Da die Funktion $y(\cdot,\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I, also insbesondere auf $\tilde{I}$, löst, ist gemäß obiger Liouville–Transformation

$$\tilde{y}(\xi,\rho) := y(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)} \qquad (x \in \tilde{I}) \tag{2.41}$$

Lösung der Differentialgleichung (2.40). Als Lösung von (2.40) ist $\tilde{y}$ mit Hilfssatz 2.1 als Linearkombination eines Fundamentalsystems φ_1, φ_2 von (2.40), bestehend aus einer dominanten Lösung φ_1 sowie einer subdominanten Lösung φ_2, darstellbar. Also gibt es Zahlen $M_1 = M_1(\rho), M_2 = M_2(\rho)$ aus $\mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(\xi,\rho) &= M_1\varphi_1(\xi) + M_2\varphi_2(\xi) \\
&= M_1\, e^{-i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) + M_2\, e^{i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) \\
&= e^{-i\rho\xi}\cdot\Big(M_1 + M_1 o(1) + M_2\, e^{2i\rho\xi}\cdot(1+o(1))\Big) \\
&= e^{-i\rho\xi}\cdot(M_1+o(1)) \qquad (\xi\to\infty); \\
\frac{d}{d\xi}\tilde{y}(\xi,\rho) &= M_1\frac{d}{d\xi}\varphi_1(\xi) + M_2\frac{d}{d\xi}\varphi_2(\xi) \\
&= -M_1 i\rho\, e^{-i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) + M_2 i\rho\, e^{i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) \\
&= -i\rho\, e^{-i\rho\xi}\cdot\Big(M_1 + M_1 o(1) - M_2\, e^{2i\rho\xi}\cdot(1+o(1))\Big) \\
&= -i\rho\, e^{-i\rho\xi}\cdot(M_1+o(1)) \qquad (\xi\to\infty),
\end{aligned}$$

denn wegen $\operatorname{Im}(\rho) > 0$ gilt $e^{2i\rho\xi} = o(1) \quad (\xi\to\infty)$. Daraus folgt mit (2.41)

$$y(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(M_1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \tag{2.42}$$

und wegen

$$y'(x,\rho) = \frac{d\tilde{y}(\cdot,\rho)}{d\xi}(\xi(x))\sqrt[4]{\phi^2(x)} - \frac{1}{4}\tilde{y}(\xi(x),\rho)(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)'(x) \qquad (x\in\tilde{I})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
y'(x,\rho) &= -i\rho\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(M_1+o(1))\sqrt[4]{\phi^2(x)} \\
&\quad -\frac{1}{4}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(M_1+o(1))(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)'(x) \\
&= \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(-i\rho(M_1+o(1)) - \frac{1}{4}\frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}}(M_1+o(1))\Big) \\
&\qquad\qquad (x\to\infty),
\end{aligned}$$

mit (2.4) also

$$y'(x,\rho) = -i\rho\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(M_1 + o(1) + \frac{1}{4}o(1)(M_1+o(1))\Big) \qquad (x\to\infty),$$

d. h.

(2.43) $$y'(x,\rho) = -i\rho\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M_1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Es reicht nun zu zeigen, daß für obiges M_1 gilt

$$M_1 = -\frac{i}{2C_1\rho^{5/6}}\, \mathcal{W}(\rho,\alpha).$$

Mit (2.42), (2.43) und Lemma 2.3 c) gilt

$$\begin{aligned}
&W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M_1 + o(1)) C_1 i\rho^{5/6} \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \\
&\quad -\Big(-i\rho\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M_1 + o(1))\Big) C_1 \rho^{-1/6} \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \\
&= (M_1 + o(1)) C_1 i\rho^{5/6} \cdot (1 + o(1)) + (M_1 + o(1)) C_1 i \rho^{5/6} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),
\end{aligned}$$

woraus nach Grenzübergang $x \to \infty$ folgt

$$\mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) = \lim_{x\to\infty} W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho))(x) = 2M_1 C_1 i\rho^{5/6},$$

also

$$M_1 = -\frac{i}{2C_1\rho^{5/6}} \mathcal{W}(\rho,\alpha) = M(\rho).$$

Zusammen mit (2.42), (2.43) folgt die Behauptung.

b) Sei $\rho > 0$. Nach Lemma 2.6 b) bilden wegen $\rho > 0$ die Funktionen $Y(\cdot,\rho)$, $Y(\cdot,-\rho)$ ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I. Also gibt es Zahlen $c_1(\rho), c_2(\rho) \in \mathbb{C}$ mit

$$y(x,\rho) = c_1(\rho) Y(x,\rho) + c_2(\rho) Y(x,-\rho) \qquad (x \in I),$$

wobei die Cramersche Regel, Lemma 2.5, Lemma 2.6 b) und (2.17) liefern

$$\begin{aligned}
c_1(\rho) &= \frac{W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{W(y(\cdot,\rho)), \overline{Y(\cdot,\rho)})}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} \\
&= -\frac{y(0,\rho)\overline{Y'(0,\rho)} - \overline{Y(0,\rho)} y'(0,\rho)}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} \\
&= -\frac{\overline{Y'(0,\rho)} \sin\alpha + \overline{Y(0,\rho)} \cos\alpha}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\pi}{6i\rho^{2/3}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
c_2(\rho) &= \frac{W(Y(\cdot,\rho), y(\cdot,\rho))}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho))}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} \\
&= -\frac{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{\mathcal{W}(\rho,\alpha)\pi}{6i\rho^{2/3}},
\end{aligned}$$

also

$$y(x,\rho) = \frac{\pi i}{6\rho^{2/3}}\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}Y(x,\rho) + \mathcal{W}(\rho,\alpha)Y(x,-\rho)\Big) \qquad (x \in I). \tag{2.44}$$

Wäre nun $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$ für ein $\rho > 0$, so folgte nach (2.44) dann $y(\cdot,\rho) = 0$ im Widerspruch zu (2.17). Also ist $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ für jedes $\rho > 0$.
Nach Lemma 2.3 c) gilt nun

$$\begin{aligned} Y(x,\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \\ Y(x,-\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \end{aligned}$$

so daß wegen $e^{\pm i\rho\xi(x)} = O(1) \quad (x\to\infty)$ aufgrund von $\rho > 0$

$$\begin{aligned} y(x,\rho) &= \frac{\pi C_1 i}{6\rho^{5/6}}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1))\Big) \\ &= \frac{\pi C_1 i}{6\rho^{5/6}}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big) \qquad (x\to\infty). \end{aligned}$$

□

Aussagen über die Integrierbarkeit von $y(\cdot,\rho)$ und $Y(\cdot,\rho)$ liefert

Lemma 2.8. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Für fest gewähltes $\rho \neq 0$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ gilt:*

a) $\quad Y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)\,, \quad Y'(\cdot,\rho) \in L^2(I).$

b) $\quad y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I) \iff \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0.$

Für $\rho > 0$ gilt:

c) $\quad y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I).$

Beweis.
a) Sei ρ fest gewählt mit $0 < \arg\rho < \pi$, also $\operatorname{Im}(\rho) > 0$. Nach Lemma 2.3 c) gilt mit einer Konstanten $C(\rho) := C_1\rho^{-1/6} \neq 0$

$$Y(x,\rho) = C(\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty).$$

Also gibt es ein $A \geq 1$ mit

$$|Y(x,\rho)| \leq 2|C(\rho)|\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-\operatorname{Im}(\rho)\xi(x)} \qquad (x \geq A),$$

woraus folgt

$$(2.45) \qquad |\phi^2(x)||Y(x,\rho)|^2 \leq 4|C(\rho)|^2\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \qquad (x \geq A).$$

Dabei gilt mit (2.3)

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\int_A^b \sqrt{\phi^2(x)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)}\, dx &= \lim_{b\to\infty}\int_A^b \frac{d}{dx}\Big(-\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)}\Big)\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)} e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(A)} - \frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)} e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(b)}\Big) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(A)} \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

so daß nach dem Satz von Levi $\sqrt{\phi^2}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi}$ über $[A,\infty)$ integrierbar ist. Mit (2.45) folgt

$$\int_A^\infty |\phi^2||Y(\cdot,\rho)|^2 < \infty,$$

da ferner $Y(\cdot,\rho)$ und ϕ^2 auf $[0,A]$ stetig sind, ist $|\phi^2||Y(\cdot,\rho)|^2$ auf $[0,A]$ beschränkt und deshalb integrierbar, woraus dann $\int\limits_0^\infty |\phi^2||Y(\cdot,\rho)|^2 < \infty$ folgt, also $Y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$.

Für $Y'(\cdot,\rho)$ gilt nach Lemma 2.3 c) mit einer Konstanten $C(\rho) \neq 0$

$$Y'(x,\rho) = C(\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1+o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Also gibt es ein $A \geq 1$ mit

$$|Y'(x,\rho)| \leq 2|C(\rho)|\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \qquad (x \geq A),$$

woraus folgt

$$|Y'(x,\rho)|^2 \leq 4|C(\rho)|^2\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \qquad (x \geq A).$$

Wegen $\int\limits_A^\infty \sqrt{\phi^2}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} < \infty$ folgt

$$\int_A^\infty |Y'(\cdot,\rho)|^2 < \infty;$$

da $Y'(\cdot,\rho)$ auf $[0,A]$ stetig ist, existiert auch $\int\limits_0^A |Y'(\cdot,\rho)|^2$, also ist $Y'(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$.

b) Sei ρ fest gewählt mit $0 < \arg\rho < \pi$, also $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$.
Sei $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$. Dann folgt in Lemma 2.7, daß $|M(\rho)| > 0$ ist und ein $A \geq 1$ existiert mit

$$|y(x,\rho)| \geq \frac{|M(\rho)|}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}|e^{-i\rho\xi(x)}| \qquad (x \geq A),$$

also

$$|\phi^2(x)||y(x,\rho)|^2 \geq \frac{|M(\rho)|^2}{4}\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \geq 0 \qquad (x \geq A).$$

Wäre nun $y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$, also $|\phi^2||y(\cdot,\rho)|^2 \in L^1(I)$, so folgte wegen $|M(\rho)| > 0$ dann $\sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} \in L^1([A,\infty))$. Nach dem Satz von Lebesgue folgte dann

$$\lim_{b\to\infty}\int_A^b \sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} = \int_A^\infty \sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} < \infty;$$

aber es ist wegen $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$ und (2.3)

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\int_A^b \sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} &= \lim_{b\to\infty}\int_A^b \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)}\Big)\, dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(b)} - \frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(A)}\Big) \;=\; +\infty,\end{aligned}$$

Widerspruch. Also ist $y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I)$.
Ist dagegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) = 0$, so sind $y(\cdot,\rho)$ und $Y(\cdot,\rho)$ linear abhängig. Da nach a) $Y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ ist, folgt $y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$.

c) Sei $\rho > 0$. Nach Lemma 2.7 b) gilt $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ und

$$|y(x,\rho)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\phi^2(x)}}\frac{\pi^2|C_1|^2}{36\rho^{5/3}}\Big|\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big|^2 \qquad (x\to\infty).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}&\Big|\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big|^2 \\ &= \Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big)\cdot \\ &\quad\cdot\Big(\mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\rho\xi(x)} + \overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\frac{\pi}{6}}\, e^{i\rho\xi(x)} + o(1)\Big) \\ &= |\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + \mathcal{W}(\rho,\alpha)^2\, e^{-2i\rho\xi(x)-i\frac{\pi}{6}} + \overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}^2\, e^{2i\rho\xi(x)+i\frac{\pi}{6}} + |\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + o(1) \\ &= 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + 2\mathrm{Re}\Big(\mathcal{W}(\rho,\alpha)^2\, e^{-2i\rho\xi(x)-i\frac{\pi}{6}}\Big) + o(1) \\ &= 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + 2\mathrm{Re}\Big(|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\, e^{2i\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha)-2i\rho\xi(x)-i\frac{\pi}{6}}\Big) + o(1) \\ &= 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\cdot\Big(1 + \cos(2\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha) - 2\rho\xi(x) - \tfrac{\pi}{6}) + o(1)\Big) \qquad (x\to\infty).\end{aligned}$$

Sei $\varphi := 2\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha) - \frac{\pi}{6}$, also $\cos(2\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha) - 2\rho\xi(x) - \frac{\pi}{6}) = \cos(2\rho\xi(x) - \varphi)$ für $x > x_m$. Also gibt es ein $A \geq 1$ mit

$$|y(x,\rho)|^2 \geq \frac{1}{\sqrt{\phi^2(x)}}\frac{\pi^2|C_1|^2}{36\rho^{5/3}}\cdot 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\cdot\Big(1 + \cos(2\rho\xi(x)-\varphi) - \frac{1}{2}\Big) \qquad (x \geq A),$$

also

$$|\phi^2(x)||y(x,\rho)|^2 \geq \sqrt{\phi^2(x)}\,\frac{\pi^2|C_1|^2}{18\rho^{5/3}}\,|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\Big(\frac{1}{2}+\cos(2\rho\xi(x)-\varphi)\Big) \qquad (x \geq A),$$

wobei für $b \geq A$ wiederum wegen (2.3)

$$\int_A^b \sqrt{\phi^2(x)}\Big(\frac{1}{2}+\cos(2\rho\xi(x)-\varphi)\Big)\,dx \;=\; \int_{2\rho\xi(A)-\varphi}^{2\rho\xi(b)-\varphi} \frac{1}{2\rho}\Big(\frac{1}{2}+\cos v\Big)\,dv$$

$$= \frac{\xi(b)-\xi(A)}{2} + \frac{1}{2\rho}\sin(2\rho\xi(b)-\varphi) - \frac{1}{2\rho}\sin(2\rho\xi(A)-\varphi) \;\to\; +\infty \qquad (b\to\infty).$$

Wie im ersten Teil des Beweises zu b) folgt $y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I)$. □

Wir notieren noch zwei wichtige Beziehungen für $Y(\cdot,\rho)$ und $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$, die später benötigt werden:

Lemma 2.9. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt.*

a) Für $0 < \arg\rho < \pi$ gilt:

$$Y'(0,\rho)\overline{Y(0,\rho)} - Y(0,\rho)\overline{Y'(0,\rho)} = 4i\,(\mathrm{Re}\,\rho)(\mathrm{Im}\,\rho)\int_0^\infty \phi^2|Y(\cdot,\rho)|^2.$$

b) Die Abbildung $\mathcal{W}(\cdot,\alpha) : \rho \mapsto \mathcal{W}(\rho,\alpha)$ ist für $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ stetig und holomorph für $0 < \arg\rho < \pi$; außerdem ist $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ nicht die Nullfunktion.

Beweis.

a) Sei ρ wie angegeben fest gewählt; wir lassen der kürzeren Schreibweise wegen die Angabe des Parameters ρ in den Argumenten der Funktionen weg. Da $l_\rho Y(\cdot,\rho) = 0$ fast überall in I (vgl. Lemma 2.4), folgt

$$-Y'' + \chi Y - \rho^2\phi^2 Y = 0 \quad \text{fast überall in } I$$

und durch Übergang zum Konjugiert-Komplexen, da χ und ϕ^2 reellwertig sind,

$$-\overline{Y''} + \chi\overline{Y} - \overline{\rho^2}\phi^2\overline{Y} = 0 \quad \text{fast überall in } I.$$

Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit $\overline{Y}$, die zweite mit Y, subtrahieren diese dann voneinander und erhalten

(2.46) $$-Y''\overline{Y} + \overline{Y''}Y = (\rho^2 - \overline{\rho^2})\phi^2|Y|^2 \quad \text{fast überall in } I.$$

Sei $b > 0$ beliebig. Wegen

$$\overline{Y''}Y - Y''\overline{Y} = (\overline{Y'}Y - Y'\overline{Y})' \quad \text{fast überall in } I$$

gilt

$$(2.47)\qquad \int_0^b (\overline{Y''}Y - Y''\overline{Y}) = \overline{Y'(b)}Y(b) - Y'(b)\overline{Y(b)} - \overline{Y'(0)}Y(0) + Y'(0)\overline{Y(0)}.$$

Also folgt mit (2.46) und (2.47)

$$(2.48)\qquad \overline{Y'(b)}Y(b) - Y'(b)\overline{Y(b)} - \overline{Y'(0)}Y(0) + Y'(0)\overline{Y(0)} = (\rho^2 - \overline{\rho^2}) \int_0^b \phi^2 |Y|^2.$$

Nach Lemma 2.3 c) gilt mit $C(\rho) := C_1\rho^{-1/6} \neq 0$ für $\tau = 0, 1$

$$Y^{(\tau)}(x) = C(\rho)(i\rho)^\tau \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\right)^{1-2\tau} \cdot e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Damit folgt für $b \to \infty$ wegen $\operatorname{Im}\rho > 0$

$$\begin{aligned}
&\overline{Y'(b)}Y(b) - Y'(b)\overline{Y(b)} \\
&\quad= 2i\mathrm{Im}\,(\overline{Y'(b)}Y(b)) \\
&\quad= 2i\mathrm{Im}\left(\overline{C(\rho)i\rho}\,\sqrt[4]{\phi^2(b)}\,\overline{\left(e^{i\rho\xi(b)}\right)} \cdot (1+o(1)) \cdot C(\rho)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(b)}}\,e^{i\rho\xi(b)} \cdot (1+o(1))\right) \\
&\quad= 2i\mathrm{Im}\left(-|C(\rho)|^2\, i\overline{\rho}\, |e^{i\rho\xi(b)}|^2\, (1+o(1))\right) \\
&\quad= -2i|C(\rho)|^2 e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(b)} \cdot \mathrm{Im}\left(i\overline{\rho}(1+o(1))\right) \\
&\quad= o(1) \qquad (b \to \infty).
\end{aligned}$$

Da $Y \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ nach Lemma 2.8 a), ist $|\phi^2||Y|^2$ integrierbar. Nach dem Satz von Lebesgue gilt daher

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \phi^2|Y|^2 = \int_0^\infty \phi^2|Y|^2.$$

Also liefert (2.48) mit $b \to \infty$ und

$$(\rho^2 - \overline{\rho^2}) = 4i\,(\mathrm{Re}\,\rho)(\mathrm{Im}\,\rho)$$

die behauptete Gleichung

$$Y'(0)\overline{Y(0)} - \overline{Y'(0)}Y(0) = 4i\,(\mathrm{Re}\,\rho)(\mathrm{Im}\,\rho)\int_0^\infty \phi^2|Y|^2.$$

b) Stetigkeit bzw. Holomorphie von $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ folgen aufgrund allgemeiner Eigenschaften der Differentialgleichung $l_\rho u = 0$.
Nach Lemma 2.7 b) ist $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ für alle $\rho > 0$ $(\arg\rho = 0)$. Wäre $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$ für alle $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $0 < \arg\rho < \pi$, so folgte wegen der Stetigkeit auch $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$ für $\rho > 0$ im Widerspruch zu Lemma 2.7 b). □

Als Hilfsmittel zum Beweis des folgenden Satzes werden wir in Hilfssatz 2.2 die Funktionen ϕ^2 und ξ auf geeignete Weise auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen:

Hilfssatz 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Sei ϕ^2 wie folgt auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt:*

$$\phi^2(t) := \phi^2(0) \qquad \text{für } t \in (-\infty, 0).$$

Dann besitzt ϕ^2 keine Nullstellen auf $(-\infty, 0)$ und es ist $\phi^2 \in C(\mathbb{R})$.
Sei weiter

$$\eta(x) := \int_{x_m}^{x} \sqrt{|\phi^2(t)|}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann ist mit den Bezeichnungen $U := \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $V := \mathbb{R} \setminus \{\eta(x_1), \ldots, \eta(x_m)\}$ die Funktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ und $\eta|(x_m, \infty) = \xi$, außerdem ist $\eta|U : U \to V$ C^1–invertierbar.

Beweis. Die Stetigkeit der auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion ϕ^2 ist offensichtlich, ebenso die Nullstellenfreiheit auf $(-\infty, 0)$. Wegen $\sqrt{|\phi^2|} \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ist $\eta \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, und wegen $\eta'(x) = \sqrt{|\phi^2(x)|}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{|\phi^2|} \in C(\mathbb{R})$ gibt es in der Äquivalenzklasse von $\eta' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ einen Repräsentanten, so daß $\eta' = \sqrt{|\phi^2|}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gilt. Also ist $\eta \in C^1(\mathbb{R})$. Da $\phi^2 \geq 0$ auf (x_m, ∞), also $\phi^2 = |\phi^2|$ auf (x_m, ∞), gilt $\eta|(x_m, \infty) = \xi$, d.h. η ist eine Fortsetzung von ξ. Es bleiben die Bijektivität von η sowie die C^1–Invertierbarkeit von $\eta|U$ zu zeigen.
$\eta|\mathbb{R}$ ist injektiv, denn, angenommen, für $r, s \in \mathbb{R}$ mit o. B. d. A. $r > s$ gilt $\eta(r) = \eta(s)$, so folgt $\eta(r) - \eta(s) = \int_s^r \sqrt{|\phi^2|} = 0$. Wegen $r > s$ ergibt sich dann

$$\sqrt{|\phi^2|} = 0 \quad \text{fast überall in } [s, r]$$

im Widerspruch zu

$$\sqrt{|\phi^2(x)|} = 0 \Longleftrightarrow x \in \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Also erhalten wir $\eta(r) = \eta(s) \Longrightarrow r = s$, d.h. η ist injektiv.
Es gilt $\eta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ wegen der Stetigkeit von η und

$$\lim_{x \to \infty} \eta(x) = \lim_{x \to \infty} \xi(x) = +\infty$$

nach (2.3) und

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \eta(x) &= \lim_{x \to -\infty} \int_{x_m}^{x} \sqrt{|\phi^2|} = \lim_{x \to -\infty} -\int_{x}^{x_m} \sqrt{|\phi^2|} \\
&\leq \lim_{x \to -\infty} -\int_{x}^{0} \sqrt{|\phi^2|} = \lim_{x \to -\infty} -\int_{x}^{0} \sqrt{|\phi^2(0)|} = -\infty.
\end{aligned}$$

Also ist $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und daher ist auch $\tilde{\eta} := \eta|U : U \to V = \eta(U)$ bijektiv. Wegen $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ gilt natürlich $\tilde{\eta} \in C^1(U)$, und $\tilde{\eta}'(x) = \sqrt{|\phi^2(x)|} > 0$ für alle $x \in U$, insbesondere ist $\tilde{\eta}$ auf jeder Zusammenhangskomponente von U streng monoton wachsend. Deshalb ist $\tilde{\eta}^{-1}$ stetig und differenzierbar auf V mit

$$(\tilde{\eta}^{-1})'(x) = \frac{1}{\tilde{\eta}'(\tilde{\eta}^{-1}(x))} \qquad (x \in V).$$

Da $\tilde{\eta}^{-1} \in C(V)$, $\tilde{\eta}' \in C(U)$ und $\tilde{\eta}' \neq 0$ auf U, folgt schließlich $(\tilde{\eta}^{-1})' \in C(V)$, d.h. $\tilde{\eta}^{-1} \in C^1(V)$, also ist $\tilde{\eta}$ C^1–invertierbar. □

2.3 Darstellung der Resolvente

Vor dem folgenden Satz 2.2, der für $0 < \arg\rho < \pi$ eine Darstellung der Resolvente L_ρ^{-1} von L angibt, erinnern wir daran, daß die Funktion $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ nach Lemma 2.9 b) nicht die Nullfunktion ist; es gibt also $\rho \in \mathbb{C}$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$.
Analog zu Stakun [27, S. 1458] gilt der folgende Satz:

Satz 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Sei für $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$*

$$(2.49) \qquad G(x,t,\rho) := \begin{cases} -\dfrac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(x,\rho)\, Y(t,\rho) & \text{für} \quad x,t \in I,\ x \leq t, \\ -\dfrac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(t,\rho)\, Y(x,\rho) & \text{für} \quad x,t \in I,\ x > t. \end{cases}$$

Dann ist für alle $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$ der lineare Operator L_ρ invertierbar, und es gilt für alle $v \in D(L_\rho^{-1}) = H$

$$(2.50) \qquad (L_\rho^{-1} v)(x) = \int_0^\infty G(x,t,\rho)\, \phi^2(t)\, v(t)\, dt \qquad (x \in I),$$

und

$$L_\rho^{-1} : H \to D(L_\rho)$$

ist ein Element von $B(H)$.

Die Funktion G aus Satz 2.2, die die Darstellung (2.50) von $L_\rho^{-1} v$ ermöglicht, nennen wir *Greensche Funktion* (analog zum definiten Fall, siehe z. B. Jörgens-Rellich [10, S. 79 bzw. S. 170]). Im Anschluß an den Beweis von Satz 2.2 werden wir zeigen, daß G durch (2.50) in gewissem Sinne eindeutig bestimmt ist.

Beweis von Satz 2.2. Sei ρ fest gewählt, so daß $0 < \arg\rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$. Wir lassen deshalb die Angabe des Parameters ρ in den Argumenten der Funktionen meist weg.

Sei zunächst

$$(Jv)(x) := \int_0^\infty G(x,t)\phi^2(t)v(t)\,dt \qquad (x \in I)$$

für alle $v \in H$.

1. Schritt: Wir zeigen, daß $Jv \in D(L_\rho)$ für jedes $v \in H$ gilt, und daß J beschränkt ist. Nach Definition (2.49) von G gilt (mit $\mathcal{W} := \mathcal{W}(\rho,\alpha)$ zur Abkürzung):

$$(Jv)(x) = -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(Y(x)\int_0^x y\phi^2 v + y(x)\int_x^\infty Y\phi^2 v\Big) \qquad (x \in I;\ v \in H). \tag{2.51}$$

Es ist also zunächst die Existenz der beiden in (2.51) vorkommenden Integrale nachzuweisen. Seien dazu $x \in I$ und $v \in H$ gewählt. Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^x y\phi^2 v\Big| &\leq \int_0^x |\phi y||\phi v| \leq \Big(\int_0^x |\phi^2||y|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_0^x |\phi^2||v|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \Big(\int_0^x |\phi^2||y|^2\Big)^{1/2} \cdot \|v\| \;<\; \infty, \end{aligned} \tag{2.52}$$

da $|\phi^2||y|^2$ auf $[0,x]$ stetig, also beschränkt ist, und

$$\begin{aligned} \Big|\int_x^\infty Y\phi^2 v\Big| &\leq \int_x^\infty |\phi Y||\phi v| \leq \Big(\int_x^\infty |\phi^2||Y|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_x^\infty |\phi^2||v|^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \|Y\| \cdot \|v\| \;<\; \infty, \end{aligned} \tag{2.53}$$

wegen $Y \in H$ nach Lemma 2.8 a). Also ist $(Jv)(x) \in \mathbb{C}$ für alle $v \in H$, $x \in I$.

Wir zeigen nun $Jv \in H$ für jedes $v \in H$. Sei dazu $v \in H$ gewählt. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Hilfssatz 2.2 und definieren die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} f(r) &:= e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|r|} \qquad (r \in \mathbb{R}); \\ \tilde{v}(\eta(t)) &:= \begin{cases} \sqrt[4]{|\phi^2(t)|}\,|v(t)|\,, & t \in [0,\infty) \\ 0\,, & t \in (-\infty,0), \end{cases} \end{aligned}$$

da η bijektiv ist (siehe Hilfssatz 2.2), ist $\tilde{v}$ eindeutig definiert. Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ wegen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f| &= \int_{\mathbb{R}} |e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|r|}|\,dr = 2\int_0^\infty e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)r}\,dr = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)r}\,dr \\ &= -\frac{2}{\mathrm{Im}\,(\rho)}\lim_{b\to\infty} e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)r}\Big|_0^b = \frac{2}{\mathrm{Im}\,(\rho)} \;<\; \infty \end{aligned}$$

mit Hilfe des Satzes von Levi und $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$ nach Voraussetzung, und $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R})$ wegen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{v}|^2 &= \int_V |\tilde{v}|^2 = \int_U \eta'(t)|\tilde{v}(\eta(t))|^2\,dt \\ &= \int\limits_{[0,\infty)\setminus\{x_1,\ldots,x_m\}} \sqrt{|\phi^2(t)|}\cdot\Big|\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}\,v(t)\Big|^2\,dt = \int_0^\infty |\phi^2||v|^2 \\ &= \|v\|^2 \;<\; \infty \end{aligned}$$

mit Hilfssatz 2.2.
Mit der Youngschen Ungleichung (vgl. z. B. Reed–Simon [26, S. 29]) ergibt sich (man beachte $f, \tilde{v} \geq 0$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(r-s)\tilde{v}(s)\, ds \Big)^2 dr &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} f(r-s)\tilde{v}(s)\, ds \Big|^2 dr \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f| \Big)^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} |\tilde{v}|^2 = \frac{4}{(\mathrm{Im}\,\rho)^2} \, \|v\|^2. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Wir werden nun eine Abschätzung für G, die fast überall auf $I \times I$ gilt, herleiten. Nach Lemma 2.7 a) gilt

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M(\rho) + o(1)) \qquad (x \to \infty)$$

mit $M(\rho) \neq 0$ wegen $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$ nach Voraussetzung, und nach Lemma 2.3 c) ist

$$Y(x) = C_1 \rho^{-1/6} \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Also gibt es Zahlen $D_1 > 0$, $A \geq 1$ mit (unter Verwendung von $\xi = \eta$ auf $[A, \infty)$ nach Hilfssatz 2.2)

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq D_1 \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \geq A), \\ |Y(x)| &\leq D_1 \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \geq A). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Da $|\phi^2|$ auf $[0, A]$ stetig und beschränkt ist, gibt es ein $D_2 > 0$ mit

$$\frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \geq D_2 \qquad (x \in [0, A] \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}).$$

Außerdem ist $e^{\pm \mathrm{Im}\,(\rho)\eta}$ auf $[0, A]$ stetig und von Null verschieden, es existiert daher ein $D_3 > 0$ mit

$$e^{\pm \mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \geq D_3 \qquad (x \in [0, A]).$$

Mit $D_4 := D_2 D_3 > 0$ gilt somit

$$\frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \, e^{\pm \mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \geq D_4 > 0 \qquad (x \in [0, A] \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}). \tag{2.56}$$

Weiter sind auch $|y|$, $|Y|$ auf $[0, A]$ stetig, deshalb gibt es ein $D_5 > 0$ mit

$$|y(x)| \leq D_4 D_5 \,, \quad |Y(x)| \leq D_4 D_5 \qquad (x \in [0, A]),$$

also mit (2.56) auch

$$
\begin{aligned}
|y(x)| &\leq D_5 \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in [0,A] \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}), \\
|Y(x)| &\leq D_5 \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in [0,A] \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}).
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

Wir wählen nun $D := \max\{D_1, D_5\} > 0$, dann gilt mit (2.55) und (2.57)

$$
\begin{aligned}
|y(x)| &\leq D \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}), \\
|Y(x)| &\leq D \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}).
\end{aligned}
$$

Damit folgt für $x, t \in I \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ gemäß (2.49)

$$
|G(x,t)| \leq \begin{cases} \dfrac{D^2}{|\mathcal{W}|} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)(\eta(x)-\eta(t))}, & x \leq t, \\[2ex] \dfrac{D^2}{|\mathcal{W}|} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)(\eta(t)-\eta(x))}, & x > t. \end{cases}
$$

Weil η monoton wachsend auf I ist, gilt

$$
|G(x,t)| \leq \frac{D^2}{|\mathcal{W}|} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|} \qquad \text{für fast alle } x \in I, \text{ fast alle } t \in I.
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|(Jv)(x)|^2 &= \Big| \int_0^\infty G(x,t)\phi^2(t)v(t)\,dt \Big|^2 \\
&\leq \Big(\frac{D^2}{|\mathcal{W}|} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|} |\phi^2(t)v(t)|\,dt \Big)^2 \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2} \Big(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|} |\phi^2(t)v(t)|\,dt \Big)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für fast alle } x \in I,
\end{aligned}
$$

und so

$$
\begin{aligned}
\|Jv\|^2 &= \int_0^\infty |\phi^2||Jv|^2 \\
&\leq \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_0^\infty |\phi^2(x)|\Big(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\,e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|}|\phi^2(t)||v(t)|\,dt\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_0^\infty \sqrt{|\phi^2(x)|}\Big(\int_0^\infty f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\sqrt{|\phi^2(t)|}\,dt\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_0^\infty \eta'(x)\Big(\int_0^\infty f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\eta'(t)\,dt\Big)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Da $\eta'(x) \geq 0$, $f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\eta'(t) \geq 0$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$, folgt (mit den Bezeichnungen U, V aus Hilfssatz 2.2)

$$
\begin{aligned}
\|Jv\|^2 &\leq \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_U \eta'(x)\Big(\int_U f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\eta'(t)\,dt\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_U \eta'(x)\Big(\int_V f(\eta(x)-s)\tilde{v}(s)\,ds\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_V \Big(\int_V f(r-s)\tilde{v}(s)\,ds\Big)^2 dr \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(r-s)\tilde{v}(s)\,ds\Big)^2 dr \\
&\overset{(2.54)}{\leq} \frac{4D^4}{|\mathcal{W}|^2(\mathrm{Im}\,\rho)^2}\,\|v\|^2,
\end{aligned}
$$

also

$$
\|Jv\| \leq \frac{2D^2}{|\mathcal{W}|\,\mathrm{Im}\,\rho}\,\|v\|,
$$

d.h. $Jv \in H$ und $J \in B(H)$ mit $\|J\| \leq \dfrac{2D^2}{|\mathcal{W}|\,\mathrm{Im}\,\rho}$.

Als nächstes weisen wir Jv, $(Jv)' \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ und $l_\rho(Jv) = \phi^2 v$ auf I für jedes $v \in H$ nach. Sei dazu $v \in H$ gewählt. Nach (2.53) existiert $\int\limits_x^\infty Y\phi^2 v$ für alle $x \in I$, so daß also

$$
\int_x^\infty Y\phi^2 v = \int_0^\infty Y\phi^2 v - \int_0^x Y\phi^2 v \qquad (x \in I)
$$

gilt, und deshalb

$$
\begin{aligned}
(Jv)(x) &= -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(Y(x)\int_0^x y\phi^2 v + y(x)\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v - \int_0^x Y\phi^2 v\Big)\Big) \\
&= \Big(-\frac{1}{\mathcal{W}}\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)y(x) + \int_0^x \frac{y(x)Y(t)-Y(x)y(t)}{\mathcal{W}}\phi^2(t)v(t)\,dt \\
&\qquad (x \in I).
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Da nach Voraussetzung $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y,Y) \neq 0$, bilden y, Y ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I. Wegen $v \in H$ ist $\phi^2 v \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ nach Bemerkung 1.2 b). Mittels Lemma 1.2 a) ist die Funktion Jv gemäß der Gestalt (2.58) Lösung der Differentialgleichung $l_\rho u = \phi^2 v$ auf I, d.h. es gilt $l_\rho(Jv) = \phi^2 v$ auf I, und Lemma 1.2 a) liefert Jv, $(Jv)' \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ sowie

$$
(Jv)'(x) = \Big(-\frac{1}{\mathcal{W}}\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)y'(x) + \int_0^x \frac{y'(x)Y(t)-Y'(x)y(t)}{\mathcal{W}}\phi^2(t)v(t)\,dt \qquad (x \in I).
\tag{2.59}
$$

Dann bleibt noch

$$
(Jv)(0)\cos\alpha + (Jv)'(0)\sin\alpha = 0
$$

zu beweisen. Nach (2.58), (2.59) und (2.17) gilt

$$
\begin{aligned}
&(Jv)(0)\cos\alpha + (Jv)'(0)\sin\alpha \\
&\quad= -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)\cdot y(0)\cos\alpha - \frac{1}{\mathcal{W}}\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)\cdot y'(0)\sin\alpha \\
&\quad= -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)\cdot\Big(y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha\Big) \\
&\quad\overset{(2.17)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist insgesamt $Jv \in D(L_\rho)$ und $l_\rho(Jv) = \phi^2 v$ auf I, d.h. $L_\rho(Jv) = v$, für jedes $v \in H$ gezeigt.

2. Schritt: Wir zeigen die Injektivität von L_ρ, daß L_ρ^{-1} eine Einschränkung von J ist, und daß $D(L_\rho^{-1}) = H$ ist.

Nach Definition von L_ρ gilt für $u_0 \in D(L_\rho)$, $v_0 \in R(L_\rho)$ die Gleichung $L_\rho u_0 = v_0$ genau dann, wenn

$$
l_\rho u_0 = -u_0'' + \chi u_0 - \rho^2\phi^2 u_0 = \phi^2 v_0 \text{ auf } I
$$

gilt. Also ist L_ρ injektiv genau dann, wenn es zu jedem $v_0 \in R(L_\rho)$ *genau ein* $u_0 \in D(L_\rho)$ mit $l_\rho u_0 = \phi^2 v_0$ auf I gibt. Ist dieses erfüllt, so ist L_ρ^{-1} derjenige auf $R(L_\rho)$ definierte lineare Operator, der v_0 auf die Lösung $u_0 \in D(L_\rho)$ von $l_\rho u = \phi^2 v_0$ auf I abbildet.

Sei nun $v_0 \in R(L_\rho)$ fest gewählt. Dann gibt es mindestens ein $u_0 \in D(L_\rho)$ mit $v_0 = L_\rho u_0$, also mit $l_\rho u_0 = \phi^2 v_0$ auf I, insbesondere sind u_0, $v_0 \in H$ nach Definition von L_ρ. Da nach Voraussetzung $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y,Y) \neq 0$ gilt, bilden y, Y ein Fundamentalsystem der

Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I, und nach Lemma 1.2 a) besitzt u_0 wegen $\phi^2 v_0 \in L^1_{\text{loc}}(I)$ (gemäß Bemerkung 1.2 b)) die Darstellung

$$u_0(x) = c_1 y(x) + c_2 Y(x) + \int_0^x \frac{y(x)Y(t) - Y(x)y(t)}{\mathcal{W}} \phi^2(t) v_0(t)\, dt \qquad (x \in I) \tag{2.60}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Da nach (2.53) $\int\limits_x^\infty Y\phi^2 v_0$ für alle $x \in I$ existiert, schreiben wir wieder

$$\int_0^x Y\phi^2 v_0 = \int_0^\infty Y\phi^2 v_0 - \int_x^\infty Y\phi^2 v_0 \qquad (x \in I),$$

dann gilt mit

$$\tilde{c_1} := c_1 + \int_0^\infty \frac{Y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}} \in \mathbb{C}$$

somit

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \Big(c_1 + \int_0^x \frac{Y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\Big) y(x) + \Big(c_2 - \int_0^x \frac{y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\Big) Y(x) \\ &= \Big(\tilde{c_1} - \int_x^\infty \frac{Y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\Big) y(x) + \Big(c_2 - \int_0^x \frac{y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\Big) Y(x) \qquad (x \in I), \end{aligned}$$

d.h. nach Gleichung (2.51) für J

$$u_0(x) = \tilde{c_1} y(x) + c_2 Y(x) + (Jv_0)(x) \qquad (x \in I). \tag{2.61}$$

Weil nach (2.61) und Lemma 1.2 a) u_0, $u_0' \in AC_{\text{loc}}(I)$ sind, ist $u_0 \in D(L_\rho)$ genau dann, wenn

$$u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha = 0 \tag{2.62}$$

und

$$u_0 \in H \tag{2.63}$$

gelten.

Zu (2.62): Da nach (2.17)

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$$

und nach Definition von $\mathcal{W}(\rho, \alpha)$

$$Y(0)\cos\alpha + Y'(0)\sin\alpha = \mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$$

nach Voraussetzung gilt sowie

$$(Jv_0)(0)\cos\alpha + (Jv_0)'(0)\sin\alpha = -\frac{1}{\mathcal{W}} \int_0^\infty Y\phi^2 v_0 \cdot \Big(y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha\Big) = 0$$

mit Hilfe von (2.58) und (2.59), gilt gemäß (2.61)

$$\begin{aligned} u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha &= \tilde{c_1}\Big(y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha\Big) + c_2\Big(Y(0)\cos\alpha + Y'(0)\sin\alpha\Big) \\ &\quad + (Jv_0)(0)\cos\alpha + (Jv_0)'(0)\sin\alpha \\ &= c_2 \mathcal{W}(\rho, \alpha) \;=\; 0 \\ &\iff c_2 = 0 \end{aligned}$$

wegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ nach Voraussetzung.
Zu (2.63): Wegen $y \notin H$, $Y \in H$ nach Lemma 2.8 und $Jv_0 \in H$ nach dem 1. Schritt gilt

$$u_0 \overset{(2.61)}{=} \tilde{c_1} y + c_2 Y + Jv_0 \in H \Longleftrightarrow \tilde{c_1} = 0.$$

Also ist für $u_0 \in D(L_\rho)$ notwendig und hinreichend, daß $\tilde{c_1} = c_2 = 0$ gilt, d.h. daß

$$u_0 = Jv_0.$$

Daher ist u_0 als Lösung von $l_\rho u = \phi^2 v_0$ mit $u_0 \in D(L_\rho)$, $v_0 \in R(L_\rho)$ *eindeutig* bestimmt und L_ρ deshalb injektiv, also invertierbar, und es gilt $u_0 = Jv_0$.
Sei jetzt $\tilde{J} := J|R(L_\rho)$. Wir zeigen

$$\tilde{J} = L_\rho^{-1}.$$

Für jedes $v \in D(\tilde{J}) = R(L_\rho)$ ist, wie im 1. Schritt bewiesen, $u := \tilde{J}v \in D(L_\rho)$, und es gilt dann

$$L_\rho(\tilde{J}v) = v, \tag{2.64}$$

d.h.

$$L_\rho \circ \tilde{J} = id|R(L_\rho).$$

Umgekehrt ist für jedes $u \in D(L_\rho)$ die Funktion $v := L_\rho u \in R(L_\rho) = D(\tilde{J})$ mit

$$L_\rho\Big(\tilde{J}(L_\rho u)\Big) = L_\rho u$$

nach (2.64), angewandt auf $v = L_\rho u$. Da L_ρ injektiv ist, gilt

$$\tilde{J}(L_\rho u) = u,$$

also

$$\tilde{J} \circ L_\rho = id|D(L_\rho).$$

Damit ist insgesamt

$$L_\rho^{-1} = \tilde{J} = J|R(L_\rho),$$

insbesondere besitzt L_ρ^{-1} die behauptete Darstellung (2.50), und ist beschränkt.
Wir zeigen schließlich noch

$$D(L_\rho^{-1}) = H;$$

L_ρ^{-1} ist dann auf ganz H definiert, also $L_\rho^{-1} \in B(H)$. Es ist dazu lediglich $H \subset R(L_\rho)$ zu beweisen. Sei $v \in H$, dann ist nach dem 1. Schritt $Jv \in D(L_\rho)$. Also existiert $L_\rho(Jv)$, und nach dem 1. Schritt gilt $v = L_\rho(Jv) \in R(L_\rho)$. □

Korollar 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Die Greensche Funktion $G(\cdot,\cdot,\rho)$ aus Satz 2.2 ist für fest gewähltes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ und $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ auf $I \times I$ stetig, weiter ist für fest gewählte $x,t \in I$ dann auch $G(x,t,\cdot)$ auf der Menge $\{\rho \mid \rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 0 \leq \arg\rho \leq \pi, \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0\}$ stetig.*

Beweis.
1. Schritt: Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$. Die Funktionen $y(\cdot, \rho)$ und $Y(\cdot, \rho)$ sind auf I lokal absolut stetig, also stetig. Deshalb ist $G(\cdot, \cdot, \rho)$ auf den Mengen

$$A := \{(x,t) \mid x, t \in I, x \leq t\}\,, \quad B := \{(x,t) \mid x, t \in I, t < x\}$$

stetig, so daß nur noch die Diagonale $D := \{(a,a) \mid a \in I\}$ zu untersuchen ist. Ist $a \in I$, so gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in A}} G(x,t,\rho) &= \lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in A}} -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(x,\rho)Y(t,\rho) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(a,\rho)Y(a,\rho) \\
&= G(a,a,\rho), \\
\lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in B}} G(x,t,\rho) &= \lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in B}} -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(t,\rho)Y(x,\rho) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(a,\rho)Y(a,\rho) \\
&= G(a,a,\rho),
\end{aligned}$$

so daß $G(\cdot, \cdot, \rho)$ also auf $I \times I$ stetig ist.
2. Schritt: Seien $x, t \in I$ fest gewählt, o. B. d. A. sei $x \leq t$. Da $y(x, \cdot)$, $Y(t, \cdot)$ und $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ stetig für alle $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ sind, ist

$$G(x,t,\cdot) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\cdot,\alpha)}\, y(x,\cdot)Y(t,\cdot) \text{ stetig auf } \{\rho \mid \rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, 0 \leq \arg\rho \leq \pi, \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0\};$$

analoges gilt, falls $x > t$. □

Korollar 2.3. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg \rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$. Für festes $x \in I$ ist*

$$G(x, \cdot, \rho) \in H.$$

Beweis. Seien ρ und x wie angegeben. Für $t > x$ gilt

$$G(x,t,\rho) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(x,\rho)Y(t,\rho);$$

wegen $Y(\cdot, \rho) \in H$ nach Lemma 2.8 a) ist $\int_x^\infty |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt < \infty$. Da $G(x, \cdot, \rho)$ nach Korollar 2.2 auf $[0, x]$ stetig ist, gilt auch

$$\int_0^\infty |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt = \int_0^x |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt + \int_x^\infty |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt < \infty,$$

also $G(x, \cdot, \rho) \in H$. □

Wir werden im folgenden Satz zeigen, daß die Greensche Funktion in gewissem Sinne eindeutig bestimmt ist.

Satz 2.3. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$. Ist $\tilde{G} : I \times I \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion mit den Eigenschaften*

(i) für jedes $v \in H$ gilt $(L_\rho^{-1}v)(x) = \int_0^\infty \tilde{G}(x,t)\,\phi^2(t)\,v(t)\,dt \qquad (x \in I)$,

(ii) für jedes feste $x \in I$ ist $\tilde{G}(x,\cdot) \in H \cap C(I)$,

so gilt

$$\tilde{G}(x,t) = G(x,t,\rho) \quad \text{für alle } x,t \in I.$$

Beweis. Mit Satz 2.2 gilt für alle $x \in I$

$$\int_0^\infty \Big(G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t)\Big)\phi^2(t)v(t)\,dt = 0 \quad \text{für alle } v \in H.$$

Sei nun $x \in I$ fest gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \Big(G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t)\Big)\phi^2(t)v(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty |\phi^2(t)|\Big(G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t)\Big)(\operatorname{sign}\phi^2(t))v(t)\,dt \\ &= \Big(\, G(x,\cdot,\rho) - \tilde{G}(x,\cdot),\ (\operatorname{sign}\phi^2)v\,\Big) \quad \text{für alle } v \in H, \end{aligned}$$

wobei nach Korollar 2.3 $G(x,\cdot,\rho) \in H$ und nach Voraussetzung $\tilde{G}(x,\cdot) \in H$ sind. Da

$$v \in H \iff w := (\operatorname{sign}\phi^2)v \in H$$

wegen $|v(t)| = |(\operatorname{sign}\phi^2(t))v(t)|$ für fast alle $t \in I$, gilt

$$\Big(G(x,\cdot,\rho) - \tilde{G}(x,\cdot), w\Big) = 0 \quad \text{für alle } w \in H,$$

d.h. $G(x,\cdot,\rho) - \tilde{G}(x,\cdot) \in H^\perp = \{0\}$, es ist also

$$G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t) = 0 \quad \text{für fast alle } t \in I.$$

Da nach Korollar 2.2 $G(x,\cdot,\rho) \in C(I)$ und nach Voraussetzung $\tilde{G}(x,\cdot) \in C(I)$, folgt

$$G(x,t,\rho) = \tilde{G}(x,t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

□

Eine weitere wichtige Eigenschaft von L notieren wir im

Satz 2.4. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Dann ist L ein abgeschlossener Operator.*

Beweis. Sei $\rho_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg \rho_0 < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho_0, \alpha) \neq 0$ fest gewählt; ein solches ρ_0 existiert nach Lemma 2.9 b). Wir zeigen zunächst, daß L_{ρ_0} abgeschlossen ist.
Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(L_{\rho_0})$ und $u \in H$ mit $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, und sei $(L_{\rho_0} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann gibt es ein $v \in H$ mit $v = \lim_{n\to\infty} L_{\rho_0} u_n$. Da nach Satz 2.2 $L_{\rho_0}^{-1} \in B(H)$ ist, folgt

$$L_{\rho_0}^{-1} v = \lim_{n\to\infty} L_{\rho_0}^{-1}(L_{\rho_0} u_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Also ist $u \in R(L_{\rho_0}^{-1}) = D(L_{\rho_0})$ und

$$L_{\rho_0} u = L_{\rho_0}(L_{\rho_0}^{-1} v) = v = \lim_{n\to\infty} L_{\rho_0} u_n,$$

d.h. L_{ρ_0} ist abgeschlossen. Nach Weidmann [32, S.93, Folg. 7 u. Satz 5.5] ist dann auch L abgeschlossen. □

2.4 Beweis der Aussagen über das Spektrum

Mit den bisher bereitgestellten Hilfsmitteln beweisen wir in diesem Abschnitt Satz 2.1 und im Anschluß daran Bemerkung 2.4 b).

Wir erinnern noch einmal an die Voraussetzungen von Satz 2.1

(2.65) $\lim_{x\to\infty} \xi(x) = +\infty,$

(2.66) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} = 0,$

(2.67) $\dfrac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty)),$

(2.68) das Eigenwertproblem (1.1), (1.2), (1.3) sei normal,

und an die Behauptung

$\sigma^*(L) \subset \mathbb{R}, \quad \sigma_p^*(L) \subset (-\infty, 0)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen EWen der Vielfachheit 1, $\quad \sigma_c^*(L) = (0, \infty).$

Gemäß der Darstellungen von L_ρ^{-1} und G in Satz 2.2 entspricht $\mathcal{W}(\rho, \alpha)$ anschaulich formal der charakteristischen Determinante bei Rand–Eigenwertproblemen auf kompakten

Intervallen. Wir beginnen daher den Beweis mit einer Untersuchung der Nullstellen der Funktion $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$, zunächst für $0 < \arg\rho < \pi$, also $\rho^2 \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$, und werden zeigen, daß ein $\rho^2 \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ genau dann EW von (1.1), (1.2), (1.3) ist, wenn $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$ ist. Die im Intervall $[0,\infty)$ gelegenen Teilmengen des Spektrums von L untersuchen wir dann später gesondert.

Beweis von Satz 2.1.

1. Schritt: $0 < \arg\rho < \pi$, d.h. $\rho^2 \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$
Ist für ein $\rho^2 \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ nun $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$, so ist nach Satz 2.2 L_ρ injektiv, L_ρ^{-1} existiert und $L_\rho^{-1} \in B(H)$; das Problem

$$L_\rho u = 0$$

besitzt also nur die triviale Lösung

$$u = L_\rho^{-1}(0) = 0.$$

Deshalb ist dann ρ^2 kein EW von L, und es gilt

$$\rho^2 \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty) \text{ mit } \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0 \Longrightarrow \rho^2 \in \rho(L). \tag{2.69}$$

Ist für ein $\rho^2 \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ hingegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$, so werden wir im folgenden Lösungen

$$u \in D(L)\setminus\{0\} \text{ mit } L_\rho u = 0 \tag{2.70}$$

angeben, d.h. ρ^2 ist dann EW von L. Wenn (2.70) gezeigt ist, erhalten wir zusammen mit (2.69) das Resultat: Das in $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ gelegene Punktspektrum von L

$$\hat{\sigma_p}(L) := \sigma_p^*(L) \cap (\mathbb{C}\setminus[0,\infty))$$

ist genau die Menge

$$\hat{\sigma_p}(L) = \{\rho^2 \mid \rho^2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ 0 < \arg\rho < \pi,\ \mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0\}. \tag{2.71}$$

Zur Untersuchung von (2.70):
Die Funktion $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ ist auf $\{\rho \mid \rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, 0 < \arg\rho < \pi\}$ nicht die Nullfunktion, wie in Lemma 2.9 b) gezeigt. Besitzt daher $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ keine Nullstelle in dieser Menge, so ist nach (2.69) dann $\mathbb{C}\setminus[0,\infty) \subset \rho(L)$, also $\hat{\sigma_p}(L)$ leer, und (2.71) ist in diesem Sonderfall richtig. Sei daher im weiteren vorausgesetzt, daß $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ mindestens eine Nullstelle besitzt.
Nach Lemma 2.9 b) ist die Abbildung $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ für $0 < \arg\rho < \pi$ holomorph und für $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ stetig. Deshalb besitzt $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ für $0 < \arg\rho < \pi$ abzählbar (endlich oder unendlich) viele diskrete Nullstellen

$$\rho_n,\ n \in N, \text{ mit geeigneter Indexmenge}$$

$$N := \begin{cases} \mathbb{N} & \text{oder} \\ \{1,\ldots,N_0\} & \text{mit passendem } N_0 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(dabei sei jede Nullstelle ungeachtet ihrer Ordnung genau einmal aufgeführt), und

$$\text{(2.72)} \qquad \operatorname{Im}(\rho_n) > 0 \qquad (n \in N)$$

wegen $0 < \arg \rho_n < \pi$. Sei für jedes $n \in N$

$$E_n := \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, u \in D(L), l_{\rho_n} u = 0 \text{ auf } I\}$$

der zu ρ_n^2 gehörende Unterraum der Lösungen von (1.1), die in $D(L)$ liegen. Es ist dann

$$\rho_n^2 \text{ EW} \Longleftrightarrow E_n \neq \{0\};$$

falls ρ_n^2 EW, so ist E_n der zu ρ_n^2 gehörende Eigenraum des Operators L. Nach Lemmata 2.8 a) und 2.4 ist für $n \in N$

$$Y(\cdot, \rho_n) \in H \ , \quad l_{\rho_n} Y(\cdot, \rho_n) = 0 \text{ auf } I,$$

weiter gilt, da ρ_n Nullstelle von $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$,

$$Y(0, \rho_n) \cos \alpha + Y'(0, \rho_n) \sin \alpha = \mathcal{W}(\rho_n, \alpha) = 0,$$

also $Y(\cdot, \rho_n) \in D(L)$.
Außerdem ist $Y(\cdot, \rho_n)$ nicht die Nullfunktion (wäre nämlich $Y(\cdot, \rho_n) = 0$, so folgte nach (2.18) $v_1(\cdot, \rho_n) = 0$ auf $[z(\rho_n), \infty)$ im Widerspruch zur Definition von v_1), so daß insgesamt gilt

$$\text{(2.73)} \qquad Y(\cdot, \rho_n) \in E_n \setminus \{0\} \quad \text{für jedes } n \in N.$$

Damit sind (2.70) und (2.71) bewiesen, und es gilt

$$\hat{\sigma_p}(L) = \{\rho_n^2 \mid n \in N\}$$

sowie

$$\text{(2.74)} \qquad \dim E_n \geq 1 \qquad (n \in N).$$

Nach (2.69) und (2.71) besteht also $\sigma^*(L) \cap (\mathbb{C} \setminus [0, \infty))$ genau aus dem in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ gelegenen Punktspektrum $\hat{\sigma_p}(L)$.
Wir zeigen nun, daß jeder EW ρ_n^2, $n \in N$, die Vielfachheit 1 besitzt, d.h.

$$\dim E_n = 1.$$

Dazu ist wegen (2.74) lediglich noch $\dim E_n \leq 1$ zu zeigen. Seien dazu $n \in N$ fest gewählt und $u, v \in E_n \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\text{(2.75)} \qquad \begin{cases} l_{\rho_n} u = l_{\rho_n} v = 0 \text{ auf } I, \\ u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0, \\ v(0) \cos \alpha + v'(0) \sin \alpha = 0, \end{cases}$$

so daß

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \cdot W(u,v) &= \cos\alpha \cdot W(u,v)\Big|_{x=0} \\
&= (u(0)\cos\alpha)v'(0) - (v(0)\cos\alpha)u'(0) \\
&\overset{(2.75)}{=} (-u'(0)\sin\alpha)v'(0) - (-v'(0)\sin\alpha)u'(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt. Falls $\cos\alpha \neq 0$, gilt somit $W(u,v) = 0$. Ist hingegen $\cos\alpha = 0$, so ist $\sin\alpha \neq 0$, und mit (2.75) folgt

$$u'(0) = v'(0) = 0$$

und

$$W(u,v) = W(u,v)\Big|_{x=0} = u(0)v'(0) - v(0)u'(0) = 0,$$

also insgesamt

$$W(u,v) = 0 \quad \text{für jedes } \alpha \in [0, 2\pi),$$

d.h. u und v sind linear abhängig. Deshalb folgt

$$\dim E_n \leq 1,$$

mit (2.74) und mit (2.73) also

$$\dim E_n = 1\ , \quad E_n = \operatorname{span}\{Y(\cdot, \rho_n)\} \qquad (n \in N). \tag{2.76}$$

Im sich nun anschließenden Beweisteil werden wir

$$\operatorname{Re}(\rho_n) = 0 \qquad (n \in N) \tag{2.77}$$

beweisen.
Sei dazu $n \in N$. Wegen $Y(\cdot, \rho_n) \in E_n \subset D(L) \subset H$ existiert

$$\int_0^\infty \phi^2 |Y(\cdot, \rho_n)|^2;$$

da nach Voraussetzung (2.68) die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) als normal gegeben ist, gilt

$$\int_0^\infty \phi^2 |Y(\cdot, \rho_n)|^2 \neq 0. \tag{2.78}$$

Mit Lemma 2.9 a), angewandt auf ρ_n, gilt

$$Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)} = 4i\,(\operatorname{Re}\rho_n)(\operatorname{Im}\rho_n)\int_0^\infty \phi^2 |Y(\cdot,\rho_n)|^2. \tag{2.79}$$

Wegen

$$Y(0,\rho_n)\cos\alpha + Y'(0,\rho_n)\sin\alpha = \mathcal{W}(\rho_n, \alpha) = 0 \tag{2.80}$$

folgt, falls $\alpha \in [0, 2\pi)$ so gegeben ist, daß $\cos\alpha \neq 0$, dann

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha \cdot \Big(Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)}\Big) \\
&\overset{(2.80)}{=} \quad Y'(0,\rho_n)\Big(- \overline{Y'(0,\rho_n)}\sin\alpha\Big) - \Big(- Y'(0,\rho_n)\sin\alpha\Big)\overline{Y'(0,\rho_n)} \\
&= \quad 0,
\end{aligned}$$

also

$$Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)} = 0.$$

Ist nun hingegen $\cos\alpha = 0$, so ist $\sin\alpha \neq 0$, und es gilt wegen (2.80) dann $Y'(0,\rho_n) = 0$, so daß ebenfalls folgt

$$Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)} = 0.$$

Also ist für jedes $\alpha \in [0, 2\pi)$ gemäß (2.79)

$$4i\,(\mathrm{Re}\,\rho_n)(\mathrm{Im}\,\rho_n)\int_0^\infty \phi^2|Y(\cdot,\rho_n)|^2 = 0,$$

woraus wegen (2.78) und (2.72) dann

$$\mathrm{Re}\,(\rho_n) = 0$$

folgt, das ist die zu zeigende Beziehung (2.77).

Also sind nach (2.72), (2.77) die EWe ρ_n^2 negativ

$$\rho_n^2 < 0 \qquad (n \in N)$$

und besitzen nach (2.76) die Vielfachheit 1.

2. Schritt: $\arg\rho \in \{0, \pi\}$, d.h. $\rho^2 \in (0,\infty)$

Wir zeigen in diesem Beweisteil, daß in $(0,\infty)$ keine weiteren EWe von L liegen, d.h., daß

$$\sigma_p^*(L) \cap (0,\infty) = \emptyset \tag{2.81}$$

ist:

Wir nehmen dazu indirekt an, daß ein EW $\rho^2 \in (0,\infty)$ von L existiert, dabei sei o. B. d. A. $\rho > 0$. Dann gibt es ein $u_0 \in D(L) \setminus \{0\}$ mit $L_\rho u_0 = 0$, also mit $l_\rho u_0 = 0$ auf I, $u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha = 0$ und $u_0 \in H$. Nach Lemma 2.7 b) ist $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y,Y) \neq 0$, also bilden $y(\cdot,\rho)$ und $Y(\cdot,\rho)$ ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I; u_0 ist also eine Linearkombination

$$u_0(x) = c_1 y(x,\rho) + c_2 Y(x,\rho) \qquad (x \in I)$$

mit geeigneten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dann ist wegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha \neq 0$ und weil $y(\cdot,\rho)$ die Anfangsbedingung (1.2) erfüllt

$$\begin{aligned} 0 &= u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha \\ &= c_1\Big(y(0,\rho)\cos\alpha + y'(0,\rho)\sin\alpha\Big) + c_2\Big(Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha\Big) \\ &= c_2\mathcal{W}(\rho,\alpha) \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 = 0, \end{aligned}$$

also $u_0 = c_1 y(\cdot,\rho)$. Da aber $u_0 \in H$ und nach Lemma 2.8 c) $y(\cdot,\rho) \notin H$, folgt $c_1 = 0$, also $u_0 = 0$ im Widerspruch zu $u_0 \in D(L) \setminus \{0\}$.
Also gilt zusammenfassend für das Punktspektrum

$$\begin{aligned} \sigma_p^*(L) \cap (\mathbb{C} \setminus [0,\infty)) &= \{\rho_n^2 \mid n \in N\} \subset (-\infty,0), \\ \sigma_p^*(L) \cap (0,\infty) &= \emptyset, \end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma_p^*(L) = \{\rho_n^2 \mid n \in N\} \subset (-\infty,0);$$

es existieren über die im 1. Schritt gefundenen EWe hinausgehend keine weiteren EWe.

3. Schritt: Wir zeigen $\sigma_c^*(L) = (0,\infty)$.
Im 1. Schritt haben wir gesehen, daß für jedes $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$

$$\text{entweder } \rho^2 \in \rho(L) \qquad \text{oder } \rho^2 \in \sigma_p^*(L)$$

gilt (der erste Fall tritt nach (2.69) genau dann ein, falls $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$, der zweite nach (2.71) genau dann, falls $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$). Das kontinuierliche Spektrum kann also (falls nicht-leer) nur in $(0,\infty)$ liegen:

$$\sigma_c^*(L) \subset (0,\infty).$$

Wir beweisen nun noch

$$(0,\infty) \subset \sigma_c^*(L). \tag{2.82}$$

Sei $\rho_0^2 \in (0,\infty)$ und o. B. d. A. $\rho_0 > 0$. Nach dem 2. Schritt ist ρ_0^2 kein EW von L, es gilt also

$$\text{entweder } \rho_0^2 \in \rho(L) \qquad \text{oder } \rho_0^2 \in \sigma_c^*(L).$$

Wenn wir also zeigen, daß $\rho_0^2 \notin \rho(L)$, so folgt $\rho_0^2 \in \sigma_c^*(L)$. Nehmen wir deshalb indirekt an, daß $\rho_0^2 \in \rho(L)$ sei. Da L nach Satz 2.4 abgeschlossen ist, ist die Resolvente, aufgefaßt als Abbildung

$$\rho(L) \;\to\; B(H)\,, \quad \rho^2 \;\mapsto\; L_\rho^{-1}$$

stetig (siehe z. B. Weidmann [32, S. 99, Satz 5.15]), also insbesondere im Punkt ρ_0^2 stetig, und es gilt daher

$$\lim_{s\downarrow 0}\left(\Big(L - (\rho_0^2 + is)\,id\Big)^{-1} - \Big(L - (\rho_0^2 - is)\,id\Big)^{-1}\right) = 0. \tag{2.83}$$

Dies werden wir nun widerlegen; dafür ist nachzuweisen, daß

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big((L_{\sqrt{\rho_0^2+is}})^{-1}-(L_{\sqrt{\rho_0^2-is}})^{-1}\Big)\neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{s\downarrow 0}\Big((L_{\rho_0+is})^{-1}-(L_{-\rho_0+is})^{-1}\Big)\neq 0$$

gilt; dafür wiederum reicht es, für die Greensche Funktion den Grenzwert

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big) \quad \text{für } x,t\in I$$

zu untersuchen und zu zeigen, daß dieser nicht gleich der Nullfunktion auf $I\times I$ ist.
Nach Lemma 2.5 gilt wegen $\rho_0>0$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(-\rho_0,\alpha) &= Y(0,-\rho_0)\cos\alpha+Y'(0,-\rho_0)\sin\alpha \\ &= -\overline{Y(0,\rho_0)}\cos\alpha-\overline{Y'(0,\rho_0)}\sin\alpha \\ &= -\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}, \end{aligned}$$

so daß mit Lemma 2.7 b) aufgrund von $\rho_0>0$

$$\mathcal{W}(-\rho_0,\alpha)=-\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\neq 0$$

ist. Weil weiter für fest gewählte $x,t\in I$ die Funktion $G(x,t,\cdot)$ im Punkt $\rho_0>0$ und im Punkt $-\rho_0<0$ gemäß Korollar 2.2 stetig ist, gilt wiederum mit Lemma 2.5 für $x\leq t$

$$\begin{aligned} \lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big) &= G(x,t,\rho_0)-G(x,t,-\rho_0) \\ = \; -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\,y(x,\rho_0)\,Y(t,\rho_0)+\frac{1}{\mathcal{W}(-\rho_0,\alpha)}\,y(x,-\rho_0)\,Y(t,-\rho_0) \\ = \; -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\,y(x,\rho_0)\,Y(t,\rho_0)-\frac{1}{\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}}\,y(x,\rho_0)\,Y(t,-\rho_0) \\ = \; -\frac{y(x,\rho_0)\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\,Y(t,\rho_0)+\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)\,Y(t,-\rho_0)\Big)}{|\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)|^2}, \end{aligned}$$

so daß mit Formel (2.44) aus dem Beweis von Lemma 2.7 b) für $x\leq t$ folgt

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big)=-\frac{6\rho_0^{2/3}}{\pi i}\frac{y(x,\rho_0)\,y(t,\rho_0)}{|\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)|^2}; \tag{2.84}$$

dies zeigt man analog auch für $x>t$.
Wegen $y(0,\rho_0)=\sin\alpha$, $y'(0,\rho_0)=-\cos\alpha$ gibt es ein $a\in\mathbb{R}$ mit $0<a<x_1$ und

$$y(t,\rho_0)\neq 0 \quad \text{für alle } t\in(0,a).$$

Also ist mit (2.84) zumindest

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big)\neq 0 \quad \text{für alle } x,t\in I \text{ mit } x,t\in(0,a).$$

Damit ist (2.83) widerlegt und $\rho_0^2 \in \sigma_c^*(L)$.
Insbesondere gilt nach den bisherigen Überlegungen

$$\sigma^*(L) = \sigma_p^*(L) \cup \sigma_c^*(L) \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}.$$

$\square$

Korollar 2.4. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Ist $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gewählt mit $0 \leq \arg \rho < \pi$, so gilt*

$$\rho^2 \text{ ist Eigenwert von } L \iff \mathcal{W}(\rho, \alpha) = 0.$$

Beweis. Siehe Formel (2.71), falls $0 < \arg \rho < \pi$, und (2.81) und Lemma 2.7 b), falls $\arg \rho = 0$. $\square$

Nun ist noch Teil b) der Bemerkung 2.4 zu beweisen.

Beweis von Bemerkung 2.4 b). Wir wollten in diesem Teil der Bemerkung herleiten, daß bei vorliegender Indefinitheit von ϕ^2 die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) dann normal ist, wenn zusätzlich zu den Voraussetzungen (2.7), (2.8) aus Teil a) noch

$$\alpha \in \{0\} \cup [\tfrac{\pi}{2}, \pi] \cup [\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi) \quad \text{und} \quad \chi \geq 0 \text{ fast überall in } I \tag{2.85}$$

gilt. Es gelte nun also (2.7), (2.8) und (2.85). Dann sind nach Bemerkung 2.4 a) die Voraussetzungen (2.3), (2.4), (2.5) von Satz 2.1 erfüllt, und der Beweis von Satz 2.1 bleibt von seinem Anfang bis hin zu Formel (2.76) weiter gültig, da erst nach Formel (2.76) die dort vorausgesetzte Normalität (d.h. Bedingung (2.6)) in den Beweis eingeht.
Um zu zeigen, daß das gegebene Eigenwertproblem normal ist, sei $n \in N$ fest gewählt und u Eigenfunktion zum EW ρ_n^2 von L. Wir lassen im folgenden die Angabe des Parameters ρ_n in den Argumenten der Funktionen meist weg.
Wegen (2.76) ist $u = c \cdot Y$ mit einem geeigneten $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ wegen $u \neq 0$. Es reicht also zu zeigen, daß

$$\int_0^\infty \phi^2 |Y|^2 \neq 0 \tag{2.86}$$

gilt. Dazu beweisen wir zunächst:

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b Y'' \overline{Y} \in (-\infty, 0); \tag{2.87}$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b \chi |Y|^2 \in [0, \infty). \tag{2.88}$$

Zum Nachweis von (2.87):
Es ist für $b > 0$ wegen $Y, Y' \in AC_{\text{loc}}(I)$, $Y'' \in L^1_{\text{loc}}(I)$

$$\int_0^b Y'' \overline{Y} = Y'(b)\overline{Y(b)} - Y'(0)\overline{Y(0)} - \int_0^b |Y'|^2; \tag{2.89}$$

wir untersuchen die Terme auf der rechten Seite. Nach Lemma 2.3 c) gilt mit Konstanten $C, C' \neq 0$

$$\begin{aligned} Y(x) &= C\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho_n\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \\ Y'(x) &= C'\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho_n\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \end{aligned}$$

woraus wegen $\mathrm{Im}\,(\rho_n) > 0$ gemäß (2.72)

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} Y'(b)\overline{Y(b)} &= C'\overline{C}\lim_{b\to\infty} e^{i\rho_n\xi(b)}\Big(\overline{e^{i\rho_n\xi(b)}}\Big)\cdot(1+o(1)) \\ &= C'\overline{C}\lim_{b\to\infty} e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho_n)\xi(b)}\cdot(1+o(1)) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.90}$$

folgt. Aufgrund von $0 = \mathcal{W}(\rho_n,\alpha) = Y(0)\cos\alpha + Y'(0)\sin\alpha$ ist

$$Y(0)\cos\alpha = -Y'(0)\sin\alpha, \tag{2.91}$$

dies liefert

$$-\,Y'(0)\overline{Y(0)}\cos\alpha = -Y'(0)\Big(-\,\overline{Y'(0)}\sin\alpha\Big) = |Y'(0)|^2\sin\alpha. \tag{2.92}$$

Ist nun $\alpha \in \{0\}\cup(\frac{\pi}{2},\pi]\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, so ist $\tan\alpha \le 0$ und mit (2.92)

$$-Y'(0)\overline{Y(0)} = |Y'(0)|^2\tan\alpha \le 0,$$

ist hingegen $\alpha \in \{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$, also $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha \neq 0$, folgt aus (2.91) sofort $Y'(0) = 0$, dann ist

$$-Y'(0)\overline{Y(0)} = 0.$$

Also gilt für jedes in Voraussetzung (2.85) zugelassene α

$$-\,Y'(0)\overline{Y(0)} \le 0. \tag{2.93}$$

Nach Lemma 2.8 a) ist $Y' \in L^2(I)$; nach dem Satz von Lebesgue ist daher

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b |Y'|^2 = \int_0^\infty |Y'|^2 < \infty. \tag{2.94}$$

Also folgt in (2.89) mit $b\to\infty$ zusammen mit (2.90), (2.93) und (2.94) die Existenz von $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b Y''\overline{Y}$ und

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b Y''\overline{Y} \le -\int_0^\infty |Y'|^2 \in (-\infty,0]. \tag{2.95}$$

Wäre nun hierbei $\int\limits_0^\infty |Y'|^2 = 0$, so folgte $Y'(x) = 0$ für fast alle $x \in I$. Da $Y \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$, folgte, daß Y auf I konstant wäre, d.h.

$$Y(x) = c \quad \text{für alle } x \in I$$

mit geeignetem $c \in \mathbb{C}$. Wäre nun, wieder indirekt angenommen, $c = 0$, also Y die Nullfunktion, ergibt sich ein Widerspruch zu (2.18), wäre $c \neq 0$, ergäbe sich

$$\int_0^\infty |\phi^2||Y|^2 = |c|^2 \int_0^\infty |\phi^2| = +\infty$$

wegen (2.7), das ist ein Widerspruch zu $Y \in H$ gemäß Lemma 2.8 a).
Also ist $\int\limits_0^\infty |Y'|^2 > 0$, und in (2.95) dann

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b Y''\overline{Y} \in (-\infty, 0),$$

das ist (2.87).

Zum Nachweis von (2.88):
Wegen $l_{\rho_n} Y = 0$ auf I nach Lemma 2.4 gilt für jedes $b > 0$

$$0 = \int_0^b (l_{\rho_n} Y)\overline{Y} = -\int_0^b Y''\overline{Y} + \int_0^b \chi |Y|^2 - \rho_n^2 \int_0^b \phi^2 |Y|^2,$$

also

$$\int_0^b \chi |Y|^2 = \int_0^b Y''\overline{Y} + \rho_n^2 \int_0^b \phi^2 |Y|^2. \tag{2.96}$$

Nach Lemma 2.8 a) existiert $\int\limits_0^\infty |\phi^2||Y|^2$, so daß der Satz von Lebesgue die Existenz von

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \phi^2 |Y|^2 = \int_0^\infty \phi^2 |Y|^2 \tag{2.97}$$

liefert; mit $b \to \infty$ in (2.96) zusammen mit (2.87) folgt die Existenz von $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \chi |Y|^2$, und mit $\chi |Y|^2 \geq 0$ fast überall in I gemäß Voraussetzung (2.85) erhalten wir

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi |Y|^2 \in [0, \infty).$$

Damit ist auch (2.88) bewiesen.
Es folgt nun mit (2.96), (2.97)

$$\rho_n^2 \int_0^\infty \phi^2 |Y|^2 \overset{(2.97)}{=} \rho_n^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^b \phi^2 |Y|^2 \overset{(2.96)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi |Y|^2 - \lim_{b\to\infty} \int_0^b Y''\overline{Y}. \tag{2.98}$$

Wäre nun (2.86) falsch, also $\rho_n^2 \int\limits_0^\infty \phi^2 |Y|^2 = 0$, so folgte mit (2.87) und (2.88)

$$0 \le \lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi |Y|^2 \overset{(2.98)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b Y'' \overline{Y} < 0;$$

Widerspruch. Daher ist (2.86) wahr, d.h. das Eigenwertproblem ist normal. □

Wir schließen dieses Kapitel mit

Bemerkung 2.5. *Setzt man in Bemerkung 2.4 b) statt* $\chi \ge 0$ *fast überall nun* $\chi \le 0$ *fast überall voraus, so wird der Beweis von Bemerkung 2.4 b) falsch.*

Beweis. Sei $\chi \le 0$ fast überall in I. Im Beweis von Bemerkung 2.4 b) gilt dann statt (2.88)

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi |Y|^2 \in (-\infty, 0]$$

und wie bisher

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b Y'' \overline{Y} \in (-\infty, 0),$$

so daß mit (2.98) keine Aussage darüber möglich ist, ob

$$\rho_n^2 \int_0^\infty \phi^2 |Y|^2 \overset{(2.98)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi |Y|^2 - \lim_{b\to\infty} \int_0^b Y'' \overline{Y}$$

von Null verschieden ist, bzw. kein Widerspruch wie dort zu erzielen ist. □

Die bisherige Vorgehensweise ist weitgehend analog zu Stakun [27], [29], insbesondere die Betrachtung der Standardform der Differentialgleichung (1.1), die Wahl der Lösungen y durch Anfangsbedingungen und Y durch eine geeignete Integralgleichung, und die Möglichkeit der Darstellung der Resolvente L_ρ^{-1} vermöge y und Y, um die gewünschten Aussagen über das Spektrum von L herzuleiten, und daß dabei $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ zur Bestimmung der Eigenwerte herangezogen werden kann. Ebenfalls zeigen sich viele Übereinstimmungen in den Resultaten dieses Kapitels und denen von Stakun in [27].

Im folgenden Kapitel über die Eigenwertasymptotik werden wir Ergebnisse aus Eberhard-Freiling-Schneider [9] verwenden, die Vorgehensweise wird analog zu Eberhard-Freiling [5] sein.