$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda R_+} \Big(\frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|}\Big) \tag{3.11}$$
$$(|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}),$$

denn für den dritten bis siebten Summanden innerhalb der geschweiften Klammern in (3.10) gilt, daß sie wegen $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0,\ \mathrm{Im}\,\lambda \leq 0$ in S_{-1} gleich

$$O(\lambda^{-\sigma_0})\, e^{\pm i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1})$$

sind, und sich deshalb mit dem ersten bzw. zweiten Summanden zusammenfassen lassen. Bei dem vorletzten Summanden beachte man dazu, daß $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leq |\mathrm{Re}\,\lambda|$ in S_{-1} gilt, also

$$|\lambda|^2 = (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 + (\mathrm{Re}\,\lambda)^2 \leq 2\,(\mathrm{Re}\,\lambda)^2 \quad \text{für alle } \lambda\in S_{-1}, \tag{3.12}$$

und daher dann

$$\begin{aligned}
\Big|(i+O(\lambda^{-\sigma_0}))\, e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|}\Big| &\leq |\lambda|^{-\sigma_0}\Big|\lambda^{\sigma_0} i e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|} + O(1)e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|}\Big| \\
&\leq |\lambda|^{-\sigma_0}\Big(|\lambda|^{\sigma_0} e^{-2\mathrm{Re}\,(\lambda)\int_0^{x_1}|\phi|} + Ce^{-2\mathrm{Re}\,(\lambda)\int_0^{x_1}|\phi|}\Big) \\
&\overset{(3.12)}{\leq} |\lambda|^{-\sigma_0}\Big((\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\lambda)^{\sigma_0} e^{-2\mathrm{Re}\,(\lambda)\int_0^{x_1}|\phi|} + C\Big) \\
&\leq |\lambda|^{-\sigma_0}\tilde{C} \qquad\qquad (\lambda\in S_{-1}, |\lambda|\geq\lambda_0)
\end{aligned}$$

mit geeigneten Zahlen $C,\ \tilde{C},\ \lambda_0 \geq 0$ wegen

$$\lim_{t\to\infty} t^{\sigma_0} e^{-2t\int_0^{x_1}|\phi|} = 0$$

(mit $t := \mathrm{Re}\,\lambda$) nach der Regel von de l'Hospital.
Der folgende Ausdruck in (3.11)

$$E(\lambda) := \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1})$$

stellt nun eine asymptotische Exponentialsumme dar. Dabei ist die in (3.11) vor E befindliche Funktion $S_{-1}\to\mathbb{C},\ \lambda\mapsto s_\alpha g_\alpha(\lambda)e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{\lambda R_+}$ holomorph und nullstellenfrei, so daß die Nullstellen von Δ nur durch E bestimmt werden.
E ist in jedem Punkt von S_{-1} holomorph, denn es gilt

$$E(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{s_\alpha g_\alpha(\lambda)e^{\lambda R_+}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\mathcal{W}(i\lambda,\alpha)}{s_\alpha g_\alpha(\lambda)e^{\lambda R_+}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad (\lambda\in S_{-1}),$$

darin ist $\mathcal{W}(i\lambda,\alpha)$ in jedem Punkt von S_{-1} holomorph (vgl. Lemma 2.9 b)) und der Nenner ebenfalls in jedem Punkt von S_{-1} holomorph und nullstellenfrei.

Lemma 3.1 mit

$$p := 2\ , \quad c_1 := \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} \neq 0\ , \quad c_2 := \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} \neq 0\ ,$$

$$\vartheta_1 := -\int_{x_1}^{x_2} |\phi| = -R_-\ , \qquad \vartheta_2 := \int_{x_1}^{x_2} |\phi| = R_-$$

liefert für die Nullstellen λ_n von E (und damit von Δ)

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{2R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

also gilt für die Eigenwerte ρ_n^2

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

das ist die Behauptung.
Nun zum allgemeineren Fall

1. b) $T_1 = III,\ T_2 = \ldots = T_{m-1} = I,\ T_m = IV;\ m \geq 3$

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für ϕ^2 mit $m = 6$.

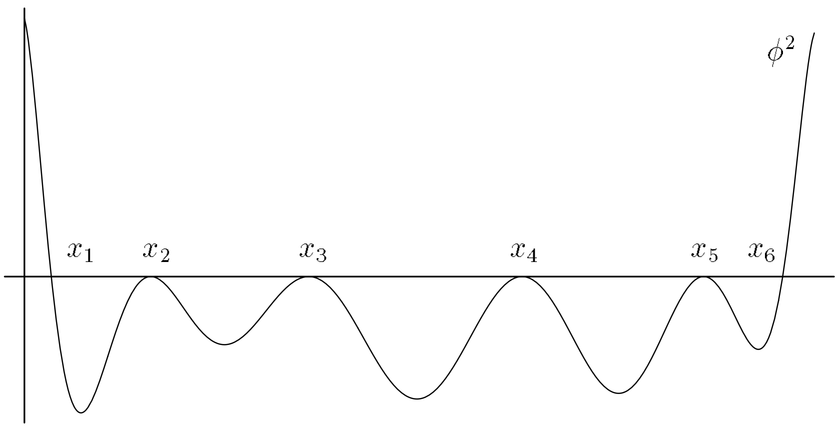

Bild 3.4: Beispiel für ϕ^2 im Fall 1.b)

In der hier untersuchten Situation 1.b) gilt

$$R_- = \int_{x_1}^{x_m} |\phi| \quad , \qquad R_+ = \int_0^{x_1} |\phi| + \int_{x_m}^{1} |\phi|\ .$$

Es ist mit $\rho =: i\lambda$ gemäß Lemma 3.2

$$C_1(III,I) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_2]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_1+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_1+\epsilon}^{x_2}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_2-\epsilon}^{x_2}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_2]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),$$

$$C_\nu(I,I) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_\nu\cos\pi\mu_{\nu+1}]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\lambda\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_{\nu+1}]\sin\pi\mu_\nu e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; \nu = 2, \ldots, m-2),$$

$$C_{m-1}(I,IV) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_{m-1}]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_{m-1}+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}+\epsilon}^{x_m}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_{m-1}]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_{m-1} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_m-\epsilon}^{x_m}|\phi|} + [-i]\sin\pi\mu_{m-1} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_{m-1} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} \end{pmatrix}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).$$

Wir betrachten nun a_1, a_2, a_3, a_4 und die Summe innerhalb der großen Klammern von (3.9). Da $C_1(III,I)$, $C_\nu(I,I)$ für $\nu = 2, \ldots, m-2$ und $C_{m-1}(I,IV)$ nur $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ enthalten, liest man aus der Gestalt der $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ ab, daß in (3.5) gilt

$$(3.13) \qquad \begin{cases} \theta^{(k)} = 0 \qquad \text{sowie} \\ -R_- = -\int_{x_1}^{x_m}|\phi| \le \vartheta_1^{(k)} < \vartheta_2^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \le \int_{x_1}^{x_m}|\phi| = R_- \\ \text{für } \; k = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Weiter ist mit (3.13)

$$a_k(i\lambda) = e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1, 2, 3, 4), \tag{3.14}$$

denn nach (3.5) ist

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= \sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j^{(k)}\lambda} \\ &= e^{iR_-\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i(\vartheta_j^{(k)} - R_-)\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \end{aligned}$$

mit

$$\left| e^{i(\vartheta_j^{(k)} - R_-)\lambda} \right| = e^{\mathrm{Im}\,(\lambda)(R_- - \vartheta_j^{(k)})} \le 1 \qquad (\lambda \in S_{-1}; j = 1, \ldots, p_k)$$

wegen $\mathrm{Im}\,\lambda \le 0$ und (3.13).

Da in der Summe innerhalb der großen Klammern von (3.9) der Term $e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|}$ derjenige von den Faktoren $e^{\pm\lambda \int_0^{x_1} |\phi| \pm \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|}$ ist, der für $|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}$ das stärkste Wachstum besitzt und die a_k nur $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ besitzen, werden wir die Summe in der großen Klammer von (3.9) wie folgt ausrechnen (die so durchgeführte Vereinfachung der asymptotischen Exponentialsumme H in der folgenden Rechnung ist analog zu Langer [14, Part I, Section 9]):

$$\begin{aligned} H(\lambda) \; := \; & a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \; e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ & + a_2(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2 \sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \; e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ & + a_3(i\lambda)\Big(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \; e^{-\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ & + a_4(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2 \sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \; e^{-\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ = \; & e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \\ & \qquad + a_2(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2 \sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \; e^{-2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ & \qquad + a_3(i\lambda)\Big(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \; e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi|} \\ & \qquad + a_4(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2 \sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \; e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - 2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \Big) \\ \overset{(3.14)}{=} \; & e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} + e^{iR_-\lambda} \cdot o(1) \Big) \end{aligned}$$

$$\overset{(3.5)}{=} \frac{e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot\left\{s_\alpha\left(\sum_{j=1}^{p_1}\Big(d_j^{(1)}+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda}\right)+e^{iR_-\lambda}\cdot o(1)\right\}$$

$$= \frac{s_\alpha e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot\left\{\left(\sum_{j=1}^{p_1}\Big(d_j^{(1)}+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda}\right)+e^{iR_-\lambda}\cdot o(1)\right\}$$

$$(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}),$$

so daß (3.9) hier lautet (mit $p:=p_1,\ d_j:=d_j^{(1)},\ \vartheta_j:=\vartheta_j^{(1)}$ für $j=1,\ldots,p$ zur Abkürzung)

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\left\{\left(\sum_{j=1}^{p}\Big(d_j+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j\lambda}\right)+o(1)\,e^{i\lambda R_-}\right\} \tag{3.15}$$

$$(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}),$$

dabei wurde $\int\limits_0^{x_1}|\phi|+\int\limits_{x_m}^1|\phi|=R_+$ eingesetzt.
Um Lemma 3.1 anwenden zu können, werden wir nun zeigen:

$$\vartheta_1=-R_-\ ,\quad \vartheta_p=R_-\ ,\quad d_1\neq 0\ ,\quad d_p\neq 0\ . \tag{3.16}$$

Zur Bestimmung von $\vartheta_1,\ \vartheta_p,\ d_1,\ d_p$:
Zur Bestimmung von $d_1,\ \vartheta_1$ aus $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1}C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ sind, wie in [5] beschrieben, genau die Terme in $C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ zu berücksichtigen, die einen Faktor der Form $e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$ enthalten, denn für alle Exponentialterme $e^{i\vartheta\lambda}$ in den Matrizen $C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ gilt $\vartheta\geq-\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|$ und die Terme mit $\vartheta>-\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|$ liefern keinen Beitrag zu ϑ_1. Deshalb reicht es gemäß [5] aus, die in Definition 3.3 angegebenen, für d_1,ϑ_1 relevanten Teilmatrizen zu betrachten; hier ist

$$C_{1,1}(III,I) = \begin{pmatrix}\frac{\cos\pi\mu_2}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}\\ -2i\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\cos\pi\mu_2 & 2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|}\ ,$$

$$C_{\nu,1}(I,I) = \begin{pmatrix}\frac{\cos\pi\mu_\nu\cos\pi\mu_{\nu+1}}{\sin\pi\mu_\nu} & \frac{i\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu}\\ -i\cos\pi\mu_{\nu+1}\sin\pi\mu_\nu & \sin\pi\mu_\nu\end{pmatrix} e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\ ,$$

$$(\nu=2,\ldots,m-2)\ ,$$

$$C_{m-1,1}(I,IV) = \begin{pmatrix}\frac{\cos\pi\mu_{m-1}}{\sin\pi\mu_{m-1}} & \frac{i\cos\pi\mu_{m-1}}{\sin\pi\mu_{m-1}}\\ -i\sin\pi\mu_{m-1} & \sin\pi\mu_{m-1}\end{pmatrix} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|}\ ;$$

nach [5] ist es ausreichend, statt $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1}C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ nun $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1}C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1})$ zu untersuchen.

Hier ist

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu} \right) e^{-i\lambda \int_{x_1}^{x_m} |\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_1}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$d_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \left(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu} \right) \neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_1 = -\int_{x_1}^{x_m} |\phi| = -R_-.$$

Entsprechend sind für die Bestimmung von $d_p,\ \vartheta_p$ gemäß [5] genau die Terme in den Matrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ zu berücksichtigen, die einen Term der Gestalt $e^{i\lambda \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|}$ enthalten, denn für alle $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme in $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ gilt $\vartheta \leq \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|$ und alle $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta < \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|$ liefern keinen Beitrag zu ϑ_p. Deshalb betrachten wir die in Definition 3.3 angegebenen, für d_p, ϑ_p relevanten Teilmatrizen

$$\begin{aligned} C_{1,p}(III, I) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda \int_{x_1}^{x_2} |\phi|}, \\ C_{\nu,p}(I, I) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|} \qquad (\nu = 2, \ldots, m-2), \\ C_{m-1,p}(I, IV) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin \pi\mu_{m-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda \int_{x_{m-1}}^{x_m} |\phi|}. \end{aligned}$$

Nun ist es ausreichend, $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ statt $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ zu untersuchen. Hier ist

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu} \right) e^{i\lambda \int_{x_1}^{x_m} |\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$d_p = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \left(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu} \right) \neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_p = \int_{x_1}^{x_m} |\phi| = R_-,$$

womit (3.16) bewiesen ist.
Wegen $\vartheta_p = R_-$ läßt sich nun in (3.15) zusammenfassen:

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1) \Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}). \tag{3.17}$$

Der Vorfaktor vor der asymptotischen Exponentialsumme

$$E(\lambda) := \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

in (3.17) ist nullstellenfrei, Δ und E besitzen in S_{-1} also dieselben Nullstellen. Wie bei Fall 1.a) sieht man, daß E in jedem Punkt von S_{-1} holomorph ist. Nach Lemma 3.1 gilt mit (3.16) für die Nullstellen λ_n von E bzw. von Δ

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{2R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

womit für die Eigenwerte ρ_n^2 dann

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

das ist die Behauptung, folgt.

Nun verallgemeinern wir das Ergebnis von 1.b):

1. c) $T_1 = III,\ T_2 = \ldots = T_{l-1} = I,\ T_l = IV,$ $T_{l+1} = III,\ T_{l+2} = \ldots = T_{m-1} = I,\ T_m = IV$

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für $m = 6$, $l = 3$.

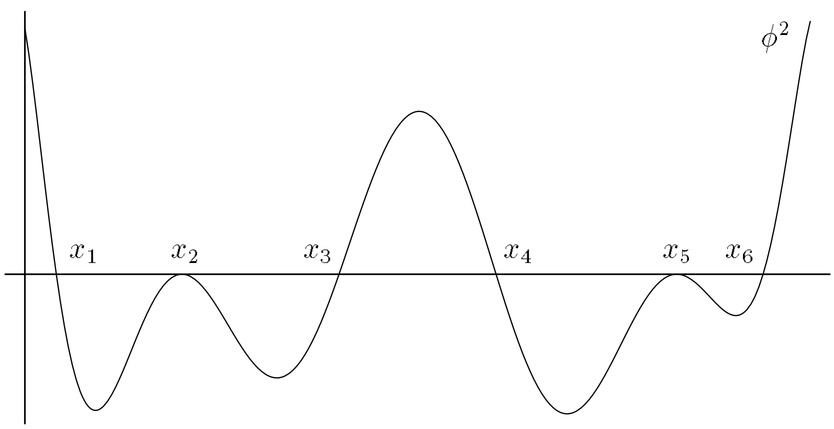

Bild 3.5: Beispiel für ϕ^2 im Fall 1.c)

Es entspricht in Fall 1.c) also $T_1, \ldots, T_l$ und $T_{l+1}, \ldots, T_m$ jeweils der Situation in Fall 1.b) bzw. 1.a); nun ist

$$R_+ = \int_0^{x_1} |\phi| + \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| + \int_{x_m}^{1} |\phi| \, , \quad R_- = \int_{x_1}^{x_l} |\phi| + \int_{x_{l+1}}^{x_m} |\phi| \, .$$

Es gilt mit $\rho =: i\lambda$, $\lambda \in S_{-1}$

$$\begin{aligned} C_l(IV, III) \;\; = \;\; & \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{\lambda \int_{x_l}^{x_l+\epsilon} |\phi|} e^{-\lambda \int_{x_l+\epsilon}^{x_{l+1}} |\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} \\ [0] 2\sin\frac{\pi\mu_l}{2} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}-\epsilon} |\phi|} e^{\lambda \int_{x_{l+1}-\epsilon}^{x_{l+1}} |\phi|} + [0] 2 \sin\frac{\pi\mu_l}{2} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} & [1] 2\sin\frac{\pi\mu_l}{2} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ & \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \end{aligned}$$

nach Lemma 3.2. Die anderen Matrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ mit $\nu \neq l$ enthalten nur $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ (vgl. Fälle 1.a), 1.b)). Man liest auch hier aus der Gestalt der $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ ab, daß

$$(3.18) \quad \begin{cases} \theta^{(1)} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| \, , \qquad - \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| \le \theta^{(k)} \le \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| \quad \text{für } k = 2, 3, 4; \\ -R_- = - \int_{x_1}^{x_l} |\phi| - \int_{x_{l+1}}^{x_m} |\phi| \le \vartheta_1^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \le \int_{x_1}^{x_l} |\phi| + \int_{x_{l+1}}^{x_m} |\phi| = R_- \\ \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

so daß mit (3.5) folgt:

$$(3.19) \qquad a_k(i\lambda) = e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1, 2, 3, 4).$$

Analog zu Fall 1.b) erhalten wir für die Summe H in der großen Klammer von (3.9)

$$\begin{aligned} H(\lambda) \;\; = \;\; & e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda) \big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0}) \big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \\ & + a_2(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0}) \, 2 \sin\frac{\pi\mu_m}{2} \; e^{-2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ & + a_3(i\lambda) \big(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0}) \big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \; e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi|} \\ & + a_4(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0}) \, 2 \sin\frac{\pi\mu_m}{2} \; e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - 2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \Big) \\ \overset{(3.19)}{=} \; & e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda) \big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0}) \big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} + e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot o(1) \Big) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(3.5)}{=} \frac{e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot \left\{ e^{\theta(1)\lambda} s_\alpha \left(\sum_{j=1}^{p_1} \left(d_j^{(1)} + o(1)\right) e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda} \right) + e^{\theta(1)\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot o(1) \right\}$$

$$\stackrel{(3.18)}{=} \frac{s_\alpha e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p_1} \left(d_j^{(1)} + o(1)\right) e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda} \right) + o(1)\, e^{iR_-\lambda} \right\}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),$$

(3.9) lautet also hier (mit $p := p_1$, $d_j := d_j^{(1)}$, $\vartheta_j := \vartheta_j^{(1)}$ für $j = 1, \ldots, p$ zur Abkürzung)

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p} \left(d_j + o(1)\right) e^{i\vartheta_j\lambda} \right) + o(1)\, e^{i\lambda R_-} \right\} \quad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}). \tag{3.20}$$

Wir werden zeigen:

$$\vartheta_1 = -R_- \,, \quad \vartheta_p = R_- \,, \quad d_1 \neq 0 \,, \quad d_p \neq 0 \,. \tag{3.21}$$

Wie bei 1.a) bzw. 1.b) erhält man für die relevanten Teilmatrizen

$$\prod_{\nu=1}^{l-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\prod_{\nu=2}^{l-1} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} \right) e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_1}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

und analog

$$\prod_{\nu=l+1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\prod_{\nu=l+2}^{m-1} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} \right) e^{-i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Da in $C_l(IV, III)$ nur $e^{\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ vorhanden sind, sind gemäß (3.18), (3.19) und der Vereinfachung von H gemäß Langer [14] wie bei 1.b) als relevante Teilmatrizen

$$\left\{ \begin{aligned} C_{l,1}(IV, III) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|} \,, \\ C_{l,p}(IV, III) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|} \end{aligned} \right. \tag{3.24}$$

zu berücksichtigen, nämlich jeweils der für $|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}$ am stärksten wachsende Term (vgl. auch [5]).
Die weiteren in Definition 3.3 angegebenen relevanten Teilmatrizen, die in den nachfolgenden Untersuchungen benötigt werden, sind wie bei [5] nach demselben Prinzip gebildet wie hier und in Fall 1.b).
Es ist dann wieder gemäß [5] ausreichend, $\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ statt $\prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ zu untersuchen. Mit (3.22), (3.23) und (3.24) folgt:

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1}) \;=\; e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)\cdot$$

$$\cdot e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|-i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|}\cdot e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & \frac{i}{4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\\ \frac{-i\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & \frac{\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$d_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_l}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big),$$

also

$$d_1\neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_1 = -\int_{x_1}^{x_l}|\phi| - \int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi| = -R_-\ .$$

Für d_p und ϑ_p hat man wie bei 1.a) bzw. 1.b)

$$\prod_{\nu=1}^{l-1} C_{\nu,p}(T_\nu,T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\Big(\prod_{\nu=2}^{l-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

und wieder analog zu 1.a) bzw. 1.b)

$$\prod_{\nu=l+1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu,T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\Big(\prod_{\nu=l+2}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)e^{i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

so daß mit (3.24)

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu,T_{\nu+1}) \;=$$

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|+i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|}\cdot e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Daraus liest man ab

$$d_p = e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_l}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big),$$

und so

$$d_p\neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_p = \int_{x_1}^{x_l}|\phi| + \int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi| = R_-\ .$$

Damit ist (3.21) bewiesen. Wegen $\vartheta_p = R_-$ läßt sich in (3.20) zusammenfassen:

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\sum_{j=1}^{p}\Big(d_j+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j\lambda} \qquad (|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}).$$

Auch hier ist der Vorfaktor vor der asymptotischen Exponentialsumme

$$E(\lambda) := \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

nullstellenfrei, und E ist in jedem Punkt von S_{-1} holomorph, wie man wie bei 1.a) zeigt. Nach Lemma 3.1 gilt mit (3.21) für die Nullstellen λ_n von Δ

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

d.h. es gilt auch hier

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

Nun zum allgemeinen Fall

1. d) $T_1 = III,\ T_m = IV;\ m \geq 3$

Aus Lemma 3.2 ist ersichtlich, daß (mit $\rho = i\lambda$) die Exponentialterme in den Verbindungsmatrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ nicht nur in diesem Fall 1.d), sondern allgemein folgender Eigenschaft genügen:

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für alle } T_1, \ldots, T_m \text{ und } \nu \in \{1, \ldots, m-1\} \text{ gilt:} \\ C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ enthält nur } e^{i\vartheta\lambda}\text{–Terme mit } \vartheta \in \mathbb{R} \iff \phi^2 < 0 \text{ in } (x_\nu, x_{\nu+1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{und} \\ C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ enthält nur } e^{\vartheta\lambda}\text{–Terme mit } \vartheta \in \mathbb{R} \iff \phi^2 > 0 \text{ in } (x_\nu, x_{\nu+1}). \end{array} \right.$$

Deshalb erhält man in (3.5) aus der Gestalt der Verbindungsmatrizen in Lemma 3.2 in zu 1.b) und 1.c) analoger Weise

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^{(1)} = \int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2}\,, \qquad -\int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \leq \theta^{(k)} \leq \int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \quad \text{für } k = 2, 3, 4; \\ -R_- \leq \vartheta_1^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \leq R_- \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \end{array} \right.$$

woraus gemäß (3.5)

$$(3.27) \qquad a_k(i\lambda) = e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1, 2, 3, 4)$$

folgt. Gleichung (3.9) läßt sich daher wieder wie bei 1.b), c) schreiben als (mit $p := p_1$, $d_j := d_j^{(1)}$, $\vartheta_j := \vartheta_j^{(1)}$ für $j = 1, \ldots, p$)

$$\Delta(\lambda) \;=\; s_\alpha g_\alpha(\lambda)\, \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j\lambda} \right) + o(1)\, e^{i\lambda R_-} \right\} \tag{3.28}$$
$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).$$

Wir untersuchen nun die Zahlen $\vartheta_1,\ \vartheta_p,\ d_1,\ d_p$.

Zur Bestimmung von $\vartheta_1,\ \vartheta_p$:

Mit (3.25) ergeben sich entsprechend der $e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$–Terme und der $e^{i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$–Terme in den Verbindungsmatrizen wieder die Beziehungen

$$\vartheta_1 = -R_-\ , \qquad \vartheta_p = R_-\ . \tag{3.29}$$

Zur Bestimmung von $d_1,\ d_p$:

Da die Exponentialterme $e^{\pm i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$ in den relevanten Teilmatrizen $C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ bzw. $C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ nur für die Bestimmung von ϑ_1 bzw. ϑ_p von Bedeutung sind und nicht für die Untersuchung von d_1 bzw. d_p, verwenden wir im weiteren der kürzeren Formulierung halber die ebenfalls in Definition 3.3 angegebenen Matrizen

$$\hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ statt } C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) \quad \text{und} \quad \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ statt } C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}),$$

bei denen lediglich die Exponentialterme weggelassen wurden.

Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von ϕ^2 erhielten wir die in Bemerkung 3.2 b) angegebene Tabelle 3.1 für $T_{\nu+1}$ in Abhängigkeit von T_ν für $\nu = 1, \ldots, m-1$; andere Kombinationen sind nicht möglich. Daher gilt:

Auf einen turning point x_ν vom Typ $T_\nu = III$ folgt einer vom Typ $T_{\nu+1} = IV$ oder einer oder mehrere vom Typ I sowie dann ein turning point vom Typ IV. Diese ergeben in $\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ ein Teilprodukt der Gestalt

$$\hat{C}_{\nu,1}(III, IV) \quad \text{oder} \quad \hat{C}_{\nu,1}(III, I)\cdot \hat{C}_{\nu+1,1}(I, I)\cdot \ldots \cdot \hat{C}_{\nu+l,1}(I, IV), \tag{3.30}$$

es soll immer mit einer Nullstelle vom Typ IV enden. Falls diese Nullstelle nicht bereits die letzte, also x_m ist, so gilt für die nachfolgenden Nullstellen (vgl. wieder Tabelle 3.1):

Auf $T_\mu = IV$ folgt $T_{\mu+1} = III$ oder ein oder mehrere turning points vom Typ II sowie dann ein turning point vom Typ III. Diese ergeben in $\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ ein Teilprodukt der Gestalt

$$\hat{C}_{\mu,1}(IV, III) \quad \text{oder} \quad \hat{C}_{\mu,1}(IV, II)\cdot \hat{C}_{\mu+1,1}(II, II)\cdot \ldots \cdot \hat{C}_{\mu+k,1}(II, III), \tag{3.31}$$

es endet stets mit einer Nullstelle vom Typ III. Daran schließt sich wegen $T_m = IV$ wieder ein Teilprodukt der Gestalt (3.30) an.

In $\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ wechseln sich daher stets ein Teilprodukt der Form (3.30) mit einem der Gestalt (3.31) ab, beginnend mit (3.30) wegen $T_1 = III$ und endend mit (3.30) wegen $T_m = IV$.

Nach Lemma 3.2 und einer zu 1.b) analogen Rechnung ergibt sich nun, daß jedes Produkt der Form (3.30) die Gestalt

$$\gamma\begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{i}{\beta} \\ -i\beta & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{mit geeigneten } \beta,\, \gamma \neq 0$$

besitzt, und jedes Produkt der Form (3.31) die Gestalt

$$\delta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit geeignetem } \delta \neq 0$$

besitzt; letzteres, da jede Matrix $\hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ im Teilprodukt (3.31) nach Lemma 3.2 selbst die Form $\delta_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\delta_\nu \neq 0$ besitzt. Das Produkt eines Teilproduktes vom Typ (3.30) mit einem vom Typ (3.31) hat deshalb die Gestalt

$$\gamma\begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ -i\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit passenden } \beta,\, \gamma \neq 0. \tag{3.32}$$

$\prod\limits_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ besteht so aus einem oder mehreren Faktoren (3.32) und besitzt als letzten Faktor ein Teilprodukt der Form (3.30), d.h. mit geeigneten Zahlen $\gamma_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$ für $j = 1, \ldots, j_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) &= \left(\prod_{j=1}^{j_0-1} \gamma_j \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_j} & 0 \\ -i\beta_j & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \gamma_{j_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_{j_0}} & \frac{i}{\beta_{j_0}} \\ -i\beta_{j_0} & \beta_{j_0} \end{pmatrix} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{j_0} \gamma_j\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0-1}} & 0 \\ \frac{-i\beta_1}{\beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0-1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_{j_0}} & \frac{i}{\beta_{j_0}} \\ -i\beta_{j_0} & \beta_{j_0} \end{pmatrix} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{j_0} \gamma_j\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} & \frac{i}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} \\ \frac{-i\beta_1}{\beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} & \frac{\beta_1}{\beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also ist

$$d_1 = \frac{\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_{j_0}}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} \neq 0.$$

Da alle $\hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ Matrizen der Form $\alpha_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit passenden Zahlen $\alpha_\nu \neq 0$ für $\nu = 1, \ldots, m-1$ sind, ist

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \alpha_0 := \prod_{\nu=1}^{m-1} \alpha_\nu \neq 0,$$

also gilt

$$d_p = \alpha_0 \neq 0\,.$$

Mit $\vartheta_p = R_-$ nach (3.29) läßt sich (3.28) vereinfachen zu

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).$$

Auch hier ist der Vorfaktor $S_{-1} \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto s_\alpha g_\alpha(\lambda) \dfrac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}$ vor der asymptotischen Exponentialsumme

$$E(\lambda) := \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

nullstellenfrei, und E ist in jedem Punkt von S_{-1} holomorph. Nach Lemma 3.1 gilt mit (3.29) auch hier für die Nullstellen von Δ

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

also

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

das ist die Behauptung.

Im folgenden Fall untersuchen wir

2. $T_1 = II,\ T_m = IV$

Wegen $\phi^2 \in C(I)$ ist dann $m \geq 3$, und es existiert ein $l \in \{1, \ldots, m-1\}$ mit $T_l = III$, vgl. Tabelle 3.1 in Bemerkung 3.2 b); l sei dabei kleinstmöglich gewählt, d.h.

$$l := \min\Big\{k \mid k \in \{1, \ldots, m-1\},\ T_k = III\Big\}.$$

Dann ist also

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_{l-1} = II,\ \ T_l = III, \ldots, T_m = IV.$$

Nach [9, Thm. 3.2] gelten für $(w_{1,1}^{II})^{(\tau)}(0,\rho)$, $(w_{1,2}^{II})^{(\tau)}(0,\rho)$ für $\rho \in S_{-1}$ und $\tau = 0, 1$ die gleichen Abschätzungen wie für $(w_{1,1}^{III})^{(\tau)}(0,\rho)$, $(w_{1,2}^{III})^{(\tau)}(0,\rho)$ in Fall 1. Also bleibt auch hier Gleichung (3.9) gültig.
Nach Lemma 3.2 ergibt sich mit (3.25)

$$(3.33) \qquad \begin{cases} \theta^{(1)} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2}\,, \qquad -\int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \leq \theta^{(k)} \leq \int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \quad \text{für } k = 2,3,4; \\ -R_- \leq \vartheta_1^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \leq R_- \quad \text{für } k = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Daraus folgt ebenfalls

$$a_k(i\lambda) = e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1, 2, 3, 4), \tag{3.34}$$

so daß sich (3.9) vereinfacht zu (mit $p := p_1$, $d_j := d_j^{(1)}$, $\vartheta_j := \vartheta_j^{(1)}$ für $j = 1, \ldots, p$)

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin \frac{\pi \mu_m}{2}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \right) + o(1)\, e^{i\lambda R_-} \right\} \\ &\qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).\end{aligned} \tag{3.35}$$

Mit (3.25) erhält man wie bisher

$$\vartheta_1 = -R_- \ , \quad \vartheta_p = R_- \ . \tag{3.36}$$

Zur Bestimmung von d_1, d_p:
Es ist nach Lemma 3.2 bzw. Definition 3.3

$$\prod_{\nu=1}^{l-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit einem geeigneten } \beta \neq 0,$$

für $T_l = III, \ldots, T_m = IV$ ergibt sich analog zu 1.d)

$$\prod_{\nu=l}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \delta \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{i}{\gamma} \\ -i\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{mit geeigneten } \delta, \gamma \neq 0.$$

Damit erhalten wir

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \beta\, \delta \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{i}{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$d_1 = \frac{\beta\, \delta}{\gamma} \neq 0\, .$$

Alle Matrizen $\hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ sind von der Form $\alpha_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha_\nu \neq 0$ für $\nu = 1, \ldots, m-1$, deshalb folgt

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha_0 \neq 0,$$

d.h.

$$d_p = \alpha_0 \neq 0\, .$$

Mit (3.33), (3.35) und (3.36) ergibt sich dann

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin \frac{\pi \mu_m}{2}} \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),$$

und Lemma 3.1 liefert

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n\to\infty).$$

3. $T_1 = II$ oder $T_1 = III$, $T_m = II$

Nach [9, Thm. 3.2] gilt für $\tau = 0,1$

$$\begin{aligned}
(w_{1,1}^{II})^{(\tau)}(0,\rho) &= (w_{1,1}^{III})^{(\tau)}(0,\rho) = |\phi(0)|^{\tau-\frac{1}{2}}(-i\rho)^\tau e^{-i\rho\int_{x_1}^0|\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),\\
(w_{1,2}^{II})^{(\tau)}(0,\rho) &= (w_{1,2}^{III})^{(\tau)}(0,\rho) = |\phi(0)|^{\tau-\frac{1}{2}}(i\rho)^\tau e^{i\rho\int_{x_1}^0|\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),\\
(w_{m,1}^{II})^{(\tau)}(1,\rho) &= |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(-i\rho)^\tau \frac{1}{\sin\pi\mu_m}\, e^{-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),\\
(w_{m,2}^{II})^{(\tau)}(1,\rho) &= |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(i\rho)^\tau \sin\pi\mu_m\, e^{i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),
\end{aligned}$$

gegenüber den Fällen 1. und 2. ist in den Abschätzungen für $(w_{m,j}^{II})^{(\tau)}(1,\rho)$, $j=1,2$, der Faktor $2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}$ in $(w_{m,j}^{IV})^{(\tau)}(1,\rho)$ nun durch $\sin\pi\mu_m$ und $e^{i\frac{\pi}{4}}$ durch 1 zu ersetzen.
Mit $\rho =: i\lambda$, $\lambda\in S_{-1}$, und

$$g_\alpha(\lambda) := \begin{cases} h(i\lambda)i\sqrt{\dfrac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}}\,, & \text{falls } \sin\alpha = 0,\\[2ex] h(i\lambda)i\sqrt{|\phi(0)\phi(1)|}\cdot\lambda\sin\alpha, & \text{falls } \sin\alpha\neq 0\end{cases}$$

gilt durch analoges Vorgehen wie bei Fall 1. statt (3.9) nun

$$(3.37)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Delta(\lambda) = g_\alpha(\lambda)\cdot\Big(&a_1(i\lambda)\big(2s_\alpha+O(\lambda^{-\sigma_0})\big)\frac{1}{\sin\pi\mu_m}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})\sin\pi\mu_m\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_3(i\lambda)\big(-2+O(\lambda^{-\sigma_0})\big)\frac{1}{\sin\pi\mu_m}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})\sin\pi\mu_m\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)\\
&\qquad\qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}),
\end{aligned}\right.$$

gegenüber (3.9) ist nur $2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}$ durch $\sin\pi\mu_m$ sowie der Faktor $e^{i\frac{\pi}{4}}$ in g_α durch 1 zu ersetzen. Da gemäß (3.25) auch hier (3.33) und (3.34) gelten, ist in (3.37) in analoger Weise

$$\Delta(\lambda) \;=\; g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\pi\mu_m}\left\{2s_\alpha\, e^{\theta^{(1)}\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{p_1}\Big(d_j^{(1)}+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda}\Big)+o(1)\,e^{\theta^{(1)}\lambda}e^{iR_-\lambda}\right\}$$
$$(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}),$$

mit $\theta^{(1)}=\int\limits_{x_1}^{x_m}\sqrt{\phi_+^2}$ nach (3.33) und $p:=p_1$, $d_j:=d_j^{(1)}$, $\vartheta_j:=\vartheta_j^{(1)}$ für $j=1,\ldots,p$ also

(3.38)
$$\Delta(\lambda) \;=\; 2s_\alpha g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\pi\mu_m}\left\{\Big(\sum_{j=1}^{p}\Big(d_j+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j\lambda}\Big)+o(1)\,e^{i\lambda R_-}\right\}$$
$$(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}).$$

Beziehung (3.25) liefert

(3.39)
$$\vartheta_1=-R_-\,,\qquad \vartheta_p=R_-\,.$$

Da $\phi^2(0)>0$ und nach Voraussetzung ϕ^2 indefinit ist, existiert (mindestens) ein Teilintervall $(x_\nu,x_{\nu+1})\subset[0,1]$ mit $\nu\in\{1,\ldots,m-1\}$, so daß $\phi^2<0$ auf $(x_\nu,x_{\nu+1})$ ist. Also gibt es mindestens ein $l\in\{2,\ldots,m-2\}$ mit $T_l=IV$, dieses l sei maximal gewählt, und ein $k\in\{1,\ldots,m-3\}$ mit $T_k=III$, dieses k sei minimal gewählt. $T_1,\ldots,T_l$ entspricht dann der Situation in Fall 1, falls $T_1=III$, bzw. der in Fall 2, falls $T_1=II$.

3. a) $T_1 = III$

Dann ist also $k=1$, und $T_{l+1}=\ldots=T_m=II$, denn wäre für ein $s\in\{l+1,\ldots,m\}$ $T_s\neq II$, so gäbe es wegen $\phi^2\in C(I)$ ein $t\in\{l+1,\ldots,m\}$ mit $T_t=IV$ (vgl. Tabelle 3.1 in Bemerkung 3.2 b)) im Widerspruch zur Wahl von l.
Nach 1.d) gilt

$$\prod_{\nu=1}^{l-1}\hat C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1})=\gamma\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta} & \frac{i}{\beta}\\ -i\beta & \beta\end{pmatrix}\qquad\text{mit }\ \beta,\gamma\neq 0.$$

Nach Lemma 3.2 bzw. Definition 3.3 ist

$$\prod_{\nu=l}^{m-1}\hat C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1}) \;=\; \hat C_{l,1}(IV,II)\prod_{\nu=l+1}^{m-1}\hat C_{\nu,1}(II,II)$$
$$=\;\delta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\text{mit }\ \delta\neq 0.$$

Also erhalten wir

$$\prod_{\nu=1}^{m-1}\hat C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1})=\gamma\,\delta\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta}&0\\-i\beta&0\end{pmatrix}$$

mit

$$d_1 = \frac{\gamma\,\delta}{\beta} \neq 0\,.$$

Alle Matrizen $\hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ besitzen sämtlich die Gestalt $\alpha_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha_\nu \neq 0$ für $\nu = 1, \ldots, m-1$, daher folgt

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \;\; \alpha_0 \neq 0,$$

also

$$d_p = \alpha_0 \neq 0\,.$$

Wie bisher folgt durch Zusammenfassen in (3.38) mit Hilfe von (3.39) und Anwendung von Lemma 3.1

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

3. b) $T_1 = II$

Dann ist $k > 1$ und $T_1 = \ldots = T_{k-1} = II$ aufgrund der Wahl von k, denn wäre für ein $s \in \{2, \ldots, k-1\}$ $T_s \neq II$, so gäbe es ein $t \in \{2, \ldots, k-1\}$ mit $T_t = III$ (vgl. Tabelle 3.1) im Widerspruch zur Minimalität von k. Es gilt nach Definition 3.3

$$\prod_{\nu=1}^{k-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \;\; \delta \neq 0.$$

Analog zu 3.a) ist

$$\prod_{\nu=k}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ -i\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \;\; \beta, \gamma \neq 0,$$

so daß

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \delta\,\gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt, mit

$$d_1 = \frac{\delta\,\gamma}{\beta} \neq 0\,.$$

Weiter gilt mit Definition 3.3 wie auch bisher

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \;\; \alpha_0 \neq 0,$$

also

$$d_p = \alpha_0 \neq 0\,.$$

Zusammenfassen in (3.38) mit Hilfe von (3.39) und Anwendung von Lemma 3.1 zeigt

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

B. $\phi^2(0) < 0$

Diesen Fall untersucht man analog zu [5] und der bisherigen Vorgehensweise.

□

3.4 Beispiel

Abschließend betrachten wir das folgende

Beispiel 3.1. Wir untersuchen ein Eigenwertproblem im Zusammenhang mit der Airy-Differentialgleichung, nämlich

$$-u'' + xu = \rho^2\phi^2(x)u\,, \quad x \in I := [0,\infty)\,, \tag{3.40}$$

$$u(0) = 0\,, \tag{3.41}$$

$$\int_0^\infty |\phi^2(x)||u(x)|^2\,dx < \infty\,, \tag{3.42}$$

mit

$$\begin{aligned}
\phi^2(x) &:= (x - \tfrac{1}{3})(x - \tfrac{2}{3})\phi_0(x) \qquad (x \in I),\\
\phi_0(x) &:= \begin{cases} 9, & x \in [0, \tfrac{2}{3}],\\ 9((x - \tfrac{2}{3})^3 + 1), & x \in (\tfrac{2}{3}, \infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

Zur Einordnung in den Kontext der bisherigen Betrachtungen ist $\alpha := 0$ sowie $\chi(x) := x$ für alle $x \in I$ zu wählen. Es gilt

$$\begin{aligned}
m = 2, \quad x_1 = \tfrac{1}{3}, \quad l_1 = 1, \quad T_1 = III,\\
x_2 = \tfrac{2}{3}, \quad l_2 = 1, \quad T_2 = IV,
\end{aligned}$$

weiter ist $\phi_0 > 0$ auf I mit $\phi_0 \in C^2(I)$ wegen

$$\phi_0'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{2}{3}], \\ 27(x - \frac{2}{3})^2, & x \in (\frac{2}{3}, \infty), \end{cases} \qquad \phi_0''(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{2}{3}], \\ 54(x - \frac{2}{3}), & x \in (\frac{2}{3}, \infty), \end{cases}$$

schließlich ist χ auf $[0, 1]$ beschränkt und über I lokal integrierbar.
Wir zeigen zunächst, daß ϕ^2 und χ die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllen. Es ist $\phi^2 > 0$ auf $[0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$ und $\phi^2 < 0$ auf $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, d.h. ϕ^2 ist indefinit. Für $x \geq x_2$ gilt

$$\phi^2(x) = 9x^5 - 27x^4 + 32x^3 - \frac{29}{3}x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{38}{27},$$

also erfüllt ϕ^2 Bedingung (2.7) aus Bemerkung 2.4 a) mit $n := 5$, für χ gilt

$$|\chi(x)| = |x| \leq 1 \cdot x^\beta \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } \beta := 1 < \frac{n}{2} - 1 = \frac{3}{2},$$

daher erfüllt χ Bedingung (2.8) aus Bemerkung 2.4 a), außerdem ist $\chi \geq 0$ auf I. Bemerkung 2.4 liefert daher die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 2.1 und Satz 3.1.
In unserem Beispiel gilt

$$\phi_-^2(x) = \begin{cases} -\phi^2(x), & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 0, & x \in I \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \end{cases}$$

und daher

$$\begin{aligned} R_- &= \int_0^1 \sqrt{\phi_-^2} = \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{-\phi^2(t)}\, dt = \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{-9(t - \tfrac{1}{3})(t - \tfrac{2}{3})}\, dt \\ &= 3 \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{\tfrac{1}{36} - (t - \tfrac{1}{2})^2}\, dt = \frac{1}{12} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}\, du \\ &= \frac{\pi}{24}, \end{aligned}$$

so daß für die Eigenwerte von (3.40), (3.41), (3.42) gemäß (3.1)

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = -24^2 n^2\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = -576\, n^2\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty)$$

folgt. Damit ergibt sich auch die folgende Aussage: Es gibt eine Nullfolge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, so daß

$$\rho_n^2 = -576\, n^2\, (1 + c_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gilt.