Kapitel 2

Mathematische Modellierung

2.1 Die Erhaltungsgleichungen

2.1.1 Integrale Form

Die Strömung eines Kontinuums, wie Luft im relevanten Temperatur- und Druckbereich, wird durch die physikalischen Prinzipien der Erhaltung von Masse, Impuls sowie Energie beschrieben. Mathematisch lassen sich die Erhaltungsprinzipien entsprechend den in Frage kommenden, physikalischen Modellen in unterschiedlichen Formen ausdrücken. Äußere Kräfte und Wärmequellen werden hier nicht berücksichtigt. Betrachtet man ein durchströmtes Kontrollvolumen V mit der in Bezug auf Ort und Zeit unveränderlichen Oberfläche S, so werden die Erhaltungsgleichungen für ein homogenes Kontinuum in integraler Form im ortsfesten Bezugssystem wie folgt angegeben [84]:

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dV + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}_I - \mathbf{F}_V \tag{2.1}$$

mit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_I = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{u} \\ \rho \mathbf{u}\mathbf{u} + p\mathbf{I} \\ (\rho E + p)\mathbf{u} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

wobei $\mathbf{Q}$ den Zustandsvektor der auf das Kontrollvolumen V bezogenen Erhaltungsgrößen, d. h. die volumenspezifische Masse ρ, den volumenspezifischen Impuls $\rho\mathbf{u}$ und die volumenspezifische totale innere Energie ρE, zu einem Zeitpunkt t darstellt.

$\mathbf{F}_I$ stellt die reibungsfreie Flußfunktion über die Oberfläche S dar, während $\mathbf{F}_V$ die auf die Reibung bezogene Flußfunktion zum Ausdruck bringt. Im übrigen entsprechen E der totalen inneren Energie pro Masse, $\mathbf{n}$ dem nach außen gerichteten und zur Oberfläche S normalen Einheitsvektor, $\mathbf{I}$ dem Einheitstensor, $\mathbf{T}$ dem Reibungsspannungstensor, $\mathbf{q}$ dem Wärmestromvektor sowie $\mathbf{u}$ dem Geschwindigkeitsvektor. Bei der reibungsfreien Strömung ist die Flußfunktion $\mathbf{F}$ eine nichtlineare Funktion der Erhaltungsgrößen $\mathbf{Q}$, während bei der reibungsbehafteten Strömung zusätzlich dazu die Flußfunktion $\mathbf{F}$ von den Gradienten der primitiven Variablen

Φ abhängt. Daneben ist die Flußfunktion $\mathbf{F}$ ein Tensor zweiter Ordnung, da die Erhaltungsgrößen $\mathbf{Q}$ physikalisch einen Tensor erster Ordnung, d. h. einen Vektor, darstellen.

Die Erhaltungsgleichungen gelten auch für das Kontrollvolumen V im mitbewegten Bezugssystem, wenn die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{u}$ sowie die totale innere Energie E die Größen relativ zum ortsfesten Bezugssystem annehmen. In kompressiblen Strömungen können Verdichtungsstöße auftreten, über welche sich die Strömungsgrößen unstetig ändern. Die Erhaltungsgleichungen in integraler Form sind auch an der Stelle der Unstetigkeiten im Strömungsfeld gültig.

2.1.2 Differentielle Form

Unter der Annahme, daß die Flußfunktion $\mathbf{F}$ im Kontrollvolumen V kontinuierlich differenzierbar ist, können die Erhaltungsgleichungen in integraler Form (2.1) nach dem *Gauß*-Satz [2]

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV \tag{2.3}$$

auf die differentielle konservative Form in einem Koordinatensystem überführt werden. Unstetige Lösungen wie z. B. Verdichtungstöße im Strömungsfeld lassen sich aber durch die differentielle Form der Erhaltungsgleichungen nicht beschreiben, da Ableitungen der Flußfunktion $\mathbf{F}$ in Diskontinuitäten nicht definierbar sind. Somit ist für unstetige Lösungen eine geeignete numerische Formulierung der differentiellen Form der Erhaltungsgleichungen erforderlich, welche Sprungbedingungen (*jump conditions*) über Diskontinuitäten erfüllt.

Die praktisch in den Anwendungen auftretenden meisten Strömungsprobleme zeichnen sich jedoch durch eine beliebige komplexe Geometrie aus, deren Berandungen mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem in der Regel nicht übereinstimmen. Somit ist es zweckmäßig, für die numerische Lösung die integrale Form (2.1) auf eine differentielle Form zu überführen, welche ohne Bezug auf ein spezielles Koordinatensystem anwendbar ist. Insbesondere bei der numerischen Lösung erlaubt eine derartige Transformation, die Randbedingungen für Strömungsprobleme mit nicht rechtwinkligen Berandungen ohne großen Verlust an Genauigkeitsordnung einfach zu formulieren und zu implementieren.

Gegeben sei der Ortsvektor $\mathbf{r}$ eines Volumenelements dV im kartesischen Koordinatensystem (x, y, z), welches sich bezüglich eines beliebigen krummlinigen Koordinatensystems (ξ^1, ξ^2, ξ^3)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \tag{2.4}$$

transformieren läßt. Die Flächenormalen $\mathbf{n}^{\xi^i} dS$ sowie das Volumenelement dV im krummlinigen Koordinatensystem sind durch

$$\mathbf{n}^{\xi^1} dS = \mathbf{r}_{\xi^2} \wedge \mathbf{r}_{\xi^3} d\xi^2 d\xi^3, \quad \mathbf{n}^{\xi^2} dS = \mathbf{r}_{\xi^3} \wedge \mathbf{r}_{\xi^1} d\xi^3 d\xi^1, \quad \mathbf{n}^{\xi^3} dS = \mathbf{r}_{\xi^1} \wedge \mathbf{r}_{\xi^2} d\xi^1 d\xi^2 \tag{2.5}$$

$$dV = \mathbf{r}_{\xi^1} \cdot \mathbf{r}_{\xi^2} \wedge \mathbf{r}_{\xi^3} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \tag{2.6}$$

gegeben [2], wobei $\wedge$ das Vektorprodukt bezeichnet. Also ergeben sich die Erhaltungsgleichungen in integraler Form (2.1) zur differentiellen Form

$$\frac{\partial(V\mathbf{Q})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial(\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}^{\xi^i})}{\partial \xi^i} = 0 \ , \tag{2.7}$$

wobei

$$\mathbf{S}^{\xi^1} = \mathbf{n}^{\xi^1} S = \mathbf{r}_{\xi^2} \wedge \mathbf{r}_{\xi^3}, \quad \mathbf{S}^{\xi^2} = \mathbf{n}^{\xi^2} S = \mathbf{r}_{\xi^3} \wedge \mathbf{r}_{\xi^1}, \quad \mathbf{S}^{\xi^3} = \mathbf{n}^{\xi^3} S = \mathbf{r}_{\xi^1} \wedge \mathbf{r}_{\xi^2} \tag{2.8}$$

$$V = \mathbf{r}_{\xi^1} \cdot \mathbf{r}_{\xi^2} \wedge \mathbf{r}_{\xi^3} \tag{2.9}$$

und es kommt zum Gradienten der primitiven Variablen Φ

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^{3} \frac{\mathbf{S}^{\xi^i}}{V} \Phi_{\xi^i} \tag{2.10}$$

im krummlinigen Koordinatensystem, wobei $\mathbf{S}^{\xi^i}/V$ den *kontravarianten Basisvektor* darstellt. Die Verwendung der Koordinate ξ^i als Subskript bezeichnet die partielle Ableitung in Richtung der krummlinigen Koordinaten, bezeichnet mit dem Superskript i. Die Quantität V entspricht der Determinante der *Jacobi*-Matrix $\partial(x,y,z)/\partial(\xi^1,\xi^2,\xi^3)$. Alle Terme in (2.7) sind Ableitungen der unbekannten Komponenten bezüglich der unabhängigen Variablen, was man als die *streng konservative Form* der Erhaltungsgleichungen bezeichnet.

Die Erhaltungsgleichungen in differentieller Form (2.7) bilden einen Ausgangspunkt des hier verwendeten numerischen Verfahrens. Die transformierten Erhaltungsgleichungen (2.7) lassen sich auch in der *kontravarianten* Form

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{F}^{\xi^i}}{\partial \xi^i} = 0 \tag{2.11}$$

mit

$$\hat{\mathbf{Q}} = V\mathbf{Q}, \quad \hat{F}^{\xi^i} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{S}^{\xi^i} \tag{2.12}$$

darstellen. Hierbei stellt der Vektor $\hat{F}^{\xi^i}$ die *kontravariante* Flußfunktion dar. Die Gleichung (2.11) wird auch als die *äquivalente kartesische Form* bezeichnet.

Unter Vernachlässigung der Reibung ($\mathbf{F}_V$=0) sind die Erhaltungsgleichungen (2.7) hyperbolisch in der Zeit. Dies bedeutet, daß für jede Komponente von $\mathbf{Q}$ die Eigenwerte der *Jacobi*-Matrix, die Ableitungen der Flußfunktion $\mathbf{F}$ nach $\mathbf{Q}$, reell sind, und die Matrix diagonalisierbar ist, d. h. eine Reihe linear unabhängiger Eigenvektoren vollständig existiert. Diese Hyperbolizität spielt eine wesentliche Rolle bei der Entwicklung numerischer Verfahren für die Erhaltungsgleichungen (2.7). Die Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen in (2.7) sind aufgrund der Reibungs- sowie Wärmeleistungsterme 2. Ordnung im Ortsraum vom parabolischen Typ in der Zeit, während die Massenerhaltungsgleichung 1. Ordnung im Ortsraum vom hyperbolischen Typ in der Zeit ist. Das gesamte Gleichungssystem (2.7) kann daher nicht einheitlich klassifiziert werden, und man bezeichnet es oft als *unvollständig parabolisch* in der Zeit. Die unterschiedlichen Strömungsvorgänge können durch Anpassung der noch freien Parameter in den Erhaltungsgleichungen, vor allem aber durch die zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen mathematisch modelliert werden.

2.2 Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen

Mit den Erhaltungsgleichungen (2.7) und den zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen kann man die Strömung eines Kontinuums ohne Einschränkungen und für allgemeine Geometrien der Strömungsberandung numerisch im Prinzip berechnen. Die Gleichungen stellen jedoch aus mathematischer Sicht ein kompliziertes nichtlineares System gekoppelter partieller Differentialgleichungen dar, dessen Lösung sich im allgemeinen als ein schwieriges Problem erweist. Es kommt also bei dem vorliegenden Problem darauf an, die Gleichungen so zu vereinfachen, daß eine numerische Lösung möglich wird, und gleichzeitig der wesentliche Kern des Problems erhalten bleibt. Dies ist bei allen technischen Strömungsproblemen auch in mehr oder weniger großem Umfang möglich. Als Folge ist die Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen eine notwendige Vorarbeit zur numerischen Berechnung eines Strömungsvorgangs. Durch die schnell fortschreitende Entwicklung sehr leistungsfähiger Rechenanlagen werden Strömungsprobleme ohne einschneidende Vereinfachungen in immer größer werdendem Umfang lösbar. Nachfolgend werden daher Strömungen betrachtet, welche alle in gewisser Weise vereinfacht sind.

2.2.1 Transportkoeffizienten

Zunächst geht es um den Reibungsspannungstensor $\mathbf{T}$, durch welchen ein in Frage kommendes Fluid gekennzeichnet ist. Für ein *Newton*-Fluid ist ein Ausdruck für den Reibungsspannungstensor $\mathbf{T}$ als Funktion der Geschwindigkeitsgradienten durch

$$\mathbf{T} = \mu_s \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{I} + \mu[(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)] \qquad (2.13)$$

gegeben. Hierbei ist μ die dynamische Zähigkeit, μ_s ein Proportionalitätsfaktor für Stoffgrößen, und $(\, . \,)^T$ bezeichnet den transponierten Operator. Dieser lineare Zusammenhang beschreibt das wirkliche Verhalten der meisten, technisch wichtigen Fluide. Bei einatomigen Gasen ist die sogenannte Volumenzähigkeit

$$\mu_V = \mu_s + \frac{2}{3}\mu = 0. \qquad (2.14)$$

Der Effekt der Volumenzähigkeit kann für die Struktur der Stoßwellen wichtig sein, ist aber sonst von untergeordneter Bedeutung, und deshalb wird auch bei mehratomigen Gasen meistens von der *Stokes*-Hypothese $\mu_V = 0$ Gebrauch gemacht.

Die dynamische Zähigkeit μ hängt vom thermodynamischen Zustand ab, also $\mu = \mu(p, T)$. Für Gase ist die Druckabhängigkeit gering, und daher kann eine alleinige Abhängigkeit von der Temperatur angesetzt werden. Die Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit μ wird durch das *Sutherland*-Gesetz

$$\mu = C_1 \frac{T^{3/2}}{T + C_2} \tag{2.15}$$

mit den Größen

$$C_1 = 1.458 \times 10^{-6} kg/(ms\sqrt{^oK}), \qquad C_2 = 110.4^oK \tag{2.16}$$

ermittelt.

Das *Fourier*-Gesetz gibt einen linearen Zusammenhang zwischen dem Wärmestromvektor $\mathbf{q}$ und den Temperaturgradienten

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T \tag{2.17}$$

an. Hierin ist λ eine positive Funktion des thermodynamischen Zustandes und wird als Wärmeleitfähigkeit bezeichnet. Für Gase ist $\lambda \sim \mu$, so daß die Wärmeleitfähigkeit λ dieselbe Temperaturabhängigkeit hat wie die dynamische Zähigkeit μ. Für ein thermisch und kalorisch ideales Gas ist bei einer gegebenen Zähigkeit μ die Wärmeleitfähigkeit λ durch die *Prandtl*-Zahl

$$Pr = c_p \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\gamma R \mu}{(\gamma - 1)\lambda} \tag{2.18}$$

bestimmt. Hierbei entsprechen γ dem Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, R der Gaskonstante sowie c_p der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Druck. Diese dimensionslose Kennzahl ist mit Pr=0.72 in etwa konstant für Gase.

2.2.2 Zustandsgleichungen

Die Erhaltungsgleichungen enthalten sechs unbekannte Größen in nur fünf zur Verfügung stehenden Gleichungen. Die Lösung eines strömungsphysikalischen Problems ist dann eindeutig, wenn die Anzahl der zu lösenden Gleichungen mit der Anzahl der unbekannten Größen übereinstimmt und dem Problem angepaßte Anfangs- und Randwerte vorliegen. Das Gleichungssystem (2.7) läßt sich also numerisch nicht lösen, wenn es anhand einer zusätzlichen Beziehung nicht geschlossen wird. Aus den Zustandsgleichungen für ein thermisch und kalorisch ideales Gas

$$p = \rho R T, \qquad \rho e = \frac{\rho R T}{\gamma - 1} \tag{2.19}$$

ergibt sich

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{\rho}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}), \tag{2.20}$$

wobei e die innere Energie pro Masse ist. Mit Hilfe der Zustandsgleichung (2.20) werden die Erhaltungsgleichungen geschlossen. Für eine sehr große *Mach*-Zahl ($M > 5$) verhält sich das Gas jedoch nicht mehr kalorisch ideal. Im solchen Fall kann die Zustandsgleichung für kalorisch ideale Gase nicht mehr angewendet werden.

2.2.3 Mittelung der Strömungsgrößen

Die Strömungsvorgänge im Kontinuumsbereich werden für sowohl laminare als auch turbulente Verhältnisse gleichermaßen durch die Erhaltungsgleichungen beschrieben. Ein besonderes und weitgehend ungelöstes Strömungsproblem ist aber die Abhängigkeit der Erhaltungsgleichungen von der nur als Parameter auftretenden *Reynolds*-Zahl. Unterhalb einer gewissen *kritischen Reynolds*-Zahl bleibt die Strömung *laminar* erhalten, bei welcher jedes Experiment durch eine numerische Simulation ohne zusätzlich empirische Information mit guter Näherung abgebildet werden könnte. Wird die kritische *Reynolds*-Zahl genügend weit überschritten, so stellt sich eine ganz andere Strömung ein. Diese Strömung ist durch die stark erhöhte Diffusion, die Dreidimensionalität und die immer wirbelbehaftete Instationarität sowie das stochastische Verhalten der Strömungsgrößen gekennzeichnet. Mißt man eine Strömungsgröße an einem bestimmten Ort, so stellt man fest, daß sie unregelmäßig um einen Mittelwert schwankt. Man bezeichnet derartige Strömungen als *turbulent*. Die in der Praxis vorkommenden Strömungen sind meistens turbulent.

Auch wenn die *direkte Simulation* oder die *Large-Eddy-Simulation* turbulenter Strömungen [24] wenig empirische Information zu den Erhaltungsgleichungen erfordert, sind sie infolge einer hohen Auflösung des Gitternetzes und der damit verbundenen Rechenkosten vom Standpunkt gegenwärtiger Rechenanlagen aus unwirtschaftlich, um die zeitlichen Verläufe und die räumlichen Strukturen turbulenter Strömungen ausreichend aufzulösen. Für die meisten technischen Anwendungen interessieren im allgemeinen nicht die Einzelheiten der Turbulenzbewegung, sondern hauptsächlich deren Mittelwerte, weshalb es zweckmäßig ist, halbempirische Näherungsverfahren anzuwenden, welche nur die Mittelwerte der Strömungsgrößen liefern können. In den meisten Fällen wird die turbulente Strömung durch eine Mittelwertbildung der Strömungsgrößen in den Erhaltungsgleichungen näherungsweise berechnet.

Betrachtet man den zeitlichen Verlauf einer Strömungsgröße a an einem bestimmten Ort, so ändert sich die Strömungsgröße mit der Zeit. Damit ist die turbulente Strömung streng genommen als instationär anzusehen. Dabei kann man sich die Strömung als eine Überlagerung der mittleren Strömung mit einer ungeordneten stochastischen Schwankungsbewegung vorstellen. Die Strömungsgröße a läßt sich daher folgendermaßen darstellen:

$$a = \bar{a} + a^{'} . \tag{2.21}$$

Diese Aufteilung ist dann zweckmäßig, wenn die Schwankungsgröße $a^{'}$ viel kleiner als die mittlere Größe $\bar{a}$ ist. Eine Mittelwertbildung erfolgt gemäß

$$\bar{a} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} a dt \tag{2.22}$$

und dabei gilt weiterhin

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} a^{'} dt = 0, \tag{2.23}$$

d. h. der Mittelwert der Schwankungsgröße ist Null. Die Strömungsgröße a schwankt mit nur kleinen Ausschlägen $a^{'}$ um den gemittelten Wert $\bar{a}$ für einen Zeitraum Δt. Das Mittelungsinterval Δt ist jedoch geeignet groß zu wählen. Wird es zu groß gewählt, so wird der instationäre Verlauf herausgemittelt; wird es zu klein gewählt, bringt die gemittelte Größe $\bar{a}$ nicht den tatsächlichen Mittelwert.

Für die Mittelwertbildung der Strömungsgrößen bei kompressiblen Strömungen kommt der massengewichtete Mittelungsprozeß nach *Favre* häufig zum Einsatz. Zunächst werden die massengemittelten Größen von $\mathbf{u}$ und T

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\overline{\rho \mathbf{u}}}{\overline{\rho}}, \qquad \tilde{T} = \frac{\overline{\rho T}}{\overline{\rho}} \tag{2.24}$$

eingeführt, wobei mit dem Überstreichen die zeitliche Mittelung gemäß (2.22) gemeint ist. Die Momentanwerte von $\mathbf{u}$ und T werden zuerst in die Summe aus den massengewichteten Mittelwerten und ihren Schwankungswerten aufgespalten, gekennzeichnet mit zwei Strichen. Hingegen werden die Massendichte ρ und der statische Druck p wie für (2.21) in die Summe aus den zeitlich gemittelten Werten und ihren Schwankungswerten aufgespalten:

$$\rho = \bar{\rho} + \rho^{'}, \quad \rho = \bar{p} + p^{'}, \quad \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^{''}, \quad T = \tilde{T} + T^{''}. \tag{2.25}$$

Setzt man dann die aufgespaltenen Größen in die Erhaltungsgleichungen ein und unterwirft man die resultierenden Gleichungen der zeitlichen Mittelung für ein Zeitinterval Δt gemäß (2.22), dann ergeben sich unter Vernachlässigung geringer Einflußterme

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\rho}\tilde{E} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_I = \begin{pmatrix} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\rho}\tilde{\mathbf{u}}\tilde{\mathbf{u}} + \bar{p}\mathbf{I} \\ (\bar{\rho}\tilde{E} + \bar{p})\tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\mathbf{T}} - \overline{\rho \mathbf{u}^{''}\mathbf{u}^{''}} \\ (\tilde{\mathbf{T}} - \overline{\rho \mathbf{u}^{''}\mathbf{u}^{''}}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{q}} - c_p\overline{\rho T^{''}\mathbf{u}^{''}} \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

mit

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mu[\nabla\tilde{\mathbf{u}} + (\nabla\tilde{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3}\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{I}], \tag{2.27}$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = -\lambda\nabla\tilde{T}, \tag{2.28}$$

$$\bar{\rho}\tilde{E} = \bar{\rho}\tilde{e} + \bar{\rho}\frac{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}}{2} + \bar{\rho}k. \tag{2.29}$$

Die turbulente kinetische Energie k pro Masse infolge Schwankungsbewegung ist als Summe der turbulenten Normalspannungen

$$k = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{u}^{''} \cdot \mathbf{u}^{''}} \tag{2.30}$$

definiert. Mit den zwei zusätzlichen Termen $-\overline{\rho \mathbf{u}^{''}\mathbf{u}^{''}}$ und $c_p\overline{\rho T^{''}\mathbf{u}^{''}}$ werden die Schwankungsbewegungen turbulenter Strömungen berücksichtigt. Die Schwankungsgröße $-\overline{\rho \mathbf{u}^{''}\mathbf{u}^{''}}$, bezeichnet als *Reynolds-Spannungen*, sind physikalisch gesehen Trägheitskräfte, denn sie rühren von den konvektiven nichtlinearen Termen her. Die durch die Schwankungen verursachten Trägheitskräfte in der Strömung erwecken den Eindruck, daß in der Strömung eine zusätzliche Reibung wirksam ist. Deshalb werden diese Schwankungsterme auch als zusätzliche Reibungsterme interpretiert, obwohl sie direkt nichts mit den Reibungseffekten gemeinsam haben. In diesem Zusammenhang wird auch von *turbulenter Scheinreibung* gesprochen. Die Schwankungsgröße $c_p\overline{\rho T''\mathbf{u}''}$, bezeichnet als *Reynolds-Wärmestromvektor*, beschreibt in der Energiegleichung den zusätzlichen Energietransport, welcher durch die Schwankungsbewegung hervorgerufen wird.

Um die derartig gemittelten Erhaltungsgleichungen numerisch zu lösen, sind zusätzliche Annahmen für die Beziehung zwischen den scheinbaren und den gemittelten Strömungsgrößen zu treffen. Dies ist als *Schließungsproblem* bekannt, dessen Lösung meistens auf starken Vereinfachungen und Hypothesen beruht. Auf der untersten Stufe wird die Schließung durch die Beziehung zwischen den scheinbaren und den gemittelten Strömungsgrößen erreicht. Diese halbempirische Beziehungen stellen *Turbulenzmodelle* dar, welche die Form algebraischer Beziehungen oder von Differentialgleichungen annehmen können, und welche nach der Zahl von Differentialgleichungen eingeordnet werden. Sie alle enthalten Größen, welche experimentell bestimmt werden müssen. Die Mehrzahl der gegenwärtig in technischen Anwendungen zur Verfügung stehender Turbulenzmodelle basiert auf dem *Wirbelviskositätansatz* von *Boussinesq*:

$$-\overline{\rho\mathbf{u}''\mathbf{u}''} = \mu_t[\nabla\tilde{\mathbf{u}} + (\nabla\tilde{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{I}] - \frac{2}{3}\bar{\rho}k\mathbf{I}, \tag{2.31}$$

$$c_p\overline{\rho T''\mathbf{u}''} = -\lambda_t\nabla\tilde{T}. \tag{2.32}$$

Hierbei sind μ_t und λ_t die *turbulente Viskosität* und die *turbulente Wärmeleitfähigkeit*. Diese Koeffizienten sind keine Stoffgrößen, sondern hängen von der Turbulenzstruktur ab. Schließlich werden die Erhaltungsgrößen sowie der Flußtensor in den gemittelten Erhaltungsgleichungen und die Zustandsgleichung der Einfachheit halber unter Vernachlässigung aller Striche durch

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_I = \begin{pmatrix} \rho\mathbf{u} \\ \rho\mathbf{u}\mathbf{u} + p\mathbf{I} \\ (\rho E + p)\mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{T}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{q} \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

$$\mathbf{T} = (\mu + \mu_t)[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{I}] - \frac{2}{3}\rho k\mathbf{I} \tag{2.34}$$

$$\mathbf{q} = -(\lambda + \lambda_t)\nabla T \tag{2.35}$$

$$p = (\gamma - 1)(\rho E - \frac{\rho}{2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \rho k) \tag{2.36}$$

beschrieben. Der letzte Term in (2.34) leistet einen Beitrag als Normalspannung zum gemittelten statischen Druck p

Ein zu dieser Gruppe gehörendes Turbulenzmodell unterscheidet sich von einem anderen darin, wodurch die turbulente Viskosität μ_t und die turbulente kinetische Energie k bestimmt werden. Da ein Turbulenzmodell in der Regel nur für eine bestimmte Strömung anwendbar ist, muß vor der Anwendung geklärt werden, was für eine Art von Strömung berechnet werden soll. Jedes Turbulenzmodell basiert auf experimentellen Ergebnissen, welche für festgelegte *Reynolds*- und *Mach*-Zahlbereiche sowie für zusätzliche Parameter ermittelt wurden. Die in dem Turbulenzmodell enthaltenen Konstanten beziehen sich auf diese experimentellen Ergebnisse. Vor der Berechnung der Strömung muß also geprüft werden, ob die im Turbulenzmodell enthaltenen Konstanten passend für die zu berechnende Strömung sind. Außerdem muß der Rechenaufwand insbesondere dann berücksichtigt werden, wenn die Turbulenz dreidimensionaler Strömungen modelliert wird. Die prinzipielle Struktur der ungemittelten Erhaltungsgleichungen wird im wesentlichen erhalten, so daß die Lösung der gemittelten Erhaltungsgleichungen wie für laminare Strömungen erfolgen kann. Die in technischen Anwendungsbereichen auftretenden turbulenten Strömungen können durch die gemittelten Erhaltungsgleichungen näherungsweise gut berechnet werden.

2.2.4 Dimensionslose Betrachtung

Die in den bisher beschriebenen Erhaltungsgleichungen sowie den darauf bezogenen Beziehungen auftretenden Größen sind dimensionsbehaftet. Um zu dimensionslosen Kennzahlen zu gelangen, welche eine Strömung charakterisieren, ist es von Vorteil, durch geeignete *Referenzgrößen* die Erhaltungsgleichungen und die Beziehungen auf eine dimensionslose Form zu überführen. Es gibt viele Möglichkeiten für die Wahl von Referenzgrößen, durch welche die dimensionsbehafteten Größen dimensionslos gemacht werden. Hier werden die dimensionsbehafteten Größen(im folgenden mit einem Überstreichen $\bar{\ }$ gekennzeichnet) auf folgende Referenzgrößen, bezeichnet mit dem Subscript ∞,

$$\mathbf{r} = \frac{\bar{\mathbf{r}}}{\bar{L}_\infty}, \quad \mathbf{u} = \frac{\bar{\mathbf{u}}}{\bar{V}_\infty}, \quad \rho = \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_\infty}, \quad T = \frac{\bar{T}}{\bar{T}_\infty}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{L}_\infty/\bar{V}_\infty},$$
$$p = \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty^2}, \quad \mu = \frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_\infty}, \quad \mu_t = \frac{\bar{\mu}_t}{\bar{\mu}_\infty}, \quad k = \frac{\bar{k}}{\bar{V}_\infty^2} \tag{2.37}$$

bezogen. Hierbei sind $\bar{V}_\infty$, $\bar{L}_\infty$, $\bar{\rho}_\infty$, $\bar{T}_\infty$ sowie $\bar{\mu}_\infty$ geeignet wählbare Referenzgrößen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden nur noch die dimensionslosen Größen angegeben. Um Konfusion zu verhindern, werden die dimensionsbehafteten Größen explizit mit dem Überstreichen $\bar{\ }$ bezeichnet, wenn eine Gleichung oder eine Größe dimensionsbehaftet zu verstehen ist. Die dimensionslose Form der Erhaltungsgleichungen und der dazugehörigen Beziehungen bleibt unverändert, abgesehen von folgenden Beziehungen:

$$\mu = T^{3/2} \left(\frac{1 + C_2/\bar{T}_\infty}{T + C_2/\bar{T}_\infty} \right), \tag{2.38}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mu + \mu_t}{Re_\infty} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}] - \frac{2}{3} \rho k \mathbf{I}, \tag{2.39}$$

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2 Re_\infty} (\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t}) \nabla T, \tag{2.40}$$

$$T = \frac{\gamma M_\infty^2 p}{\rho}, \tag{2.41}$$

wobei $Re_\infty = \bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty \bar{L}_\infty / \bar{\mu}_\infty$ die *Referenz-Reynolds*-Zahl ist, $M_\infty = \bar{V}_\infty / \sqrt{\gamma \bar{R} \bar{T}_\infty}$ die *Referenz-Mach*-Zahl und Pr_t die *turbulente Prandtl*-Zahl, also $Pr_t = \bar{c}_p \bar{\mu}_t / \bar{\lambda}_t$, welche für Luft üblicherweise $Pr_t = 0.9$ ist. Die *Prandtl*-Zahl ist etwa konstant für die meisten Gase im relevanten Temperatur- und Druckbereich. Daher werden die Strömungsvorgänge bei kompressiblen Fluiden ausschließlich durch die *Mach*- und *Reynolds*-Zahlen charakterisiert, d. h. die Strömungen in ähnlichen Geometrien verhalten sich gleich, wenn die zwei dimensionslosen Kennzahlen jeweils im Wert übereinstimmen. Die *Reynolds*-Zahl ist als das Verhältnis der charakteristischen Länge $\bar{L}_\infty$ zur *viskosen Länge* $\bar{\mu}_\infty / \bar{\rho}_\infty \bar{V}_\infty$ anzusehen, so daß mit zunehmender *Reynolds*-Zahl die viskose Länge kleiner wird, d. h. die Grenzschichtdicke dünner wird. Aus (2.39) und (2.40) geht auch hervor, daß die Reibungseffekte dann vernachlässigbar sind, wenn die *Reynolds*-Zahl gegen unendlich geht, d. h. die Erhaltungsgleichungen beschreiben das Verhalten einer reibungsfreien Strömung, welche nur durch die *Mach*-Zahl charakterisiert wird. Bei der Verwendung eines Turbulenzmodells müssen die zugehörigen Gleichungen in geeigneter Weise so dimensionslos gemacht werden, daß die Referenz-*Reynolds*-Zahl in den dimensionslosen Turbulenzmodellgleichungen auftreten kann.

2.3 Anfangs- und Randbedingungen

Die Erhaltungsgleichungen sind von parabolischem und hyperbolischem Typ in der Zeit, aber elliptisch und hyperbolisch im Ortsraum, was zu einem Anfangs- und Randwertproblem führt. Daher benötigt man sowohl Anfangs- als auch Randbedingungen zur Lösung des Gleichungssystems. Die Strömungsvorgänge eines Fluids werden vor allem durch die zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen festgelegt. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGl) ist bekannt, daß die Ordnung einer unabhängigen Variablen in der DGl die Anzahl der erfüllbaren Anfangs- und Randbedingungen festlegt. Genauso legt die Ordnung einer unabhängigen Variablen in der partiellen DGl die Zahl der zu Beginn und am Rand erfüllbaren Funktionen fest.

2.3.1 Anfangsbedingungen

Bei instationären Strömungsproblemen sind die *Anfangsbedingungen*, also die Feldgrößen zu Beginn des interessierenden Zeitabschnitts ($t = 0$) anzugeben:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t = 0) = \mathbf{Q}(\mathbf{r}). \tag{2.42}$$

2.3.2 Randbedingungen

Die Lösung des vorliegenden Strömungsproblems verlangt bei jedem Zeitabschnitt Angaben über die Art der Berandung des interessierenden Strömungsgebiets und die Angabe der Bedingungen, welche die Strömung an der Berandung erfüllen muß. Mathematisch gesprochen handelt es sich hierbei um *Randbedingungen*. Man unterscheidet bei der Berandung zwischen der undurchlässigen Wand und dem Ein- und Austrittsrand.

Bei einer reibungsfreien Strömung ist es im allgemeinen nicht mehr möglich, sowohl Normal- als auch Tangentialgeschwindigkeit an der Wand vorzuschreiben. Da an einer undurchlässigen Wand auf jeden Fall die Normalkomponenten von Wand- und Strömungsgeschwindigkeit übereinstimmen müssen—anderenfalls würde die Wand durchströmt—so lautet die Randbedingung

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_w) \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{2.43}$$

welche *kinematische* Randbedingung genannt wird.

Die Erfahrung lehrt, daß *Newton*-Fluide unter üblichen Strömungsbedingungen an undurchlässigen Wänden haften. Dies bedeutet, daß sowohl Tangential- als auch Normalgeschwindigkeit von Fluid und Wand an jedem Punkt der Wand übereinstimmen müssen. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u}$ des Fluids an der Wand muß gleich dem Vektor der Wandgeschwindigkeit $\mathbf{u}_w$ sein:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_w, \tag{2.44}$$

bei welcher von *dynamischer* oder *physikalischer* Randbedingung gesprochen wird.

Auch die Temperaturdifferenz zwischen dem Fluid an der Wand und der Wand ist nicht vernachlässigbar in wärmeleitenden Strömungen. Für Gase kommen aber üblicherweise die Bedingungen (*no-temperature-jump conditions*)

$$T = T_w \quad \text{oder} \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \tag{2.45}$$

als die Temperatur des Fluids an der Wand zum Einsatz, wobei n die Richtung normal zur Wand andeuten soll. Für den statischen Druck p existiert aber keine natürliche Randbedingung an der Wand.

In vielen Strömungsproblemen ist es zweckmäßig und notwendig, die Lösung der Erhaltungsgleichungen auf ein endliches Integrationsgebiet zu beschränken. Dies ist zulässig, wenn die Eigenschaften einer Strömung sowohl am Eintritt als auch am Austritt des Gebiets vorgeschrieben werden. Die Erhaltungsgleichungen (2.7) sind von parabolischem und hyperbolischem Typ in der Zeit, und damit können sie i.a. nur unvollständig beschrieben werden. Falls aber der Eintritts- oder Austrittsrand weit genug von einem angeströmten Gegenstand entfernt ist, spielen die Reibungsterme normal zur Berandung keine Rolle, also können dieselben Randbedingungen wie bei reibungsfreier Strömung mittels Charakteristiken angegeben werden. Verlassen abgelöste Wirbel das Integrationsgebiet über den Austrittsrand, so würde Reibung nur einen geringen Einfluß auf die Strömung in dem eigentlich interessierenden Gebiet ausüben. Die Reibungseffekte sind aber in erster Näherung dann vernachlässigbar, wenn der Abstand zwischen dem angeströmten Gegenstand und dem Austrittsrand entsprechend groß ist.