Kapitel 3

Asymptotik der Eigenwerte

3.1 Hauptsatz über die Eigenwertasymptotik

Da nach Satz 2.1 die EWe ρ_n^2, $n \in N$, von L reell und negativ sind sowie Vielfachheit 1 besitzen, seien sie im folgenden durch eventuelle Umnumerierung der Größe nach geordnet:

$$0 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > \rho_3^2 > \dots$$

Ziel dieser Arbeit ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.1. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Weiter sei ϕ^2 indefinit, d. h.*

es gebe ein $\nu \in \{1, \dots, m-1\}$ mit $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in (x_\nu, x_{\nu+1}) \subset [0,1]$,
oder
es gelte $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in [0, x_1)$.

Dann existieren abzählbar unendlich viele EWe ρ_n^2, $n \in \mathbb{N}$, von L. Diese besitzen die asymptotische Darstellung

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty). \tag{3.1}$$

Bemerkung 3.1. Stakun hat in [29, S. 671] u. a. gezeigt, daß das Punktspektrum von L eine endliche Menge ist, falls

$$\begin{aligned} m = 1, \qquad & \phi^2(x) = (x - x_1)^{l_1}\phi_0(x) \quad (x \in I), \text{ wobei } l_1 \in \mathbb{N} \textit{ gerade}, \\ & \text{und } \phi_0 \in C^2(I) \text{ mit } \phi_0 > 0,\ \chi \in C(I); \end{aligned}$$

es ist dann $\phi^2 \geq 0$ auf I und $R_- = 0$. Um dieses in Satz 3.1 auszuschließen, haben wir in den Voraussetzungen von Satz 3.1 gefordert, daß ein Teilintervall $(a,b) \subset I$ mit $\phi^2 < 0$ auf (a,b) existiert. Dann ist stets $R_- > 0$, und wegen $\phi^2 > 0$ auf (x_m, ∞) gilt $R_- < \infty$.

3.2 Bezeichnungen und Definitionen

Wir führen folgende Bezeichnungen wie in [5], [9] ein:
Seien mit dem eingangs fest gewählten $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} D_{0,\epsilon} &:= [0, x_1 - \epsilon], \\ D_{\nu,\epsilon} &:= [x_\nu + \epsilon, x_{\nu+1} - \epsilon] \quad \text{für } 1 \le \nu \le m-1, \\ D_{m,\epsilon} &:= [x_m + \epsilon, 1], \\ I_{\nu,\epsilon} &:= D_{\nu-1,\epsilon} \cup [x_\nu - \epsilon, x_\nu + \epsilon] \cup D_{\nu,\epsilon} \quad \text{für } 1 \le \nu \le m. \end{aligned}$$

Gemäß der Wahl von ϵ sind alle $D_{\nu,\epsilon} \neq \emptyset$ $(0 \le \nu \le m)$, und $I_{\nu,\epsilon}$ $(1 \le \nu \le m)$ ist eine abgeschlossene Umgebung von x_ν, die keine weitere Nullstelle von ϕ^2 enthält. Die folgende Skizze zeigt ein Beispiel für den Fall $m = 3$.

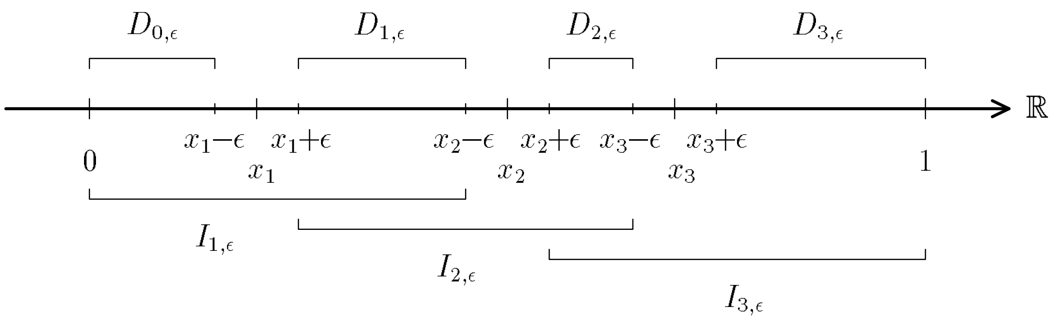

Bild 3.1: Beispiel

Wir übernehmen aus [5], [9] die Definition des sogenannten Typs jeder Nullstelle $x_1, \ldots, x_m$ von ϕ^2:

Definition 3.1. Sei $\nu \in \{1, \ldots, m\}$ und (wie eingangs) $l_\nu \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle x_ν von ϕ^2. Dann heißt x_ν *Nullstelle* (bzw. *turning point*) *vom Typ*

$$T_\nu := \begin{cases} I\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ gerade ist und} \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} < 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}; \\ II\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ gerade ist und} \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} > 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}; \\ III\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ ungerade ist und} \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} < 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}; \\ IV\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ ungerade ist und} \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} > 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}. \end{cases}$$

Bemerkung 3.2. a) Das lokale Verhalten von ϕ^2 in einer Umgebung eines turning points x_ν vom Typ T_ν $(1 \le \nu \le m)$ veranschaulicht folgende Abbildung:

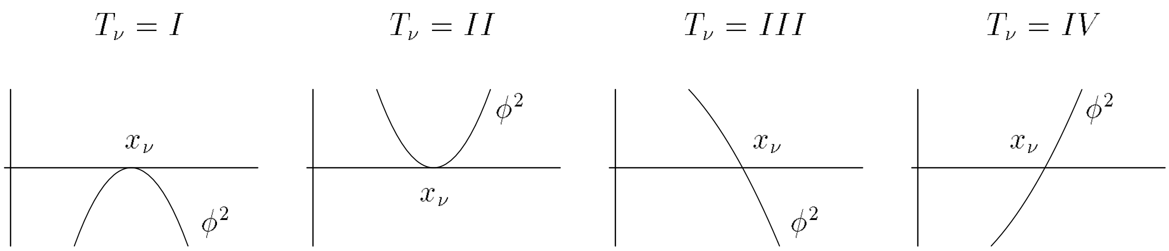

Bild 3.2: Typ der turning points

Das nächste Bild zeigt ein Beispiel für den Fall $m = 4$; hier ist $T_1 = IV$, $T_2 = II$, $T_3 = III$, $T_4 = IV$.

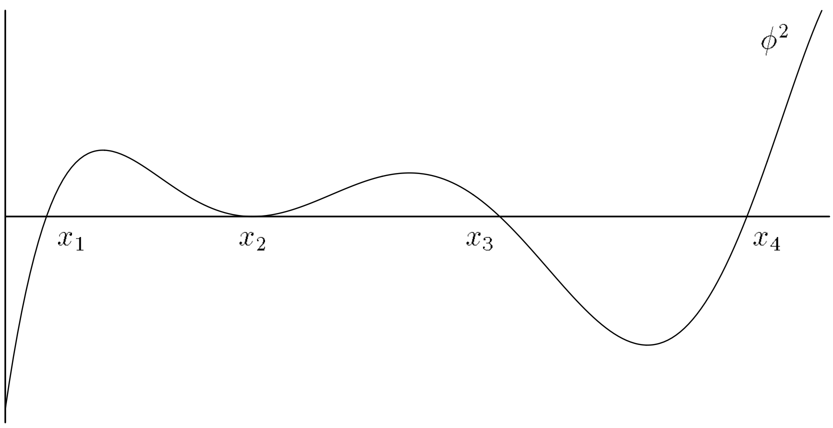

Bild 3.3: Beispiel für ϕ^2

b) Aufgrund der Stetigkeit von ϕ^2 sind für aufeinanderfolgende turning points x_ν, $x_{\nu+1}$ $(1 \le \nu \le m-1)$ nur die folgenden Möglichkeiten für T_ν und $T_{\nu+1}$ erlaubt:

T_ν	I	II	III	IV
$T_{\nu+1}$	I oder IV	II oder III	I oder IV	II oder III

Tabelle 3.1: Kombinationen der turning points

Weiter definieren wir für $1 \le \nu \le m$ wie in [5] und [9] mit einem wie dort fest gewählten δ_0 mit $0 < \delta_0 < 1$

$$\begin{aligned}
\mu_\nu &:= \frac{1}{2+l_\nu}; \\
\sigma_\nu &:= \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \mu_\nu > \frac{1}{4}; \\ 1-\delta_0\,, & \text{falls } \mu_\nu = \frac{1}{4}; \\ 4\mu_\nu\,, & \text{falls } \mu_\nu < \frac{1}{4}; \end{cases} \\
\sigma_0 &:= \min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich

$$0 < \sigma_0 \le 1.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir als Verallgemeinerung der Landau–Symbole zur Abkürzung

$$[z] := z + \rho^{-\sigma_0} \cdot B(x,\rho) \quad \text{mit einer beschränkten Funktion } B,$$

deren Definitionsbereich sich jeweils aus dem Zusammenhang ergeben wird, und die bei wiederholtem Auftreten des Symbols $[z]$ verschieden sein darf. Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir schließlich folgende Sektoren in der punktierten komplexen Ebene:

$$S_k := \left\{ z \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \tfrac{k\pi}{4} \le \arg z \le \tfrac{(k+1)\pi}{4} \right\}.$$

Wir geben nun einen Überblick über die Vorgehensweise bei dem Beweis von Satz 3.1 und treffen auch bereits einige Vorbereitungen dazu.
Um Satz 3.1 zu beweisen, werden wir gemäß Korollar 2.4 eine asymptotische Darstellung für die Nullstellen ρ_n von $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ herleiten. Da $\mathcal{W}(\cdot,\alpha) = Y(0,\cdot)\cos\alpha + Y'(0,\cdot)\sin\alpha$ und die die Funktion $Y(\cdot,\rho)$ definierende Integralgleichung (2.18) nur für $x \ge z(\rho) \ge x_m + \epsilon$ und somit *nicht* für $x = 0$ gilt (siehe Lemma 2.3), lassen sich direkt aus (2.18) keine Erkenntnisse für $Y(0,\cdot)$, $Y'(0,\cdot)$ und $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ gewinnen.
Um die bisherigen Ergebnisse und die Resultate von Eberhard-Freiling bzw. Eberhard-Freiling-Schneider in [5], [9], die dort nur für das *kompakte* Intervall $[0,1]$ formuliert und bewiesen sind, doch anwenden zu können, werden wir deshalb $Y(\cdot,\rho)$ für $|\rho| \ge \rho_1$ (siehe Lemma 2.3 zur Bedeutung von ρ_1) auf dem Intervall $D_{m,\epsilon} = [x_m+\epsilon, 1] = [0,1] \cap [x_m+\epsilon, \infty)$ als Linearkombination eines geeigneten Fundamentalsystems von $l_\rho u = 0$ auf $[0,1]$ mit für unsere Zwecke geeigneten asymptotischen Abschätzungen für $|\rho| \to \infty$, die wir dann [9] entnehmen, schreiben. Genauer werden wir folgendes aus den Arbeiten [5], [9] verwenden:

Sei $1 \le \nu \le m$ und x_ν Nullstelle von ϕ^2 vom Typ T_ν, und sei $\rho \in S_k$ mit fest gewähltem $k \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es nach [9, Thm. 3.2] ein Fundamentalsystem $w_{\nu,1}^{T_\nu}(\cdot,\rho)$, $w_{\nu,2}^{T_\nu}(\cdot,\rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf $I_{\nu,\epsilon}$, für das gewisse asymptotische Darstellungen für $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S_k$ existieren; der Beweis dieses Satzes verwendet im wesentlichen Ergebnisse aus Langer [15].
Weiter sind in [9] die sogenannten *Verbindungsmatrizen* untersucht. Diese beschreiben den Übergang des Fundamentalsystems $w_{\nu,1}^{T_\nu}(\cdot,\rho)$, $w_{\nu,2}^{T_\nu}(\cdot,\rho)$ auf $I_{\nu,\epsilon}$ zu $w_{\nu+1,1}^{T_{\nu+1}}(\cdot,\rho)$, $w_{\nu+1,2}^{T_{\nu+1}}(\cdot,\rho)$ auf $I_{\nu+1,\epsilon}$, d.h. sie sind 2×2–Matrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1}) = C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho)$, die von T_ν, $T_{\nu+1}$

und von ρ und k abhängen, mit

$$\begin{pmatrix} w_{\nu,1}^{T_\nu}(x,\rho) \\ w_{\nu,2}^{T_\nu}(x,\rho) \end{pmatrix} = C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho) \begin{pmatrix} w_{\nu+1,1}^{T_{\nu+1}}(x,\rho) \\ w_{\nu+1,2}^{T_{\nu+1}}(x,\rho) \end{pmatrix} \qquad (x \in D_{\nu,\epsilon}),$$

für fest gewählte $\nu \in \{1, \ldots, m-1\}$ und $\rho \in S_k$. Für die Verbindungsmatrizen sind ebenfalls in [9, Thm. 4.1] asymptotische Darstellungen für $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S_k$ bewiesen. Ist $z_j(\cdot,\rho)$ die Fortsetzung von $w_{1,j}^{T_1}(\cdot,\rho)$ auf $[0,1]$ $(j = 1, 2, \rho \in S_k)$, so gilt

$$\begin{pmatrix} z_1(x,\rho) \\ z_2(x,\rho) \end{pmatrix} = \prod_{\nu=1}^{j} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho) \begin{pmatrix} w_{j+1,1}^{T_{j+1}}(x,\rho) \\ w_{j+1,2}^{T_{j+1}}(x,\rho) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (0 \le j \le m-1, \\ x \in I_{j+1,\epsilon}, \rho \in S_k), \end{matrix} \tag{3.2}$$

und man erhält ein Fundamentalsystem $z_1(\cdot,\rho)$, $z_2(\cdot,\rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ (vgl. [9, Abschn. 4.2] zusammen mit [5, S. 27]), das u. a. zum Beweis von Satz 3.1 geeignet ist.

Nachdem wir dann $Y(\cdot,\rho)$ als Linearkombination von $z_1(\cdot,\rho)$, $z_2(\cdot,\rho)$ geschrieben haben und Darstellungen für die Koeffizienten gefunden haben, erhalten wir mit Hilfe der asymptotischen Eigenschaften von z_1, z_1', z_2 und z_2' aus [5], [9] eine asymptotische Darstellung für $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ für $|\rho| \to \infty$ als sogenannte asymptotische Exponentialsumme, deren Nullstellen das folgende Lemma 3.1 unter gewissen Voraussetzungen liefern wird. Dazu wird im Beweis von Satz 3.1 eine Fallunterscheidung je nach Typ der turning points $x_1, \ldots, x_m$ erforderlich werden.

Aus [5] übernehmen wir das folgende

Lemma 3.1. ([5, Lemma 1]) *Seien $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_p$ reelle Zahlen, und für $j = 1, \ldots, p$ seien $\epsilon_j : S_{-1} \cup S_0 \to \mathbb{C}$ Funktionen mit*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \epsilon_j(\lambda) = 0,$$

weiter seien $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$ mit $c_1 \neq 0$ und $c_p \neq 0$, und sei

$$E : S_{-1} \cup S_0 \to \mathbb{C}\,,\ \lambda \mapsto \sum_{j=1}^{p} \Big(c_j + \epsilon_j(\lambda)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda}$$

holomorph. Dann erfüllen die Nullstellen λ_n von E die asymptotische Abschätzung

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{\vartheta_p - \vartheta_1}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Folgerung aus Tamarkin [30, S. 26]; auch in Langer [14, Part I]. □

Definition 3.2. Wir nennen (wie in [5]) jede Funktion E mit der in Lemma 3.1 angegebenen Gestalt eine *asymptotische Exponentialsumme*.

Die Verbindungsmatrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ und deren asymptotisches Verhalten gehen gemäß (3.2) in wesentlicher Weise in das Fundamentalsystem $z_1(\cdot,\rho)$, $z_2(\cdot,\rho)$ ein. Die asymptotischen Abschätzungen für die Verbindungsmatrizen entnehmen wir [9]:

Lemma 3.2. ([9, Thm. 4.1]) *Für $\rho \in S_1$ und $1 \leq \nu \leq m-1$ gilt:*

$$C_\nu(I,I) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_\nu\cos\pi\mu_{\nu+1}]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_{\nu+1}]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix} \quad (|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(I,IV) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix} \quad (|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(II,II) =$$

$$C_\nu(II,III) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{i\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{-i\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [0]\sin\pi\mu_\nu e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix} \quad (|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(III,I) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_{\nu+1}]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_{\nu+1}]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(III,IV) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1-\epsilon}}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1-\epsilon}}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+\epsilon}}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_{\nu+\epsilon}}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [1]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{matrix} \Bigg) e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(IV,II) =$$

$$C_\nu(IV,III) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1-\epsilon}}|\phi|} e^{-i\rho\int_{x_{\nu+1-\epsilon}}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix.$$

$$\begin{matrix} \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+\epsilon}}|\phi|} e^{i\rho\int_{x_{\nu+\epsilon}}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [1]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{matrix} \Bigg) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\rho| \to \infty).$$

Beweis. Siehe [9, Thm. 4.1]. □

Für spätere Zwecke definieren wir noch folgende Matrizen, deren Bedeutung und Verwendung erst im Beweis des Satzes 3.1 deutlich werden wird, die aber bereits hier notiert werden sollen. Die Herleitung der Gestalt dieser Matrizen wird analog zu [5] verlaufen.

Definition 3.3. Die folgenden Matrizen nennen wir (wie in [5]) *relevante Teilmatrizen*: Seien für $1 \le \nu \le m-1$ und $\rho \in S_1$

$$\hat{C}_{\nu,1}(I,I) := \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_\nu \cos\pi\mu_{\nu+1}}{\sin\pi\mu_\nu} & \frac{i\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu} \\ -i\cos\pi\mu_{\nu+1}\sin\pi\mu_\nu & \sin\pi\mu_\nu \end{pmatrix},$$

$$C_{\nu,1}(I,I) := \hat{C}_{\nu,1}(I,I) e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|},$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(I,I) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{\nu,p}(I,I) := \hat{C}_{\nu,p}(I,I) e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|},$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(I,IV) := \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu} & \frac{i\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu} \\ -i\sin\pi\mu_\nu & \sin\pi\mu_\nu \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,1}(I,IV) := \hat{C}_{\nu,1}(I,IV) e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(I,IV) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,p}(I,IV) := \hat{C}_{\nu,p}(I,IV) e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(II,II) := \hat{C}_{\nu,1}(II,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,1}(II,II) := C_{\nu,1}(II,III) := \hat{C}_{\nu,1}(II,II) e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(II,II) := \hat{C}_{\nu,p}(II,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,p}(II,II) := C_{\nu,p}(II,III) := \hat{C}_{\nu,p}(II,II) e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(III,I) := \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_{\nu+1}}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}\cos\pi\mu_{\nu+1} & 2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$C_{\nu,1}(III,I) := \hat{C}_{\nu,1}(III,I) e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(III,I) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$C_{\nu,p}(III,I) := \hat{C}_{\nu,p}(III,I) e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(III,IV) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$C_{\nu,1}(III,IV) := \hat{C}_{\nu,1}(III,IV) e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(III,IV) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$
\begin{aligned}
C_{\nu,p}(III,IV) &:= \hat{C}_{\nu,p}(III,IV)e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\,, \\
\hat{C}_{\nu,1}(IV,II) &:= \hat{C}_{\nu,1}(IV,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}\,, \\
C_{\nu,1}(IV,II) &:= C_{\nu,1}(IV,III) := \hat{C}_{\nu,1}(IV,II)e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\,, \\
\hat{C}_{\nu,p}(IV,II) &:= \hat{C}_{\nu,p}(IV,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}\,, \\
C_{\nu,p}(IV,II) &:= C_{\nu,p}(IV,III) := \hat{C}_{\nu,p}(IV,II)e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\,.
\end{aligned}
$$

Um mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens des Fundamentalsystems $z_1(\cdot,\rho)$, $z_2(\cdot,\rho)$ aus (3.2) Aussagen über $Y(0,\cdot)$, $Y'(0,\cdot)$ und $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ zu erhalten, verwenden wir die folgenden drei Hilfssätze.

Hilfssatz 3.1. *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt, und sei $\varphi_1(\cdot,\rho)$, $\varphi_2(\cdot,\rho)$ ein fest gewähltes Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf $[0,1]$ für jedes feste $\rho \in S_1 \cup S_2$. Dann gilt mit* $h(\rho) := \dfrac{C_1 e^{i\rho\xi(1)}\rho^{5/6}}{W(\varphi_1(\cdot,\rho),\varphi_2(\cdot,\rho))\sqrt[4]{\phi^2(1)}}$ $(\rho \in S_1 \cup S_2)$ *für $\tau = 0,1$:*

$$
\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) &= h(\rho)\Big\{\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
&\qquad +\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\Big\} \\
&\qquad\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(\rho,\alpha) &= h(\rho)\Big\{\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2(0,\rho)\Big)\cos\alpha \\
&\qquad +\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1'(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2'(0,\rho)\Big)\sin\alpha \\
&\qquad +\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1(0,\rho)\Big)\cos\alpha \\
&\qquad +\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2'(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1'(0,\rho)\Big)\sin\alpha\Big\} \\
&\qquad\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2).
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir lassen den Parameter ρ in den Argumenten der Funktionen meist weg. Da φ_1, φ_2 Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf $[0,1]$ ist, gilt

$$
Y^{(\tau)}(x) = c_1(\rho)\varphi_1^{(\tau)}(x) + c_2(\rho)\varphi_2^{(\tau)}(x) \qquad (x\in[0,1];\tau=0,1) \tag{3.3}
$$

mit $c_1(\rho), c_2(\rho) \in \mathbb{C}$, nach der Cramerschen Regel ist dabei

$$c_1 = \frac{W(Y,\varphi_2)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\,, \quad c_2 = \frac{W(\varphi_1,Y)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\,.$$

Da die asymptotischen Abschätzungen für Y und Y' in Lemma 2.3 d) für $|\rho| \geq \rho_1$ für alle $x \in [x_m+\epsilon,\infty)$ gelten, werden wir die Wronskifunktionen in c_1 und c_2 deshalb an der Stelle $x = 1 \in [x_m+\epsilon,\infty) \cap [0,1]$ auswerten. Nach Lemma 2.3 d) gilt

$$\begin{aligned}
Y(1,\rho) &= \Big(C_1\rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)} \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2),\\
Y'(1,\rho) &= \Big(C_1 i\rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big)\,\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)} \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2).
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
W(Y,\varphi_2) &= W(Y,\varphi_2)|_{x=1}\\
&= \Big(C_1\rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2'(1,\rho)\\
&\quad -\Big(C_1 i\rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big)\,\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2(1,\rho) \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(\varphi_1,Y) &= W(\varphi_1,Y)|_{x=1}\\
&= \varphi_1(1,\rho)\Big(C_1 i\rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big)\,\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\\
&\quad -\varphi_1'(1,\rho)\Big(C_1\rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)} \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2).
\end{aligned}$$

Also ist

$$c_1 = \frac{\Big(C_1\rho^{-1/6}+O(\rho^{-7/6})\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2'(1,\rho) - \Big(C_1 i\rho^{5/6}+O(\rho^{-1/6})\Big)\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2(1,\rho)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}$$

$$(|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2),$$

$$c_2 = \frac{\Big(C_1 i\rho^{5/6}+O(\rho^{-1/6})\Big)\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_1(1,\rho) - \Big(C_1\rho^{-1/6}+O(\rho^{-7/6})\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_1'(1,\rho)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}$$

$$(|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2),$$

so daß gemäß (3.3)

$$
\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) \quad = \quad & \frac{\Big(C_1\rho^{-1/6}+O(\rho^{-7/6})\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)\Big)}{W(\varphi_1,\varphi_2)} \\
& +\frac{\Big(C_1 i\rho^{5/6}+O(\rho^{-1/6})\Big)\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)\Big)}{W(\varphi_1,\varphi_2)} \\
& \qquad\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2; \tau=0,1).
\end{aligned}
$$

Also gelten in $S_1\cup S_2$ die asymptotischen Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) \quad = \quad & \frac{C_1 e^{i\rho\xi(1)}\rho^{5/6}}{W(\varphi_1,\varphi_2)\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\Big\{\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
& +\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\Big\} \\
& \qquad\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1\cup S_2; \tau=0,1).
\end{aligned}
$$

Mit der Definition von h und mit $\mathcal{W}(\rho,\alpha)=Y(0,\rho)\cos\alpha+Y'(0,\rho)\sin\alpha$ folgt daraus die Behauptung. □

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 3.1 dient ferner:

Hilfssatz 3.2. *Es seien mit a_1, a_2, a_3, a_4 : $S_1 \to \mathbb{C}$ die Elemente der 2×2-Matrix $\prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ bezeichnet, d.h.*

$$
\begin{pmatrix} a_1(\rho) & a_2(\rho) \\ a_3(\rho) & a_4(\rho) \end{pmatrix} := \prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})(\rho) \qquad (\rho\in S_1), \tag{3.4}
$$

und sei $z_1(\cdot,\rho)$, $z_2(\cdot,\rho)$ für $\rho\in S_1$ das Fundamentalsystem gemäß (3.2). Dann gilt für $\tau=0,1$

$$
\begin{aligned}
& z_2'(1,\rho)\,z_1^{(\tau)}(0,\rho)-z_1'(1,\rho)\,z_2^{(\tau)}(0,\rho) \\
& \quad = \quad (w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
& \qquad\quad +(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho\in S_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& z_1(1,\rho)\,z_2^{(\tau)}(0,\rho)-z_2(1,\rho)\,z_1^{(\tau)}(0,\rho) \\
& \quad = \quad w_{m,1}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
& \qquad\quad +w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho\in S_1).
\end{aligned}
$$

Beweis. Nach (3.2) gilt für $\rho \in S_1$, $\tau = 0,1$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_1^{(\tau)}(0,\rho) \\ z_2^{(\tau)}(0,\rho) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\ (w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} z_1^{(\tau)}(1,\rho) \\ z_2^{(\tau)}(1,\rho) \end{pmatrix} &= \prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho) \begin{pmatrix} (w_{m,1}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \\ (w_{m,2}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(\rho)(w_{m,1}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) + a_2(\rho)(w_{m,2}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \\ a_3(\rho)(w_{m,1}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) + a_4(\rho)(w_{m,2}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

damit ist dann für $\tau = 0,1$

$$\begin{aligned}
&z_2'(1,\rho)\, z_1^{(\tau)}(0,\rho) - z_1'(1,\rho)\, z_2^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= \Big(a_3(\rho)(w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho) + a_4(\rho)(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\qquad -\Big(a_1(\rho)(w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho) + a_2(\rho)(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= (w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
&\qquad +(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho \in S_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_1(1,\rho)\, z_2^{(\tau)}(0,\rho) - z_2(1,\rho)\, z_1^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= \Big(a_1(\rho)w_{m,1}^{T_m}(1,\rho) + a_2(\rho)w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\qquad -\Big(a_3(\rho)w_{m,1}^{T_m}(1,\rho) + a_4(\rho)w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= w_{m,1}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
&\qquad +w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho \in S_1).
\end{aligned}$$

□

Hilfssatz 3.3. Wir setzen für $\rho \in S_1$ $\rho =: i\lambda$ mit $\lambda \in S_{-1}$. a_1, a_2, a_3 und a_4 besitzen dann die Gestalt

$$(3.5) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_k(i\lambda) &=& e^{\theta^{(k)}\lambda} \displaystyle\sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j^{(k)}\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \\ && \text{für } k = 1,2,3,4; \text{ mit } \theta^{(k)} \in \mathbb{R},\ p_k \in \mathbb{N},\ d_j^{(k)} \in \mathbb{C}, \\ && \vartheta_1^{(k)} < \vartheta_2^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)}. \end{array} \right.$$

Beweis. Aus der allgemeinen Gestalt der Verbindungsmatrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ gemäß Lemma 3.2 und (3.4) ist (nach Substitution $\rho =: i\lambda$, $\lambda \in S_{-1}$) ersichtlich, daß jedes $a_k(i\lambda)$ folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} e^{\theta_j^{(k)}\lambda} \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \\ & \quad \text{für } k = 1,2,3,4; \text{ mit } p_k \in \mathbb{N},\ \hat{d}_j^{(k)} \in \mathbb{C},\ \hat{\vartheta}_j^{(k)} \in \mathbb{R}, \\ & \quad \theta_j^{(k)} \in \mathbb{R} \ \text{ für } j = 1, \ldots, p_k. \end{aligned}$$

Seien für $k = 1,2,3,4$

$$\begin{aligned} \theta^{(k)} &:= \max\{\theta_1^{(k)}, \ldots, \theta_{p_k}^{(k)}\}, \\ F^{(k)} &:= \Big\{ j \mid j \in \{1, \ldots, p_k\}\,,\ \theta_j^{(k)} = \theta^{(k)} \Big\}, \end{aligned}$$

so gilt:

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{(\theta_j^{(k)} - \theta^{(k)})\lambda} e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \\ &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \Big(\sum_{j \in F^{(k)}} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} + \sum_{j \in \{1,\ldots,p_k\} \setminus F^{(k)}} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{(\theta_j^{(k)} - \theta^{(k)})\lambda} e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \Big) \\ &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \Big(\sum_{j \in F^{(k)}} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} + \sum_{j \in \{1,\ldots,p_k\} \setminus F^{(k)}} o(1) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \Big) \\ &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\tilde{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{d}_j^{(k)} := \begin{cases} \hat{d}_j^{(k)}, & \text{falls } j \in F^{(k)}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad\qquad (k = 1,2,3,4).$$

Nach eventueller Umindizierung haben die $a_k(i\lambda)$ also die behauptete Gestalt

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j^{(k)}\lambda} \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \\ & \quad \text{für } k = 1,2,3,4; \text{ mit } \theta^{(k)} \in \mathbb{R},\ p_k \in \mathbb{N},\ d_j^{(k)} \in \mathbb{C}, \\ & \quad \vartheta_1^{(k)} < \vartheta_2^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)}. \end{aligned}$$

□

3.3 Beweis des Hauptsatzes über die Eigenwertasymptotik

Wir beginnen nun den

Beweis von Satz 3.1.
Nach Korollar 2.4 sind die Nullstellen $\rho_n, n \in N$, von $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ zu untersuchen.
Wir machen zunächst eine Vorüberlegung dazu, welche Sektoren S_k zum Beweis der Behauptung zu betrachten sind. Nach Satz 2.1 liegen die Nullstellen $\rho_n, n \in N$, von $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ auf der positiven imaginären Achse, also sowohl in S_1 als auch in S_2. Weiter ist $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ nach Lemma 2.9 b) in jedem Punkt von $S_1 \cup S_2$ holomorph, und für jedes $k \in \{1, 2\}$ sind $z_j(x, \cdot)$, $z_j'(x, \cdot)$, $j = 1, 2$, für jedes $x \in [0, 1]$ holomorph in S_k (vgl. [5], [9]).
Setzt man in Hilfssatz 3.1 $\varphi_1(\cdot, \rho) := z_1(\cdot, \rho)$, $\varphi_2(\cdot, \rho) := z_2(\cdot, \rho)$, zunächst für $\rho \in S_1$, dann für $\rho \in S_2$, so erhält man Darstellungen für $\mathcal{W}(\rho, \alpha)$, jeweils für S_1 und für S_2, die formal identisch sind. Wegen $\rho_n \in S_1 \cap S_2$, $n \in N$, ist es daher ausreichend, $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ allein in S_1 zu betrachten. (Ebenso wäre natürlich auch die Untersuchung in S_2 ausreichend und lieferte dasselbe Ergebnis wie in S_1.)
Also erhalten wir mit Hilfssatz 3.1

$$(3.6) \quad \begin{cases} Y^{(\tau)}(0, \rho) \; = \; h(\rho) \Big\{ \Big(\rho^{-1} + O(\rho^{-2})\Big) \Big(z_2'(1, \rho) z_1^{(\tau)}(0, \rho) - z_1'(1, \rho) z_2^{(\tau)}(0, \rho)\Big) \\ \qquad\qquad + \Big(i|\phi(1)| + O(\rho^{-1})\Big) \Big(z_1(1, \rho) z_2^{(\tau)}(0, \rho) - z_2(1, \rho) z_1^{(\tau)}(0, \rho)\Big) \Big\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho| \to \infty, \rho \in S_1), \\ \text{wobei } h \text{ in } S_1 \text{ nullstellenfrei ist.} \end{cases}$$

Da das asymptotische Verhalten von z_1, z_1', z_2 und z_2' vom Typ der turning points abhängt, führen wir, wie bereits erläutert, eine Fallunterscheidung für das weitere Vorgehen durch. Den zuerst behandelten Fall A.1 werden wir ausführlich untersuchen, um die Methodik der Vorgehensweise deutlich zu machen, bei den nachfolgenden Fällen werden wir uns hingegen etwas kürzer fassen.

A. $\phi^2(0) > 0$

1. $T_1 = III$, $T_m = IV$

Dann gilt nach [9, Thm. 3.2] für $\tau = 0, 1$

$$(w_{1,1}^{III})^{(\tau)}(0, \rho) \;=\; |\phi(0)|^{\tau - \frac{1}{2}} (-i\rho)^{\tau} e^{-i\rho \int_{x_1}^{0} |\phi|} \cdot [1] \qquad (|\rho| \to \infty, \rho \in S_1),$$

$$(w_{1,2}^{III})^{(\tau)}(0, \rho) \;=\; |\phi(0)|^{\tau - \frac{1}{2}} (i\rho)^{\tau} e^{i\rho \int_{x_1}^{0} |\phi|} \cdot [1] \qquad (|\rho| \to \infty, \rho \in S_1),$$

$$(w_{m,1}^{IV})^{(\tau)}(1,\rho) = |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(-i\rho)^{\tau}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot[1] \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),$$

$$(w_{m,2}^{IV})^{(\tau)}(1,\rho) = |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(i\rho)^{\tau}2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot[1] \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1).$$

Daher sind in (3.6) mit Hilfssatz 3.2

$$\begin{aligned}
&z_2'(1,\rho)\, z_1^{(\tau)}(0,\rho) - z_1'(1,\rho)\, z_2^{(\tau)}(0,\rho)\\
&= \sqrt{\frac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\rho\Big\{\frac{-i}{2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\Big((-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_3(\rho)[1] - e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_1(\rho)[1]\Big)\\
&\quad +2i\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\Big((-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_4(\rho)[1] - e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_2(\rho)[1]\Big)\Big\}\Big(|\phi(0)|i\rho\Big)^{\tau}\\
&\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1; \tau=0,1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_1(1,\rho)\, z_2^{(\tau)}(0,\rho) - z_2(1,\rho)\, z_1^{(\tau)}(0,\rho)\\
&= \frac{1}{\sqrt{|\phi(0)\phi(1)|}}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\Big\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\Big(e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_1(\rho)[1] - (-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_3(\rho)[1]\Big)\\
&\quad +2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\Big(e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_2(\rho)[1] - (-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}a_4(\rho)[1]\Big)\Big\}\Big(|\phi(0)|i\rho\Big)^{\tau}\\
&\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1; \tau=0,1).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich in (3.6) wegen

$$\begin{aligned}
(\rho^{-1}+O(\rho^{-2}))[1]\rho &= 1+O(\rho^{-\sigma_0}) \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1);\\
(1+O(\rho^{-1}))[1] &= 1+O(\rho^{-\sigma_0}) \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1)
\end{aligned}$$

die Beziehung

$$(3.7)\quad \left\{\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) &= h(\rho)e^{i\frac{\pi}{4}}i\sqrt{\tfrac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}}\Big(|\phi(0)|i\rho\Big)^{\tau}\cdot\\
&\quad\cdot\Big(a_1(\rho)(1+O(\rho^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}\\
&\quad +a_2(\rho)O(\rho^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}\\
&\quad +a_3(\rho)(-1)^{\tau}(-1+O(\rho^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}\\
&\quad +a_4(\rho)(-1)^{\tau}O(\rho^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^{1}|\phi|}\Big)\\
&\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1; \tau=0,1).
\end{aligned}\right.$$

Um Lemma 3.1 anwenden zu können, setzen wir für $\rho \in S_1$

$$\rho =: i\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda \in S_{-1}$$

und

$$\Delta(\lambda) := \mathcal{W}(\rho, \alpha) = \mathcal{W}(i\lambda, \alpha) = Y(0, i\lambda)\cos\alpha + Y'(0, i\lambda)\sin\alpha \qquad (\lambda \in S_{-1}).$$

Wir verwenden für λ die Landau-Symbole in derselben Weise wie für ρ; es ist $|\lambda| = |\rho|$ für alle $\lambda \in S_{-1}$.

Mit (3.7) erhalten wir folgende Darstellung für Δ in S_{-1}:
Es gilt mit

$$g(\lambda) := h(i\lambda)e^{i\frac{\pi}{4}} i\sqrt{\frac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}} \qquad (\lambda \in S_{-1})$$

dann

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \quad = \quad g(\lambda) \cdot \Bigg\{ \cos\alpha \cdot \Bigg(& a_1(i\lambda)(1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_3(i\lambda)(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Bigg) \\
+(-|\phi(0)|\lambda)\sin\alpha \cdot \Bigg(& a_1(i\lambda)(1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_3(i\lambda)(1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2} \, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Bigg)\Bigg\} \\
& \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),
\end{aligned}$$

also

$$
(3.8)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\Delta(\lambda) \;=\; g(\lambda)\cdot\\
&\cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big((1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\cos\alpha-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_2(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0})\cos\alpha-O(\lambda^{-\sigma_0})\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_3(i\lambda)\Big((-1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\cos\alpha-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_4(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0})\cos\alpha-O(\lambda^{-\sigma_0})\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)\\
&\hspace{20em}(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}),\\
&\text{wobei } g \text{ in } S_{-1} \text{ nullstellenfrei ist.}
\end{aligned}\right.
$$

Wir unterscheiden nun die beiden folgenden Fälle:

(i) Ist $\sin\alpha = 0$, also $\cos\alpha = \pm 1$, so läßt sich in (3.8) auf der rechten Seite der Term $\cos\alpha$ ausklammern, deshalb reicht es o. B. d. A. aus, $\cos\alpha = 1$ zu untersuchen. Dann ist mit (3.8)

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \;=\; g(\lambda)\cdot\Big(&a_1(i\lambda)(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_3(i\lambda)(-1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)\qquad(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}).
\end{aligned}
$$

(ii) Ist $\sin\alpha \neq 0$, so liefert Ausklammern von $\lambda|\phi(0)|\sin\alpha$ in (3.8) (man beachte, daß $0<\sigma_0\leq 1$)

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \;=\; &g(\lambda)\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\cdot\\
&\cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-1})-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_2(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0-1})-O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_3(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-1})-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+a_4(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0-1})-O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& g(\lambda)\lambda|\phi(0)|\sin\alpha \cdot \\
& \cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big(-1+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_3(i\lambda)\Big(-1+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big) \qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}).
\end{aligned}
$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
s_\alpha \;&:=\; \begin{cases} 1, & \text{falls } \sin\alpha = 0, \\ -1, & \text{falls } \sin\alpha \neq 0, \end{cases} \\
g_\alpha(\lambda) \;&:=\; \begin{cases} g(\lambda), & \text{falls } \sin\alpha = 0 \\ g(\lambda)\lambda|\phi(0)|\sin\alpha, & \text{falls } \sin\alpha \neq 0 \end{cases} \qquad (\lambda\in S_{-1});
\end{aligned}
$$

g_α ist holomorph in jedem Punkt von S_{-1} und in S_{-1} nullstellenfrei. Dann gilt für jedes α, gemeinsam für

(i) und (ii)

$$
(3.9) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \;=\;& g_\alpha(\lambda)\cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_3(i\lambda)\Big(-1+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big) \\
& \qquad\qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}).
\end{aligned}
\right.
$$

Wir untersuchen zunächst den (einfachsten) Fall der Existenz zweier turning points von ϕ^2, also

1. a) $\quad m = 2,\ T_1 = III,\ T_2 = IV$

Es ist dann wegen

$$\phi^2(x) > 0 \quad \text{für } x\in[0,x_1)\cup(x_2,1] \qquad \text{und} \qquad \phi^2(x) < 0 \quad \text{für } x\in(x_1,x_2)$$

offensichtlich

$$R_- = \int_0^1 \sqrt{\phi_-^2} = \int_{x_1}^{x_2} |\phi|\,, \quad R_+ = \int_0^1 \sqrt{\phi_+^2} = \int_0^{x_1} |\phi| + \int_{x_2}^1 |\phi|.$$

Mit $\rho =: i\lambda$, $\lambda \in S_{-1}$, ist gemäß Lemma 3.2

$$C_1(III, IV) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_1+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_1+\epsilon}^{x_2}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_2-\epsilon}^{x_2}|\phi|} + [-i]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).$$

Also ist mit (3.9)

$$(3.10)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(\lambda) \;=\; & g_\alpha(\lambda) e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_2}^1 |\phi|} \cdot \\ & \cdot \Big\{ s_\alpha \cdot \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ & + s_\alpha \cdot \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0}) \frac{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}\, e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_1+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_1+\epsilon}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_{x_2}^1|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0}) \frac{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_{x_2}^1|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0}) \frac{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_2-\epsilon}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|} \\ & + \Big(i + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big) \frac{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0})\, 4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - 2\lambda\int_{x_2}^1|\phi|} \Big\} \\ & \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}). \end{aligned} \right.$$

Durch Zusammenfassen in der Summe innerhalb der geschweiften Klammern auf der rechten Seite von (3.10) ergibt sich mit $\int\limits_0^{x_1} |\phi| + \int\limits_{x_2}^1 |\phi| = R_+$ die Beziehung