise verallgemeinert worden in dem Sinne, die Anzahlfunktion

$$\overline{N}(r, f \circ g - h, 0)$$

nach unten abzuschätzen. Dabei ist f meromorph, g ganz und h eine kleine meromorphe Funktion zu g, d.h., $T(r, h) = o(T(r, g))$. Unseres Wissens ist das Problem in vollster Allgemeinheit bisher nicht gelöst. Zumeist werden spezielle Voraussetzungen, etwa bzgl. des Wachstums von f und g, gemacht (siehe z.B. [59] und [57]). In [57] findet man viele Literaturhinweise und eine Einführung in diese Fragestellung. Wir werden hier einen Satz von Bergweiler [7] verbessern:

Satz 3.11 (Bergweiler) *Sei f meromorph mit mindestens zwei Polen, g ganz transzendent und R rational mit $R(\infty) = \infty$. Dann hat $f \circ g - R$ unendlich viele Nullstellen und es gilt $\sigma \geq \rho(g)$. Dabei ist σ der Konvergenzexponent dieser Nullstellen und $\rho(g)$ die Ordnung von g.*

Bergweiler bemerkt, daß $\sigma \geq \rho(g)$ wahrscheinlich nicht bestmöglich ist. Wir werden dies mit Hilfe der Ahlforsschen Theorie bestätigen.

Satz 3.12 *Sei f meromorph mit $q \geq 2$ Polen, g ganz transzendent und R rational mit $R(\infty) = \infty$. Dann gilt*

$$\overline{N}(r, f \circ g - R, 0) \geq (q-1)T(r, g) + S(r, g).$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ sei $D_\varepsilon := \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid |z| > 1/\varepsilon\}$ eine Umgebung von ∞. Wir betrachten $f^{-1}(D_\varepsilon)$ und behaupten, daß ε so gewählt werden kann, daß $f^{-1}(D_\varepsilon)$ mindestens q beschränkte, einfach zusammenhängende Komponenten $I_1, \ldots, I_q$ mit analytischen Rändern und disjunkten Abschlüssen enthält. Es seien $z_1, \ldots, z_q$ Pole von f. Wir wählen Kreise $K_1, \ldots, K_q$ um diese Pole: $K_j := \mathbb{D}_\delta(z_j)$. Dabei sei δ so gewählt, daß die K_j paarweise disjunkte Abschlüsse haben und ∂K_j keinen Pol von f enthält. Sei I_j^ε die Komponente von $f^{-1}(D_\varepsilon)$ die z_j enthält. Angenommen, es gibt eine Folge $\varepsilon_k \to 0$, so daß $I_j^{\varepsilon_k} \cap \partial K_j \neq \emptyset$. Für $z \in I_j^{\varepsilon_k}$ gilt $|f(z)| > 1/\varepsilon_k$. Dann existiert also $z_k \in \partial K_j$ mit $|f(z_k)| > 1/\varepsilon_k$. Da ∂K_j kompakt ist, können wir $z_k \to z_0 \in \partial K_j$ annehmen. Wegen $\lim_{k\to\infty} |f(z_k)| > \lim_{k\to\infty} 1/\varepsilon_k = \infty$ ist z_0 ein Pol, im Widerspruch zur Wahl von δ. Also gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so, daß für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

gilt: $I_j^\varepsilon \cap \partial K_j = \emptyset$. Damit sind für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Komponenten I_j^ε in den K_j enthalten und sind daher beschränkt und haben disjunkte Abschlüsse.

Angenommen es gibt eine Folge $\varepsilon_k \to 0$, so daß $I_j^{\varepsilon_k}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Sei S das Komplement von $I_j^{\varepsilon_k}$ in $\mathbb{C}$. Dann läßt sich S zerlegen: $S = A_1 \cup A_2$ mit A_1, A_2 nicht-leer, abgeschlossen, disjunkt und A_1 kompakt. Dann ist $G := I_j^{\varepsilon_k} \cup A_1$ offen, da das Komplement A_2 abgeschlossen ist. Weiter gilt $\partial G = \partial I_j^{\varepsilon_k}$. Denn sonst existiert $z \in A_1$ mit $z \in \partial G$. Da $\partial G = \partial A_2$ gilt dann $z \in \partial A_2 \subset A_2$ im Widerspruch dazu, daß A_1 und A_2 disjunkt sind.

Angenommen f hat keine Nullstelle in G. Dann ist $1/f$ holomorph auf G mit $|1/f| \leq \varepsilon_k$ auf ∂G. In den inneren Punkten $z \in A_1$ gilt jedoch $|1/f(z)| \geq \varepsilon_k$. Damit wäre f konstant. Also besitzt f eine Nullstelle in G. Wegen $K_j^c \subset A_2$ gilt $G \subset K_j$ und somit hat f eine Nullstelle in K_j. Nun zeigt $\delta \to 0$, daß z_j Häufungspunkt von Nullstellen von f ist, im Widerspruch dazu, daß z_j ein Pol von f ist. Insgesamt gibt es also ein $\varepsilon_1 > 0$ so, daß für $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ die Komponenten $I_1^\varepsilon, \ldots, I_q^\varepsilon$ beschränkt und einfach zusammenhängend sind, sowie disjunkte Abschlüsse besitzen. Wählt man schließlich $\varepsilon < \varepsilon_1$ so, daß $\partial f^{-1}(D_\varepsilon)$ keine Verzweigungspunkte von f enthält, so haben die zugehörigen Komponenten $I_1, \ldots, I_q$ die behaupteten Eigenschaften.

Fügt man zu $I_1, \ldots, I_q$ ein hinreichend kleines Gebiet über ∞ hinzu, so gilt nach Satz 1.2:

$$(q-1)A(r,g) \leq \sum_{k=1}^{q} \overline{n}(r,g,I_k) + O(L(r,g)). \tag{26}$$

Wir zeigen, daß, bis auf höchstens endlich viele, jede Insel von g über $I_1, \ldots, I_q$ eine Nullstelle von $f \circ g - R$ enthält. Wir betrachten $F := 1/f \circ g$. Die Inseln von g über $I_1, \ldots, I_q$ sind Inseln von F über $\mathbb{D}_\varepsilon$. Da $1/R(\infty) = 0$ zeigt eine Anwendung des Satzes von Rouché wie im Beweis von Satz 3.3, daß, bis auf endlich viele, alle Inseln von F über $\mathbb{D}_\varepsilon$ eine Nullstelle von $F - 1/R = (R - f \circ g)/(f \circ g \cdot R)$ enthalten. Für große z hat $R(z)$ keine Pole oder Nullstellen. Damit sind die Nullstellen von $F - 1/R$ in einer geeigneten Umgebung von ∞ Nullstellen von $f \circ g - R$, da in Polen von $f \circ g$ dort $F - 1/R \neq 0$ gilt. Wir haben also

$$\sum_{k=1}^{q} \overline{n}(r,g,I_k) \leq \overline{n}(r, f \circ g - R, 0) + O(1) \tag{27}$$

gezeigt. Kombiniert man (26) und (27) und integriert logarithmisch, so folgt die Behauptung. Die Aussage über den Fehlerterm folgt wieder aus dem Resultat von Miles [33]. □

Eine direkte Konsequenz ist:

Korollar 3.13 *Sei f eine meromorphe Funktion mit unendlich vielen Polen, g eine ganze transzendente Funktion und R rational mit $R(\infty) = \infty$. Dann gilt*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\overline{N}(r, f\circ g - R, 0)}{T(r,g)} = \infty.$$

Ähnlich wie Satz 3.12 beweist man:

Satz 3.14 *Sei f eine rationale Funktion mit $q \geq 3$ Polen, g meromorph und transzendent und R rational mit $R(\infty) = \infty$. Dann gilt*

$$\overline{N}(r, f\circ g - R, 0) \geq (q-2)T(r,g) + S(r,g).$$

Falls f und g transzendent und meromorph sind, so ist $f\circ g$ im allgemeinen nicht mehr meromorph in der ganzen Ebene, sondern besitzt eine diskrete Menge von wesentlichen Singularitäten. Die Anzahlfunktion $\overline{N}(r, f\circ g - R, 0)$ ist dann nicht mehr wohldefiniert. Mit einer leichten Modifikation des obigen Beweises zeigt man jedoch:

Satz 3.15 *Sei f eine meromorphe Funktion mit $q \geq 3$ Polen, g meromorph und transzendent und R rational mit $R(\infty) = \infty$. Dann hat $f\circ g - R$ unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{C}$.*

3.3 Ahlforssche Ausnahmewerte

Wie in Abschnitt 1.1 erwähnt, nennen wir einen Wert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ Ahlforsschen Ausnahmewert, falls f für alle $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Inseln über $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$ besitzt. Satz 1.6, ii) zeigt, daß f höchstens zwei Ahlforssche Ausnahmewerte hat. Jeder Picardsche Ausnahmewert ist ein Ahlforsscher Ausnahmewert. Wie $f(z) = \exp(z) + 1/z$ zeigt, muß ein Ahlforsscher Ausnahmewert kein Picardscher Ausnahmewert sein. Der Wert 0 ist für f ein Ahlforsscher Ausnahmewert, aber nicht defekt im Sinne der Nevanlinna Theorie.
Wir werden in diesem Abschnitt untersuchen, ob sich bekannte Aussagen über Picardsche Ausnahmewerte auf Ahlforssche Ausnahmewerte übertragen lassen.
Existiert ein Jordanbogen $\gamma : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}}$ der 0 und ∞ verbindet mit $\lim_{t\to 1} f(\gamma(t)) = a$, so heißt a asymptotischer Wert. Es gilt der folgende klassische Satz (siehe [51], S. 232):

Satz 3.16 (Iversen) *Ein Picardscher Ausnahmewert ist ein asymptotischer Wert.*

Der Satz von Iversen läßt sich übertragen:

Satz 3.17 *Ein Ahlforsscher Ausnahmewert ist ein asymptotischer Wert.*

Beweis. Sei a Ahlforsscher Ausnahmewert, $\varepsilon > 0$ und Z_ε eine Zunge von f über $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$. Z_ε existiert, da sonst alle Werte in $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$ Picardsche Ausnahmewerte wären. Gemäß Tsuji [56], Satz VI. 9. nimmt f jeden Wert aus $\mathbb{D}_\varepsilon(a)$ in Z_ε mit höchstens zwei Ausnahmen unendlich oft an. Wählt man also $\delta < \varepsilon$ so enthält Z_ε eine Zunge Z_δ über $\mathbb{D}_\delta(a)$, denn da a Ahlforsscher Ausnahmewert ist, würden sonst alle Werte aus $\mathbb{D}_\delta(a)$ in Z_ε nur endlich oft angenommen. Mit $\delta \to 0$ läßt sich wie im Beweis des Satzes von Iversen der gewünschte Weg nach ∞ konsturieren. □

Die bekannten Sätze über Picardsche Ausnahmewerte und Nevanlinna-Defekte Werte für Funktionen von kleiner Ordnung (z.B. $\cos(\pi\rho)$-Theoreme, siehe [31], Chapter 7) lassen sich nicht ohne weiteres auf die entsprechenden Begriffe aus der Ahlforsschen Theorie übertragen. So besitzt z.B. die ganze Funktion

$$f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^n$$

die Ahlforsschen Ausnahmewerte 0 und ∞, es gilt jedoch $\rho(f) = \frac{1}{2}$.
Für ganze Funktionen f mit $\rho(f) < \frac{1}{2}$ beweisen wir:

Proposition 3.18 *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $\rho(f) < \frac{1}{2}$. Dann hat f keinen endlichen Ahlforsschen Ausnahmewert.*

Beweis. Da nach Satz 3.17 jeder Ahlforssche Ausnahmewert asymptotischer Wert ist, wäre f auf einer unbeschränkten zusammenhängenden Menge beschränkt, was dem Satz von Wiman widerspricht. □

Wir merken noch folgenden Zusammenhang zum Grenzwerteteilen an:

Proposition 3.19 *Seien $f, g : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ transzendente meromorphe Funktionen, die den Grenzwert $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ teilen. Dann ist a genau dann Ahlforsscher Ausnahmewert von f, wenn a Ahlforsscher Ausnahmewert von g ist.*

Beweis. Unmittelbare Folge von Lemma 2.2. □

Dies zeigt sofort, daß $f(z) = \exp(z) + 1/z$ den Ahlforsschen Ausnahmewert 0 hat. Denn exp hat den Picardschen (und damit Ahlforsschen) Ausnahmewert 0 und f und exp teilen alle Grenzwerte.

3.4 Beweise zur Ahlforsschen Theorie

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [6] gibt Bergweiler einen alternativen Beweis für einen Satz, den man als *kleinen* Fünf-Insel-Satz von Ahlfors bezeichnen könnte. Er besagt, daß eine nicht-konstante meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ über fünf Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen mindestens eine schlichte Insel besitzt. Diese Aussage hat viele wichtige Anwendungen in der Theorie komplexer dynamischer Systeme. Im Zusammenhang mit dem von uns in Kapitel 2 betrachteten Grenzwerteteilen ist jedoch wichtig, daß für transzendente Funktionen sogar unendlich viele schlichte Inseln existieren, d.h., daß der *große* Fünf-Insel-Satz von Ahlfors gilt. Wir werden in diesem Abschnitt aus Bergweilers Aussage mit unserer Methode aus Abschnitt 2.5 aus dem kleinen den großen Fünf-Insel-Satz herleiten. Diese Vorgehensweise läßt sich auch auf die Situation von vier und drei gegebenen Jordangebieten anwenden und wir erhalten insbesondere einen Beweis von Satz 1.6, ii).
Zunächst wollen wir jedoch einen Fünf-Insel-Satz für *kleine Kreise* herleiten. In unseren Untersuchungen zum Grenzwerteteilen haben wir ja nicht immer von der vollen Kraft des zweiten Hauptsatzes von Ahlfors Gebrauch gemacht. In einigen Fällen genügt es, daß zu fünf vorgegebenen Punkten auf der Sphäre Umgebungen dieser Punkte existieren, so daß f über mindestens einer der Umgebungen unendlich viele schlichte Inseln besitzt. Diese Aussage läßt sich tatsächlich elementar aus dem entsprechenden Satz der Nevanlinna-Theorie herleiten, nämlich, daß f höchstens vier vollständig verzweigte Werte hat. Überhaupt werden wir hier aus der klassischen Werteverteilungstheorie Aussagen der Ahlforsschen Theorie herleiten.
Die Strategie der Beweise ist immer die folgende: Wir nutzen die von Bergweiler bewiesenen *kleinen Sätze*, d.h., die Existenz *einer* Insel mit gewissen Eigenschaften für nicht-konstante Funktionen. Diese verallgemeinern wir dann in jedem Fall mit einer nahezu identischen Argumentation für transzendente Funktionen zur Existenz *unendlich* vieler Inseln. Dies liefert insbesondere eine neue Methode aus dem kleinen Satz von Picard den großen Satz von Picard herzuleiten.
Während der Fertigstellung dieses Abschnitts hat mir W. Bergweiler ein noch nicht veröffentlichtes Manuskript [8] zur Verfügung gestellt. Dort wurden unabhängig ähnliche Resultate erzielt. Unter anderem beweist er dort folgende Aussage.

Satz 3.20 *Seien $a_1, \ldots, a_5 \in \widehat{\mathbb{C}}$, $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß die Familie $\mathcal{F}_\varepsilon$ aller meromorphen Funktionen $f : G \to \widehat{\mathbb{C}}$, die keine schlichte Insel über einer der Kreischeiben $\mathbb{D}_\varepsilon(a_1), \ldots, \mathbb{D}_\varepsilon(a_5)$ besitzt, normal ist.*

Daraus folgt:

Satz 3.21 *Seien $a_1, \ldots, a_5 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß jede nicht-konstante meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine schlichte Insel über einer der Kreischeiben $\mathbb{D}_\varepsilon(a_1), \ldots, \mathbb{D}_\varepsilon(a_5)$ besitzt.*

Beweis. Falls f nicht-kostant ist, so ist $f(nz)$ nicht in $\mathbb{C}$ normal. □

Damit beweisen wir:

Satz 3.22 *Seien $a_1, \ldots, a_5 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß jede transzendente meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ unendlich viele schlichte Inseln über einer der Kreischeiben $\mathbb{D}_\varepsilon(a_1), \ldots, \mathbb{D}_\varepsilon(a_5)$ besitzt.*

Beweis. Angenommen, f besitzt für alle $\varepsilon > 0$ nur endlich viele schlichte Inseln über $\mathbb{D}_\varepsilon(a_1), \ldots, \mathbb{D}_\varepsilon(a_5)$. Wir betrachten wie in Abschnitt 2.5 die universelle Überlagerung von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{|z| \leq \sqrt{|w_j|}\}$:

$$\Phi_j(z) := w_j |w_j|^{z/(1-z)}$$

mit der Folge $w_j \to \infty$ aus Satz 2.19, ii). Wieder sei $f_j := f \circ \Phi_j$. Dann ist f_j wie gesehen nicht normal in $\mathbb{D}$ und das Zalcman Lemma liefert M_j, so daß $F_j := f_j \circ M_j$ in $\mathbb{C}$ kompakt gegen eine nicht-konstante Funktion F konvergiert. Wir behaupten, daß F keine schlichte Insel über den Kreisscheiben $\mathbb{D}_{2\varepsilon}(a_1), \ldots, \mathbb{D}_{2\varepsilon}(a_5)$ besitzt. Mit $\varepsilon \to 0$ erhalten wir dann einen Widerspruch zu Satz 3.21. Sei I eine Insel von F über $\mathbb{D}_{2\varepsilon}(a_1)$. Man zeigt leicht, daß I für $j > j_0$ eine Insel I_j von F_j über $\mathbb{D}_\varepsilon(a_1)$ enthält. Da $\Phi_j(\mathbb{D}) \to \infty$, Φ_j eine Überlagerungsabbildung ist und f nur endlich viele schlichte Inseln über $\mathbb{D}_\varepsilon(a_1)$ hat, ist I_j keine schlichte Insel. Mit dem Satz von Rouché folgt, daß I keine schlichte Insel ist. □

Wir betonen noch einmal, daß dieser Satz, bis auf die Benutzung von Nevanlinna-Theorie, als völlig elementar zu bezeichnen ist. Er ließe sich problemlos in einer Vorlesung über Werteverteilung herleiten.

Will man jedoch Aussagen für die Inseln über beliebigen Jordangebieten machen, so scheint es notwendig zu sein, tieferliegende Hilfsmittel einzusetzen. Dies zeigt sich auch in Bergweilers Beweis in [6], indem hier der Existenzsatz für quasikonforme Abbildungen mit vorgeschriebener Dilatation benutzt wird. Dabei reicht es allerdings, glatte Dilatationen zu betrachten. In diesem Fall ist der Beweis des Existenzsatzes erheblich einfacher.
Bergweiler benutzt quasikonforme Konjugation, um den Fall allgemeiner Jordangebiete auf den oben betrachteten Fall kleiner Kreise zurückzuführen. Wir wollen hier nicht zu diesem einen Zweck quasikonforme Abbildungen einführen und verweisen daher auf die Referenzen in [6].

Satz 3.23 **(Fünf-Insel-Satz)** *Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine transzendente meromorphe Funktion. Dann hat f unendlich viele schlichte Inseln über mindestens einem von fünf gegebenen Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen.*

Beweis. Angenommen, es gibt fünf Jordangebiete $D_1, \ldots, D_5$ mit disjunkten Abschlüssen, so daß f nur endlich viele schlichte Inseln über jedem dieser Gebiete hat. Genau wie im Beweis von Satz 3.22 erzeugen wir die nicht-konstante Abbildung F. Die Gebiete $D_1, \ldots, D_5$ können in fünf Jordangebiete $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_5$ mit disjunkten Abschlüssen eingebettet werden, so daß D_j relativ kompakt in $\widetilde{D}_j$ liegt für $j = 1, \ldots, 5$. Zu diesem Zweck können z.B. Polygonzüge verwendet werden. Wir behaupten, daß F keine schlichte Insel über $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_5$ hat. Sei $\widetilde{I}$ eine Insel von F über $\widetilde{D}_1$. Man überprüft leicht, daß für $j > j_0$ die Insel $\widetilde{I}$ eine Insel I_j von F_j über D_1 enthält. Da Φ_j eine Überlagerung ist, $\Phi_j(\mathbb{D}) \to \infty$ und aus der Voraussetzung, daß f nur endlich viele schlichte Inseln über $D_1, \ldots, D_5$ hat, folgt, daß I_j keine schlichte Insel ist. Mit dem Satz von Rouché folgt, daß $\widetilde{I}$ nicht schlicht ist. Also ist F eine nicht-konstante meromorphe Funktion ohne schlichte Inseln über $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_5$, ein Widerspruch. □

Es folgt aus Nevanlinnas zweitem Hauptsatz, daß eine nicht-konstante meromorphe Funktion in der Ebene mindestens ein Urbild der Ordnung $k \leq 2$ für vier gegebene Punkte auf der Sphäre hat und ein Urbild der Ordnung $k \leq 3$ für drei gegebene Punkte. Wie in [6], §5, bereits bemerkt, kann man mit diesen Aussagen Bergweilers Beweis des kleinen Fünf-Insel-Satzes leicht modifizieren, um zu zeigen, daß nicht-konstantes f mindestens eine Insel der Ordnung $k \leq 2$ über vier gegebenen Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen hat und eine Insel der Ordnung $k \leq 3$ über drei gegebenen Gebieten. Damit beweisen wir:

Satz 3.24 *Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine transzendente meromorphe Funktion. Dann hat f unendlich viele Inseln der Ordnung $k \leq 2$ über mindestens einem von vier gegebenen Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen und unendlich viele Inseln der Ordnung $k \leq 3$ über mindestens einem von drei gegebenen Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen.*

Beweis. Wir werden nur die Aussage für drei Gebiete zeigen. Angenommen, es existieren drei Jordangebiete $D_1, \ldots, D_3$ mit disjunkten Abschlüssen, so daß f nur endlich viele Inseln der Ordnung $k \leq 3$ über jedem dieser Gebiete hat. F sei wie oben. Mit den gleichen Bezeichnungen folgt aus den Voraussetzungen, daß die Ordnung von I_j für großes j mindestens vier ist. Der Satz von Rouché zeigt, daß die Ordnung von I mindestens vier ist. Dies ist ein Widerspruch. □

Der zweite Haupsatz von Ahlfors zeigt, wie in Satz 1.6 bereits angegeben, daß im Sinne von Satz 3.23 unendlich viele *einfach zusammenhängende* Inseln existieren. Für Funktionen mit einem Picardschen Ausnahmewert, z.B. ganzen Funktionen, ist dies sofort klar, da dann, bis auf endlich viele, jede Insel über einem Jordangebiet einfach zusammenhängend ist. Wir benötigen ein Lemma:

Lemma 3.25 *Seien $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine nicht-konstante meromorphe Funktion und D_1, D_2 Jordangebiete mit disjunkten Abschlüssen. Entweder besitzt f eine einfach zusammenhängende Insel über D_1 oder D_2, oder f hat keine Insel über D_1 und D_2.*

Beweis. Angenommen, f hat eine Insel über D_1 oder D_2, aber keine einfach zusammenhängende. Sei I_1 eine Insel über D_1. Da I_1 nicht einfach zusammenhängt, enthält das Komplement $\mathbb{C} \setminus I_1$ eine kompakte Komponente A. Man sieht leicht, daß $f(A) \not\subset \partial D_1$. Also enthält A eine Insel von f über dem Inneren von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D_1$. Da D_2 im Inneren von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D_1$ enthalten ist und A kompakt ist, enthält A eine Insel I_2 von f über D_2. Die gleiche Argumentation wie oben kann man auf I_2 anwenden. Induktiv folgt, daß A unendlich viele Inseln von f über D_1 enthält. Dies ist unmöglich. □

Daraus folgt:

Satz 3.26 *Sei $f : \mathbb{C} \to \widehat{\mathbb{C}}$ eine transzendente meromorphe Funktion. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ so, daß f unendlich viele einfach zusammenhängende Inseln der Ordnung k über mindestens einem von drei gegebenen Jordangebieten mit disjunkten Abschlüssen hat.*

Beweis. Man hat nur zu beachten, daß die Ordnung von I_j gegen ∞ geht und daher $\widetilde{I}$ nicht existieren kann. □

Literaturverzeichnis

[1] Adams, W.W.; Straus, E.G., *Non-Archimedian analytic functions taking the same values at the same points*, Ill. J. Math. **15** (1971), 418–424.

[2] Ahlfors, L.V., *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math. **65** (1935), 157–194.

[3] Anderson, J.M.; Clunie, J., *Slowly growing meromorphic functions*, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 267–280.

[4] Baker, I.N., *The existence of fixpoints of entire functions*, Math. Z. **73** (1960), 280–284.

[5] Barth, K.F.; Schneider, W.J., *A Julia line which is not a Milloux line*, Complex Variables Theory Appl. **13** (1989), 57–65.

[6] Bergweiler, W., *A new proof of the Ahlfors five islands theorem*, J. Anal. Math. **76** (1998), 337–347.

[7] Bergweiler, W., *On the composition of transcendental entire and meromorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 2151–2153.

[8] Bergweiler, W., *On the role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics*, preprint.

[9] Clunie, J.; Hayman, W. K., *The spherical derivative of integral and meromorphic functions*, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 117–148.

[10] Collingwood, E.F.; Lohwater, A.J., *The theory of cluster sets*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 56, Cambridge University Press, Cambridge 1966.

[11] Dinghas, A., *Vorlesungen über Funktionentheorie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 110, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

[12] Dragosh, S., *The spherical derivative of meromorphic functions*, J. Reine Angew. Math. **252** (1972), 51–67.

[13] Essén, M., *On universal Phragmén-Lindelöf theorems*, Complex Variables Theory Appl. **23** (1993), 283–293.

[14] Frank, G.; Weissenborn, G., *Rational deficient functions of meromorphic functions,* Bull. London Math. Soc. **18** (1986), 29–33.

[15] Fuchs, W.H.J., *A Phragmén-Lindelöf theorem conjectured by D.J. Newman*, Trans. Amer. Math. Soc. **267** (1981), 285–293.

[16] Fuchs, W.H.J., *Théorie de l'approximation des fonctions d'une variable complexe*, Séminaire de Mathématiques Supérieures, No. 26, Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, 1968.

[17] Gauthier, P., *The non-Plessner points for the Schwarz triangle functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **422** (1968), 6 S.

[18] Gundersen, G.G., *Meromorphic functions that share three or four values*, J. London Math. Soc. **20** (1979), 457–466.

[19] Gundersen, G.G., *Meromorphic functions that share three values IM and a fourth value CM*, Complex Variables Theory Appl. **20** (1992), 99–106.

[20] Hayman, W.K., *Some remarks on Schottky's theorem*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **43** (1947), 442-454.

[21] Hayman, W.K., *Meromorphic Functions*, Oxford University Press, London, 1975.

[22] Julia, G., *Quelques propriétés des fonctions méromorphes générales*, C. R. Acad. Sci. **168** (1919), 718-720.

[23] Katajamäki, K.; Kinnunen, L.; Laine, I., *On the value distribution of some composite meromorphic functions*, Bull. London Math. Soc. **25** (1993), 445–452.

[24] Klein, F., *Funktionentheorie in geometrischer Behandlungsweise (Vorlesung, gehalten in Leipzig 1880/81)*, Teubner Archiv zur Mathematik, Teubner, Leipzig, 1987.

[25] Laine, I., *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*, de Gruyter, Berlin-New York, 1993

[26] Langley, J.K., schriftliche Mitteilung, 1990.

[27] Lappan, P., *A criterion for a meromorphic function to be normal*, Comment. Math. Helv. **49** (1974), 492–495.

[28] Lehto, O., *The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity*, Comment. Math. Helv. **33** (1959), 196–205.

[29] Lehto, O.; Virtanen, K.I., *On the behaviour of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **240** (1957), 9 S.

[30] Li, B.Q., *Uniqueness of entire functions sharing four small functions.* Amer. J. Math. **119** (1997), 841–858.

[31] Lo, Y., *Value distribution theory*, Springer, Berlin 1993.

[32] Lohwater, A.J.; Pommerenke, Ch., *On normal meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **550** (1973), 12 S.

[33] Miles, J., *A note on Ahlfors' theory of covering surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **21** (1969), 30–32.

[34] Montel, P., *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1927. Nachgedruckt bei Chelsea, New York, 1974.

[35] Mues, E., *Shared value problems for meromorphic functions*, Value distribution theory and complex differential equations, Joensuu 1994, 17–43, Joensuun Yliop. Luonnont. Julk., 35, Univ. Joensuu, 1995.

[36] Mues, E.; Steinmetz, N., *Meromorphe Funktionen, die mit ihrer Ableitung Werte teilen*, Manuscripta Math. **29** (1979), 195–206.

[37] Nevanlinna, R., *Zur Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Math. **45** (1925), 1–99.

[38] Nevanlinna, R., *Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen*, Acta Math. **48** (1926), 367–391.

[39] Nevanlinna, R., *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1939. Nachgedruckt bei Chelsea, New York, 1974.

[40] Nevanlinna, R., *Analytic functions,* Springer, New York-Berlin, 1970.

[41] Newman, D.J., in *Aspects of contemporary complex analysis (Durham, 1979)*, Academic Press, New York, 1980, S. 566.

[42] Osgood, C.F., *Sometimes effective Thue-Siegel-Roth-Schmidt-Nevanlinna - bounds, or better,* J. Number Theory **21** (1985), 347–389.

[43] Ostrowski, A., *Über Folgen analytischer Funktionen und einige Verschärfungen des Picardschen Satzes*, Math. Zeitschr. **24** (1924), 215–258.

[44] Pizer, A.K., *A problem on rational functions*, Amer. Math. Mon. **80** (1973), 552–553.

[45] Pommerenke, Ch., *Normal functions*, Proceedings of the NRL Conference on Classical Function Theory, Math. Res. Center, Naval Res. Lab., Washington, D.C., 1970, 77–93.

[46] Reinders, M., *A new example of meromorphic functions sharing four values and a uniqueness theorem*, Complex Variables Theory Appl. **18** (1992), 213–221.

[47] Rosenbloom, P.C., *L'itération des fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **227** (1948), 382–383.

[48] Rosenbloom, P.C., *The fix-points of entire functions*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund 1952, Tome Supplementaire, 186–192.

[49] Sakai, M., *Regularity of a boundary having a Schwarz function*, Acta Math. **166** (1991), 263–297.

[50] Schiff, J.L., *Normal families*, Springer, New York, 1993.

[51] Segal, S.L., *Nine Introductions in Complex Analysis*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1981.

[52] Steinmetz, N., *The formula of Riemann-Hurwitz and iteration of rational functions*, Complex Variables Theory Appl. **22** (1993), 203–206.

[53] Steinmetz, N., *Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnaschen Hauptsatzes*, J. Reine Angew. Math. **368** (1986), 134–141.

[54] Toda, N., *Some generalizations of the unicity theorem of Nevanlinna*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **42** (1966), 1120–1121.

[55] Toda, N.; Zinno,T., *On Julia's exceptional functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **69** (1993), 61–65.

[56] Tsuji, M., *Potential Theory in Modern Function Theory*, Maruzen, Tokyo, 1959. Nachgedruckt bei Chelsea, New York, 1975.

[57] Yang, C.C.; Zheng, J.H., *On the fix-points of composite meromorphic functions and generalizations*, J. Anal. Math. **68** (1996), 59–93.

[58] Zalcman, L., *Normal families: new perspectives*, Bull. Amer. Math. Soc. **35** (1998), 215–230.

[59] Zheng, J.H., *A quantitative estimate on fixed-points of composite meromorphic functions*, Canad. Math. Bull. **38** (1995), 490–495.

[60] Zinno, T., *Some properties of Julia's exceptional functions and an example of Julia's exceptional functions with Julia's direction*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **464** (1970), 12 S.