Kapitel 2

Aussagen über das Spektrum

2.1 Bezeichnungen

Sei für die gesamten weiteren Betrachtungen stets $m \geq 2$, d.h. ϕ^2 besitze mindestens zwei Nullstellen, und sei $\epsilon \in \mathbb{R}$ fest gewählt mit

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_m - x_{m-1}, 1 - x_m\}.$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$I := [0, \infty), \qquad \tilde{I} := [x_m + \epsilon, \infty),$$

$$\xi(x) := \int_{x_m}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\, dt \qquad (x > x_m),$$

$$w(x) := \Big(\frac{3}{2}\xi(x)\Big)^{2/3} \qquad (x > x_m).$$

Da $\sqrt{\phi^2(t)} > 0$ für $t > x_m$ und $\phi^2 \in C^2(I)$, ist ξ streng monoton steigend für $x > x_m$ und $\xi \in C^3((x_m, \infty))$, also $w \in C^3((x_m, \infty))$ mit $w'(x) > 0$ für $x > x_m$. Daher existiert

$$\theta(x) := -\sqrt{w'(x)}\, \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right)(x) \qquad (x > x_m),$$

und ist stetig und reellwertig. Sei weiter

$$F(x) := -\theta(x) - \chi(x) \qquad (x > x_m),$$

es ist dann $F \in L^1_{\mathrm{loc}}((x_m, \infty))$ und reellwertig. Seien

$$\phi^2_\pm := \max\{\pm\phi^2, 0\}$$

der Positiv– bzw. Negativteil von ϕ^2 sowie

$$R_\pm := \int_0^1 \sqrt{\phi^2_\pm(t)}\, dt.$$

Bemerkung 2.1. Es gilt

$$\theta(x) = \frac{5}{36}\frac{\phi^2(x)}{(\xi(x))^2} - \frac{5}{16}\left(\frac{(\phi^2)'(x)}{\phi^2(x)}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{(\phi^2)''(x)}{\phi^2(x)} \qquad (x > x_m), \tag{2.1}$$

$$\frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} = -\frac{5}{36}\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{(\xi(x))^2} + \frac{5}{16}\frac{((\phi^2)'(x))^2}{(\phi^2(x))^{5/2}} - \frac{1}{4}\frac{(\phi^2)''(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} - \frac{\chi(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \qquad (x > x_m). \tag{2.2}$$

Beweis. Für $x > x_m$ gilt:

$$w'(x) = \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\xi(x)\Big)^{-1/3} \cdot \frac{3}{2}\xi'(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,\xi(x)^{-1/3}\sqrt{\phi^2(x)},$$

also

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right)(x) \;&=\; \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\Big(-\frac{5}{36}(\xi(x))^{-11/6}(\phi^2(x))^{3/4} + \frac{5}{16}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-9/4}((\phi^2)'(x))^2 \\ &\quad -\frac{1}{4}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)''(x)\Big),\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\theta(x) \;&=\; -\sqrt[6]{\frac{2}{3}}(\xi(x))^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\sqrt[6]{\frac{3}{2}}\Big(-\frac{5}{36}(\xi(x))^{-11/6}(\phi^2(x))^{3/4} \\ &\quad +\frac{5}{16}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-9/4}((\phi^2)'(x))^2 - \frac{1}{4}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)''(x)\Big) \\ &=\; \frac{5}{36}(\xi(x))^{-2}\phi^2(x) - \frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-2}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-1}(\phi^2)''(x),\end{aligned}$$

d.h. (2.1); daraus folgt mit der Definition von F auch die Behauptung (2.2). □

Die *Landau–Symbole* o, O seien auf folgende Weise definiert, wie wir sie benötigen werden: Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{C}$, so daß ∞ Häufungspunkt von S ist, und seien $f, g : S \to \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$f(z) = O(g(z)) \quad (|z| \to \infty, z \in S), \quad \text{wenn } A \geq 0 \text{ und } C \geq 0 \text{ existieren mit}$$
$$|f(z)| \leq C|g(z)| \qquad (z \in S, |z| \geq A);$$

bzw.

$$f(z) = o(g(z)) \quad (|z| \to \infty, z \in S), \quad \text{wenn } \lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = 0.$$

Die angegebene Definition von O wird in der Literatur oft als *gleichmäßig in S gültig* bezeichnet.
o, O seien sinngemäß analog definiert für Funktionen $f, g : J \to \mathbb{C}$ mit $J = [a, \infty)$ bzw. $J = (a, \infty)$ mit festem $a \in \mathbb{R}$ und Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2 Ergebnisse

Sei im folgenden stets der Hilbertraum $H := L^2_{|\phi^2|}(I)$ mit dem bereits angegebenen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|$ zugrunde gelegt. Mit id sei die identische Abbildung in H bezeichnet. Die vorher eingeführten Operatoren L und L_ρ sind lineare Operatoren in H.

Falls ein Teilintervall $(x_\nu, x_{\nu+1}) \subset [0,1]$ (mit geeignetem $\nu \in \{1,\ldots,m-1\}$) mit $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in (x_\nu, x_{\nu+1})$ existiert oder $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in [0, x_1)$ ist, gilt im allgemeinen

$$(Lu, v) \neq (u, Lv) \quad \text{für } u, v \in D(L) \cap \{u \mid u \in C^2(I),\ \operatorname{supp} u \subset (0,\infty) \text{ kompakt}\},$$

wie man mit partieller Integration leicht sieht. Dann ist L nicht hermitesch und nicht selbstadjungiert. Die funktionalanalytischen Eigenschaften hermitescher Operatoren sind also hier nicht unmittelbar anwendbar, ebenso ist die Betrachtung der Frage nach der Existenz selbstadjungierter Fortsetzungen eines minimalen Operators, der hermitesch ist, nicht sinnvoll. Deshalb werden wir die Aussagen über das Spektrum von L mit Hilfe von Untersuchungen der Resolvente von L durchführen, wie auch in Stakun [27] geschehen.

Definition 2.1.

a) Als *Spektrum der Eigenwertaufgabe* (1.1), (1.2), (1.3) definieren wir das Spektrum $\sigma(L)$ des zugehörigen Operators L.

b) Wir nennen die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) *normal*, wenn für jede Eigenfunktion u von L
$$\int_0^\infty \phi^2 |u|^2 \neq 0$$
gilt.

Teil b) von Definition 2.1 ist eine naheliegende Verallgemeinerung von Kamke [11, S. 201] für Eigenwertaufgaben auf kompakten Intervallen.

Sei im weiteren stets $\rho \neq 0$. Da die Hauptaussage dieser Arbeit in der asymptotischen Darstellung der Eigenwerte von (1.1), (1.2), (1.3) liegt, bedeutet dies keine Einschränkung. Deshalb definieren wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \sigma^*(L) &:= \sigma(L) \setminus \{0\}, \\ \sigma_p^*(L) &:= \sigma_p(L) \setminus \{0\}, \\ \sigma_c^*(L) &:= \sigma_c(L) \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

und nennen auch $\sigma^*(L)$ (bzw. $\sigma_p^*(L), \sigma_c^*(L)$) das Spektrum (bzw. Punktspektrum, kontinuierliches Spektrum) von L.

Die zentralen Eigenschaften des Spektrums von L formulieren wir im folgenden Satz, der eine Verallgemeinerung von Stakun [27, Thm. 1] und [29] darstellt auf Gewichtsfunktionen mit mehreren Nullstellen, allerdings mit etwas verschärften Voraussetzungen.

Satz 2.1. *Es seien zusätzlich zu den eingangs erwähnten Voraussetzungen an* ϕ^2 *und* χ *die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$\lim_{x\to\infty} \xi(x) = +\infty, \tag{2.3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m+\epsilon,\infty)), \tag{2.5}$$

(2.6) *die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) sei normal.*

Dann ist das Spektrum von L *reell, das Punktspektrum* $\sigma_p^*(L)$ *liegt in* $(-\infty,0)$ *und besteht aus höchstens abzählbar vielen EWen der (geometrischen) Vielfachheit 1, für das kontinuierliche Spektrum gilt* $\sigma_c^*(L) = (0,\infty)$.

Bemerkung 2.2. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt: $0 \le R_- < +\infty$.

Bemerkung 2.3. In Satz 2.1 ist zugelassen, daß ϕ^2 zwar Nullstellen in $(0,1)$ besitzt, daß jedoch $\phi^2 \ge 0$ auf I gilt, d.h., daß ϕ^2 nicht indefinit ist. Unter der gegenüber Satz 2.1 zusätzlichen Voraussetzung, daß ein Intervall $(a,b) \subset [0,1]$ mit $\phi^2 < 0$ auf (a,b) existiert, d.h. $R_- > 0$, werden wir in Kapitel 3 zeigen, daß über Satz 2.1 hinausgehend das Punktspektrum $\sigma_p^*(L)$ nicht–leer ist und aus abzählbar unendlich vielen EWen besteht, und werden eine asymptotische Darstellung der EWe angeben.

Bemerkung 2.4. Eine große Klasse von Funktionen ϕ^2 und χ erfüllt die Bedingungen (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) von Satz 2.1. Genauer gilt:

a) Alle Funktionen ϕ^2, die auf $[x_m+\epsilon,\infty)$ gleich einem nullstellenfreien, positiven Polynom vom Grad größer oder gleich 1 mit positivem Leitkoeffizienten sind, d.h. die Gestalt

$$\phi^2(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k > 0 \quad \text{für } x \ge x_m+\epsilon \text{ mit } n \ge 1 \text{ und } a_n > 0 \tag{2.7}$$

besitzen, erfüllen Voraussetzung (2.3) und (2.4). Wählt man dann χ mit

$$|\chi(x)| \le \gamma x^\beta \quad \text{für } x \ge x_m+\epsilon \text{ mit } \gamma > 0 \text{ und } \beta < \frac{n}{2} - 1, \tag{2.8}$$

so ist auch Voraussetzung (2.5) erfüllt.

b) Ist ϕ^2 nicht indefinit, d.h. $\phi^2 > 0$ fast überall auf I, so ist (2.6) offensichtlich erfüllt. Für den interessanteren Fall, daß ϕ^2 indefinit ist, gilt folgendes:

Ist $\alpha \in \{0\} \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ und ist zusätzlich zu (2.7), (2.8)

$$\chi \geq 0 \quad \text{fast überall in } I,$$

so ist schließlich auch Voraussetzung (2.6) erfüllt.

Beweis.

a) Gilt (2.7), so ist offensichtlich (2.3) erfüllt. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(\phi^2)'(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}, \quad x \geq x_m + \epsilon, \\
(\phi^2)''(x) &= \begin{cases} \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1) x^{k-2}, & x \geq x_m + \epsilon, \text{ falls } n \geq 2, \\ 0, & x \geq x_m + \epsilon, \text{ falls } n = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Polynomgestalt von ϕ^2 und seinen Ableitungen gelten mit geeigneten $A_1, A_2, A_3 \geq x_m + \epsilon$ die Abschätzungen

$$\begin{array}{rcccll}
\frac{1}{2}a_n x^n & \leq & \phi^2(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n x^n & \text{für } x \geq A_1, \\
\frac{1}{2}a_n n x^{n-1} & \leq & (\phi^2)'(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n x^{n-1} & \text{für } x \geq A_2, \\
0 \leq \frac{1}{2}a_n n(n-1) x^{n-2} & \leq & (\phi^2)''(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n(n-1) x^{n-2} & \text{für } x \geq A_3, n \geq 2, \text{ bzw.} \\
 & & (\phi^2)''(x) & = & 0 & \text{für } x \geq x_m + \epsilon, n = 1.
\end{array}$$

Also gibt es ein $A \geq x_m + \epsilon$, so daß (für jedes $n \geq 1$)

$$\text{(2.9)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcccll}
\frac{1}{2}a_n x^n & \leq & \phi^2(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n x^n & \text{für } x \geq A, \\
\frac{1}{2}a_n n x^{n-1} & \leq & (\phi^2)'(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n x^{n-1} & \text{für } x \geq A, \\
0 & \leq & (\phi^2)''(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n(n-1) x^{n-2} & \text{für } x \geq A.
\end{array} \right.$$

Damit folgt

$$0 = \frac{n}{3\sqrt{\frac{3}{2}a_n}} \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{n}{2}-1} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} \leq \frac{3n}{\sqrt{\frac{1}{2}a_n}} \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{n}{2}-1} = 0,$$

also ist auch (2.4) erfüllt.

Aus (2.9) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= \int_{x_m}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\,dt \;=\; \int_{x_m}^{A} \sqrt{\phi^2(t)}\,dt + \int_{A}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\,dt \\
&\geq \int_{A}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\,dt \;\geq\; \int_{A}^{x} \sqrt{\frac{1}{2} a_n t^n}\,dt \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} a_n}\, \frac{1}{\frac{n}{2}+1}\, t^{\frac{n}{2}+1}\Big|_{A}^{x} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} a_n}\, \frac{2}{n+2} \left(x^{\frac{n}{2}+1} - A^{\frac{n}{2}+1} \right) \qquad (x \geq A),
\end{aligned}$$

und so

$$\frac{1}{\xi(x)^2} \leq \frac{(n+2)^2}{2a_n} \frac{1}{\left(x^{\frac{n}{2}+1} - A^{\frac{n}{2}+1} \right)^2} \qquad (x > A).$$

Nun gibt es ein $B \geq A \geq x_m + \epsilon$, so daß

$$x^{\frac{n}{2}+1} \geq \frac{A^{\frac{n}{2}+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \text{für alle } x \geq B$$

gilt. Dann folgt

$$\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) x^{\frac{n}{2}+1} \geq A^{\frac{n}{2}+1} \qquad (x \geq B),$$

also

$$\left(x^{\frac{n}{2}+1} - A^{\frac{n}{2}+1} \right)^2 \geq \frac{1}{2} x^{n+2} \qquad (x \geq B),$$

so daß

(2.10)
$$\frac{1}{\xi(x)^2} \leq \frac{(n+2)^2}{a_n} \frac{1}{x^{n+2}} \qquad (x \geq B)$$

folgt. Für $|\theta|$ folgt damit nach (2.1), (2.9) und (2.10)

$$\begin{aligned}
|\theta(x)| &\leq \frac{5}{36}\left|\frac{\phi^2(x)}{\xi(x)^2}\right| + \frac{5}{16}\left|\Big(\frac{(\phi^2)'(x)}{\phi^2(x)}\Big)^2\right| + \frac{1}{4}\left|\frac{(\phi^2)''(x)}{\phi^2(x)}\right| \\
&\leq \frac{181n^2 + 4n + 40}{48x^2} \qquad (x \geq B),
\end{aligned}$$

also ist mit (2.7) die Funktion $\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}}$ auf $[B, \infty)$ integrierbar; da $\left|\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}}\right|$ auf $[x_m + \epsilon, B]$ stetig ist, folgt insgesamt

$$\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty)).$$

Damit nun (2.5), d.h.

$$\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} = -\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}} - \frac{\chi}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty))$$

erfüllt ist, ist es hinreichend zu zeigen, daß

$$\frac{\chi}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty))$$

ist. Dies ist sicher dann wahr, wenn χ die Bedingung (2.8) erfüllt, denn dann folgt:
Da ϕ^2 auf $[x_m + \epsilon, A]$ stetig und nullstellenfrei ist, gibt es ein $C > 0$ mit

$$\frac{1}{\sqrt{\phi^2(x)}} \leq C \quad \text{für } x \in [x_m + \epsilon, A],$$

und somit zusammen mit (2.8)

$$\frac{|\chi(x)|}{\sqrt{\phi^2(x)}} \leq C\gamma x^\beta \qquad (x \in [x_m + \epsilon, A]);$$

für $x \geq A$ gilt mit (2.9)

$$\frac{|\chi(x)|}{\sqrt{\phi^2(x)}} \leq \frac{\gamma x^\beta}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a_n}\, x^{\frac{n}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,\gamma}{\sqrt{a_n}}\, x^{\beta - \frac{n}{2}} \qquad (x \geq A),$$

mit $\beta - \frac{n}{2} < -1$ nach Voraussetzung. Daher ist

$$\frac{\chi}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty)).$$

Analog zeigt man, daß auch alle Funktionen ϕ^2, χ mit

$$\phi^2(x) = cx^\delta \quad (x \geq x_m + \epsilon) \quad \text{mit } c > 0, \delta \in \mathbb{R}, \delta \geq 1$$

und

$$|\chi(x)| \leq \gamma x^\beta \quad (x \geq x_m + \epsilon) \quad \text{mit } \gamma > 0, \beta < \frac{\delta}{2} - 1$$

die Bedingungen (2.3), (2.4), (2.5) erfüllen.

b) Teil b) werden wir erst im Anschluß an den Beweis von Satz 2.1 nachweisen, wenn alle Hilfsmittel dazu bereitgestellt worden sind. □

Der Rest dieses Kapitels ist dem Beweis von Satz 2.1 und Bemerkung 2.4 b) gewidmet, dazu treffen wir die folgenden Vorbereitungen. Seien im weiteren stets die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Wie eingangs erwähnt, ist es ausreichend, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$, d.h. $\mathrm{Im}\,(\rho) \geq 0$, zu betrachten.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$l_\rho^\theta u := -u'' + (-\theta - \rho^2\phi^2)u = 0 \quad \text{auf } (x_m, \infty); \tag{2.11}$$

da θ nur vom gegebenen ϕ^2 abhängt (vgl. (2.1)), nennen wir (2.11) *Standardform* der Differentialgleichung (1.1) in Analogie zu Stakun [27], [28] und Dorodnicyn [4]. Diese Differentialgleichung ist nun auf (x_m, ∞) explizit z. B. mit Hilfe von Hankelfunktionen lösbar. Es bezeichne $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ die Hankelfunktionen der Ordnung ν.

Lemma 2.1. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei* $0 \le \arg\rho \le \pi$. *Die Funktionen*

$$v_j(x,\rho) := \frac{1}{\sqrt{w'(x)}} \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \Big(\rho\xi(x)\Big)^{1/3} H_{1/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \qquad (x \in (x_m,\infty),\ j = 1,2) \tag{2.12}$$

sind Lösungen von (2.11) und bilden (für $\rho \neq 0$*) ein Fundamentalsystem von (2.11) auf* (x_m,∞)*. Es gilt*

$$W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho)) = -\frac{6i}{\pi}\rho^{2/3}. \tag{2.13}$$

In Anhang B listen wir einige Eigenschaften von Hankelfunktionen auf, die im weiteren benötigt werden. Zu Lemma 2.1 vgl. auch Stakun [27, S. 1456].

Beweis von Lemma 2.1. Sei ρ fest gewählt. Mit

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz}\Big(z^\nu H_\nu^{(j)}(z)\Big) &= z^\nu\, H_{\nu-1}^{(j)}(z) \\ H_{-\nu}^{(j)}(z) &= e^{(-1)^{j-1}\nu\pi i}\, H_\nu^{(j)}(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \nu \in \mathbb{C}, j = 1,2$$

nach Anhang B, (B.1), (B.2), erhalten wir $v_j(\cdot,\rho) \in C^2((x_m,\infty))$ für $j = 1,2$ mit

$$\left\{\begin{aligned} v_j'(x,\rho) \;=\; &\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3} H_{1/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \\ &+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i}\, H_{2/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \qquad (x > x_m), \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

$$
(2.15)\quad \left\{
\begin{aligned}
v_j''(x,\rho) \;=\;& \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H^{(j)}_{1/3}(\rho\xi(x)) \cdot \Big\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)''(x)(\rho\xi(x))^{1/3} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \rho^2\phi^2(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\, e^{(-1)^{j-1}\pi i}\Big\} \\
&+ \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H^{(j)}_{2/3}(\rho\xi(x)) \cdot \Big\{ 2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\, \rho\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \rho\, \frac{1}{2\sqrt{\phi^2(x)}}\, (\phi^2)'(x)\, (\rho\xi(x))^{1/3}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i} \\
&- \frac{1}{3}\, \rho^2\phi^2(x)\, \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, (\rho\xi(x))^{-2/3}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i}\Big\} \qquad (x > x_m),
\end{aligned}
\right.
$$

womit dann folgt, daß

$$
\begin{aligned}
l^\theta_\rho v_j(\cdot,\rho) \;=\;& -v_j''(\cdot,\rho) - \theta v_j(\cdot,\rho) - \rho^2\phi^2 v_j(\cdot,\rho) \\
=\;& -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H^{(j)}_{1/3}(\rho\xi) \cdot \Big\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{\sqrt{w'}}\rho^2\phi^2 \cdot (\rho\xi)^{1/3} \\
& -\sqrt{w'} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} + \rho^2\phi^2 \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} \Big\} \\
& -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H^{(j)}_{2/3}(\rho\xi)\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i} \cdot \Big\{ 2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)' \cdot (\rho\xi)^{1/3}\, \rho\sqrt{\phi^2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{w'}}\, \rho\, \frac{1}{2\sqrt{\phi^2}}\, (\phi^2)' \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{3}\rho^2\phi^2\, \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{-2/3} \Big\} \\
=\;& 0,
\end{aligned}
$$

wenn

$$
\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{\sqrt{w'}}\, \rho^2\phi^2 \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot (\rho\xi)^{1/3} + \rho^2\phi^2 \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} \;=\; 0
$$

und

$$
2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)' \cdot (\rho\xi)^{1/3}\, \rho\sqrt{\phi^2} + \frac{1}{\sqrt{w'}}\, \rho\, \frac{(\phi^2)'}{2\sqrt{\phi^2}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{3}\rho^2\phi^2\, \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{-2/3} \;=\; 0.
$$

Die erste der beiden letzten Gleichungen ist offensichtlich erfüllt, die zweite bleibt noch zu verifizieren. Mit

$$
\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x) = \frac{1}{6}\, \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \frac{1}{\xi(x)}\, \sqrt{\phi^2(x)} - \frac{1}{4}\, \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \frac{(\phi^2)'(x)}{\phi^2(x)} \qquad (x > x_m)
$$

nach Definition von w gilt

$$\begin{aligned}
2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)' \cdot (\rho\xi)^{1/3}\,\rho\sqrt{\phi^2} + \frac{1}{\sqrt{w'}}\,\rho\,\frac{(\phi^2)'}{2\sqrt{\phi^2}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{3}\rho^2\phi^2\,\frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{-2/3} \\
= \frac{1}{\sqrt{w'}}\,\rho^{4/3}\Big(\frac{1}{3}\xi^{-2/3}\phi^2 - \frac{1}{2}\frac{(\phi^2)'}{\sqrt{\phi^2}} \cdot \xi^{1/3} + \xi^{1/3}\frac{(\phi^2)'}{2\sqrt{\phi^2}} - \frac{1}{3}\xi^{-2/3}\phi^2\Big) \\
= 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$l_\rho^\theta v_j(\cdot,\rho) = 0 \quad \text{auf } (x_m,\infty),\ j = 1,2.$$

Für $W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))$ folgt mit

$$H_\nu^{(1)}(z)\,\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\,\frac{d}{dz}H_\nu^{(1)}(z) \;=\; -\frac{4i}{\pi z} \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \nu \in \mathbb{C})$$

nach Anhang B, (B.3), unter Verwendung der Kettenregel

$$W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho)) = -\frac{6i}{\pi}\,\rho^{2/3} \neq 0$$

wegen $\rho \neq 0$. □

Wie bereits erwähnt, heißt (2.11) im Falle der Existenz genau einer Nullstelle x_1 der Ordnung $l_1 = 1$ von ϕ^2 in Stakun [27] die Standardform von (1.1). In Stakun [29] und Langer [15] wird eine zu (2.11) analoge Gleichung auch im Falle der Existenz genau einer Nullstelle x_1 höherer Ordnung $l_1 \geq 1$ *Standardform* bzw. *related equation* genannt. Diese Gleichungen sind mit Hilfe von Funktionen, die im wesentlichen aus Zylinderfunktionen bestehen, explizit lösbar. Bei einer Nullstelle der Ordnung $l_1 > 1$ enthalten die zu v_j analogen Lösungen der Standardform von (1.1) bei Stakun [29] bzw. Langer [15] dann Hankelfunktionen der Ordnung $\mu = \frac{1}{l_1+2}$ im Gegensatz zu $H_{1/3}^{(j)}$ bei v_j (s. [29, S. 667], [15, S. 25–29]). Für unsere Zwecke jedoch ist Gleichung (2.11) ausreichend.

Für v_j und deren Ableitungen wollen wir nun asymptotische Darstellungen angeben. Dies ist möglich durch Verwendung asymptotischer Darstellungen für Hankelfunktionen.

Lemma 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Seien* $C_j := \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,e^{(-1)^j\frac{5}{12}\pi i}$ *für* $j = 1,2$ *und*

$$r(x) := -\frac{1}{4}\frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} + \frac{1}{6}\frac{1}{\xi(x)} \qquad (x > x_m).$$

a) Für $x > x_m$ gilt

$$v_1(x,\rho) = C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big) \qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),$$

$$v_2(x,\rho) = C_2\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big) \qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).$$

b) Für $x > x_m$ gilt

$$v_1'(x,\rho) = C_1\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(r(x)\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)+i\rho\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\Big),$$

$$v_2'(x,\rho) = C_2\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(r(x)\Big(1+O(1)\Big)-i\rho\Big(1+O(1)\Big)\Big)$$

$$(|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).$$

Beweis.
a) Sei $0\le\arg\rho\le\pi$. Mit

$$(2.16)\quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{z}\Big)\Big) \qquad (|z|\to\infty, 0\le\arg z\le\pi) \\ \qquad (\text{gleichmäßig in } 0\le\arg z\le\pi), \\[2ex] H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big) \qquad (|z|\to\infty, 0\le\arg z\le\pi) \\ \qquad (\text{gleichmäßig in } 0\le\arg z\le\pi) \end{cases}$$

für $\nu=\frac{1}{3}$ bzw. $\nu=\frac{2}{3}$ (siehe Anhang B, (B.8), (B.9)) ergibt sich für $x > x_m$ (man beachte $\xi(x)\in(0,\infty)$ für $x > x_m$)

$$v_1(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{-\frac{\pi}{6}i-\frac{\pi}{4}i}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)$$

$$(|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),$$

$$v_2(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{\pi}{4}i}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big)$$

$$(|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi);$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{w'(x)}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,\xi(x)^{1/6} \qquad (x > x_m)$$

also

$$
\begin{aligned}
v_1(x,\rho) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\rho^{-1/6}e^{-\frac{5}{12}\pi i}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big)\\
&= C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),\\
v_2(x,\rho) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\rho^{-1/6}e^{\frac{5}{12}\pi i}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&= C_2\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).
\end{aligned}
$$

b) Für die Ableitungen gilt nach (2.14) für $j=1,2$

$$
\begin{aligned}
v_j'(x,\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(j)}_{1/3}(\rho\xi(x))\\
&+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\,\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\,e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i}\,H^{(j)}_{2/3}(\rho\xi(x)) \qquad (x>x_m),
\end{aligned}
$$

also wieder mit (2.16)

$$
\begin{aligned}
v_1'(x,\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big)\\
&+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\,\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\,e^{\frac{2}{3}\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),\\
v_2'(x,\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{-i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\,\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\,e^{-\frac{2}{3}\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{-i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).
\end{aligned}
$$

Mit

$$\frac{1}{\sqrt{w'(x)}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,\xi(x)^{1/6} \quad (x > x_m),$$

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\Big(-\frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-5/4}\,(\phi^2)'(x)\xi(x)^{1/6} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,\xi(x)^{-5/6}\Big) \qquad (x > x_m)$$

folgt daher

$$\begin{aligned}
v_1'(x,\rho) &= \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,e^{-\frac{5}{12}\pi i}\rho^{-1/6}\Big(-\frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)'(x) + \frac{1}{6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,\frac{1}{\xi(x)}\Big)e^{i\rho\xi(x)}\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&\quad + \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,e^{(\frac{2}{3}\pi i - \frac{7}{12}\pi i)}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,\rho^{5/6}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&= C_1\rho^{-1/6}\,\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\Big\{\Big(-\frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-3/2}(\phi^2)'(x) + \frac{1}{6}\frac{1}{\xi(x)}\Big)\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&\quad + i\rho\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\Big\}\\
&= C_1\rho^{-1/6}\,\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\Big\{r(x)\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big) + i\rho\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\Big\}\\
&\qquad\qquad (|\rho\xi| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi).
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$v_2'(x,\rho) = C_2\rho^{-1/6}\,\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{-i\rho\xi(x)}\Big\{r(x)\Big(1 + O(1)\Big) - i\rho\Big(1 + O(1)\Big)\Big\} \qquad (|\rho\xi| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi).$$

□

Korollar 2.1. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Dann gilt für festes $\rho \neq 0$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$:*

$$\begin{aligned}
v_1(x,\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),\\
v_2(x,\rho) &= C_2\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1 + O(1)) \qquad (x \to \infty),\\
v_1'(x,\rho) &= C_1 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),\\
v_2'(x,\rho) &= -C_2 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1 + O(1)) \qquad (x \to \infty).
\end{aligned}$$

Beweis. Für festes $\rho \neq 0$ gilt nach (2.3) $\lim_{x\to\infty} |\rho\xi(x)| = +\infty$, daher folgt nach Lemma 2.2 a) die Behauptung für v_1, v_2. Weiter gilt wegen $r(x) = o(1) \quad (x \to \infty)$ nach Voraussetzung (2.3), (2.4) und Lemma 2.2 b)

$$\begin{aligned}
v_1'(x,\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot \Big(o(1)(1+o(1)) + i\rho(1+o(1))\Big) \\
&= C_1 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \\
v_2'(x,\rho) &= C_2\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot \Big(o(1)(1+O(1)) - i\rho(1+O(1))\Big) \\
&= -C_2 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (1+O(1)) \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}$$

□

Sei nun $y(\cdot,\rho)$ für jedes $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ die Lösung von $l_\rho u = 0$ auf I mit

$$y(0,\rho) = \sin\alpha\,, \quad y'(0,\rho) = -\cos\alpha. \tag{2.17}$$

Nach Lemma 1.2 b) ist $y(\cdot,\rho)$ dadurch eindeutig bestimmt, und $y(\cdot,\rho)$ erfüllt die Anfangsbedingung (1.2).

Eine weitere Lösung $Y(\cdot,\rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf I für jedes $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ wird uns die Integralgleichung

$$\begin{aligned}
Y(x,\rho) &= v_1(x,\rho) - \int_x^\infty \frac{K(x,t,\rho)}{W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))} F(t)Y(t,\rho)\,dt \\
&\quad \text{mit} \\
K(x,t,\rho) &:= v_1(x,\rho)v_2(t,\rho) - v_2(x,\rho)v_1(t,\rho) \qquad ((x,t)\in \tilde I \times \tilde I)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

liefern, die wir von Stakun [27, S. 1457] übernehmen. Wir benutzen dazu die folgenden Substitutionen:
Sei $J \subset I$ ein Intervall und $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$. Die Hilfsfunktionen $\hat Y$, $\hat Y^{(1)}$, $\hat v_j$, $\hat v_j^{(1)}$ seien gegeben durch

$$\left\{\begin{aligned}
Y(x,\rho) &= \hat Y(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (x\in J), \\
Y'(x,\rho) &= \hat Y^{(1)}(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (x\in J), \\
v_j(x,\rho) &= \hat v_j(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{(-1)^{j-1}i\rho\xi(x)} \qquad (x > x_m,\ j=1,2), \\
v_j'(x,\rho) &= \hat v_j^{(1)}(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{(-1)^{j-1}i\rho\xi(x)} \qquad (x > x_m,\ j=1,2).
\end{aligned}\right. \tag{2.19}$$

Man beachte, daß $\hat{Y}^{(1)}$ bzw. $\hat{v_j}^{(1)}$ *nicht* die Ableitung von $\hat{Y}$ bzw. $\hat{v_j}$ bezeichnet, sondern die zu Y' bzw. v_j' gehörige Hilfsfunktion.

Seien weiter, falls J ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist,

$$\begin{aligned}
B(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u \text{ ist beschränkt}\},\\
C^b(J) &:= C(J) \cap B(J),\\
\|u\|_\infty &:= \sup_{x\in J} |u(x)| \qquad (u \in B(J)).
\end{aligned}$$

$\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $B(J)$, $(B(J), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum, wie man leicht sieht. $C^b(J)$ ist als abgeschlossener Teilraum von $B(J)$ selbst Banachraum, insbesondere gilt im Raum $(C^b(J), \|\cdot\|_\infty)$ der Banachsche Fixpunktsatz.
Aussagen über die Lösbarkeit von (2.18) macht das folgende Lemma.

Lemma 2.3. *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt.*

a) *Für jedes $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ gibt es ein $z(\rho) \ge x_m + \epsilon$ so, daß die Integralgleichung (2.18) auf $[z(\rho), \infty)$ genau eine Lösung $Y(\cdot,\rho)$ mit $\hat{Y}(\cdot,\rho) \in C^b([z(\rho),\infty))$ besitzt.*

b) *Weiter gibt es ein $\rho_1 > 0$ so, daß (2.18) für jedes $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ und $|\rho| \ge \rho_1$ genau eine Lösung $Y(\cdot,\rho)$ auf $\tilde{I}$ mit $\hat{Y}(\cdot,\rho) \in C^b(\tilde{I})$ besitzt, d.h. für $|\rho| \ge \rho_1$ ist $z(\rho) = x_m + \epsilon$ wählbar.*

c) *Für festes $\rho \ne 0$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ gilt:*

$$\begin{aligned}
Y(x,\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)}\big(1+o(1)\big) \qquad (x\to\infty);\\
Y'(x,\rho) &= C_1 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)}\big(1+o(1)\big) \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}$$

d) *Schließlich gilt für festes $x \ge x_m + \epsilon$ und für $|\rho| \ge \rho_1$:*

$$\begin{aligned}
Y(x,\rho) &= \Big(C_1\rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho|\to\infty, 0 \le \arg\rho \le \pi);\\
Y'(x,\rho) &= \Big(C_1 i\rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho|\to\infty, 0 \le \arg\rho \le \pi).
\end{aligned}$$

Beweis. Mit den angegebenen Substitutionen (2.19) ist (2.18) äquivalent zur Integralgleichung

$$(2.20)\quad \begin{aligned} \hat{Y}(x,\rho) &= \hat{v}_1(x,\rho) - \int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t,\rho)}{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))}\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\hat{Y}(t,\rho)\,dt \\ & \quad \text{mit} \\ \hat{K}(x,t,\rho) &:= \hat{v}_1(x,\rho)\hat{v}_2(t,\rho) - \hat{v}_2(x,\rho)\hat{v}_1(t,\rho)e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))} \qquad ((x,t)\in\tilde{I}\times\tilde{I}), \end{aligned}$$

die wir nun weiter untersuchen werden. Wir lassen zunächst den Parameter ρ als Argument der Funktionen der Übersichtlichkeit halber weg.

Das Problem des Findens einer beschränkten, stetigen Lösung von (2.20) auf einem Intervall der Gestalt $[z,\infty)$ mit $z \geq x_m + \epsilon$ ist ein Fixpunktproblem für die auf $C^b([z,\infty))$ definierte Abbildung

$$\Psi(u)(x) := \hat{v}_1(x) - \int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)}\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}u(t)\,dt \qquad (u\in C^b([z,\infty)); x\in[z,\infty)),$$

das wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz lösen werden.

Da in Lemma 2.2 die Funktion $r = -\frac{1}{4}(\phi^2)^{-3/2}(\phi^2)' + \frac{1}{6}\frac{1}{\xi}$ auf $\tilde{I} = [x_m+\epsilon,\infty)$ stetig ist mit $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$ nach (2.3), (2.4), ist r auf $\tilde{I}$ beschränkt, und nach Lemma 2.2 mit (2.19) gibt es daher Zahlen $C, D_1, D_2, A > 0$, so daß für $0 \leq \arg\rho \leq \pi$

$$(2.21)\quad \begin{cases} |\hat{v}_j(x)| \leq C|\rho|^{-1/6} & \text{für } |\rho\xi(x)| \geq A \text{ mit } x \geq x_m+\epsilon,\ j=1,2, \\ |\hat{v}_j^{(1)}(x)| \leq C|\rho|^{-1/6}(D_1+D_2|\rho|) & \text{für } |\rho\xi(x)| \geq A \text{ mit } x \geq x_m+\epsilon,\ j=1,2. \end{cases}$$

Sei nun für den Beweisteil a) ρ wie angegeben fest gewählt.

a) Sei $z_0 = z_0(\rho) \geq x_m + \epsilon$ so gewählt, daß $|\rho\xi(z_0)| \geq A$ gilt; dieses ist möglich wegen $\rho \neq 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\xi(x) = +\infty$ nach (2.3). Dann gilt

$$|\rho\xi(x)| \geq |\rho\xi(z_0)| \geq A \quad \text{für alle } x \geq z_0,$$

also gemäß (2.21)

$$(2.22)\quad \begin{cases} |\hat{v}_j(x)| \leq C|\rho|^{-1/6} & \text{für } x\in[z_0,\infty),\ j=1,2, \\ |\hat{v}_j^{(1)}(x)| \leq C|\rho|^{-1/6}(D_1+D_2|\rho|) & \text{für } x\in[z_0,\infty),\ j=1,2. \end{cases}$$

Daher ist

$$
(2.23) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \left|\dfrac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)}\right| & \overset{(2.13)}{\leq} & \dfrac{|\hat{v}_1(x)||\hat{v}_2(t)| + |\hat{v}_2(x)||\hat{v}_1(t)|\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)(\xi(x)-\xi(t))}}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ & \overset{(2.22)}{\leq} & \dfrac{C^2|\rho|^{-1/3} + C^2|\rho|^{-1/3}\cdot 1}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ & = & D|\rho|^{-1} \qquad\qquad (x,t \in [z_0,\infty),\ t \geq x) \\ & & \text{mit } D := \dfrac{C^2\pi}{3} > 0. \end{array} \right.
$$

Wegen (2.22), (2.23) und $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ nach (2.5) ist für jedes $u \in C^b([z_0,\infty))$ die Funktion

$$
h_u(x) := \int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} u(t)\, dt \qquad (x \in [z_0,\infty))
$$

beschränkt und stetig:

Zur Beschränktheit von h_u:

$$
\begin{aligned}
|h_u(x)| \quad &\leq \quad \int_x^\infty \frac{|\hat{K}(x,t)|}{|W(v_1,v_2)|}\left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right||u(t)|\, dt \\
&\overset{(2.23)}{\leq} \quad \int_x^\infty D|\rho|^{-1}\|u\|_\infty \left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right| dt \\
&\leq \quad D|\rho|^{-1}\|u\|_\infty \int_{x_m+\epsilon}^\infty \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| \ < \ +\infty \qquad (x \in [z_0,\infty)).
\end{aligned}
$$

Zur Stetigkeit von h_u:
Seien $x, x_0 \in [z_0,\infty)$. Wir zeigen die Stetigkeit von h_u in x_0. Für $x > x_0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&|h_u(x) - h_u(x_0)| \\
&= \left|\int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} u(t)\, dt - \int_{x_0}^\infty \frac{\hat{K}(x_0,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} u(t)\, dt\right| \\
&= \left|\int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t) - \hat{K}(x_0,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} u(t)\, dt - \int_{x_0}^x \frac{\hat{K}(x_0,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} u(t)\, dt\right| \\
&\leq \frac{\|u\|_\infty}{|W(v_1,v_2)|}\left(\int_x^\infty |\hat{K}(x,t) - \hat{K}(x_0,t)|\left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right| dt + \int_{x_0}^x |\hat{K}(x_0,t)|\left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right| dt\right),
\end{aligned}
$$

wobei (man beachte $|e^{2i\rho\xi(t)}| = e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(t)} \le 1$ für $t > x_m$)

$$
\begin{aligned}
\int_x^\infty |\hat{K}(x,t) - \hat{K}(x_0,t)| \Big|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\Big|\, dt & \\
= \quad & \int_x^\infty \Big|\hat{v}_1(x)\hat{v}_2(t) - \hat{v}_2(x)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))} - \\
& \quad -\hat{v}_1(x_0)\hat{v}_2(t) + \hat{v}_2(x_0)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x_0)-\xi(t))}\Big| \cdot \Big|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\Big|\, dt \\
\le \quad & \int_{x_0}^\infty \Big(|\hat{v}_2(t)||\hat{v}_1(x) - \hat{v}_1(x_0)| + \\
& \quad +\Big|\hat{v}_1(t)\, e^{2i\rho\xi(t)}\Big|\Big|\hat{v}_2(x_0)\, e^{-2i\rho\xi(x_0)} - \hat{v}_2(x)\, e^{-2i\rho\xi(x)}\Big|\Big)\Big|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\Big|\, dt \\
\overset{(2.22)}{\le} \quad & \int_{x_0}^\infty \Big(C|\rho|^{-1/6}|\hat{v}_1(x) - \hat{v}_1(x_0)| + \\
& \quad +C|\rho|^{-1/6}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(t)}\Big|\hat{v}_2(x_0)\, e^{-2i\rho\xi(x_0)} - \hat{v}_2(x)\, e^{-2i\rho\xi(x)}\Big|\Big)\Big|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\Big|\, dt \\
\le \quad & \Big(|\hat{v}_1(x)-\hat{v}_1(x_0)| + \Big|\hat{v}_2(x_0)\, e^{-2i\rho\xi(x_0)} - \hat{v}_2(x)\, e^{-2i\rho\xi(x)}\Big|\Big) C|\rho|^{-1/6} \int_{x_0}^\infty \Big|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\Big| \to 0 \\
& \qquad (x \to x_0)
\end{aligned}
$$

wegen $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in C((x_m,\infty))$, und

$$
\int_{x_0}^x |\hat{K}(x_0,t)| \Big|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\Big|\, dt \;\to\; 0 \qquad (x \to x_0),
$$

d.h.

$$
\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} h_u(x) = h_u(x_0).
$$

Analog zeigt man dies für $x < x_0$.
Also ist $h_u \in C^b([z_0,\infty))$; da auch $\hat{v}_1 \in C^b([z_0,\infty))$, ist für jedes $u \in C^b([z_0,\infty))$ dann auch $\Psi(u) = \hat{v}_1 - h_u \in C^b([z_0,\infty))$, d.h. Ψ bildet $C^b([z_0,\infty))$ in sich ab. Weiter gilt für beliebige Funktionen $u, v \in C^b([z_0,\infty))$

$$
\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_\infty \quad & = \quad \sup_{z_0 \le x < \infty} \Big|\int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \big(u(t) - v(t)\big)\, dt\Big| \\
& \le \quad \sup_{z_0 \le x < \infty} \int_x^\infty \Big|\frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)}\Big| \cdot \Big|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\Big| \cdot \big|u(t) - v(t)\big|\, dt
\end{aligned}
$$

$$\overset{(2.23)}{\leq} \sup_{z_0 \leq x < \infty} \left(\int_x^\infty D|\rho|^{-1} \left| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \right| \cdot \|u-v\|_\infty \, dt \right)$$

$$\leq \left(D|\rho|^{-1} \int_{z_0}^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \right) \cdot \|u-v\|_\infty,$$

dabei wurde $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ nach (2.5) benutzt.

Da $\int\limits_z^\infty \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| \to 0 \quad (z \to \infty)$ nach dem Satz von Lebesgue, gibt es für jedes feste ρ ein $z = z(\rho) \geq z_0 \geq x_m + \epsilon$, so daß

$$D|\rho|^{-1} \int_z^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| < 1.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert auf $[z,\infty)$ genau eine Lösung $\hat{Y} \in C^b([z,\infty))$ von (2.20), insbesondere ist $\hat{Y}$ auf $[z,\infty)$ also beschränkt. Durch Rücksubstitution gemäß (2.19) erhalten wir die gesuchte Lösung Y von (2.18).

b) Wegen $\xi(x_m+\epsilon) > 0$ gibt es ein $\rho_0 > 0$, so daß $\rho_0 \xi(x_m+\epsilon) \geq A$ gilt (vgl. (2.21) zur Wahl von A). Dann ist für alle $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ und $|\rho| \geq \rho_0$ und alle $x \geq x_m + \epsilon$

$$|\rho\xi(x)| \geq \rho_0 \xi(x_m+\epsilon) \geq A.$$

Also gilt gemäß (2.21)

$$(2.24) \qquad \left\{ \begin{array}{c} |\hat{v}_j(x)| \leq C|\rho|^{-1/6} \\ \\ |\hat{v}_j^{(1)}(x)| \leq C|\rho|^{-1/6}(D_1 + D_2|\rho|) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle } x \in \tilde{I} \text{ und alle } \rho \neq 0 \text{ mit} \\ \\ 0 \leq \arg\rho \leq \pi \text{ und } |\rho| \geq \rho_0,\ j = 1,2. \end{array} \right.$$

Für $|\rho| \geq \rho_0$ ist dann $\dfrac{\hat{K}}{W(v_1,v_2)}$ wie bei (2.23), nun aber mit (2.24) für alle $t \geq x \geq x_m + \epsilon$ abschätzbar:

$$(2.25) \qquad \left| \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \right| \leq D|\rho|^{-1} \quad \text{für alle } t \geq x \geq x_m + \epsilon \text{ und } |\rho| \geq \rho_0.$$

Wir betrachten nun (2.20) für $x \in \tilde{I}$ und $|\rho| \geq \rho_0$. Es ist für beliebige $u, v \in C^b(\tilde{I})$

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_\infty \leq \sup_{x \in \tilde{I}} \int_x^\infty \left| \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \right| \cdot \left| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \right| \cdot \left| u(t) - v(t) \right| dt$$

$$\overset{(2.25)}{\leq} \left(D|\rho|^{-1} \sup_{x \in \tilde{I}} \int_x^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \right) \cdot \|u-v\|_\infty$$

$$= \left(D|\rho|^{-1} \int_{x_m+\epsilon}^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \right) \cdot \|u-v\|_\infty$$

wegen $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$. Da D nicht von ρ abhängt, gibt es ein $\rho_1 \geq \rho_0 > 0$ mit

$$D|\rho|^{-1} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{für alle } \rho \text{ mit } 0 \leq \arg\rho \leq \pi \text{ und } |\rho| \geq \rho_1. \tag{2.26}$$

Für $|\rho| \geq \rho_1$ existiert daher wieder nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau eine Lösung $\hat{Y} \in C^b(\tilde{I})$ von (2.20) auf $\tilde{I}$; durch Rücksubstitution gemäß (2.19) erhält man die Lösung Y von (2.18) auf $\tilde{I}$.

c) Nach a) ist $\hat{Y}$ auf $[z, \infty)$ (wobei nach b) $z = x_m + \epsilon$ für $|\rho| \geq \rho_1$) beschränkt. Sei ρ wieder wie angegeben fest gewählt. Es gilt dann mit (2.23)

$$\left|\int_x^{\infty} \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t)\, dt\right| \overset{(2.23)}{\leq} D|\rho|^{-1} \sup_{z \leq s < \infty} |\hat{Y}(s)| \cdot \int_x^{\infty} \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| \to 0 \qquad (x \to \infty)$$

nach dem Satz von Lebesgue. Also ist mit (2.20)

$$\hat{Y}(x) = \hat{v}_1(x) + o(1) \qquad (x \to \infty), \tag{2.27}$$

woraus mit (2.19)

$$Y(x) = v_1(x) + \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot o(1) \qquad (x \to \infty) \tag{2.28}$$

folgt. Mit Korollar 2.1 ergibt sich daraus die Behauptung für Y.
Zum Nachweis der Abschätzung für Y':
Wegen $\hat{Y}, \hat{v}_1, \hat{v}_2 \in C^b([z,\infty))$ und $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ gilt mit (2.19)

$$\begin{aligned}
\left|\int_z^{\infty} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)}\right| &\leq \frac{1}{|W(v_1,v_2)|} \int_z^{\infty} \left|\hat{v}_2 \hat{Y} \frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < +\infty, \\
\left|\int_z^{\infty} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)}\right| &\leq \frac{1}{|W(v_1,v_2)|} \int_z^{\infty} \left|\hat{v}_1 \hat{Y} e^{2i\rho\xi} \frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < +\infty
\end{aligned}$$

(dabei wurde $|e^{2i\rho\xi(x)}| = e^{-2\mathrm{Im}(\rho)\xi(x)} \leq 1$ für $x \geq x_m + \epsilon$ benutzt). Also gilt nach (2.18)

$$\left\{\begin{aligned}
Y(x) &= v_1(x) - v_1(x) \int_x^{\infty} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)} + v_2(x) \int_x^{\infty} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)} \\
&= v_1(x)\Big(1 - \int_z^{\infty} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)} + \int_z^{x} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) \\
&\quad + v_2(x)\Big(\int_z^{\infty} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)} - \int_z^{x} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) \qquad (x \in [z,\infty)).
\end{aligned}\right. \tag{2.29}$$

Aufgrund von $Y \in C([z,\infty))$, $v_j \in C^2((x_m,\infty))$ und $F \in L^1_{\mathrm{loc}}(\tilde{I})$ ist $v_j F Y \in L^1_{\mathrm{loc}}([z,\infty))$ für $j=1,2$, also sind die Funktionen

$$\Big([z,\infty) \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_z^x \frac{v_j F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) \in AC_{\mathrm{loc}}([z,\infty)),\ j=1,2;$$

da auch $v_j \in AC_{\mathrm{loc}}([z,\infty))$, ist nach (2.29)

$$Y \in AC_{\mathrm{loc}}([z,\infty)),$$

und Y ist in $[z,\infty)$ fast überall differenzierbar mit

$$\begin{aligned} Y'(x) &= v_1'(x)\Big(1-\int_z^\infty \frac{v_2FY}{W(v_1,v_2)}+\int_z^x \frac{v_2FY}{W(v_1,v_2)}\Big)+v_1(x)\,\frac{v_2(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)} \\ &\quad +v_2'(x)\Big(\int_z^\infty \frac{v_1FY}{W(v_1,v_2)}-\int_z^x \frac{v_1FY}{W(v_1,v_2)}\Big)-v_2(x)\,\frac{v_1(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)} \\ &\qquad\qquad (\text{fast alle } x \in [z,\infty)), \end{aligned}$$

also

$$(2.30)\quad \left\{ \begin{aligned} Y'(x) &= v_1'(x)\Big(1-\int_z^\infty \frac{v_2FY}{W(v_1,v_2)}+\int_z^x \frac{v_2FY}{W(v_1,v_2)}\Big) \\ &\quad +v_2'(x)\Big(\int_z^\infty \frac{v_1FY}{W(v_1,v_2)}-\int_z^x \frac{v_1FY}{W(v_1,v_2)}\Big) \qquad (\text{fast alle } x \in [z,\infty)). \end{aligned} \right.$$

Da auch $v_j' \in AC_{\mathrm{loc}}([z,\infty))$, $j=1,2$, ist die rechte Seite von (2.30) lokal absolut stetig, insbesondere stetig in $[z,\infty)$. Daher gibt es in der Äquivalenzklasse von $Y' \in L^1_{\mathrm{loc}}([z,\infty))$ einen Repräsentanten, der (2.30) für *alle* $x \in [z,\infty)$ erfüllt und somit lokal absolut stetig ist. Also ist

$$Y' \in AC_{\mathrm{loc}}([z,\infty)),$$

und es gilt (2.30) für alle $x \in [z,\infty)$, d.h.

$$(2.31)\quad Y'(x) = v_1'(x) - \int_x^\infty \frac{v_1'(x)v_2(t)-v_2'(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)}F(t)Y(t)\,dt \qquad (x \in [z,\infty)),$$

wobei nun weiter gilt

$$(2.32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_x^\infty \frac{v_1'(x)v_2(t)-v_2'(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)}F(t)Y(t)\,dt \\ &\overset{(2.19)}{=} \sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\int_x^\infty \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x)\hat{v}_2(t)-\hat{v}_2^{(1)}(x)\hat{v}_1(t)\,e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1,v_2)}\,\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\hat{Y}(t)\,dt \\ &\qquad\qquad (x \in [z,\infty)), \end{aligned} \right.$$

mit $t \geq x \geq z$ ergibt sich dabei

$$(2.33) \quad \begin{cases} \left| \dfrac{\hat{v}_1^{(1)}(x)\hat{v}_2(t) - \hat{v}_2^{(1)}(x)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1, v_2)} \right| \\ \overset{(2.13)}{\leq} \quad \dfrac{|\hat{v}_1^{(1)}(x)||\hat{v}_2(t)| + |\hat{v}_2^{(1)}(x)||\hat{v}_1(t)|\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)(\xi(x)-\xi(t))}}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ \overset{(2.22)}{\leq} \quad \dfrac{2C|\rho|^{-1/6}(D_1 + D_2|\rho|)C|\rho|^{-1/6}}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ = \quad \dfrac{D(D_1 + D_2|\rho|)}{|\rho|} =: \ d(\rho) \qquad (x, t \in [z, \infty),\ t \geq x), \end{cases}$$

(mit D wie in (2.23) definiert), und daraus folgt

$$\begin{aligned} &\left| \int_x^\infty \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x)\hat{v}_2(t) - \hat{v}_2^{(1)}(x)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1, v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t)\, dt \right| \\ &\overset{(2.33)}{\leq} \quad d(\rho) \sup_{z \leq s < \infty} |\hat{Y}(s)| \int_x^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \to 0 \qquad (x \to \infty), \end{aligned}$$

also gemäß (2.31) und (2.32)

$$(2.34) \qquad Y'(x) = v_1'(x) + \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Mit Korollar 2.1 folgt daraus die Behauptung für Y'.

d) Wir zeigen als erstes, daß ein $d_0 > 0$ existiert, so daß

$$(2.35) \qquad S(\rho) := \sup_{t \in \tilde{I}} |\hat{Y}(t, \rho)| \leq d_0 |\rho|^{-1/6} \quad \text{für } |\rho| \geq \rho_1,\ 0 \leq \arg\rho \leq \pi$$

gilt.

Zum Nachweis von (2.35):

Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|\rho| \geq \rho_1$, $0 \leq \arg\rho \leq \pi$; wegen $|\rho| \geq \rho_1 \geq \rho_0$ gelten dann (2.24) und (2.25). Hiermit folgt in (2.20):

$$\begin{aligned} |\hat{Y}(x, \rho)| \quad &\leq \quad |\hat{v}_1(x, \rho)| + \int_x^\infty \left| \frac{\hat{K}(x, t, \rho)}{W(v_1(\cdot, \rho), v_2(\cdot, \rho))} \right| \cdot \left| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \right| \cdot S(\rho)\, dt \\ &\leq \quad C|\rho|^{-1/6} + D|\rho|^{-1} S(\rho) \int_{x_m + \epsilon}^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \qquad (x \in \tilde{I}), \end{aligned}$$

also durch Übergang zum Supremum

$$S(\rho) \le C|\rho|^{-1/6} + D|\rho|^{-1} S(\rho) \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right|.$$

Nach Wahl von ρ_1 in b) gilt gemäß (2.26)

$$D|\rho|^{-1} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < \frac{1}{2},$$

also $S(\rho) \le C|\rho|^{-1/6} + \frac{1}{2} S(\rho)$, d.h.

$$S(\rho) \le 2C|\rho|^{-1/6} =: d_0|\rho|^{-1/6}.$$

Damit ist (2.35) bewiesen.
Sei nun $x \in \tilde{I}$ fest gewählt. Für das Integral in (2.20) ergibt sich für $|\rho| \ge \rho_1$, $0 \le \arg\rho \le \pi$

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{\hat{K}(x,t,\rho)}{W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t,\rho)\, dt \right| \le D|\rho|^{-1} \cdot d_0 |\rho|^{-1/6} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right|$$

mit (2.25) und (2.35), woraus

$$\hat{Y}(x,\rho) = \hat{v}_1(x,\rho) + O(\rho^{-7/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi)$$

folgt; und mit Rücksubstitution gemäß (2.19) dann

$$Y(x,\rho) = v_1(x,\rho) + \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot O(\rho^{-7/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi).$$

Mit Lemma 2.2 a) ergibt sich daraus wegen

$$v_1(x,\rho) = \left(C_1 \rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\right) \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi)$$

die Behauptung für Y.
Zum Nachweis der Abschätzung für Y':
Nach (2.31) folgt mit Substitution (2.19)

$$\begin{aligned} \hat{Y}^{(1)}(x,\rho) &= \hat{v}_1^{(1)}(x,\rho) - \\ &\quad - \int_x^{\infty} \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_2(t,\rho) - \hat{v}_2^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_1(t,\rho)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t,\rho)\, dt \\ &\qquad\qquad (|\rho| \ge \rho_1,\ 0 \le \arg\rho \le \pi,\ x \in \tilde{I}). \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (2.33), die für $|\rho| \geq \rho_1$ nun sogar für alle $t \geq x \geq x_m + \epsilon$ gilt (man verwende in (2.33) statt (2.22) dann (2.24)), folgt hier

$$\Big| \int_x^\infty \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_2(t,\rho) - \hat{v}_2^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_1(t,\rho)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t,\rho)\, dt \Big|$$

$$\stackrel{(2.33)}{\leq} \int_{x_m+\epsilon}^\infty \frac{D(D_1 + D_2|\rho|)}{|\rho|} \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| S(\rho)\, dt$$

$$\stackrel{(2.35)}{\leq} \frac{D(D_1 + D_2|\rho|)}{|\rho|} d_0 |\rho|^{-1/6} \int_{x_m+\epsilon}^\infty \Big| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \Big| \qquad (|\rho| \geq \rho_1,\ 0 \leq \arg\rho \leq \pi,\ x \in \tilde{I}),$$

also für festes $x \in \tilde{I}$

$$\hat{Y}^{(1)}(x,\rho) = \hat{v}_1^{(1)}(x,\rho) + O(\rho^{-1/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg\rho \leq \pi),$$

mit (2.19) folgt so für fest gewähltes $x \in \tilde{I}$

$$Y'(x,\rho) = v_1'(x,\rho) + \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot O(\rho^{-1/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg\rho \leq \pi).$$

Mit Lemma 2.2 b) ergibt sich daraus die Behauptung für Y' wegen

$$v_1'(x,\rho) = C_1 i \rho^{5/6} \Big(1 + O(\rho^{-1/6})\Big) \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg\rho \leq \pi).$$

□

Wir listen nun einige Eigenschaften von Y auf; wir zeigen insbesondere, daß $Y(\cdot,\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf $[z(\rho),\infty)$ löst.

Lemma 2.4. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fest gewählt mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$.*

a) *Es ist $Y(\cdot,\rho)$ Lösung von $l_\rho u = 0$ auf $[z(\rho),\infty)$.*

b) *Als Lösung von $l_\rho u = 0$ auf $[z(\rho),\infty)$ kann $Y(\cdot,\rho)$ in eindeutiger Weise auf ganz I fortgesetzt werden mit $l_\rho Y(\cdot,\rho) = 0$ auf I.*

Beweis. Sei ρ fest gewählt; wir lassen den Parameter ρ in den Argumenten der Funktionen weg.
a) Im Beweis von Lemma 2.3 c) ist gezeigt worden, daß $Y \in AC_{\rm loc}([z,\infty))$ gilt, und in Formel (2.31), daß Y auf $[z,\infty)$ differenzierbar ist mit

$$Y'(x) = v_1'(x) - \int_x^\infty \frac{v_1'(x)v_2(t) - v_2'(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\, dt \qquad (x \in [z,\infty))$$

und $Y' \in AC_{\mathrm{loc}}([z,\infty))$. Also ist Y' fast überall in $[z,\infty)$ differenzierbar mit (vgl. (2.30))

$$\begin{aligned}
Y''(x) &= v_1''(x)\Big(1 - \int_z^\infty \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)} + \int_z^x \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) + v_1'(x)\frac{v_2(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)} \\
&\quad + v_2''(x)\Big(\int_z^\infty \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)} - \int_z^x \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) + v_2'(x)\Big(-\frac{v_1(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)}\Big) \\
&= v_1''(x) - \int_x^\infty \frac{v_1''(x)v_2(t) - v_2''(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt - F(x)Y(x) \\
&\qquad\qquad (\text{fast alle } x \in [z,\infty)).
\end{aligned}$$

Wegen $l_\rho^\theta v_j = 0$ auf (x_m,∞), $j = 1,2$, folgt daher

$$\begin{aligned}
l_\rho Y(x) &= -Y''(x) + \chi(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= -v_1''(x) + \int_x^\infty \frac{v_1''(x)v_2(t) - v_2''(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt \\
&\quad + F(x)Y(x) + \chi(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= \rho^2\phi^2(x)v_1(x) + \theta(x)v_1(x) \\
&\quad + \int_x^\infty \frac{\big(-\theta(x) - \rho^2\phi^2(x)\big)v_1(x)v_2(t) + \big(\theta(x)+\rho^2\phi^2(x)\big)v_2(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt \\
&\quad - \theta(x)Y(x) - \chi(x)Y(x) + \chi(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= \big(\rho^2\phi^2(x) + \theta(x)\big)\Big(v_1(x) - \int_x^\infty \frac{v_1(x)v_2(t) - v_2(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt\Big) \\
&\quad - \theta(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= \big(\rho^2\phi^2(x) + \theta(x)\big)Y(x) - \theta(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= 0 \qquad (\text{fast alle } x \in [z,\infty)).
\end{aligned}$$

b) Sei $A > z$ fest ausgewählt. Dann gibt es nach Lemma 1.2 b) genau eine Lösung $\tilde{Y}(\cdot,\rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf I mit

$$\tilde{Y}(A,\rho) = Y(A,\rho)\,, \quad \tilde{Y}'(A,\rho) = Y'(A,\rho)\,,$$

deshalb ist $\tilde{Y}(\cdot,\rho) = Y(\cdot,\rho)$ auf $[z,\infty)$, d.h. $\tilde{Y}(\cdot,\rho)$ ist die gesuchte, eindeutig bestimmte Fortsetzung von $Y(\cdot,\rho)$ auf I. $\square$

Wir bezeichnen die Fortsetzung von $Y(\cdot,\rho)$ auf I gemäß Lemma 2.4 b) wieder mit $Y(\cdot,\rho)$.

Lemma 2.5. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Für $\rho > 0$ gilt*

$$\begin{aligned} y(x,-\rho) &= y(x,\rho) \qquad (x \in I), \\ Y(x,-\rho) &= -\overline{Y(x,\rho)} \qquad (x \in I). \end{aligned}$$

Beweis. *Zur Behauptung über y:* Nach Wahl von $y(\cdot,\rho)$ gemäß (2.17) ist $y(\cdot,\rho)$ für jedes $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ die eindeutig bestimmte Funktion mit

$$l_\rho y(\cdot,\rho) = 0 \text{ auf } I\ , \quad y(0,\rho) = \sin\alpha\ , \quad y'(0,\rho) = -\cos\alpha\ .$$

Ist nun $\rho > 0$ fest, so erfüllt wegen

$$0 = l_{-\rho}y(\cdot,-\rho) = -y''(\cdot,-\rho) + \chi y(\cdot,-\rho) - (-\rho)^2\phi^2 y(\cdot,-\rho) = l_\rho y(\cdot,-\rho) \quad \text{auf } I,$$

$$y(0,-\rho) = \sin\alpha\ , \quad y'(0,-\rho) = -\cos\alpha$$

die Funktion $y(\cdot,-\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I und dieselben Anfangsbedingungen wie $y(\cdot,\rho)$. Nach Lemma 1.2 b) folgt

$$y(\cdot,\rho) = y(\cdot,-\rho).$$

Zur Behauptung über Y: Der Beweis der Behauptung über Y ist etwas aufwendiger als der der Behauptung über y, da Y nicht mit Hilfe von Anfangsbedingungen gegeben ist.
Wir zeigen zunächst für jedes $\rho > 0$:

$$Y(x,-\rho) = -\overline{Y(x,\rho)} \qquad \text{für alle } x \in [a,\infty) \text{ mit geeignetem } a \geq x_m + \epsilon;$$

wir benutzen dazu die die Funktion Y definierende Integralgleichung (2.18). Benötigt werden zunächst Beziehungen zwischen $\overline{v_j(\cdot,\rho)}$ und $v_j(\cdot,-\rho)$, $j = 1,2$, für $\rho > 0$, die wir nun herleiten werden.
Sei dazu $\rho > 0$, $\arg\rho = 0$. Mit (B.4), (B.5) in Anhang B und $\rho\xi(x) > 0$ für $x > x_m$ gilt

$$\begin{aligned} (-\rho\xi(x))^{1/3} H^{(1)}_{1/3}(-\rho\xi(x)) &= \Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)^{1/3} H^{(1)}_{1/3}\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big) \\ &= e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}\Big(-e^{-\frac{\pi i}{3}} H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x))\Big) \\ &= -(\rho\xi(x))^{1/3} H^{(2)}_{\overline{1/3}}(\overline{\rho\xi(x)}) \\ &= -\overline{(\rho\xi(x))^{1/3} H^{(1)}_{1/3}(\rho\xi(x))} \qquad (x > x_m), \end{aligned}$$

woraus mit der Definition (2.12) von v_1

$$v_1(x,-\rho) = -\overline{v_1(x,\rho)} \qquad (x > x_m) \tag{2.36}$$

folgt, und

$$
\begin{aligned}
(-\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{1/3}(-\rho\xi(x)) &= \Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)^{1/3}H^{(2)}_{1/3}\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)\\
&= e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}\Big(\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\,H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x)) + e^{\frac{\pi i}{3}}H^{(1)}_{1/3}(\rho\xi(x))\Big)\\
&= e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{\overline{1/3}}(\overline{\rho\xi(x)}) + e^{\frac{2\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(1)}_{\overline{1/3}}(\overline{\rho\xi(x)})\\
&= e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(\rho\xi(x))} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x))}\\
&\qquad (x > x_m),
\end{aligned}
$$

also ergibt sich

$$
v_2(x,-\rho) = e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(x,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(x,\rho)} \qquad (x > x_m). \tag{2.37}
$$

Mit (2.36) und (2.37) folgt nun

$$
\begin{aligned}
W\Big(v_1(\cdot,-\rho),v_2(\cdot,-\rho)\Big) &= W\Big(-\overline{v_1(\cdot,\rho)}, e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(\cdot,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big)\\
&= W\Big(-\overline{v_1(\cdot,\rho)}, e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(\cdot,\rho)}\Big) + W\Big(-\overline{v_1(\cdot,\rho)}, e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big)\\
&= -e^{\frac{2\pi i}{3}}W\Big(\overline{v_1(\cdot,\rho)},\overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big),
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
&\frac{K(x,t,-\rho)}{W(v_1(\cdot,-\rho),v_2(\cdot,-\rho))}\\
&= \frac{v_1(x,-\rho)v_2(t,-\rho) - v_2(x,-\rho)v_1(t,-\rho)}{W(v_1(\cdot,-\rho),v_2(\cdot,-\rho))}\\
&= \frac{-\overline{v_1(x,\rho)}\Big(e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(t,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(t,\rho)}\Big) - \Big(e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(x,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(x,\rho)}\Big)\Big(-\overline{v_1(t,\rho)}\Big)}{-e^{\frac{2\pi i}{3}}W\Big(\overline{v_1(\cdot,\rho)},\overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big)}\\
&= \frac{\overline{K(x,t,\rho)}}{\overline{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))}} \qquad (x,t > x_m).
\end{aligned}
$$

Wir erhalten nach (2.18) unter Beachtung der Reellwertigkeit von F für $\rho > 0$:

$$
\begin{aligned}
-\overline{Y(x,\rho)} &= -\overline{v_1(x,\rho)} + \int_x^\infty \frac{\overline{K(x,t,\rho)}}{\overline{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))}}\overline{F(t)Y(t,\rho)}\,dt\\
&= v_1(x,-\rho) - \int_x^\infty \frac{K(x,t,-\rho)}{W(v_1(\cdot,-\rho),v_2(\cdot,-\rho))}F(t)\Big(-\overline{Y(t,\rho)}\Big)\,dt\\
&\qquad (x \in [z(\rho),\infty)).
\end{aligned}
$$

Die Funktion $-\overline{Y(\cdot,\rho)}$ löst also auf $[z(\rho),\infty)$ die zu $-\rho$ gehörende Integralgleichung (2.18), deren Lösung ist aber $Y(\cdot,-\rho)$ auf $[z(-\rho),\infty)$, die nach Lemma 2.3 a) eindeutig bestimmt ist. Also folgt, wenn wir $z_0(\rho) := \max\{z(\rho), z(-\rho)\}$ setzen,

$$-\overline{Y(x,\rho)} = Y(x,-\rho) \quad \text{für alle } x \in [z_0(\rho),\infty). \tag{2.38}$$

Wegen $l_{-\rho} = l_\rho$ und

$$l_{-\rho}\Big(-\overline{Y(\cdot,\rho)}\Big) = l_\rho\Big(-\overline{Y(\cdot,\rho)}\Big) = -\overline{l_\rho Y(\cdot,\rho)} = 0 = l_{-\rho}Y(\cdot,-\rho) \quad \text{auf } I$$

lösen $Y(\cdot,-\rho)$ und $-\overline{Y(\cdot,\rho)}$ die Differentialgleichung $l_{-\rho}u = 0$ auf I und stimmen, wie gerade in (2.38) gezeigt, auf $[z_0(\rho),\infty)$ überein; mit Lemma 1.2 b) folgert man

$$Y(x,-\rho) = -\overline{Y(x,\rho)} \qquad (x \in I).$$

□

Im folgenden Lemma können wir nun in Abhängigkeit von ρ gewisse Fundamentalsysteme von $l_\rho u = 0$ auf I angeben.

Lemma 2.6. *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ fest gewählt mit $0 \le \arg\rho \le \pi$.*

a) *Es gilt*
$$W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) = Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha;$$
also ist $y(\cdot,\rho)$, $Y(\cdot,\rho)$ Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I genau dann, wenn $Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha \neq 0$ gilt.

b) *Für $\rho > 0$ gilt*
$$W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho)) = \frac{6i}{\pi}\rho^{2/3} \neq 0;$$
also bilden für $\rho > 0$ die Funktionen $Y(\cdot,\rho)$, $Y(\cdot,-\rho)$ ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I.

Beweis.
a) Es gilt mit (2.17)

$$\begin{aligned} W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) &= W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho))|_{x=0} = y(0,\rho)Y'(0,\rho) - y'(0,\rho)Y(0,\rho) \\ &= \sin\alpha\cdot Y'(0,\rho) + \cos\alpha\cdot Y(0,\rho). \end{aligned}$$

b) Sei $\rho > 0$. Dann ist $l_\rho = l_{-\rho}$, und daher erfüllen sowohl $Y(\cdot,\rho)$ als auch $Y(\cdot,-\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I. Nach (2.28), (2.34) aus dem Beweis von Lemma 2.3 c) gilt wegen $|e^{\pm i\rho\xi(x)}| = 1$ für $x > x_m$:

$$\begin{aligned} Y(x,\pm\rho) &= v_1(x,\pm\rho) + \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\cdot o(1) \qquad (x\to\infty), \\ Y'(x,\pm\rho) &= v_1'(x,\pm\rho) + \sqrt[4]{\phi^2(x)}\cdot o(1) \qquad (x\to\infty), \end{aligned}$$

zusammen mit

$$
\begin{aligned}
v_1(x,-\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,(-\rho\xi(x))^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(-\rho\xi(x)) \\
&= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)^{1/3}H^{(1)}_{1/3}\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big) \\
&\overset{(B.4)}{=} \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}\Big(-e^{-\frac{\pi i}{3}}\Big)H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x)) \\
&= -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x)) \\
&= -v_2(x,\rho) \qquad\qquad (x > x_m)
\end{aligned}
$$

also:

$$
\begin{aligned}
W(Y(\cdot,\rho),Y(\cdot,-\rho)) \;=\; &\Big(v_1(x,\rho)+\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)\Big)\Big(-v_2'(x,\rho)+\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)\Big) \\
&-\Big(v_1'(x,\rho)+\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)\Big)\Big(-v_2(x,\rho)+\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)\Big) \\
= \;& -v_1(x,\rho)v_2'(x,\rho)+v_1(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)-v_2'(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)+o(1) \\
&+v_1'(x,\rho)v_2(x,\rho)-v_1'(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)+v_2(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)+o(1) \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}
$$

Nach Korollar 2.1 folgt, daß

$$
v_j(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)} = O(1)\,, \quad v_j'(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} = O(1) \qquad (x\to\infty,\ j=1,2)
$$

wegen $e^{\pm i\rho\xi(x)} = O(1) \quad (x\to\infty)$, da $\rho\xi(x)\in\mathbb{R}$ für $x > x_m$. Also gilt

$$
W(Y(\cdot,\rho),Y(\cdot,-\rho)) = -W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho)) + o(1) \qquad (x\to\infty),
$$

durch Grenzübergang $x\to\infty$ folgern wir mit (2.13)

$$
W(Y(\cdot,\rho),Y(\cdot,-\rho)) = -W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho)) = \frac{6i}{\pi}\,\rho^{2/3} \neq 0.
$$

□

Mit Lemma 2.6 definieren wir für $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$:

$$\mathcal{W}(\rho, \alpha) := W(y(\cdot, \rho), Y(\cdot, \rho)) = Y(0, \rho) \cos \alpha + Y'(0, \rho) \sin \alpha.$$

Eine asymptotische Darstellung für $y(\cdot, \rho)$ und $y'(\cdot, \rho)$ erhalten wir so:

Hilfssatz 2.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in L^1([a, \infty))$ und $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg \rho < \pi$. Dann gibt es ein Fundamentalsystem φ_1, φ_2 der Differentialgleichung*

$$-u'' + \psi(x)u - \rho^2 u = 0 \quad \textit{auf } [a, \infty) \tag{2.39}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= e^{(-1)^k i\rho x} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty), \\ \varphi_k'(x) &= (-1)^k i\rho \, e^{(-1)^k i\rho x} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty) \end{aligned}$$

für $k = 1, 2$.

Beweis. Siehe Naimark [22, S. 180, Thm. 8]. □

Für $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$ wird φ_1 *dominante Lösung* von (2.39) genannt, φ_2 *subdominante Lösung* von (2.39).

Lemma 2.7. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt.*

a) *Sei $\rho \neq 0$ mit $0 < \arg \rho < \pi$ fest gewählt. Sei weiter zur Abkürzung*

$$M(\rho) := -\frac{i}{2C_1 \rho^{5/6}} \mathcal{W}(\rho, \alpha)$$

gesetzt (mit $C_1 \neq 0$ aus Lemma 2.2). Dann gilt

$$\begin{aligned} y(x, \rho) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot \Big(M(\rho) + o(1)\Big) \qquad (x \to \infty), \\ y'(x, \rho) &= -i\rho \sqrt[4]{\phi^2(x)} \, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot \Big(M(\rho) + o(1)\Big) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

b) *Sei $\rho > 0$. Dann gilt*

$$\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$$

und

$$y(x, \rho) = \frac{\pi C_1 i}{6\rho^{5/6}} \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \Big(\overline{\mathcal{W}(\rho, \alpha)} \, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho, \alpha) \, e^{-i\frac{\pi}{6}} \, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big) \qquad (x \to \infty).$$

Beweis.
a) Sei $\rho \neq 0$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ gewählt. Wir führen für die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf $\tilde{I}$ eine *Liouville–Transformation* (siehe hierzu auch Olver [23, Kap. 6])

$$\tilde{u}(\xi) := u(x)\sqrt[4]{\phi^2(x)} \qquad (x \in \tilde{I}), \qquad \text{wobei } \xi \text{ wie bisher definiert ist },$$

durch. Wegen $\sqrt{\phi^2} > 0$ auf $\tilde{I}$ ist ξ streng monoton wachsend auf $\tilde{I}$ und bildet $\tilde{I}$ bijektiv auf $\tilde{J} := [\xi_0, \infty)$ mit $\xi_0 := \xi(x_m + \epsilon) \in (0, \infty)$ ab. Die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf $\tilde{I}$ ist dann äquivalent zu

$$-\tilde{u}''(\xi) + \tilde{\chi}(\xi)\tilde{u}(\xi) - \rho^2\tilde{u}(\xi) = 0 \quad \text{auf } \tilde{J} \tag{2.40}$$

mit

$$\tilde{\chi}(\xi) := -\frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-3}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-2}(\phi^2)''(x) + \frac{\chi(x)}{\phi^2(x)} \qquad (\xi \in \tilde{J}).$$

Dies ist nun eine Eigenwertaufgabe der Form

$$-\tilde{u}'' + \tilde{\chi}(\xi)\tilde{u} = \rho^2\tilde{u} \quad \text{auf } \tilde{J}$$

ohne Gewichtsfunktion. Es gilt für $\tilde{\chi}$ mit Formel (2.2) aus Bemerkung 2.1, (2.3) und dem Satz von Levi:

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_0}^{\infty} |\tilde{\chi}(\xi)|\, d\xi &= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| -\frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-3}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-2}(\phi^2)''(x) + \frac{\chi(x)}{\phi^2(x)} \right| \cdot \xi'(x)\, dx \\
&= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| -\frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-5/2}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-3/2}(\phi^2)''(x) + \frac{\chi(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx \\
&\overset{(2.2)}{=} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| -\frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} - \frac{5}{36}\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{(\xi(x))^2} \right| dx \\
&\leq \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx + \frac{5}{36}\int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{(\xi(x))^2}\, dx \\
&= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx - \frac{5}{36}\left(\lim_{b\to\infty} \int_{x_m+\epsilon}^{b} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\xi(x)}\right) dx \right) \\
&= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx - \frac{5}{36}\left(\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\xi(x)}\bigg|_{x_m+\epsilon}^{b} \right) \\
&\overset{(2.3)}{=} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx + \frac{5}{36}\frac{1}{\xi(x_m+\epsilon)} \;<\; \infty
\end{aligned}$$

wegen $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ nach Voraussetzung (2.5), so daß also $\tilde{\chi} \in L^1(\tilde{J})$ gilt.