

# Kapitel 5

## Testrechnungen

Vor der Anwendung eines numerischen Verfahrens auf komplizierte Strömungsprobleme wie in Turbomaschinen ist zunächst eine Validierung notwendig, bei welcher die Genauigkeit der diskreten Lösung überprüft wird. Im Gegensatz zu kompressiblen Strömungen ist bei inkompressiblen eine Vielzahl instationärer Problemstellungen aus der Literatur bekannt, welche mit Hilfe numerischer Verfahren teilweise oder vollständig gelöst werden können.

Im diesem Kapitel sollen mehrere Testrechnungen für inkompressible Strömungen durchgeführt, für welche analytische Lösungen oder Meßwerten vorliegen. Die Strömung eines kompressiblen Fluids bei sehr kleiner *Mach*-Zahl ( $M^2 \ll 1$ ) kann annähernd als inkompressibel angenommen werden, so daß im folgenden die Testrechnungen bei kleinen Referenz-*Mach*-Zahlen ( $M_\infty \leq 0.1$ ) durchgeführt werden.

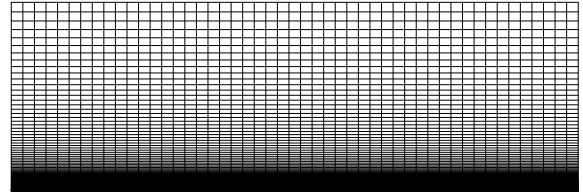
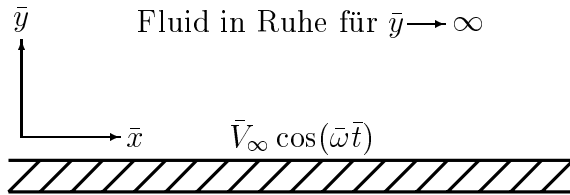
Die Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme spielt eine entscheidende Rolle für die Leistungsfähigkeit impliziter Zeitschrittverfahren. Somit werden sowohl bei stationären als auch bei instationären Strömungen mehrere Testrechnungen zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit verschiedener Lösungsverfahren vorgenommen.

### 5.1 Zweites *Stokes*'sches Problem

Da bei der längsangeströmten ebenen Plattenströmung die Geschwindigkeit der Außenströmung konstant ist, herrscht der gleiche statische Druck im ganzen Strömungsfeld, so daß keine Ablösung auftritt. Als einfaches Beispiel einer instationären Grenzschichtströmung wird im folgenden mittels der vollständigen Erhaltungsgleichungen die laminare Strömung über einer ebenen unendlich langen Platte numerisch berechnet, welche die geradlinige harmonische Schwingung in ihrer Ebene ausführt [83], d. h. die Strömung wird nur durch die Wandgeschwindigkeit über die Haftbedingung aufrecht gehalten.

Bild 5.1(a) zeigt das Zweite *Stokes*'sche Problem, welches die Strömung über einer Platte beschreibt, welche sich mit einer Frequenz  $\bar{\omega}$  und einer Amplitude  $\bar{V}_\infty$  in ihrer Ebene bewegt. Bezeichnet  $\bar{x}$  die Koordinate parallel zur Wand und  $\bar{y}$  die Koordinate normal zur Wand, dann wird das Strömungsproblem durch die partielle Differentialgleichung und die Randbedingung

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \bar{\nu} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}, \quad \bar{u}_w(\bar{t}) = \bar{V}_\infty \cos(\bar{\omega} \bar{t}) \quad (5.1)$$



(a)

(b)

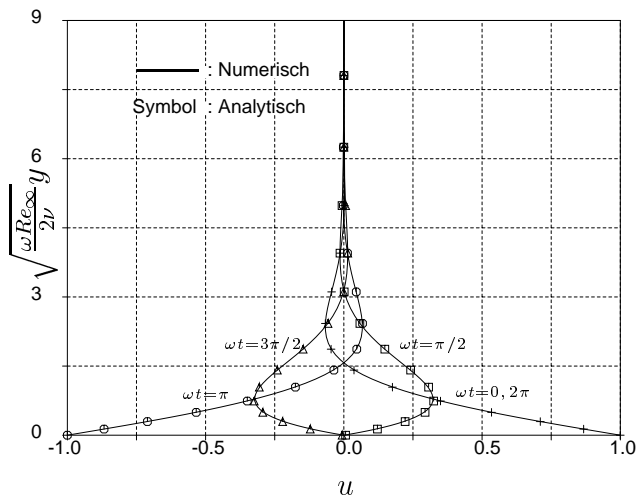
**Bild 5.1: Zweites *Stokes'sches* Problem (a) und das verwendete Gitternetz (b)**

beschrieben.

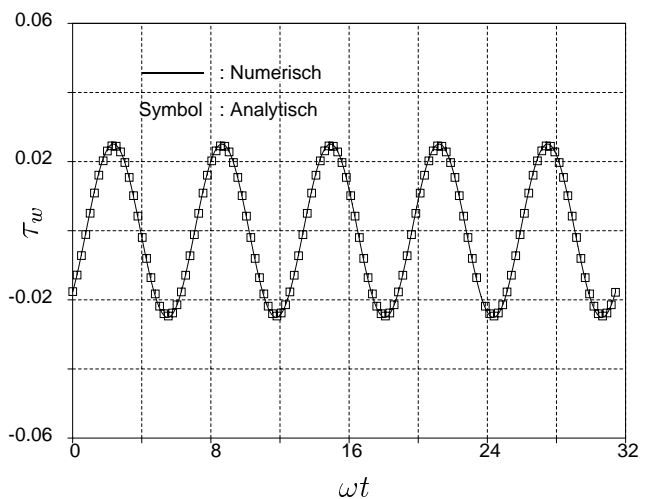
Die analytische Lösung des zweiten *Stokes'schen* Problems für eine künstliche Länge  $\bar{L}_\infty$  ist durch die dimensionslose Form

$$u(y, t) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega Re_\infty}{2\nu}}y\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega Re_\infty}{2\nu}}y\right); \quad Re_\infty = \frac{\bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty \bar{L}_\infty}{\bar{\mu}_\infty} \quad (5.2)$$

gegeben. Hierbei wurde die künstliche Länge  $\bar{L}_\infty$  als Referenz-Länge eingeführt, um eine Referenz-*Reynolds-Zahl* zu definieren, da in dem betrachteten Problem der unendlich langen



(a)



(b)

**Bild 5.2: Zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeitsverteilung (a) und der Wand-schubspannung (b) über der oszillierenden Platte**

Platte keine geometrische Länge eingeht. Das Geschwindigkeitsprofil  $u(y, t)$  hat die Form einer harmonischen Oszillation, deren Amplitude  $\exp\left(-\sqrt{(\omega Re_\infty/2\nu)y}\right)$  und deren Phase  $\sqrt{(\omega Re_\infty/2\nu)y}$  ist. Die entsprechende Schubspannung an der oszillierenden Wand  $\tau_w(t)$  ist auch durch

$$\tau_w(t) = \frac{\mu}{Re_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \sqrt{\frac{\rho\omega\mu}{Re_\infty}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.3)$$

gegeben. Die maximale Schubspannung läuft also der maximalen Geschwindigkeit um  $135^\circ$  nach.

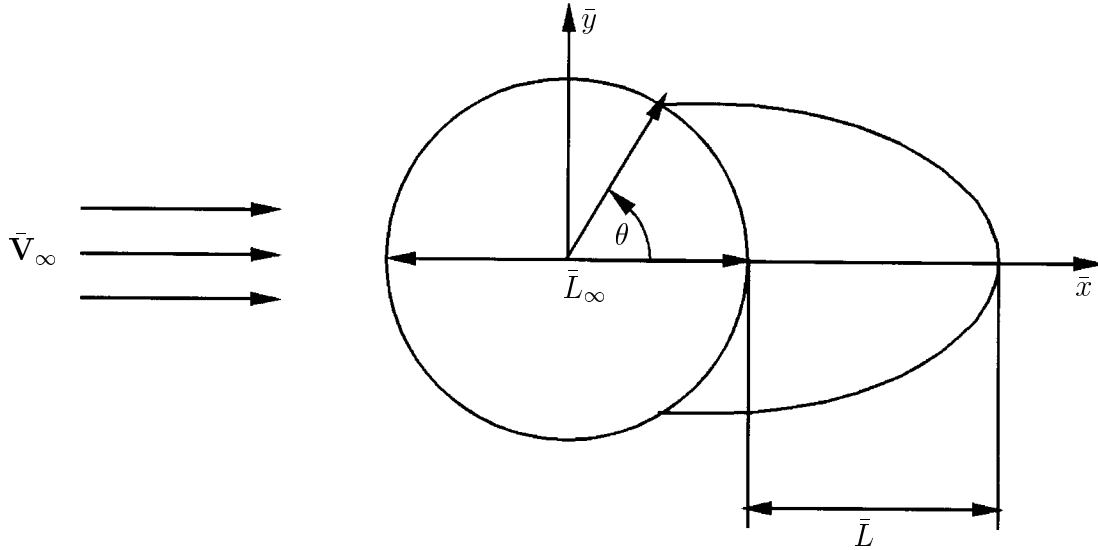
In Bild 5.1(b) ist das für die Simulation verwendete Gitternetz mit  $50 \times 90$  Punkten wiedergegeben. Im Gegensatz zur stationären Strömungen ist ein noch feineres Gitternetz senkrecht zur Wand für eine genaue Auflösung der zeitlichen Grenzschichtentwicklung erforderlich. Die Referenz-Mach-Zahl  $M_\infty$  basiert auf der Amplitude  $\bar{V}_\infty$  sowie dem entsprechenden Zustand  $(\bar{\rho}_\infty, \bar{T}_\infty)$  und beträgt 0.05. Für die Anfangslösung wurde hier die analytische Lösung zum Zeitpunkt  $t = 0$  vorgeschrieben.

Bild 5.2(a) zeigt einen Vergleich der numerischen Lösung mit dem analytisch erzielten Geschwindigkeitsprofil bei einer Plattenfrequenz von  $\omega = 2\pi$  zu verschiedenen Zeitpunkten für einen Zeitraum von  $t = 1$  und einer Referenz-Reynolds-Zahl von  $Re_\infty = 10^4$ . In Bild 5.2(b) ist eine periodische Entwicklung der Wandschubspannung zusammen mit der analytischen Lösung bis zum Zeitpunkt  $t = 5$  dargestellt. Aus dieser Testrechnung folgt, daß eine genaue Wiedergabe der einfachen instationären Grenzschichtströmung durch die numerische Simulation möglich ist.

## 5.2 Kreiszyklinderumströmung

Um die zeitliche Entwicklung der Grenzschicht- bzw. Wirbelablösung von einem stumpfen Körper zu untersuchen, wird hier die Strömung um einen Kreiszyklinder mit einem Durchmesser  $\bar{L}_\infty$  betrachtet. Bei dieser Strömung wird das zeitliche Verhalten der Grenzschicht- bzw. Wirbelschichtströmung hinter dem Kreiszyklinder betrachtet, welcher aus der Ruhe heraus plötzlich mit einer Geschwindigkeit  $\bar{V}_\infty$  in Bewegung gesetzt wird, d. h., daß der Zylinder in einem ruhenden Fluid ruckartig auf seine volle zeitlich konstant bleibende Geschwindigkeit  $\bar{V}_\infty$  in die Richtung  $\theta = \pi$  gebracht wird. Der Einfachheit halber wird die plötzliche Bewegung des Zylinders aus der Ruhe durch die ruckartige Veränderung der Reynolds-Zahl im ortsfesten Koordinatensystem modelliert, das heißt, daß die zeitlich konstante Strömung mit der Geschwindigkeit  $\bar{V}_\infty$  in der Richtung  $\theta = 0$  am ruhenden Zylinder vorbeiströmt. Bild 5.3 zeigt ein schematisches Diagramm der Problemstellung.

Die Zylinderumströmung ist ein klassisches Strömungsproblem, und ihre Struktur ist trotz der einfachen Geometrie sehr komplex. Die allgemeinen Merkmale der Strömung sind bereits bekannt aus den Experimenten nach *Bouard et al.* [13] und *A. Roshko* [63]. Im Bereich der Reynolds-Zahlen  $6 \leq Re_\infty \leq 40$  ( $Re_\infty = \bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty \bar{L}_\infty / \bar{\mu}_\infty$ ) erreicht die Strömung einen stationären Zustand, in welchem ein voll ausgebildetes Wirbelpaar hinter dem Zylinder zeitlich konstant bleibt. Für höhere Reynolds-Zahlen existiert die stabile Strömung nur für einen verhältnismäßig kurzen Zeitraum. Sie wird bei der weiteren Entwicklung instabil, d. h. die



**Bild 5.3: Ein schematisches Diagramm der Problemstellung**

Wirbel wachsen noch weiter an und lösen sich schließlich durch die Aufprägung der äußeren Strömung wechselseitig vom Zylinder ab. Später bildet sich dann unter einer *Reynolds*-Zahl von etwa  $Re_\infty = 300$  eine regelmäßige Anordnung rechts und links drehender Wirbel aus, welche als *von Kármán'sche Wirbelstraße* bezeichnet wird.

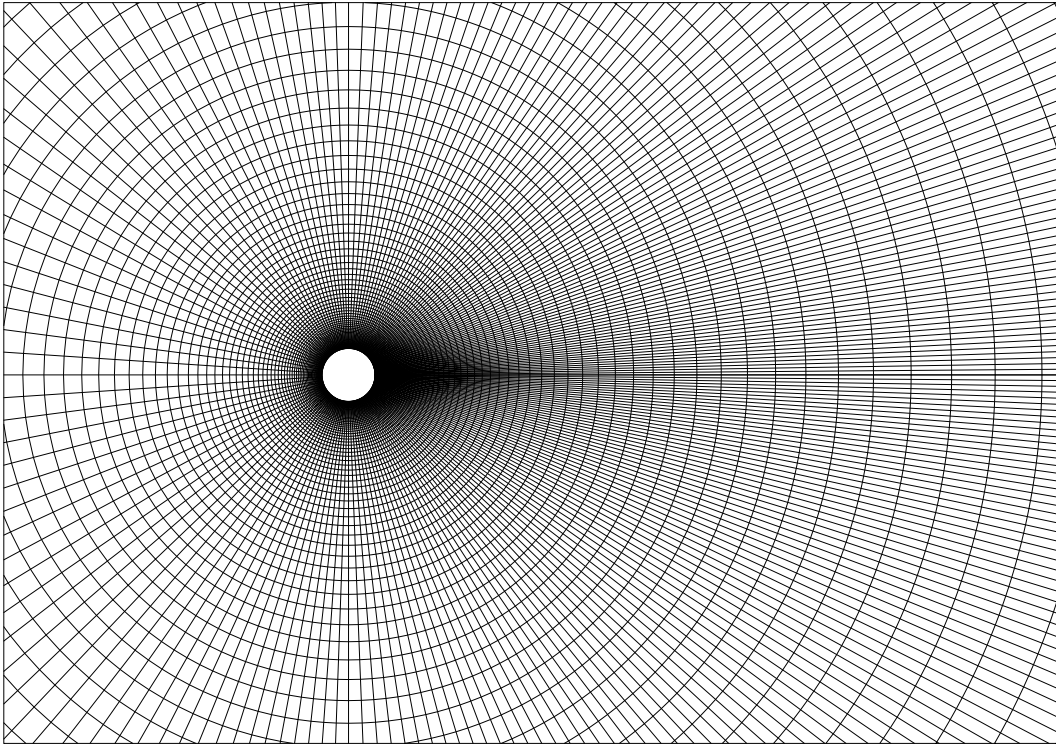
Für die Testrechnung wird ein O-Gitter mit  $89 \times 225$  Punkten eingesetzt, verfeinert in unmittelbarer Wandnähe sowie im Nachlauf, wie in Bild 5.4 dargestellt. Die minimale Gitterweite an der Wand ist  $2.4 \times 10^{-3} L_\infty$ , und der Durchmesser des Gitternetzes beträgt  $20L_\infty$ . Um die zeitlich genaue Lösung zu erhalten, sind sowohl eine gute Anfangslösung als auch eine geeignete Behandlung der Randbedingungen erforderlich.

Für die Anfangslösung zum Zeitpunkt  $t = 0$  werden die analytische Lösung für die stationäre inkompressible Potentialströmung in Zylinderkoordinaten  $(r, \theta)$

$$u_r = \left(1 - \frac{1}{4r^2}\right) \cos \theta, \quad u_\theta = -\left(1 + \frac{1}{4r^2}\right) \sin \theta \quad (5.4)$$

und die mittels der *Bernoulli'schen* Gleichung erzielte Druckverteilung dem ganzen Strömungsfeld vorgegeben. Die statische Temperatur und die Massendichte sind jeweils mit einem konstanten Wert vorgeschrieben.

An der Zylinderwand werden die Haftbedingung, der Nullgradient des Druckes und der Temperatur vorgeschrieben. Am Austritt wird die Massendichte zeitlich konstant gehalten, und die Impulsdichten und die totale Temperatur werden aus dem Integrationsgebiet extrapoliert. Am Eintritt sind der totale Druck, die totale Temperatur sowie die Impulsdichte in  $x$ -Richtung vorgeschrieben, währenddessen wird die Impulsdichte in  $y$ -Richtung aus dem Integrationsgebiet extrapoliert. Nachfolgend werden in verschiedenen Strömungsfällen die Eigenschaften der Zylinderumströmung untersucht.



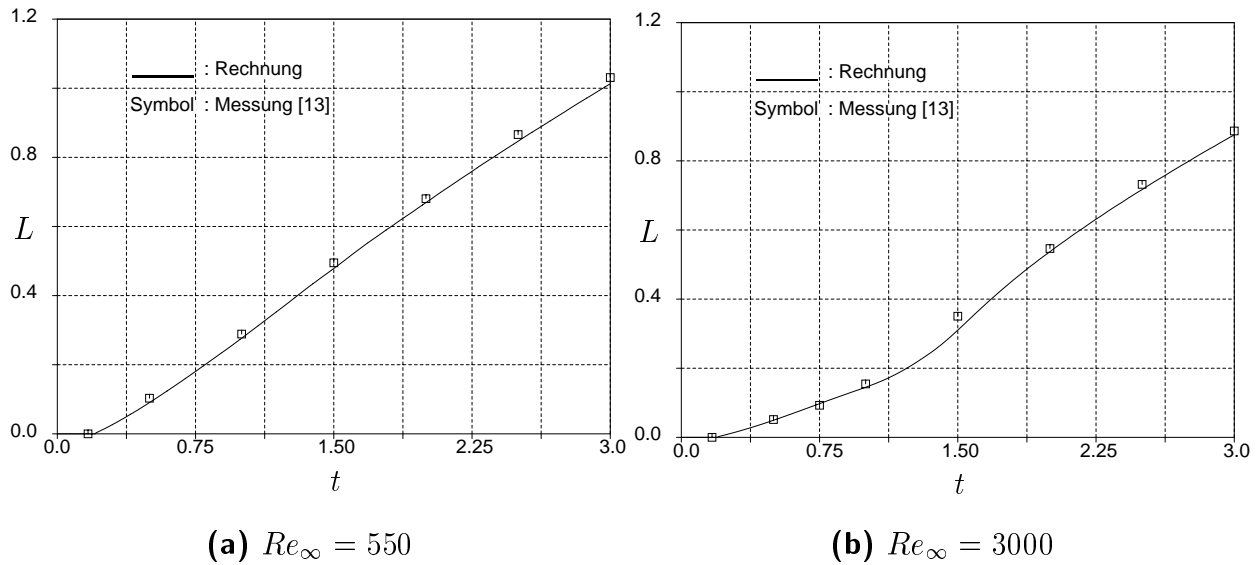
**Bild 5.4: Eine Vergrößerung des verwendeten Gitternetzes**

### 5.2.1 Laminare Strömung

Als erstes Beispiel für die Zylinderumströmung bei ruckartiger Anfahrt des Zylinders in einem ruhenden idealen Gas wird die zeitliche Ausbildung der laminaren Grenzschicht zu einem Anfangsstadium ( $0 \leq t \leq 3$ ) untersucht. Bei diesem Anfahrvorgang bildet sich unmittelbar nach Beginn der Bewegung eine sehr dünne Grenzschicht in unmittelbarer Wandnähe aus. Die Grenzschichtdicke

nimmt dann mit der Zeit zu, und bei ihrer weiteren Ausbildung beginnt sich die Grenzschicht von der Wand abzulösen. Für dieses Beispiel werden die Referenz-*Reynolds*-Zahlen von 550 sowie 3000 und eine Referenz-*Mach*-Zahl von 0.05 ( $M_\infty = \bar{V}_\infty / \sqrt{\kappa \bar{R} \bar{T}_\infty}$ ) gewählt, bei welchen die Meßdaten für den Vergleich mit den Rechenergebnissen verfügbar sind [13]. Die Strömungen bei diesen *Reynolds*-Zahlen bleiben in größerem Abstand hinter dem Zylinder nicht mehr laminar erhalten [63].

Bild 5.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der Länge des an dem Zylinder anliegenden Wirbelpaars  $L$  auf der symmetrischen Achse ( $y = 0$ ) hinter dem Zylinder bei den Referenz-*Reynolds*-Zahlen von 550 und 3000. Verglichen mit den Meßdaten ist eine quantitativ gute Übereinstimmung festzustellen. Mit zunehmender *Reynolds*-Zahl wird die Wirbellänge  $L$  zum gleichen Zeitpunkt kleiner. In Bild 5.6 ist die zeitliche Entwicklung der Verteilung der Ge-

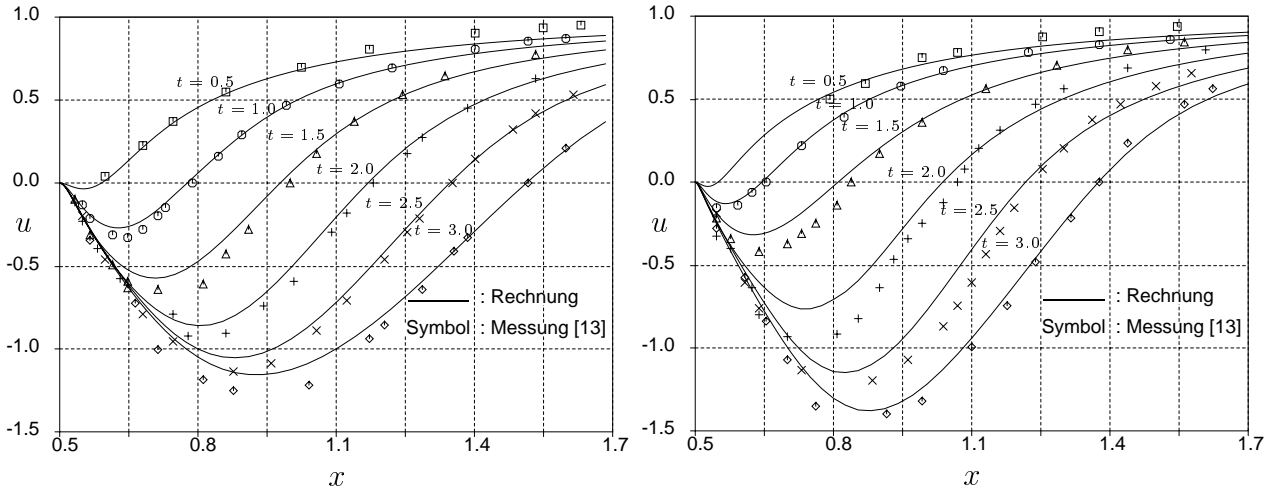


**Bild 5.5: Zeitliche Entwicklung der Länge des an dem Zylinder anliegenden Wirbelpaars  $L$  auf der symmetrischen Achse ( $y = 0$ )**

schwindigkeitskomponente  $u$  auf der  $x$ -Achse dargestellt. Negative Werte von  $u$  bedeuten die Rückströmung. Es ist außerdem ersichtlich, daß hinter dem Zylinder Absolutwerte von  $u$  existieren, welche größer als die Eintrittsgeschwindigkeit  $V_\infty (= 1)$  sind, und der maximale Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt zunimmt, wenn die *Reynolds*-Zahl von 550 zu 3000 zunimmt. Die Rechenergebnisse weichen jedoch leicht von den Messungen ab. Diese Abweichungen können auf die Anfangslösung zurückzuführen sein, für welche hier die analytische Lösung der inkompressiblen Potentialströmung eingesetzt wurde.

Bild 5.7 zeigt eine qualitativ gute Übereinstimmung gerechneter Stromlinien (unten) mit experimentell erhaltenen Streichlinien (oben) bei einer Referenz-*Reynolds*-Zahl von  $Re_\infty = 3000$  zum Zeitpunkt  $t = 2.5$ , an welchem sich ein symmetrisches Wirbelpaar hinter dem Zylinder ausbildet. Es sei darauf hingewiesen, daß die in Bild 5.7 dargestellten zwei Strömungszustände nicht exakt äquivalent sind: im Experiment ist eine Momentaufnahme der Partikelfaden gezeigt, während die gerechneten Linien den momentanen Stromlinien entsprechen. In Bild 5.8 ist ein Strömungszustand hinter dem Zylinder durch die Geschwindigkeitsvektoren qualitativ gezeigt. Wie von *Bouard* und *Coutanceau* [13] experimentell beobachtet, tritt ein Sekundärwirbel auf, welcher sich in entgegengesetzter Richtung gegenüber dem Primärwirbel dreht und auf die zweite Ablösung (eine Ablösung der Rückströmung selbst) zurückzuführen ist, und ein weiterer Sekundärwirbel, welcher sich in entgegengesetzter Richtung gegenüber dem ersten dreht. (das sogenannte  $\alpha$ -Phänomen) [13].

Mit der Zeit wächst ein an dem Zylinder anliegendes symmetrisches Wirbelpaar an, bis es beinahe so groß wie der Zylinder geworden ist. Nach dem Ablauf eines Anfangsstadiums wird bei der Strömung mit einer *Reynolds*-Zahl über  $Re_\infty = 40$  in Folge verschiedener physikalischer Störungen das Wirbelpaar unsymmetrisch, und dann löst sich durch die Hauptströmung eine Reihe von Wirbelschichten wechselseitig vom Zylinder ab. Im Falle numerischer Simulationen



(a)  $Re_\infty = 550$

(b)  $Re_\infty = 3000$

**Bild 5.6: Zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeitskomponente  $u$  auf der symmetrischen Achse ( $y = 0$ )**

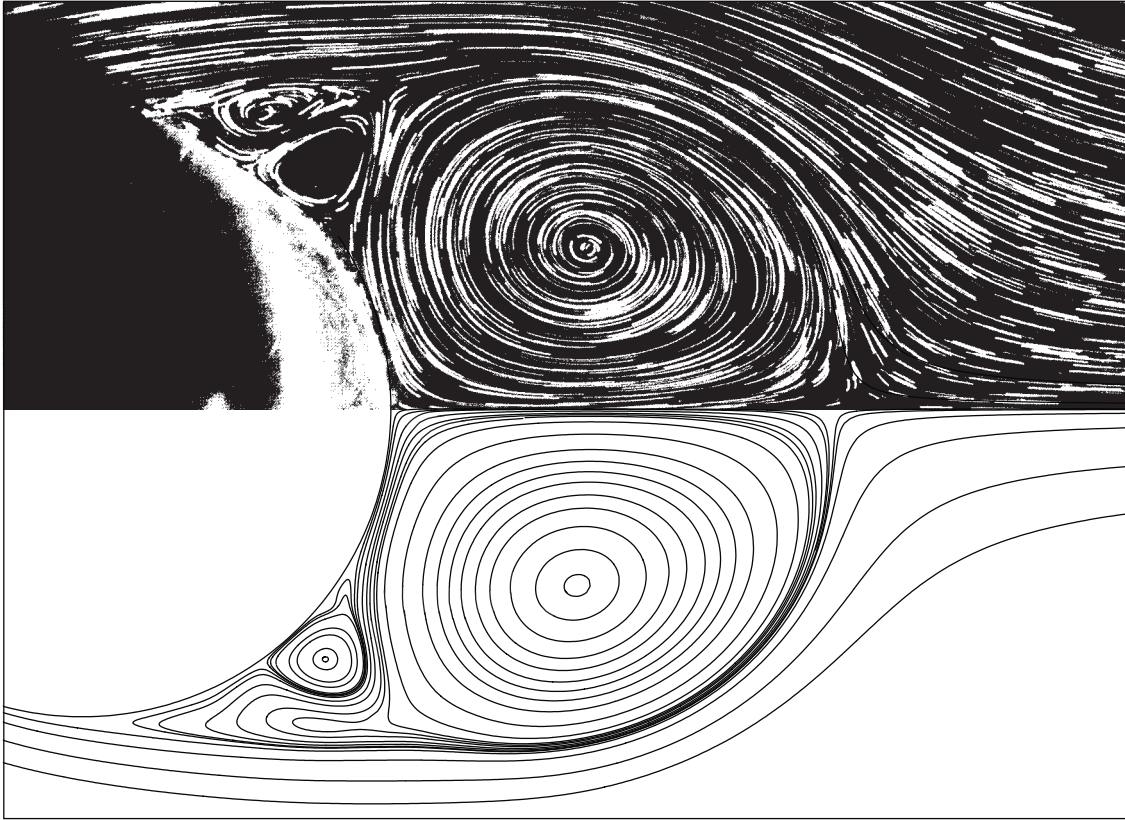
spielen die Diskretisierungs- und Rundungsfehler jedoch nur dann die Rolle einer Störung, wenn das verwendete Gitternetz, die Anfangslösung sowie die Randbedingungen symmetrisch sind. Auch wenn in diesem Fall eine abgelöste Wirbelreihenströmung ohne Hinzufügung einer künstlichen Störung möglich ist, erfordert die Instabilisierung der Strömung infolge derartiger Fehler eine lange Rechenzeit, bis eine voll ausgebildete Wirbelreihenströmung erreicht worden ist, wenn man sich nur für eine zeitlich voll ausgebildete periodische Wirbelströmung hinter dem Zylinder interessiert.

Eine voll ausgebildete Wirbelreihenströmung kann innerhalb einer vernünftigen Zeit erzeugt werden, indem man eine künstliche Störung ins Strömungsfeld einführt [49]; d. h. die Strömung wird dadurch gestört, daß man den Zylinder zum Anfangsstadium für einen kurzen Zeitraum im Uhrzeigersinn und dann im Gegenuhrzeigersinn dreht. Bei den Strömungen mit kleinen *Reynolds*-Zahlen ist die Einführung der künstlichen Störung für eine Rechenzeiterparnis sehr effektiv, da die Strömung aufgrund der Reibung schnell unsymmetrisch wird. In dieser Arbeit wird auch eine voll ausgebildete Wirbelreihenströmung mit einer Periodizität untersucht, so daß eine künstliche Störung der Form

$$1.5 \leq t \leq 1.75; \quad u_{w_\theta} = -0.15, \quad 1.75 < t \leq 2.5; \quad u_{w_\theta} = 0.25 \quad (5.5)$$

ins Strömungsfeld eingeführt wird, wobei  $u_{w_\theta}$  die Umfangsgeschwindigkeit der Zylinderoberfläche ist, welche im Gegenuhrzeigersinn positiv gezählt wird. Die voll ausgebildete Wirbelreihenströmung ist unabhängig von den Details der künstlich eingeführten Störung.

Einige der wichtigsten Größen zur Beurteilung der periodischen Strömung sind die zeitliche Entwicklung der Kräfte, welche vom Fluid auf den Zylinder ausgeübt werden. Zu einem Zeitpunkt  $t$  werden der Widerstandsbeiwert  $C_W$ , der Auftriebsbeiwert  $C_A$  sowie der Drehmomentbeiwert  $C_T$  durch die Integration des statischen Drucks  $p_w$  und der Wirbelstärke  $\xi_w$  an



**Bild 5.7: Strömungsstruktur des an dem Zylinder anliegenden Wirbelpaars bei  $Re_\infty = 3000$  zu  $t = 2.5$**

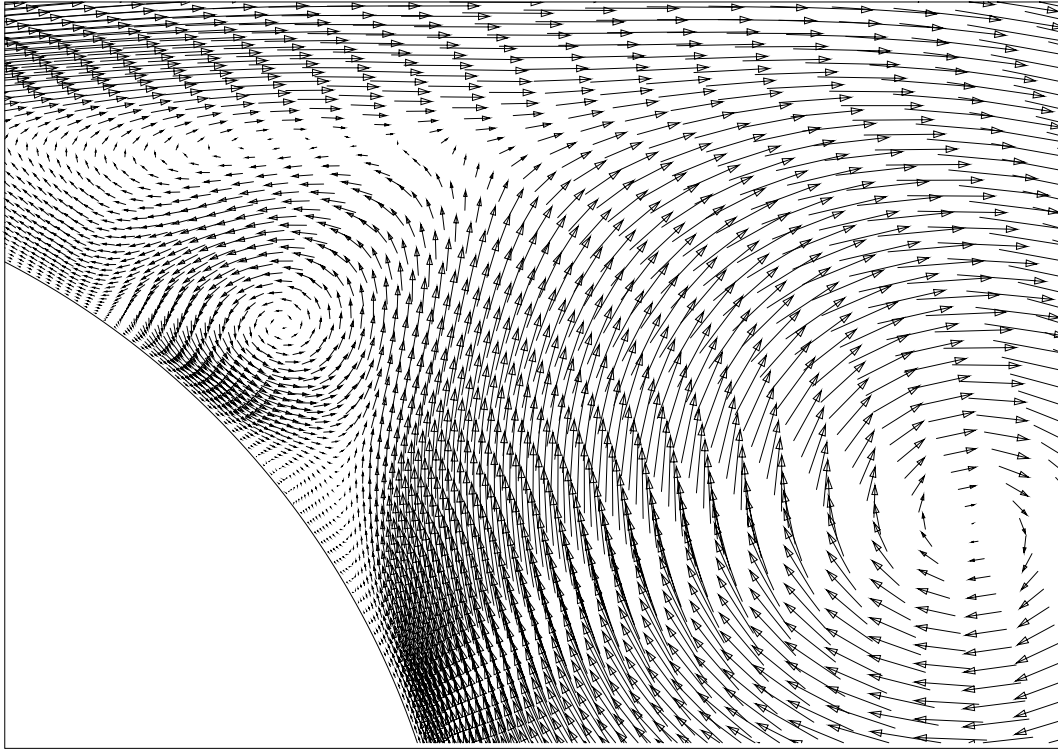
der Zylinderoberfläche

$$\begin{aligned}
 C_W &= \frac{\int_0^{2\pi} (-\bar{p}_w \cos \theta + \bar{\mu} \bar{\xi}_w \sin \theta) (\bar{L}_\infty / 2) d\theta}{\bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty^2 \bar{L}_\infty / 2} \\
 &= - \int_0^{2\pi} p_w \cos \theta d\theta + \frac{\mu}{Re_\infty} \int_0^{2\pi} \xi_w \sin \theta d\theta, \tag{5.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_A &= \frac{\int_0^{2\pi} (-\bar{p}_w \sin \theta - \bar{\mu} \bar{\xi}_w \cos \theta) (\bar{L}_\infty / 2) d\theta}{\bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty^2 \bar{L}_\infty / 2} \\
 &= - \int_0^{2\pi} p_w \sin \theta d\theta - \frac{\mu}{Re_\infty} \int_0^{2\pi} \xi_w \cos \theta d\theta, \tag{5.7}
 \end{aligned}$$

$$C_T = \frac{\int_0^{2\pi} (-\bar{\mu} \bar{\xi}_w) (\bar{L}_\infty / 2) d\theta}{\bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty^2 \bar{L}_\infty / 2} = - \frac{\mu}{Re_\infty} \int_0^{2\pi} \xi_w d\theta, \tag{5.8}$$





**Bild 5.8: Geschwindigkeitsvektoren (=  $u$ ) auf der oberen Rückseite des Zylinders bei  $Re_\infty = 3000$  zu  $t = 2.5$**

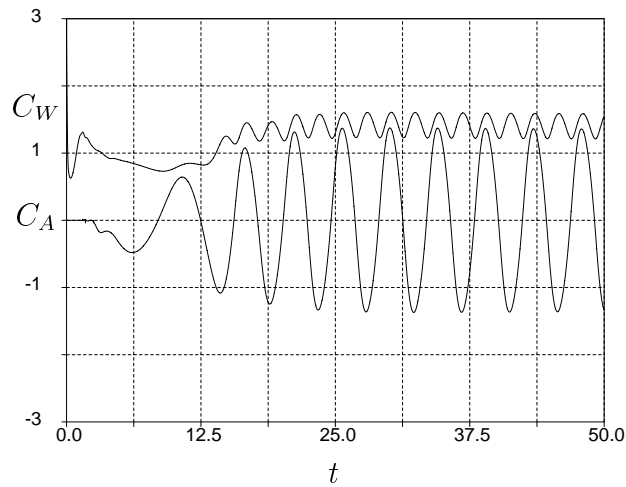
$$\xi_w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \frac{\bar{L}_\infty}{V_\infty} = \bar{\xi}_w \frac{\bar{L}_\infty}{V_\infty} \quad (5.9)$$

und der statische Druckbeiwert an der Zylinderoberfläche durch

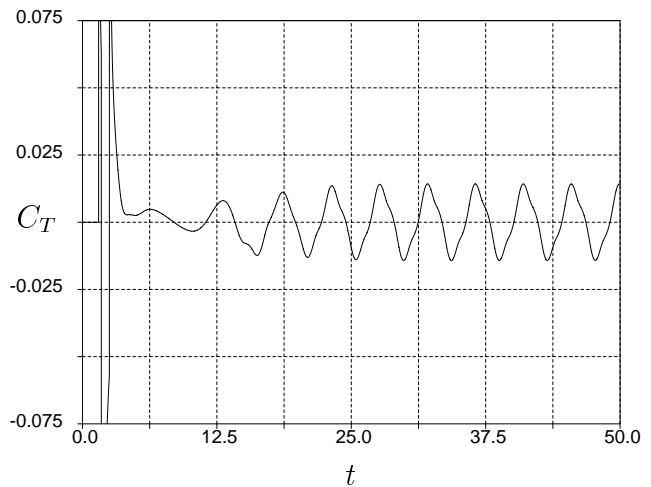
$$C_p = \frac{\bar{p}_w - \bar{p}_\infty}{\bar{\rho}_\infty V_\infty^2 / 2} = 2(p_w - p_\infty) \quad (5.10)$$

berechnet, wobei die ersten und die zweiten Terme in (5.6) sowie (5.7) jeweils den Beiträgen der Druck- ( $C_{A_p}, C_{W_p}$ ) und Reibungskraft ( $C_{A_v}, C_{W_v}$ ) zum Auftrieb und Widerstand entsprechen. Die Gleichungen (5.6)-(5.8) werden mit Hilfe der *Trapezregel* numerisch integriert. Unmittelbar nach Beginn ruckartiger Anfahrt wird die Wirbelstärke  $\xi_w$  zur Erfüllung der Haftbedingung an der Wand erzeugt. Für stationäre laminare ebene Strömungen verschwindet die Wirbelstärke  $\xi_w$  an der Ablöselage. Bei instationären Strömungen steht jedoch keine klare Definition der Ablöselage fest [70].

Nach den Messungen von *Roshko* [63] ist eine regelmäßige wechselseitige Wirbelablösung vom Zylinder im Bereich der *Reynolds-Zahlen* von 40 bis zur *kritischen Reynolds-Zahl* von etwa  $2 \times 10^5$  möglich. In dem angegebenen Bereich der *Reynolds-Zahlen* ergibt sich eine eindeutige Abhängigkeit der *Strouhal-Zahl* ( $Str = \omega L_\infty / V_\infty$ ) von der *Reynolds-Zahl*. Die Strömung



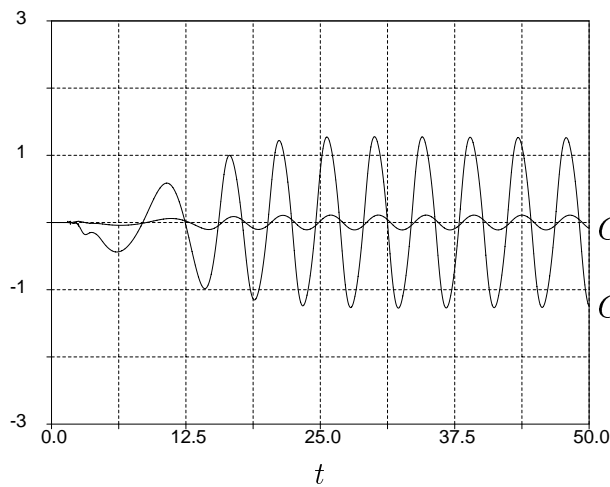
(a) Auftriebs-  $C_A$  und Widerstandskraft  $C_W$



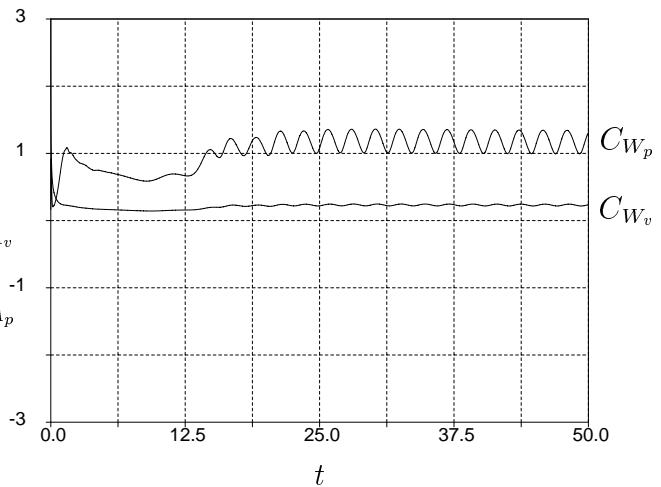
(b) Drehmoment  $C_T$

**Bild 5.9: Zeitliche Entwicklung der auf den Zylinder wirkenden Kräfte bei  $Re_\infty = 1000$**

im Bereich der *Reynolds*-Zahlen  $150 \leq Re_\infty \leq 300$  zeigt in größerem Abstand hinter dem Zylinder eine laminar-turbulente Vermischung. Für größere *Reynolds*-Zahlen liegt infolge turbulenter Diffusion ein völlig turbulenter Nachlauf vor. Als ein Beispiel für die periodische Wirbelablösung wird zunächst die laminare Strömung bei einer *Reynolds*-Zahl von  $Re_\infty = 1000$  untersucht, bei welcher sich die vom Zylinder ablösenden Wirbel infolge turbulenter Diffusion stromabwärts im Nachlauf auslöschen können.

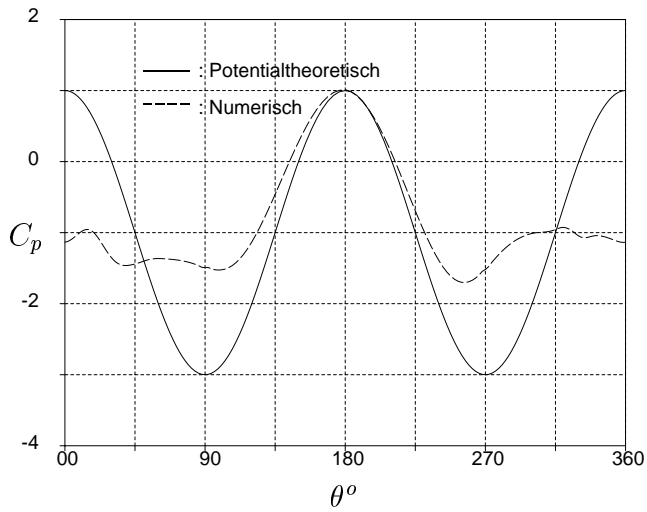


(a) Auftriebskraft

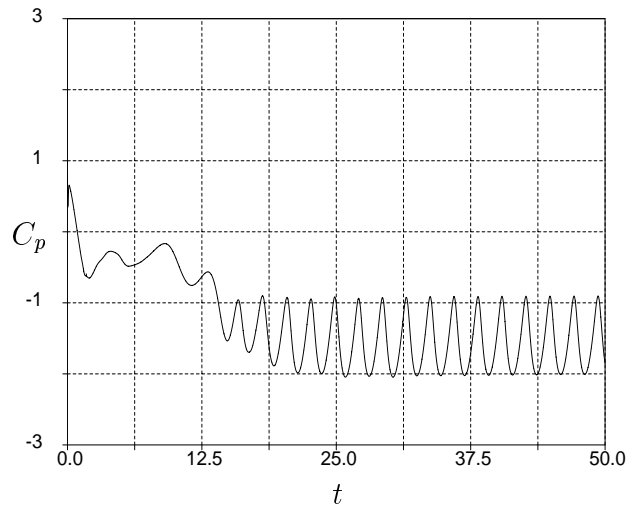


(b) Widerstandskraft

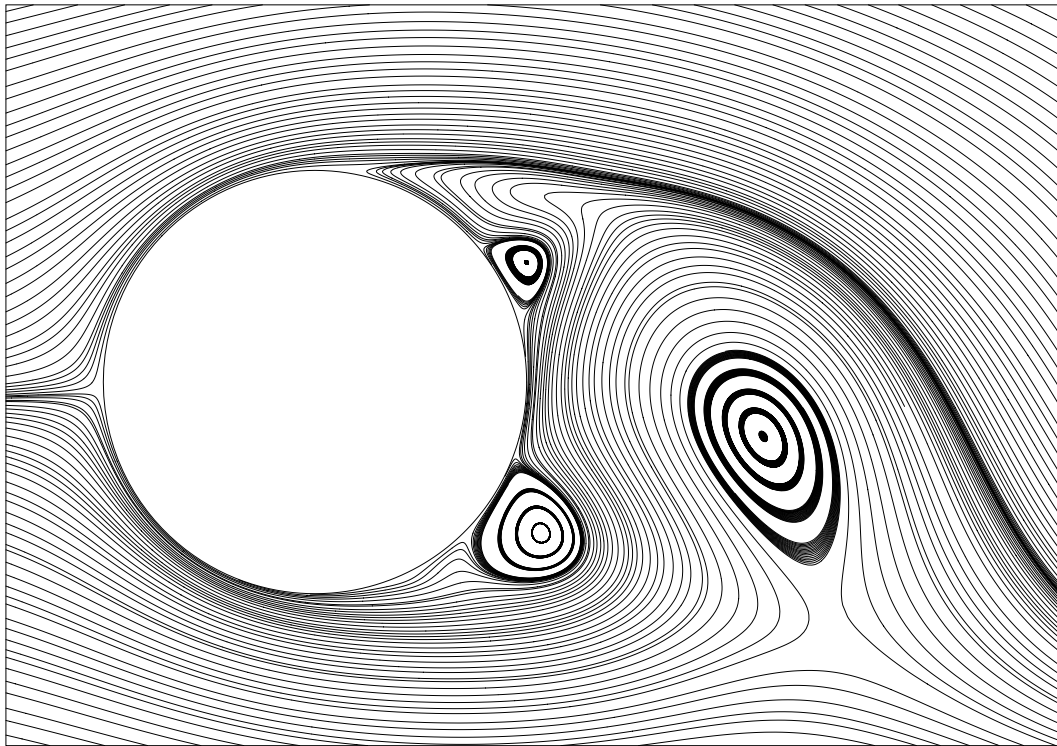
**Bild 5.10: Beiträge der Druck- und Reibungskraft zur Auftriebs- und Widerstandskraft bei  $Re_\infty = 1000$**



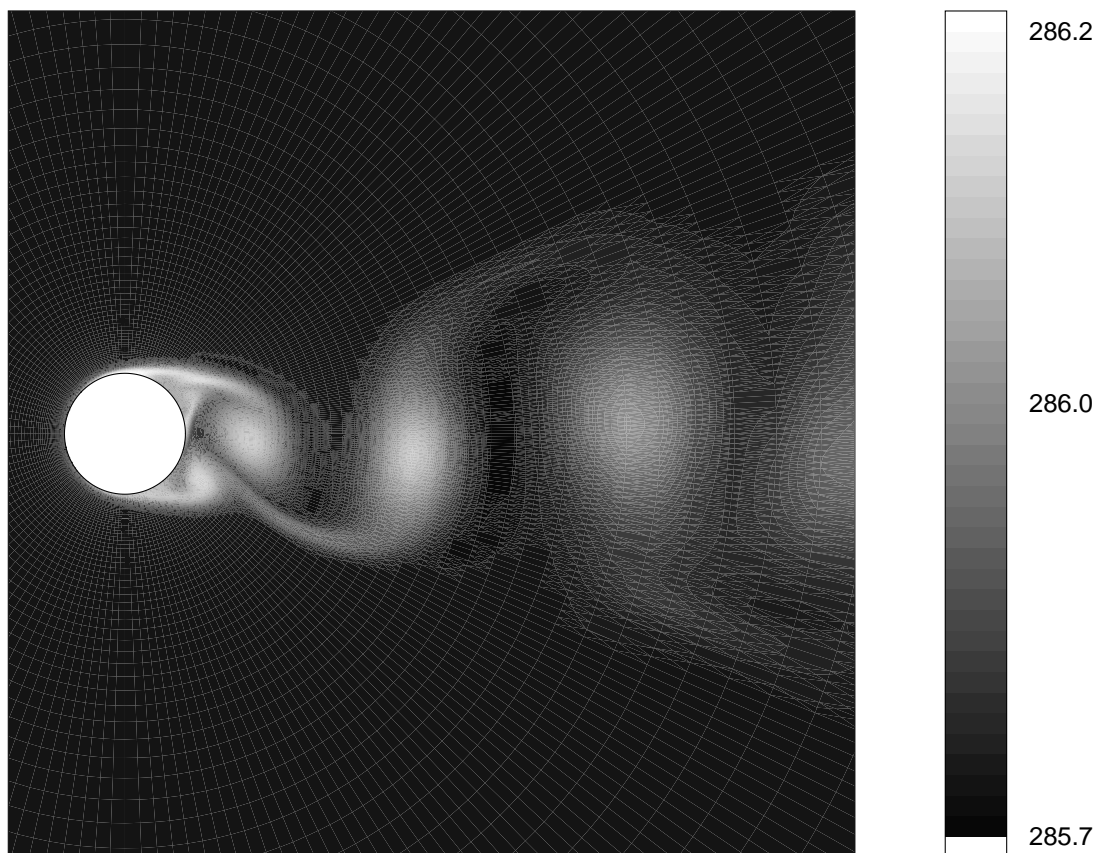
**Bild 5.11:** Druckverteilung  $C_p$  auf der Zylinderkontur bei  $Re_\infty = 1000$  zu  $T=0.25$



**Bild 5.12:** Zeitliche Entwicklung des Druckkoeffizienten  $C_p$  am Staupunkt hinter dem Zylinder bei  $Re_\infty = 1000$



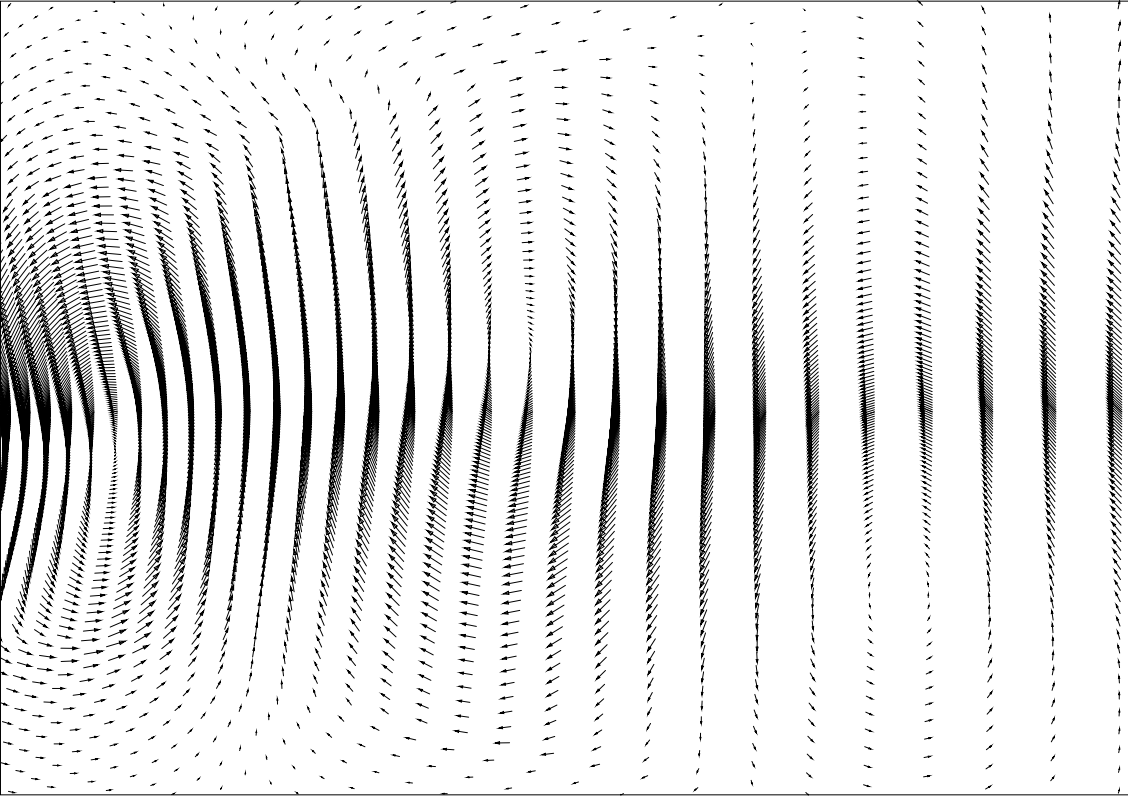
**Bild 5.13:** Stromlinien der vollkommen abgelösten Wirbelströmung bei  $Re_\infty = 1000$  zu  $T=0.25$



**Bild 5.14: Entropieverteilung bei  $Re_\infty = 1000$  zu  $T=0.25$**

Bild 5.9 zeigt die zeitliche Entwicklung der vom Fluid auf den Zylinder ausgeübten verschiedenen Kräfte, welche in guter Übereinstimmung mit anderen numerischen Ergebnissen [62] stehen. Die periodische Wirbelablösung ist aus der zeitlichen Entwicklung des Auftriebskoeffizienten  $C_A$  deutlich zu ersehen. Eine derartige Wirbelablösung ist eine wesentliche Erscheinung der Strömung um einen stumpfen Körper infolge physikalischer Störungen. Die Periode  $T=\omega^{-1}$  der voll ausgebildeten Wirbelreihenströmung beträgt etwa 4.473, welche umgerechnet einer *Strouhal*-Zahl von  $Str = 0.2235$  entspricht. Dieser gerechnete Wert stimmt verhältnismäßig gut mit den Meßwerten von *Roshko* [63] überein, welche im Bereich von 0.21 bis 0.22 vorliegen. Der Widerstandskoeffizient  $C_W$ , welcher sich aus den Strömungsverlusten ergibt, ist periodisch, aber nicht alternierend. Die Frequenz  $\omega$  des Widerstandskoeffizienten  $C_W$  ist zweimal so groß wie die des Auftriebskoeffizienten  $C_A$ . Dies ist die Folge der wechselseitigen Wirbelentstehung an den oberen und unteren Rückseiten des Zylinders.

In Bild 5.9(a) soll zur Periode  $T=0$  der Auftriebskoeffizient  $C_A$  maximal sein. Die Strömungsstrukturen zu Beginn der Periode ( $T = 0$ ) und am Ende der Periode ( $T = 1$ ) sind identisch. Aufgrund des Unterdruckes, welcher durch einen großen Wirbel an der oberen Rückseite des Zylinders verursacht wird, ergibt sich der maximale positive Auftriebskoeffizient  $C_A$  zur Peri-



**Bild 5. 15: Eine Momentanaufnahme alternierender Wirbelreihen bei  $Re_\infty = 1000$**

ode  $T = 0$ , und das gleiche gilt auch für den Widerstandskoeffizient  $C_W$ . Mit der Zeit löst sich der Wirbel vom Zylinder ab und wird stromabwärts im Nachlauf weggetragen. Zur Periode  $T=0.25$  ist der Auftriebskoeffizient  $C_A$  null, und der Widerstandskoeffizient  $C_W$  ist minimal. Zur Periode  $T=0.5$  entsteht an der unteren Rückseite des Zylinders noch ein großer Wirbel, welcher den minimalen negativen Auftriebskoeffizienten  $C_A$  und den maximalen Widerstandskoeffizienten  $C_W$  erzeugt und sich in entgegengesetzter Richtung des Wirbels an der oberen Rückseite dreht. Mit der Zeit löst sich auch dieser Wirbel ab, und auch zur Periode  $T=0.75$  wie zur Periode  $T=0.25$  wird der Auftriebskoeffizient  $C_A$  null, der Widerstandskoeffizient  $C_W$  minimal. Die so wechselseitig von den oberen und unteren Rückseiten des Zylinders abgelösten Wirbel ordnen sich in eine alternierende *Wirbelstraße*. Die Strömungsstruktur zur Periode  $T=0.75$  ist ein Spiegelbild der Strömungsstruktur zur Periode  $T=0.25$ . Eine ähnliche Beziehung findet man zwischen den Strömungsstrukturen zur Periode  $T=0.5$  und  $T=0$ . Die Zentren der Wirbel sind durch einen Unterdruck und eine hohe Entropie gekennzeichnet. Die Periode  $T$  der wechselseitigen Wirbelablösung läßt sich aus der gesamten Wachstumszeit jedes Wirbels an den oberen und unteren Rückseiten des Zylinders bestimmen.

Der Drehmomentkoeffizient  $C_T$  in Bild 5.9(b) ist wie der Auftriebskoeffizient alternierend und periodisch. Aus den Beiträgen der Reibungs- und der Druckkraft setzen sich der Auftrieb und der Widerstand zusammen, und die Hauptursache dafür ist die Druckkraft infolge der

Strömungsablösung, wie in Bild 5.10 zu erkennen ist. Es ist aber auch erkennbar, daß im Gegensatz zum Widerstandskoeffizienten die zeitlichen Mittelwerte der Auftriebs- und Drehmomentkoeffizienten infolge periodischer Alternation null sind.

Die gerechnete Druckverteilung am Zylinder zur Periode  $T=0.25$  ist in Bild 5.11 zusammen mit der analytischen Lösung der inkompressiblen Potentialströmung angegeben. Die gerechnete Druckverteilung stimmt mit der Potentiallösung auf der Vorderseite einigermaßen gut überein. Auf der Rückseite des Zylinders ist infolge der Strömungsablösung die Abweichung sehr groß, was zu einem großen Druckwiderstand des Zylinders führt. In Bild 5.12 ist die zeitliche Entwicklung des Druckkoeffizienten  $C_p$  am Staupunkt hinter dem Zylinder dargestellt. Die Frequenz  $\omega$  des Druckkoeffizienten ist mit der des Widerstandsbeiwerts  $C_W$  identisch.

Ein momentaner Zustand der vollkommen ausgebildeten Wirbelreihenströmung ist in Bild 5.13 aus Stromlinien hinter dem Zylinder zur Periode  $T=0.25$  zu ersehen, an welcher der Auftrieb null ist und der Widerstand minimal ist. Auf der Rückseite des Zylinders herrscht ein ziemlich starker Unterdruck, welcher die Ursache für den Druckwiderstand des Zylinders ist. Der abgelöste Wirbel geht von der oberen Rückseite des Zylinders aus. Mit der Zeit wächst der Wirbel an der unteren Rückseite weiterhin an, und dann weist die Auftriebskraft in negative Richtung.

Die durch die Reibung in der Grenzschicht aufgezehrte kinetische Energie führt zu einer Entropiezunahme im Nachlauf. Die so eingebüßte kinetische Energie wird zur Aufrechterhaltung der Strömung vom kontinuierlichen Anströmen aufgebracht. Zu sehen ist die Entropieverteilung als Indikator von Verlustzeugung und Wirbeltransport in Bild 5.14 (weiß: hohes Entropieniveau, schwarz: niedriges Entropieniveau).

Wechelseitig vom Zylinder abgelöste Wirbel bewegen sich zusätzlich zur Rotation um die eigenen Zentren mit einer Translationsgeschwindigkeit, welche kleiner ist als die Eintrittsgeschwindigkeit  $V_\infty$ , stromabwärts. Um eine alternierende Umschaltung der Rotationsrichtung der Wirbel in einem bestimmten Augenblick sichtbar zu machen, sind die instationären Geschwindigkeitsvektoren ( $\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}$ ), welche durch den Abzug der für eine Periode  $T$  zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten  $\bar{\mathbf{u}}$  aus den momentanen Geschwindigkeitsvektoren  $\mathbf{u}$  (Translation+Rotation) gewonnen wurden, in Bild 5.15 dargestellt. Daraus folgt, daß die Rotationsrichtung benachbarter Wirbel entgegengesetzt ist, und damit sich eine alternierende *von Kármán'sche Wirbelstraße* im Nachlauf zumindest qualitativ richtig wiedergeben läßt. Ein Effekt derartiger Wirbelströmung ist z. B. zu spüren, wenn man mit einem Auto an einem anderen Auto vorbeifährt. Zuerst bemerkt man einen Seitendruck, welcher durch die vom Auto verdrängte Luft erzeugt wird, und darauf abwechselnd Kräfte, welche das eigene Auto mal nach links, mal nach rechts ziehen. Dieses Phänomen ist auch auf die vom Auto wechselseitig abgelösten Wirbel zurückzuführen.

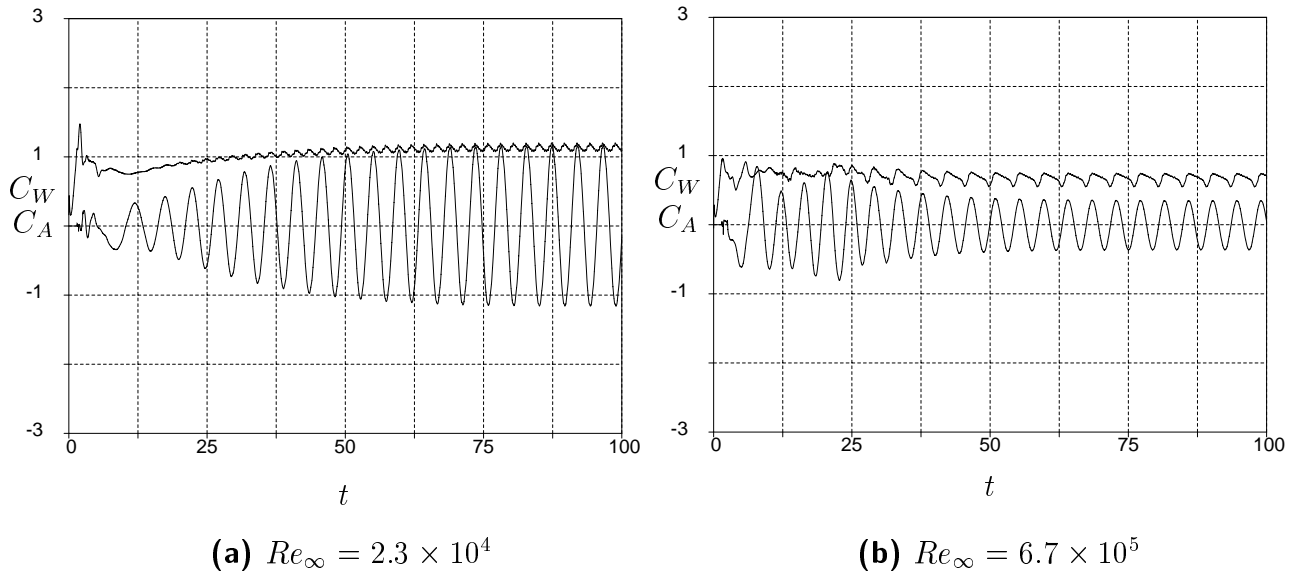
## 5.2.2 Turbulente Strömung

Bisher wurden nur die Zylinderumströmungen unter der Annahme untersucht, daß sowohl die Grenzschichtströmung am Zylinder als auch die Wirbelschichtströmung im Nachlauf laminar ist und sich die abgelösten Wirbel in eine regelmäßige *Wirbelstraße* im Nachlauf ordnen. Aber wie schon oben erwähnt, wird bei *Reynolds-Zahlen* über  $Re_\infty = 300$  mit zu-

nehmender *Reynolds*-Zahl die freie Wirbelschichtströmung in größerem Abstand hinter dem Zylinder immer unregelmäßiger; bei noch größeren *Reynolds*-Zahlen bildet sich eine völlig irreguläre chaotische Strömung aus. Bei einer bestimmten *Reynolds*-Zahl wird der Nachlauf plötzlich schmaler, und damit fällt der Widerstand scharf ab, da die Grenzschichtströmung am Zylinder von laminar zu turbulent umschlägt und infolgedessen der Ablösungspunkt an die Hinterkante des Zylinders wandert. Diese *Reynolds*-Zahl bezeichnet man als die *kritische Reynolds*-Zahl, unterhalb welcher die Grenzschichtströmung laminar erhalten bleibt, oberhalb welcher währenddessen auch die Grenzschichtströmung selbst turbulent wird.

Für  $M_\infty \leq 0.1$  ist kein wesentlicher Einfluß der Kompressibilität vorhanden, und dimensionslose Beiwerte sind lediglich eine Funktion der *Reynolds*-Zahl. Hier werden mehrere Testrechnungen als Beispiel für turbulente Strömungen im *unter-* und *überkritischen* Bereich der *Reynolds*-Zahlen bei  $M_\infty = 0.1$  durchgeführt. Der Turbulenzeffekt wird durch ein modifiziertes  $k$ - $\epsilon$ -Modell nach *Lam* und *Bremhorst* [47] approximiert. Als Randbedingungen an der festen Wand werden die turbulente kinetische Energie  $k = 0$  sowie der Nullgradient der Dissipationsrate normal zur Oberfläche vorgegeben, während am Ein- und Ausströmrand  $\rho k$  und  $\rho \epsilon$  aus dem inneren Gebiet extrapoliert werden. Im Gegensatz zu laminaren Strömungen muß man infolge der Instabilität turbulenter Strömungen von einer noch kleineren Zeitschrittgröße  $\Delta t$  Gebrauch machen. Die Vorgabe der Anfangsverteilung und die Einführung der künstlichen Störung sind die gleichen wie bei laminaren Strömungen.

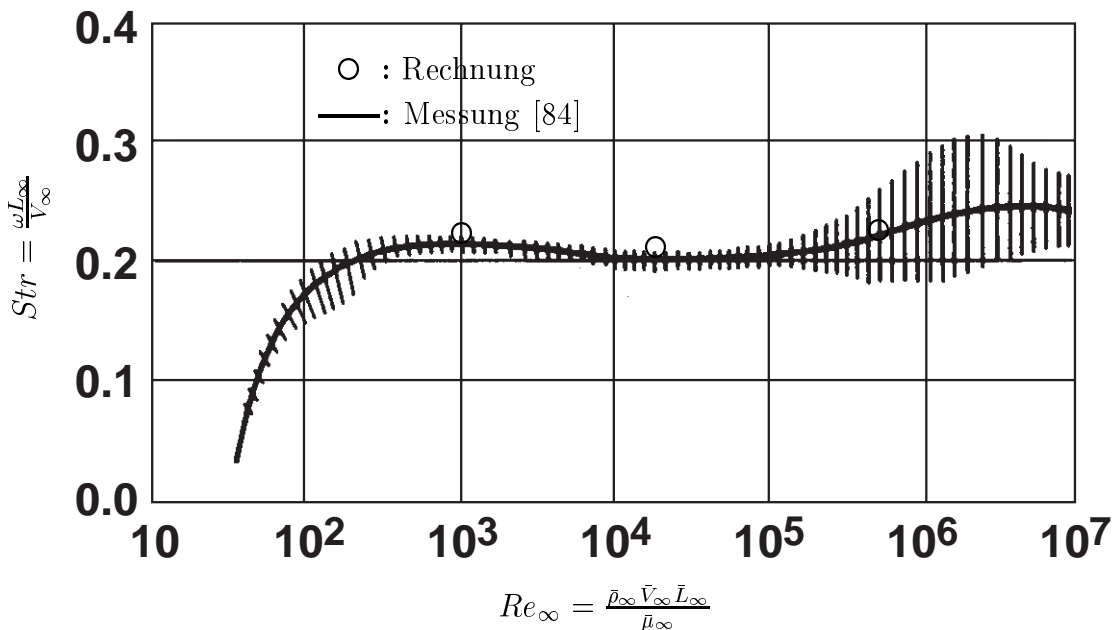
Bild 5.16 zeigt die zeitliche Entwicklung der auf den Zylinder wirkenden Kräfte bei den *unter-* und *überkritischen Reynolds*-Zahlen,  $Re_\infty = 2.3 \times 10^4$  ( $T \approx 4.614$ ,  $Str \approx 0.2167$ ) und  $6.7 \times 10^5$  ( $T \approx 4.366$ ,  $Str \approx 0.2290$ ). Verglichen mit Bild 5.9(a), ist deutlich zu ersehen, daß



**Bild 5. 16: Zeitliche Entwicklung der auf den Zylinder ausgeübten Kräfte bei einer *unter-* (a) und einer *überkritischen* (b) -Referenz-*Reynolds*-Zahl für turbulente Strömungen**

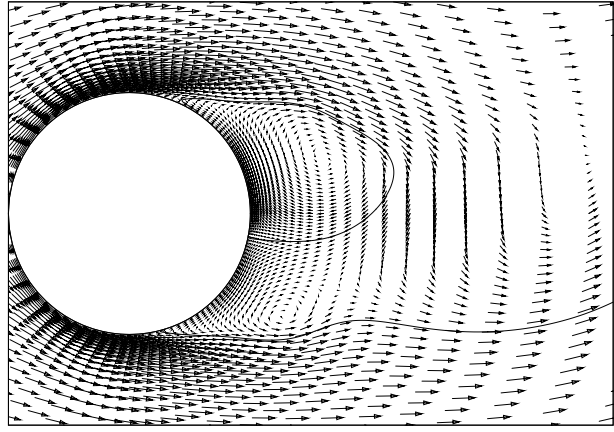
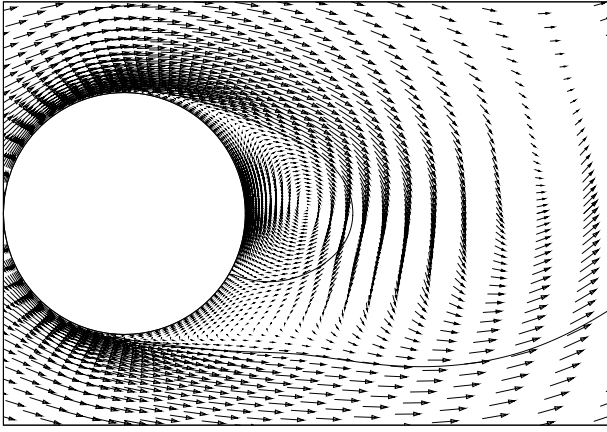
sich eine zeitlich vollständige periodische Wirbelablösung trotz der Einführung der künstlichen Störung verhältnismäßig spät ausbildet. Dies ist darauf zurückzuführen, daß mit zunehmender *Reynolds*-Zahl der Reibungseffekt kleiner wird. Daneben wird mit zunehmender *Reynolds*-Zahl die Ausdehnung der entstehenden Wirbel kleiner, damit auch deren Einfluß auf die Auftriebskraft, was zu einer kleinen Amplitude des Auftriebsbeiwerts führt. Die Abhängigkeit der *Strouhal*-Zahl  $Str$  von der Referenz-*Reynolds*-Zahl  $Re_\infty$  im Bereich  $50 \leq Re_\infty \leq 10^7$  ist in Bild 5.17 gezeigt, und es ist auch zu ersehen, daß die gerechneten Ergebnisse mit den Meßwerten verhältnismäßig gut übereinstimmen.

Bild 5.18(a)-(e) zeigen die momentanen Geschwindigkeitsvektoren und Stromlinien für die voll ausgebildeten Wirbelströmungen bei den *Reynolds*-Zahlen  $Re_\infty = 2.3 \times 10^4$  und  $6.7 \times 10^5$  zu fünf unterschiedlichen Zeitpunkten für eine Periode  $T$ . Hierbei sind die Geschwindigkeitsvektoren nur für ein Halb der gesamten Gitterpunkte aufgezeichnet, um das Wirbelphänomen hinter dem Zylinder noch deutlich sichtbar zu machen. Der Massenstrom durch die Stromlinien ist viel kleiner als der entlang der Stromlinien, so daß die Stromlinien durch die Ablöse- und Wiederanlagepunkte als ein eingeschlossener Wirbel betrachtet werden können, welcher am Zylinder anliegt. Vergleicht man die Stromlinien für die *unter*- und *überkritischen* *Reynolds*-Zahlen zum jeweiligen Zeitpunkt, so kann man feststellen, daß bei der *überkritischen* Strömung die Nachläufe schmaler, aber die eingeschlossenen Wirbel größer sind (siehe Bild 5.18). Die Strömungsfelder sowohl im *unter*- als auch *überkritischen* Bereich sind zu Beginn des Zyklus ( $T = 0$ ) und am Ende des Zyklus ( $T = 1$ ) identisch. Für die Strömung im *unterkritischen* Bereich ist die Frequenz der Widerstandskraft zweimal so groß wie die Frequenz der Auftriebskraft, so daß die Strömungsfelder sowohl zur Periode  $T = 0.75$

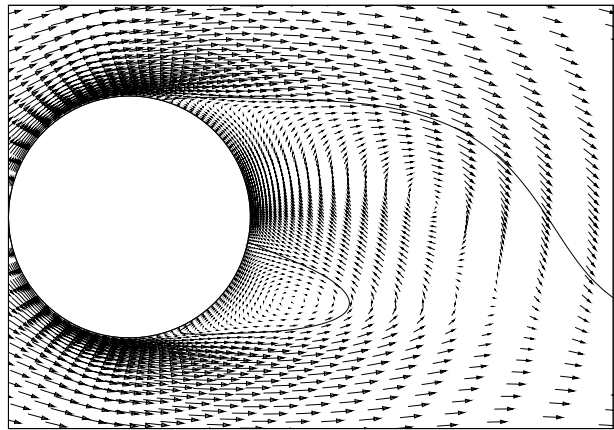
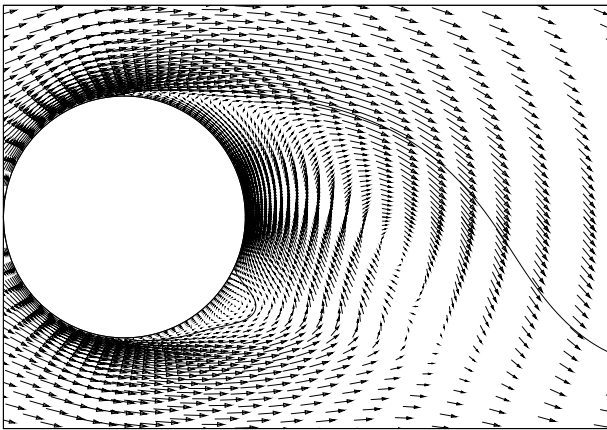


**Bild 5. 17:** *Strouhal*-Zahl  $Str$  in Abhängigkeit von der Referenz-*Reynolds*-Zahl

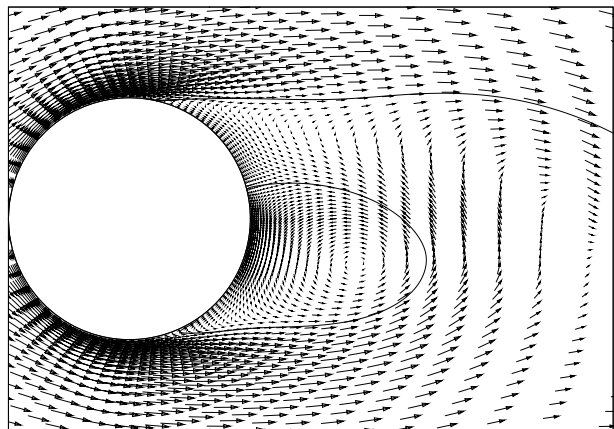
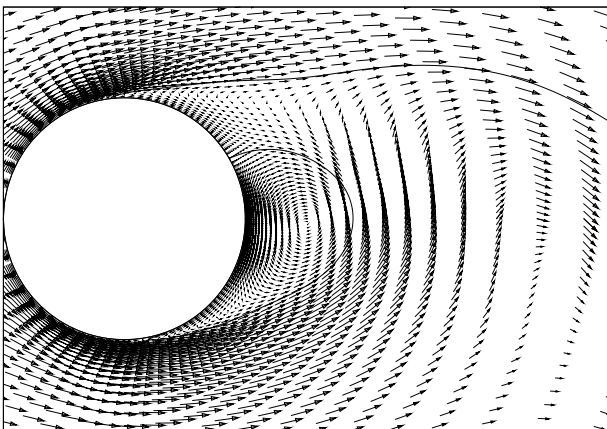




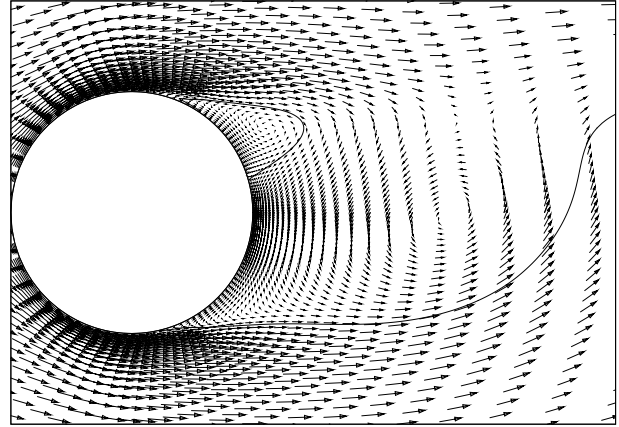
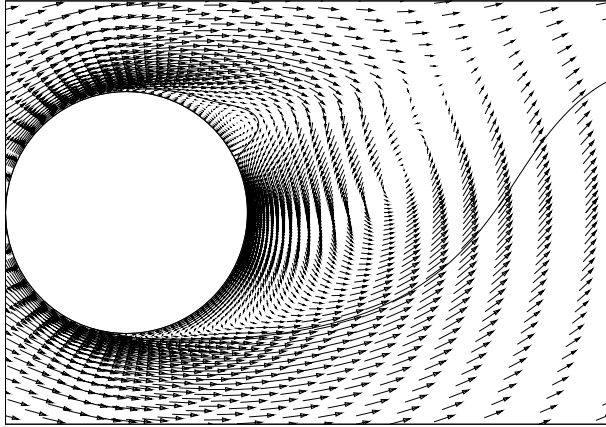
$T=0.00$



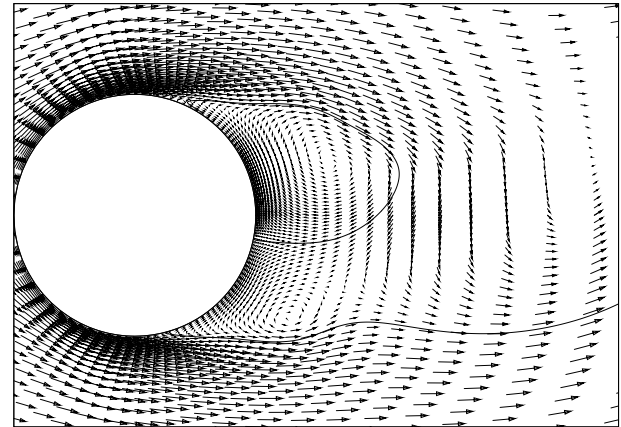
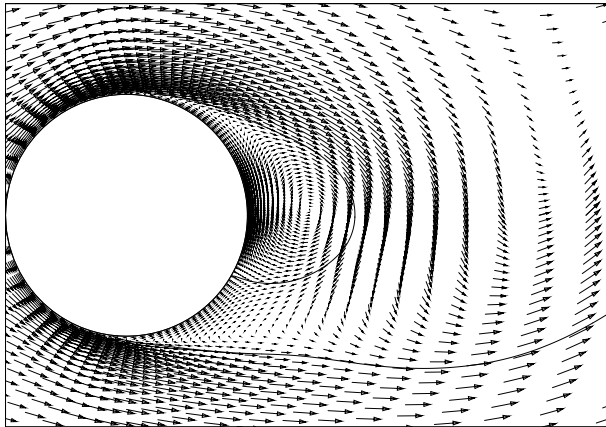
$T=0.25$



$T=0.50$



$T=0.75$

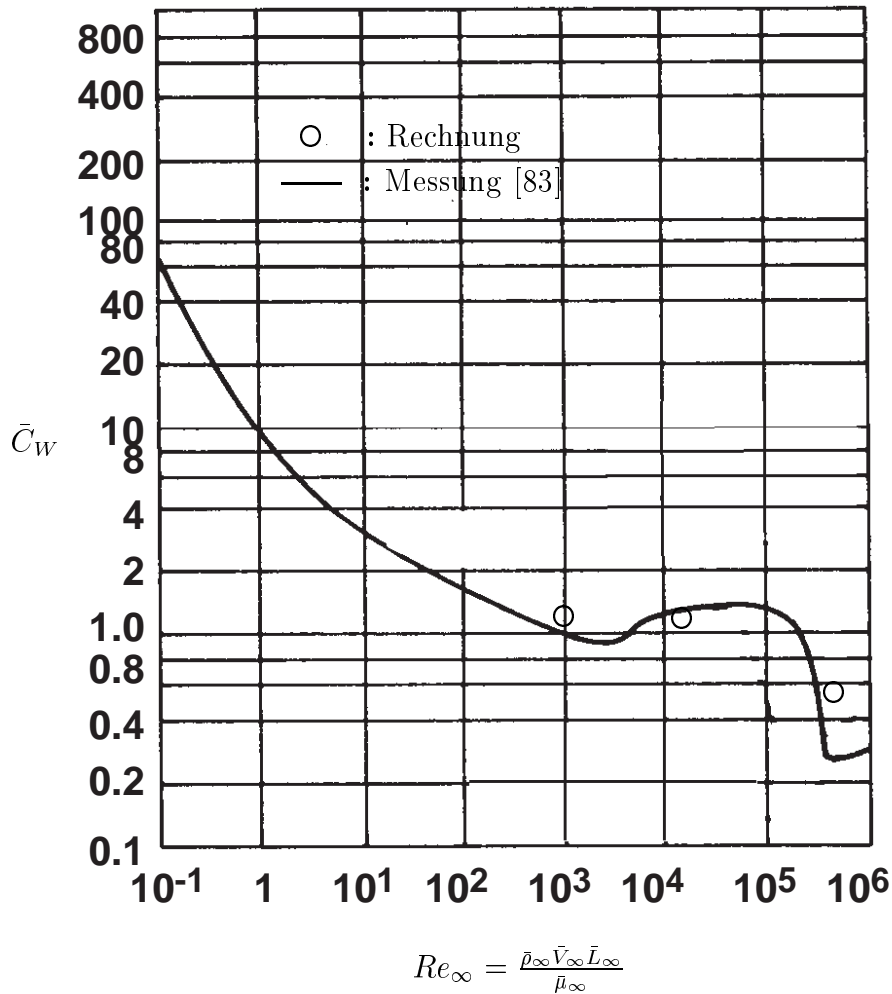


$T=1.00$

(a)  $Re_\infty = 2.3 \times 10^4$

(b)  $Re_\infty = 6.7 \times 10^5$

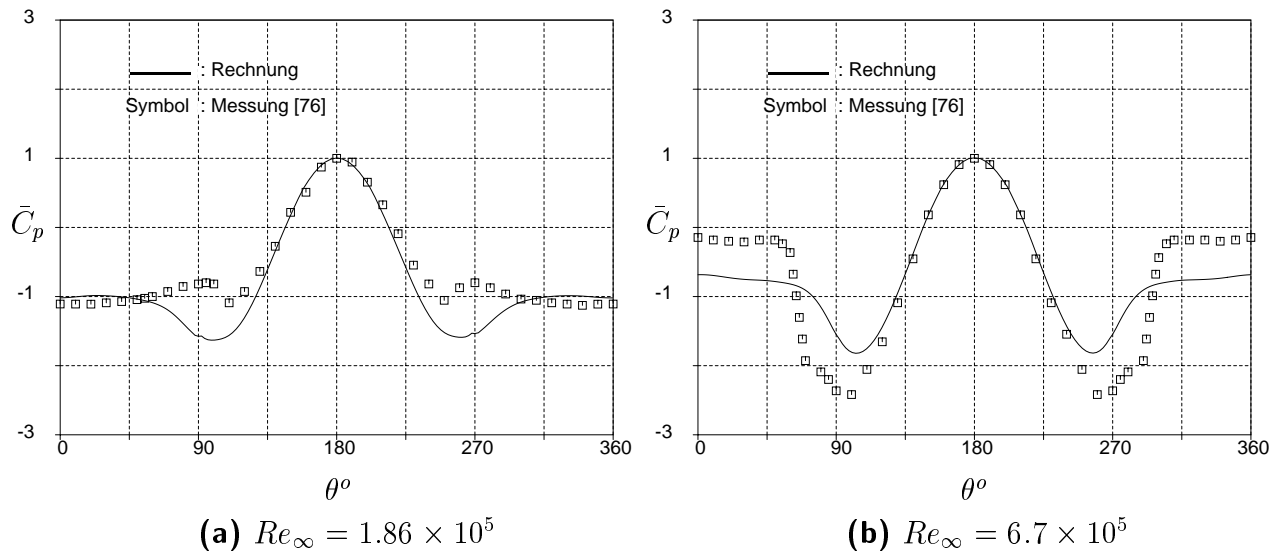
**Bild 5.18: Momentane Geschwindigkeitsvektoren und Stromlinien der voll ausgebildeten Wirbelreihenströmung für eine Periode  $T$  bei einer *unter-* (a) und einer *überkritischen* (b) Referenz-Reynolds-Zahl für turbulente Strömungen**



**Bild 5. 19: Zeitgemittelter Widerstandsbeiwert  $\bar{C}_W$  in Abhängigkeit von der Referenz-*Reynolds*-Zahl**

und zur Periode  $T = 0.25$  als auch zur Periode  $T = 1$  und zur Periode  $T = 0.5$  gegenseitig ein Spiegelbild sind. Jedoch ist für die Strömung im *überkritischen* Bereich die Frequenz der Widerstands- und der Auftriebskraft gleich ( $\omega \approx 0.229$ ), so daß für eine Periode kein Spiegelbild existiert. Jeder abgelöster Wirbel ist mit einer alternierenden Umschaltung der Stromlinie durch den Wiederanlegepunkt mit einer von zwei Stromlinien durch die Ablösepunkte verbunden.

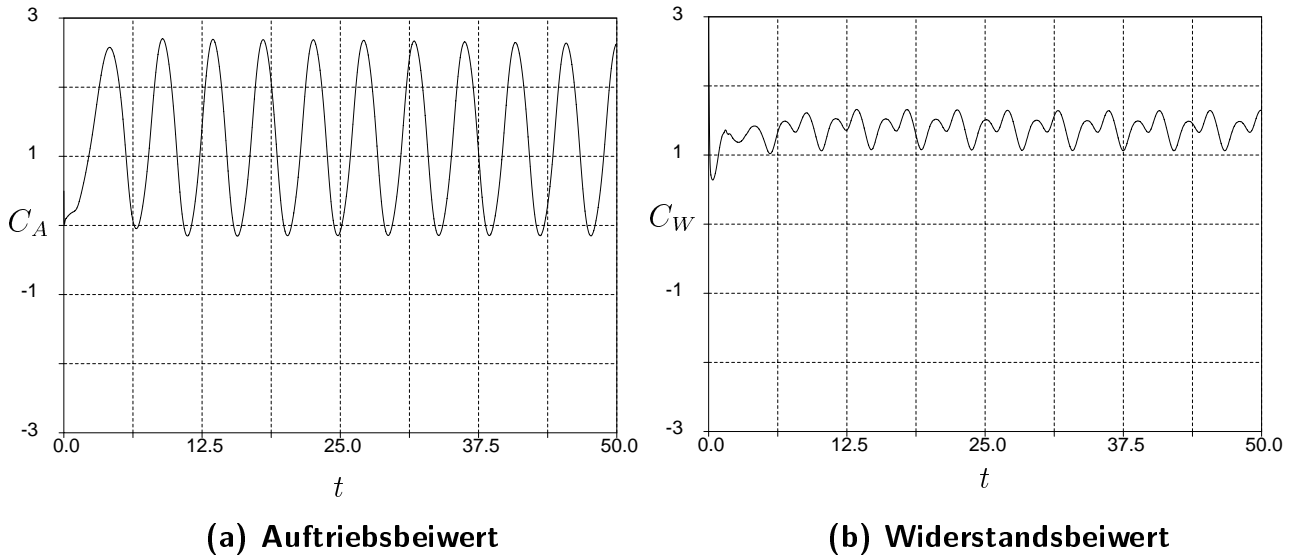
In Bild 5.19 ist die Abhängigkeit des zeitlich gemittelten Widerstandsbeiwerts  $\bar{C}_W$  von der *Reynolds*-Zahl dargestellt. Ein plötzlicher Abfall des Widerstandsbeiwerts ist bei der *Reynolds*-Zahl etwa um  $Re_\infty = 2 \times 10^5$  erkennbar. Ein derartiger Widerstandsabfall ist auf den Umschlag der vorher laminaren Grenzschicht am Zylinder zur turbulenten zurückzuführen. In der turbulenten Grenzschicht sind die Schubspannungen größer, und es gelingt der äußeren Strömung, das wandnahe Fluid näher zur Achse zu ziehen. Daher löst sich die Strömung später ab, und der Nachlauf wird schmaler. Die nicht abgelöste Strömung beauf-



**Bild 5.20: Zeitgemittelte Druckverteilung auf der Zylinderoberfläche bei einer unter- (a) und einer überkritischen (b) Referenz-Reynolds-Zahl für turbulente Strömungen**

schlägt einen größeren Teil der Zylinderseite, so daß eine größere Kraft nach vorn entsteht, der Widerstand also geringer wird. Durch Rauigkeiten an der Oberfläche wie z.B. an Golfbällen, deren Oberfläche durch näpfchenartige Vertiefungen künstlich angeraut wird, kann man den Umschlagpunkt zu kleineren *Reynolds*-Zahlen verschieben und damit den geringeren Widerstand schon bei kleineren *Reynolds*-Zahlen erhalten.

Die Druckverteilung an der Zylinderoberfläche ist für eine Strömung im *unterkritischen* Bereich vollkommen verschieden von einer Strömung im *überkritischen* Bereich. Die gerechneten Druckverteilungen, zeitlich gemittelt, sind bei den *unter-* und *überkritischen Reynolds*-Zahlen,  $Re_\infty = 1.86 \times 10^5$  und  $6.7 \times 10^5$ , in Bild 5.20 angegeben. Daraus geht hervor, daß im Gegensatz zur Strömung im *unterkritischen* Bereich der Druckabfall auf der Rückseite bei der Strömung im *überkritischen* Bereich deutlich geringer ist, dies also zu einem geringeren Widerstand führt. Bei der *unterkritischen Reynolds*-Zahl ist, abgesehen vom Beschleunigungsbereich, eine gute Übereinstimmung mit Meßdaten festzustellen. Die Abweichung in diesem Gebiet ist auf die numerischen Dissipation infolge großer Geschwindigkeitsgradienten in der Wandnähe zurückzuführen. Erhöht man aber in der Wandnähe die Gitterdichte, so wird ein besseres Ergebnis erzielt werden. Aber dafür muß man die dadurch bedingten Konvergenzprobleme bzw. Rechenzeit in Kauf nehmen. Bei der *überkritischen Reynolds*-Zahl ist die Abweichung relativ groß. Dies liegt daran, daß im *überkritischen* Bereich das verwendete Turbulenzmodell bei der turbulenten Grenzschichtströmung am Zylinder das physikalische Verhalten nicht hinreichend genau beschreibt. Es stellt sich somit hier der Handlungsbedarf für die Entwicklung neuer Turbulenzmodelle zur Behandlung nicht abgelöster turbulenter Grenzschichtströmungen.



**Bild 5. 21: Zeitliche Entwicklung der auf den rotierenden Zylinder wirkenden Kräfte bei  $u_{w\theta} = -0.5$  und  $Re_\infty = 1000$**

### 5.2.3 Strömung mit Zirkulation

Die Überlagerung der inkompressiblen Umströmung eines Kreiszylinders mit einem Potentialwirbel [84] ergibt eine wirbelfreie Zylinderumströmung mit *Zirkulation*

$$\Gamma = \int_C u_\theta dS = \int_0^{2\pi} u_\theta r d\theta = 2\pi r u_\theta, \quad (5.11)$$

wobei  $u_\theta$  entgegen dem Uhrzeigersinn positiv gezählt wird. Mit Ausnahme des singulären Punktes, wo die Geschwindigkeit unendlich wird, ist die Strömung wirbelfrei.

Die Lage der Staupunkte am rotierenden Zylinder berechnet sich aus der Bedingung

$$\sin \theta_s = \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty L_\infty} = \frac{u_{w\theta}}{2V_\infty}, \quad (5.12)$$

welche in Abhängigkeit vom Wert der Zirkulation einen Überblick über die verschiedenen Strömungsformen verschafft. Bei  $|u_{w\theta}| > 2V_\infty$  ist die Beziehung (5.12) ungültig, und der Staupunkt wandert in das Strömungsfeld. Die Widerstandskraft verschwindet aus Symmetriegründen, also  $C_W = 0$  und der Auftriebsbeiwert  $C_A$  beträgt

$$C_A = -\frac{2\pi u_{w\theta}}{V_\infty}. \quad (5.13)$$

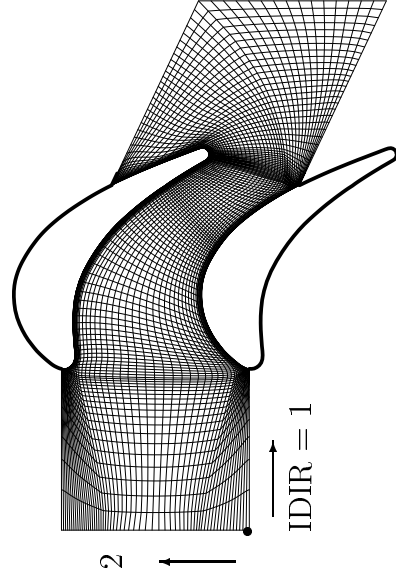
Aus (5.13) ist zu ersehen, daß ein querangeströmter, im Uhrzeigersinn rotierender Zylinder einen Auftrieb erfährt, was man als *Magnus-Effekt* bezeichnet. Er ist im allgemeinen bei rotierenden Gegenständen zu beobachten, so z. B. bei angeschnitten Tennisbällen. Es ist auch versucht worden, rotierende Zylinder anstatt Segel auf Schiffen anzuwenden (*Flettner-Rotor*).

Bild 5.21 zeigt die zeitliche Entwicklung der auf den rotierenden Zylinder bei ruckartiger Anfahrt wirkenden Kräfte bei  $u_{avg} = -0.5$  ( $\theta_s \approx 345.5^\circ$ ),  $Re_\infty = 1000$  und  $M_\infty = 0.05$ . Im Vergleich zur Strömung ohne Zirkulation ( $u_{avg} = 0$ ) ergibt diese Strömung eine etwas kleinere *Strouhal-Zahl*  $Str=0.218$ . Es ist auch beachtlich, daß sich der Widerstandsbeiwert unterschiedlich einstellt, verglichen mit der Strömung ohne Zirkulation. Dies liegt daran, daß auf derjenigen Seite, auf welcher die Umlaufrichtung und die Strömungsrichtung gleichsinnig sind, die Ablösung unterdrückt wird. Der zeitlich gemittelte Auftriebsbeiwert  $C_A$  beläuft sich etwa auf 1.266, während der potentialtheoretische Wert nach (5.13)  $C_A=\pi$  ist. Die Abweichung zwischen der Potentialströmung und der realen Strömung ist auf die Strömungsablösung am Zylinder zurückzuführen. Der gerechnete, zeitlich gemittelte Widerstandsbeiwert beträgt etwa  $\bar{C}_W \approx 1.3$ , welcher im Vergleich mit dem Meßwert  $\bar{C}_W \approx 1.25$  [84] vernünftig ist. Bekanntlich erzeugt ein rotierender Zylinder ohne Anströmung einen Potentialwirbel. Somit verschwindet die Widerstandskraft  $C_W$  wie bei der Potentialwirbelströmung, wenn es wie beim rotierenden Zylinder mit einer sehr geringen Queranströmung nicht zur Strömungsablösung am Zylinder kommen sollte.

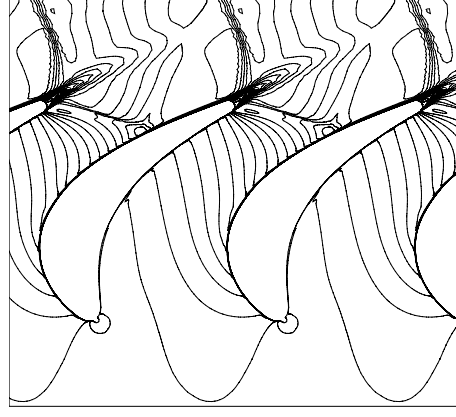
### 5.3 Leistungsfähigkeit verschiedener Lösungsverfahren

Die Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme spielt eine entscheidende Rolle für die Leistungsfähigkeit impliziter Verfahren. In diesem Abschnitt werden mehrere Testrechnungen für verschiedene Lösungsverfahren bei sowohl stationären als auch instationären Strömungen durchgeführt.

#### 5.3.1 Stationäre Strömung

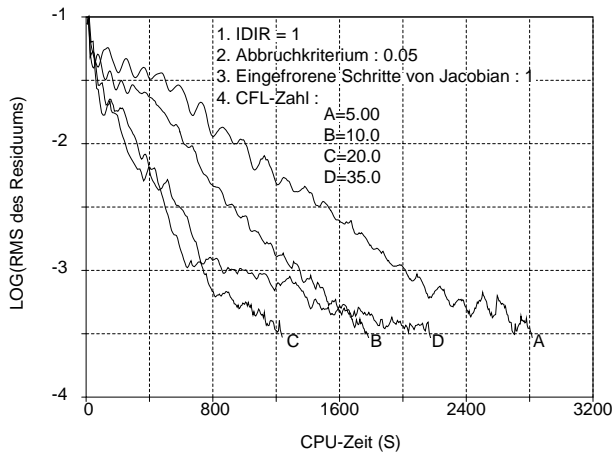


(a) Das verwendete Gitternetz

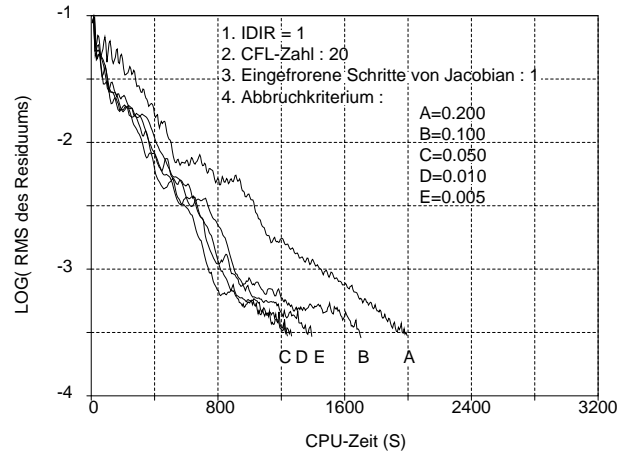


(b) Die Verteilung der *Mach*-Zahlen

**Bild 5.22: Eine transonische Strömung im VKI-1 Turbinengitter**

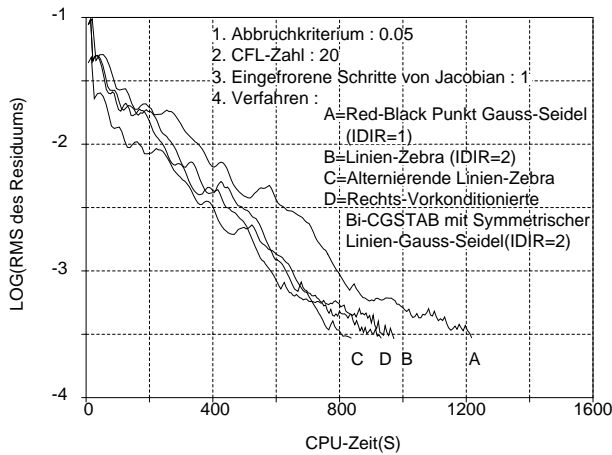


**Bild 5.23: Effekt der CFL-Zahl auf die Rechenzeit**

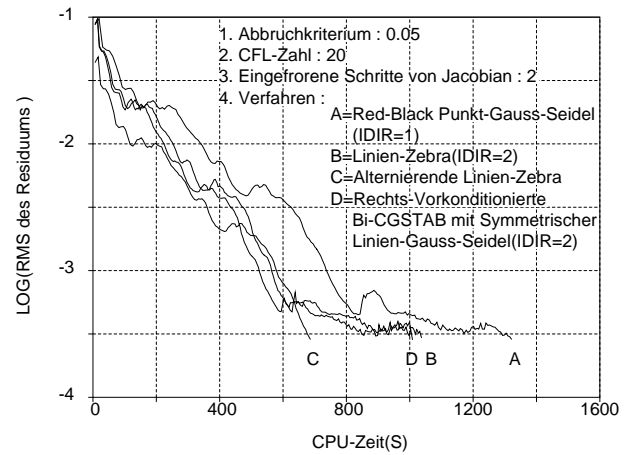


**Bild 5.24: Effekt des Abbruchkriteriums auf die Rechenzeit**

Falls nur eine stationäre Strömung berechnet werden soll, ist die zeitlich genaue Lösung bei jedem Zeitschritt entbehrlich, so daß das nichtiterative *Euler-rückwärts*-Verfahren (4.11) angewendet werden kann. Betrachtet wird hier als eine Testrechnung für stationäre Strömung eine transonische turbulente Strömung im VKI-1 Turbinengitter. Dieses Problem wurde schon in [59] validiert. Bild 5.22 zeigt das verwendete Gitternetz und die Verteilung der gerechneten *Mach*-Zahlen für eine isentrope *Mach*-Zahl am Austritt von  $M = 1.09$ . Hierbei bedeutet  $IDIR=1$  die Richtung, in welcher die Gitterpunkte durchnummeriert werden (Bild 5.22(a)). Das



**Bild 5.25: Vergleich der Rechenzeit für verschiedene Lösungsverfahren ohne eingefrorene *Jacobi*-Matrix**



**Bild 5.26: Vergleich der Rechenzeit für verschiedene Lösungsverfahren mit eingefrorener *Jacobi*-Matrix**

verwendete Konvergenzkriterium basiert auf dem *Root-Mean-Square* (*RMS*) des stationären Residuums  $\mathbf{Res}(\mathbf{Q})$ . Um die Rechenzeit für einzelne Lösungsverfahren zu vergleichen, wird das *RMS* des Residuums gegen *Central-Processing-Unit* (*CPU*) (S) aufgetragen.

Zuerst werden die Rechnungen ausgeführt, um die optimale *CFL*-Zahl zu bestimmen, welche für den Testfall zur minimalen Rechenzeit führt. Bild 5.23 zeigt die *CPU*-Zeit gegen die verschiedenen *CFL*-Zahlen bei dem Verfahren der *unvollständigen-Punkt-Zerlegung* für ein Abbruchkriterium von  $\phi = 0.05$ . Beim impliziten Verfahren für stationäre Strömungen spielt die Zeitschrittgröße  $\Delta t$  nur die Rolle eines Relaxationsparameters, um die Konvergenz sicherzustellen. Die gesamte Anzahl der Zeitschritte nimmt ab, wenn die *CFL*-Zahl groß wird. Da jedoch mit zunehmender *CFL*-Zahl die Anzahl linearer Iterationen für jeden Zeitschritt zunimmt, verursacht der Einsatz der hohen *CFL*-Zahl einen hohen Rechenaufwand für jedes lineare System bei jedem Zeitschritt. Als Folge ergibt sich durch die Verwendung einer hohen *CFL*-Zahl angesichts der gesamten *CPU*-Zeit nicht unbedingt eine effizientere Rechenleistung.

Aus Bild 5.24 folgt, daß die Wahl eines Abbruchkriteriums einen ausgesprochen großen Einfluß auf die *CPU*-Zeit ausübt. Das verwendete Lösungsverfahren liefert eine sehr ungenaue Lösung, wenn  $\phi$  zu groß ist. Wenn hingegen  $\phi$  zu klein ist, so ergibt das Verfahren eine überflüssig genaue Lösung, welche hohe Rechenkosten für jedes lineare System auslöst. Das Zeitschrittverfahren erfordert keine gute lineare Lösung. Also sollte man das optimale Kriterium  $\phi$  entsprechend dem Strömungsproblem wählen. Außerdem wird die Konvergenzgeschwindigkeit von der Iterationsrichtung (*IDIR*=1 oder 2) beeinflusst. In den folgenden Testrechnungen werden eine *CFL*-Zahl von 20 und ein Abbruchkriterium von  $\phi = 0.05$  eingesetzt.

Bild 5.25 zeigt einen Vergleich der Konvergenzhistorie für verschiedene Lösungsverfahren, und daraus folgt, daß die alternierende Linien-*Zebra*-Methode der beste Kandidat für den Testfall ist. Zum Schluß wird der Effekt der eingefrorenen *Jacobi*-Matrix auf die gesamte Rechenleistung untersucht (Bild 5.26). Die Rechnung verläuft relativ gut, falls die *Jacobi*-Matrix alle zwei Zeitschritte aktualisiert wird. Jedoch führt die Rechnung zum Absturz, wenn die *Jacobi*-Matrix über alle drei Zeitschritte berechnet wird. Nach der Erfahrung gelingt diese Technik für mehrere eingefrorene Zeitschritte bei einfachen Strömungsproblemen wie z. B. bei der Plattenströmung mit Unterschall. Der hier gewählte Gegenstand der Testrechnungen ist nur ein Beispiel, so daß für eine reale Anwendung ein geeignetes Lösungsverfahren mit Rücksicht auf den Speicherplatzbedarf und die Konvergenzrate entsprechend den gegebenen Strömungsbedingungen einzusetzen ist. Welches Verfahren bei einem gewissen Strömungsproblem Anwendung findet, hängt von vielen Faktoren ab, z.B. von dem gewählten Rechner, dem Strömungscharakter, dem Gitter usw..

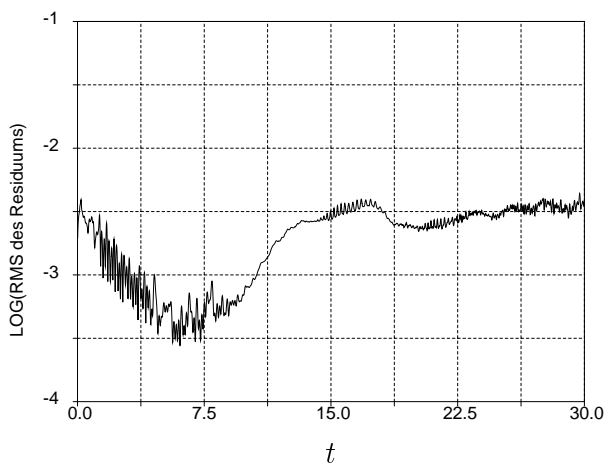
### 5.3.2 Instationäre Strömung

Um die Leistungsfähigkeit verschiedener Lösungsverfahren für instationäre Strömungen zu untersuchen, wird hier die abgelöste Wirbelströmung um den Kreiszyylinder bei  $Re_\infty=1000$  als Testbeispiel gewählt. Ein Vergleich wird auch noch bis zum Zeitpunkt  $t=30$  angestellt, wo sich eine periodische Strömung hinter dem Zylinder vollkommen ausbildet. Die lokale Rechenzeit unterscheidet sich deshalb bei jedem Zeitschritt, weil sich die Strömungsstruktur mit der Zeit

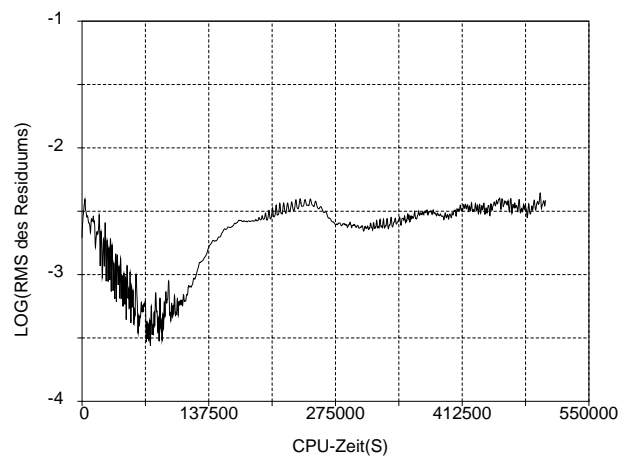


ändert. Die gesamte Rechenzeit für die Dauer mehrerer Zeitschritte entspricht also nicht dem Betrag aus der lokalen Rechenzeit bei jedem Zeitschritt mal der Anzahl der Zeitschritte. Für den einheitlichen Vergleich wird die alternierende Linien-*Gauss-Seidel*-Methode als lineares Verfahren auf dem Eingitter mit einem Abbruchkriterium von  $\phi = 0.1$  und als Glätter auf dem Mehrgitter eingesetzt. In jeder Testrechnung wird das *RMS* der instationären Flußbilanz  $\mathbf{Res}(\mathbf{Q})$  gegen die *CPU*-Zeit(S) aufgetragen.

Bild 5.27 zeigt die zeitliche Entwicklung des *RMS* für die instationäre Flußbilanz  $\mathbf{Res}(\mathbf{Q})$ , welche im stationären Zustand verschwindet. Aus Bild 5.27 geht auch hervor, daß die Strömung nach kurzer Zeit im Anschluß an die Anfangsphase stark instationär ist. Stellt man zuerst auf dem Eingitter einen Vergleich der Rechenkosten an, ist aus Bild 5.28-29 ersichtlich, daß mit Hilfe der eingefrorenen *Jacobi*-Matrix Rechenkosten erheblich erspart werden können. Zu Anfang des Verfahrens der iterativen Defektkorrektur bei jedem Zeitschritt wird die *Jacobi*-Matrix nur einmal berechnet, und damit wird die mit der alternierenden Linien-*Gauss*-



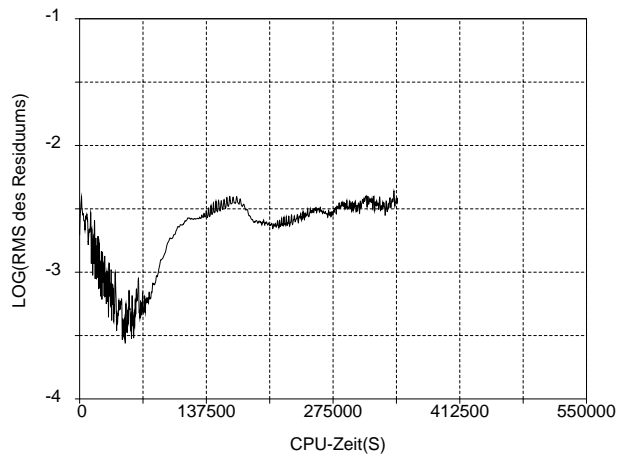
**Bild 5. 27: Zeitliche Entwicklung von RMS für die instationäre Flußbilanz**



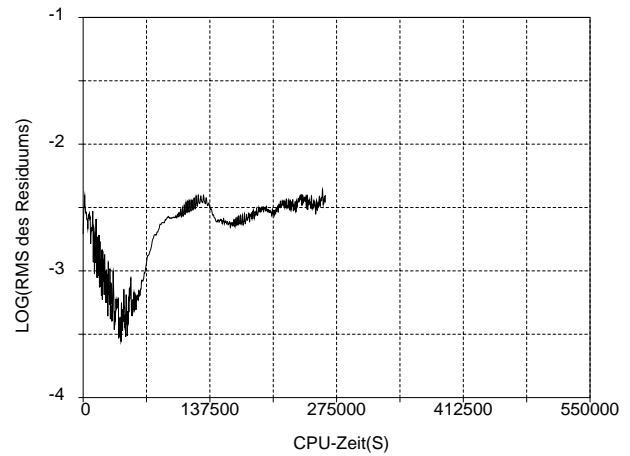
**Bild 5. 28: Eingitter-Verfahren ohne eingefrorene *Jacobi*-Matrix**

*Seidel*-Methode verbundene Diagonalmatrix auch nur einmal faktorisiert. Dann kommt die resultierende Matrix wiederholt im Laufe des Lösungsprozesses für eine Reihe linearer Systeme zur Verwendung. Damit verbundene Schwierigkeiten traten in der nichtlinearen Konvergenz nicht auf, wenn für diese Testrechnung zumindest die Werte von  $\Delta t = 0.004$  und  $\zeta = 0.5$  in (4.2) und (4.6) verwendet wurden.

Auf dem Mehrgitter wird auch der Effekt der eingefrorenen *Jacobi*-Matrix auf die gesamte Rechenleistung überprüft. Der linearisierte iterative Prozeß erfordert keine hohe Genauigkeit linearer Lösungen. Also wird nur ein Grobgitter verwendet, um Lösungsfehler näherungsweise zu gewinnen, welche auf dem Feingitter durch die Ausführung einer Iteration erzeugt werden. Die Hauptursache für die Rechenzeit im linearen Mehrgitterverfahren besteht darin, auf dem Grobgitter die Koeffizientenmatrix zu konstruieren und die Diagonalmatrix zu faktorisieren. Verwendet man die eingefrorene *Jacobi*-Matrix auch auf dem Grobgitter, dann kann ein nennenswerter Gewinn an Rechenzeit erzielt werden. Vergleicht man die Lösungsverfahren mit der



**Bild 5. 29: Eingitter-Verfahren mit eingefrorener *Jacobi*-Matrix**



**Bild 5. 30: Mehrgitter-Verfahren mit eingefrorener *Jacobi*-Matrix**

eingefrorenen *Jacobi*-Matrix auf den Ein- und Mehrgittern, erfährt man aus Bild 5.29-30, daß etwa ein Faktor von 1.2, der zur Erzielung einer voll ausgebildeten Wirbelströmung erforderlichen Rechenzeit, durch das lineare Mehrgitterverfahren erspart werden kann. Aus Bild 5.28, 5.30 folgt auch, daß das lineare Mehrgitterverfahren mit eingefrorener *Jacobi*-Matrix, verglichen mit dem Verfahren ohne eingefrorene *Jacobi*-Matrix auf dem Eingitter, noch effizienter ist.