Kapitel 1

Einführung in die Problemstellung

1.1 Grundlegendes und generelle Voraussetzungen

Wir untersuchen Spektrum und asymptotische Eigenwertverteilung der Eigenwertaufgabe

$$-u'' + \chi(x)u = \rho^2\phi^2(x)u, \quad x \in I := [0,\infty), \tag{1.1}$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad \text{mit festem } \alpha \in [0, 2\pi), \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty |\phi^2(x)||u(x)|^2\, dx < \infty, \tag{1.3}$$

wobei

> $\rho^2 \in \mathbb{C}$ Eigenwertparameter (die Betrachtung von $0 \leq \arg\rho \leq \pi$, d.h. $\mathrm{Im}\,(\rho) \geq 0$, ist ausreichend),
>
> ϕ^2 reellwertige Gewichtsfunktion mit m Nullstellen x_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, der Ordnungen $l_\nu \in \mathbb{N}$ mit $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1$ und
>
> $$\phi^2(x) = \prod_{\nu=1}^{m}(x - x_\nu)^{l_\nu}\phi_0(x) \quad (x \in I) \quad \text{mit } \phi_0 \in C^2(I),\ \phi_0 > 0,$$
>
> $\chi \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ reellwertig und auf $[0, 1]$ beschränkt.

Die Tatsache, daß Eigenwertparameter und Gewichtsfunktion in (1.1) als Quadrate ρ^2, ϕ^2 geschrieben wurden, dient nur der Vereinfachung der Schreibweise und Vermeidung von Wurzeln in den nachfolgenden Abschnitten.

Da χ als nicht notwendig stetig vorausgesetzt wird, verwenden wir folgenden Lösungsbegriff für Differentialgleichungen der Gestalt $-u'' + qu = f$:

Definition 1.1. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $q, f \in L^1_{\mathrm{loc}}(J)$. Eine Funktion $u : J \to \mathbb{C}$ heißt *Carathéodory–Lösung* (im folgenden kurz *Lösung* genannt) von

$$lu := -u'' + qu = f \quad \text{auf } J,$$

wenn

$$u \in AC_{\mathrm{loc}}(J),\ u' \in AC_{\mathrm{loc}}(J) \text{ und } (lu)(x) = f(x) \text{ für fast alle } x \in J \tag{1.4}$$

gilt. Für (1.4) schreiben wir kurz: $lu = f$ auf J.
Zwei Lösungen v, w von $lu = 0$ auf J nennen wir *Fundamentalsystem* von $lu = 0$ auf J, wenn v und w linear unabhängig sind.
Für zwei Lösungen v, w von $lu = 0$ auf J definieren wir die *Wronskifunktion* von v und w durch

$$W(v,w)(x) := v(x)\, w'(x) - v'(x)\, w(x) \quad (x \in J).$$

Anmerkung zu Definition 1.1:
Wir nennen wie üblich (siehe hierzu z. B. Wheeden-Zygmund [35, S. 115]) eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) *absolut stetig* auf $[a,b]$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle paarweise disjunkten Teilintervalle $(a_j, b_j) \subset [a,b]$, $j \in \mathcal{J}$ mit endlicher oder abzählbar unendlicher Indexmenge $\mathcal{J}$, mit $\sum_{j \in \mathcal{J}} (b_j - a_j) < \delta$ gilt:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} |u(b_j) - u(a_j)| < \epsilon.$$

Sei

$$AC([a,b]) := \{u \mid u : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ absolut stetig}\},$$

und sei für ein beliebiges Intervall $J \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} AC_{\text{loc}}(J) \;:=\; \{&u \mid u : J \to \mathbb{C},\; u|K \text{ absolut stetig auf } K \\ &\text{für jedes kompakte Teilintervall } K \subset J\} \end{aligned}$$

die Menge der auf J *lokal absolut stetigen Funktionen*. Es gilt (siehe Wheeden-Zygmund [35, S. 115f.]):

(i) Ist $u \in AC([a,b])$, so existiert die Ableitung u' fast überall in (a,b) mit $u' \in L^1((a,b))$.

(ii) Es ist $u : [a,b] \to \mathbb{C}$ in $AC([a,b])$ genau dann, wenn es ein $v \in L^1([a,b])$ gibt mit

$$u(x) - u(a) = \int_a^x v(t)\, dt \qquad (x \in [a,b]).$$

Gilt dieses, so ist $u'(x) = v(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$.

Ist ein beliebiges Intervall $J \subset \mathbb{R}$ gegeben, so übertragen sich die Eigenschaften (i) und (ii) sinngemäß auf $AC_{\text{loc}}(J)$ bzw. $L^1_{\text{loc}}(J)$.

Sind in Definition 1.1 $q, f \in C(J)$ und $u \in C^2(J)$ mit $(lu)(x) = f(x)$ für alle $x \in J$, so ist u natürlich auch Carathéodory–Lösung von $lu = f$ auf J.
Wegen $\chi \in L^1_{\text{loc}}(I)$ und $\phi^2 \in C^2(I)$ ist auch $q := \chi - \rho^2\phi^2 \in L^1_{\text{loc}}(I)$, so daß Definition 1.1 insbesondere auf Differentialgleichungen vom Typ (1.1) anwendbar ist.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Aussagen über die Differentialgleichung (1.1). Sei dazu gemäß (1.1) für jedes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ der Differentialausdruck

$$l_\rho u := -u'' + \chi u - \rho^2 \phi^2 u$$

definiert; (1.1) ist damit äquivalent zu

$$l_\rho u = 0 \quad \text{auf } I.$$

Wir notieren noch die folgenden bekannten Lemmata, deren Beweise sich in Anhang A befinden:

Lemma 1.1. *Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ fest gewählt und $J \subset I$ ein Intervall.*

a) *Für je zwei Lösungen v, w von $l_\rho u = 0$ auf J ist $W(v, w)$ konstant.*

b) *Für je zwei Lösungen v, w von $l_\rho u = 0$ auf J gilt:*

$$W(v, w) \neq 0 \Longleftrightarrow v, w \text{ sind linear unabhängig.}$$

Beweis. Siehe Anhang A. □

Lemma 1.2. *Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ fest gewählt und $J \subset I$ ein Intervall. Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf J, und seien weiter $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(J)$ sowie $x_0 \in J$ fest.*

a) *$u : J \to \mathbb{C}$ ist genau dann Lösung von $l_\rho u = f$ auf J, wenn es Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ gibt mit*

$$u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x) y_2(t) - y_2(x) y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \quad (x \in J). \tag{1.5}$$

Gilt (1.5), so ist

$$u'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1'(x) y_2(t) - y_2'(x) y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \quad (x \in J),$$

und es sind $u, u' \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$.

b) *Sind $a, b \in \mathbb{C}$, so gibt es genau eine Lösung u von $l_\rho u = f$ auf J mit*

$$u(x_0) = a, \quad u'(x_0) = b.$$

Beweis. Siehe Anhang A. □

1.2 Definition des zum Eigenwertproblem gehörenden Differentialoperators

Wir betrachten im folgenden den Vektorraum

$$L^2_{|\phi^2|}(I) := \Big\{u \mid u : I \to \mathbb{C}, \int\limits_0^\infty |\phi^2||u|^2 < \infty\Big\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt $(u,v) := \int\limits_0^\infty |\phi^2|\, u\,\overline{v}$ für $u,v \in L^2_{|\phi^2|}(I)$; da $|\phi^2| > 0$ fast überall in I, ist $(\cdot,\cdot)$ positiv definit, und $L^2_{|\phi^2|}(I)$ mit $(\cdot,\cdot)$ und der von $(\cdot,\cdot)$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ ist ein Hilbertraum.
Gemäß (1.1), (1.2), (1.3) definieren wir einen linearen Operator L durch

$$\begin{aligned} D(L) &:= \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, u \in L^2_{|\phi^2|}(I), u \in AC_{\text{loc}}(I), u' \in AC_{\text{loc}}(I), \\ &\qquad u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0, \\ &\qquad \text{es gibt ein } v \in L^2_{|\phi^2|}(I) \text{ mit } -u'' + \chi u = \phi^2 v \text{ auf } I\}, \\ Lu &:= v \qquad\qquad (u \in D(L), v \text{ wie oben}). \end{aligned}$$

Also ist für $u \in D(L)$

$$Lu = \frac{1}{\phi^2}(-u'' + \chi u) \quad \text{und} \quad Lu \in L^2_{|\phi^2|}(I),$$

wie bei der Betrachtung von Sturm–Liouville–Operatoren üblich. Wegen der vorausgesetzten Existenz von Nullstellen von ϕ^2 haben wir (wie z. B. in Daho–Langer [3]) jedoch die obige, in $D(L)$ angegebene Schreibweise bevorzugt. Es ist also für u aus dem Definitionsbereich $D(L)$ von L, v aus dessen Wertebereich und $\rho^2 \in \mathbb{C}$

$$Lu = v \iff -u'' + \chi u = \phi^2 v \text{ auf } I,$$

$$Lu = \rho^2 u \iff -u'' + \chi u = \rho^2\phi^2 u \text{ auf } I;$$

das Problem (1.1), (1.2), (1.3) ist dann äquivalent zum Eigenwertproblem für den Operator L. L ist offensichtlich ein linearer Operator, dessen Definitions– und Wertebereich Teilmengen von $L^2_{|\phi^2|}(I)$ sind.
Im Hinblick auf die angesprochenen Aussagen über das Spektrum werden wir die Resolvente $(L - \rho^2 id)^{-1}$ von L untersuchen (dabei sei id die identische Abbildung in $L^2_{|\phi^2|}(I)$) und definieren dazu für jedes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ einen linearen Operator L_ρ durch

$$L_\rho := L - \rho^2 id \quad \text{mit } D(L_\rho) := D(L).$$

Wir erhalten damit aber auch

$$\begin{aligned} D(L_\rho) &= \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, u \in L^2_{|\phi^2|}(I), u, u' \in AC_{\text{loc}}(I), \\ &\qquad u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0, \\ &\qquad \text{es gibt ein } v \in L^2_{|\phi^2|}(I) \text{ mit } l_\rho u = \phi^2 v \text{ auf } I\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

denn die Bedingung *es gibt ein* $v \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ *mit* $-u'' + \chi u = \phi^2 v$ *auf* I in der Definition von $D(L)$ ist wegen $u \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ äquivalent zur Bedingung *es gibt ein* $v \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ *mit* $l_\rho u = -u'' + \chi u - \rho^2\phi^2 u = \phi^2 v$ *auf* I in obiger Charakterisierung (1.6) von $D(L_\rho)$.
Es gilt für u aus dem Definitionsbereich und v aus dem Wertebereich von L_ρ

$$L_\rho u = v \Longleftrightarrow -u'' + \chi u - \rho^2\phi^2 u = \phi^2 v \text{ auf } I,$$

nach Definition von L und L_ρ gilt nämlich

$$\begin{aligned} L_\rho u = v &\Longleftrightarrow Lu - \rho^2 u = v \\ &\Longleftrightarrow Lu = v + \rho^2 u \\ &\Longleftrightarrow -u'' + \chi u = \phi^2(v + \rho^2 u) \text{ auf } I \\ &\Longleftrightarrow -u'' + \chi u - \rho^2\phi^2 u = \phi^2 v \text{ auf } I. \end{aligned}$$

Nun noch eine Überlegung zur Wahl des Raumes $L^2_{|\phi^2|}(I)$:

Bemerkung 1.1. Der sonst bei Sturm–Liouville–Operatoren mit definiter Gewichtsfunktion $w > 0$ betrachtete Raum $L^2_w(I) := \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, \int\limits_0^\infty w|u|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt $[u, v] := \int\limits_0^\infty w\, u\, \overline{v}$ für $u, v \in L^2_w(I)$ ist, wie bereits erwähnt, im Falle $w = \phi^2$ bei vorliegender Indefinitheit von ϕ^2 *kein* Hilbertraum und $[\cdot,\cdot]$ *nicht* positiv definit. Deshalb betrachten wir stattdessen L und L_ρ wie Stakun [27], [28], [29] und Daho–Langer [3] im Raum $L^2_{|\phi^2|}(I)$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung 1.2. Unter den eingangs aufgeführten Voraussetzungen an ϕ^2 bestehen die folgenden Zusammenhänge zwischen den Räumen $L^2_{|\phi^2|}(I)$, $L^2(I)$ und $L^1_{\text{loc}}(I)$:

a) Falls $\lim\limits_{x\to\infty} \phi^2(x) \geq 1$, so gilt $C(I) \cap L^2_{|\phi^2|}(I) \subset L^2(I)$;

b) $u \in L^2_{|\phi^2|}(I) \Longrightarrow \phi^2 u \in L^1_{\text{loc}}(I)$;

c) Für z. B. $\phi^2(x) := x - \frac{1}{2}$, $x \in I$, gilt $L^2_{|\phi^2|}(I) \not\subset L^2(I)$.

Beweis.
a) Sei $u \in C(I) \cap L^2_{|\phi^2|}(I)$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \phi^2(x) \geq 1$ gibt es ein $A \geq 0$ mit $\phi^2(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \geq A$. Dann gilt

$$\int_A^\infty |u|^2 \leq 2\int_A^\infty |\phi^2||u|^2 \leq 2\int_0^\infty |\phi^2||u|^2 < +\infty.$$

Da u stetig und somit auf dem Kompaktum $[0, A]$ beschränkt ist, existiert auch $\int\limits_0^A |u|^2$, mithin ist

$$\int_0^\infty |u|^2 < +\infty.$$

b) Sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von I. Wegen $u \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ gilt

$$\int_K |\phi^2||u|^2 \leq \int_0^\infty |\phi^2||u|^2 < +\infty,$$

wegen $\phi^2 \in C(I)$ gilt $\int\limits_K |\phi^2| < +\infty$. Weiter ist

$$|u(x)| \leq \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in I \text{ mit } |u(x)| \leq 1, \\ |u(x)|^2 & \text{für} \quad x \in I \text{ mit } |u(x)| > 1. \end{cases}$$

Setzen wir für $M \subset \mathbb{R}$

$$1_M(x) := \begin{cases} 0, & x \notin M, \\ 1, & x \in M, \end{cases}$$

so gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_K |\phi^2 u| &\leq \int_K \Big(|\phi^2(t)| \cdot 1_{\{x\in I:|u(x)|\leq 1\}}(t) + |\phi^2(t)||u(t)|^2 \cdot 1_{\{x\in I:|u(x)|>1\}}(t) \Big)\, dt \\ &\leq \int_K |\phi^2| + \int_K |\phi^2||u|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

c) Wir geben eine Funktion u mit $u \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ und $u \notin L^2(I)$ an: Sei

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(\frac{1}{2} - x)^{3/4}} & \text{für} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \text{ oder } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dann gilt nach dem Satz von Levi

$$\int_0^\infty |\phi^2||u|^2 = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - x}}\, dx = \lim_{b\uparrow 1/2} \Big(\int_{1/2-b}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \Big) = \lim_{b\uparrow 1/2} 2\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{2}-b}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} < +\infty,$$

aber wäre $u \in L^2(I)$, so folgte nach dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} +\infty > \int_0^\infty |u|^2 &= \int_0^{1/2} \frac{1}{(\frac{1}{2} - x)^{3/2}}\, dx = \lim_{b\uparrow 1/2} \int_0^b \frac{1}{(\frac{1}{2} - x)^{3/2}}\, dx \\ &= \lim_{b\uparrow 1/2} \Big(-2t^{-1/2}\Big|_{\frac{1}{2}-b}^{\frac{1}{2}} \Big) = -2\sqrt{2} + 2 \lim_{b\uparrow 1/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - b}}, \end{aligned}$$

jedoch ist $\lim\limits_{b\uparrow 1/2} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - b}} = +\infty$. $\square$

1.3 Spektraltheoretische Grundbegriffe und Definitionen

Sei nun H ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, und sei $id : H \to H$ die identische Abbildung. Weiter sei T eine lineare Abbildung. Es bezeichne $D(T)$ den Definitionsbereich von T und $R(T) := \{Tu \mid u \in D(T)\}$ den Wertebereich von T. Gilt $D(T), R(T) \subset H$, so nennen wir T einen *linearen Operator in* H.
Sei T ein linearer Operator in H. Wir nennen T *invertierbar*, wenn T injektiv ist; der zu T inverse Operator sei mit $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ bezeichnet, dieser ist ebenfalls ein linearer Operator in H.
Analog zu Weidmann [32] bzw. Naimark [22] definieren wir:
T heißt *beschränkt*, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit

$$\|Tu\| \leq C\|u\| \quad \text{für alle } u \in D(T).$$

Es bezeichne $B(H)$ den Raum aller beschränkten linearen Operatoren in H mit $D(T) = H$. Für jedes $T \in B(H)$ sei

$$\|T\| := \inf\{C \mid C \geq 0, \|Tu\| \leq C\|u\| \text{ für alle } u \in D(T)\}$$

die *Operatornorm* von T; $(B(H), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum (s. Weidmann [32, S. 63]).
Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* (abgekürzt EW) von T, wenn ein $u \in D(T)$ mit $u \neq 0$ existiert, so daß $Tu = \lambda u$. Ist λ EW, so heißt jedes $u \in D(T)\backslash\{0\}$ mit $Tu = \lambda u$ *Eigenvektor* (bei Differentialoperatoren T auch *Eigenfunktion*) von T zum EW λ, weiter heißt

$$E_\lambda := \{u \mid u \in D(T), Tu = \lambda u\}$$

der zu λ gehörende *Eigenraum* (dies ist ein Untervektorraum von $D(T)$), und $\dim E_\lambda$ die (*geometrische*) *Vielfachheit* des EW λ.
Die *Resolventenmenge* von T ist definiert durch

$$\rho(T) := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda\, id) \text{ ist invertierbar}, (T - \lambda\, id)^{-1} \in B(H)\},$$

jedes $\lambda \in \rho(T)$ heißt *regulärer Punkt* von T, und die Abbildung $(T - \lambda\, id)^{-1}$ heißt für $\lambda \in \rho(T)$ die *Resolvente* von T im Punkt λ. Das *Spektrum* von T ist dann die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Jeder EW von T gehört zu $\sigma(T)$, denn ist λ EW von T, so besitzt $(T - \lambda\, id)u = 0$ nichttriviale Lösungen, d.h. $T - \lambda\, id$ ist nicht invertierbar, so daß $\lambda \notin \rho(T)$ ist, also $\lambda \in \sigma(T)$. Das *Punktspektrum* $\sigma_p(T)$, auch als *diskretes Spektrum* bezeichnet, sei die Menge der EW von T

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ EW von } T\},$$

das *kontinuierliche Spektrum* $\sigma_c(T)$ sei für unsere Zwecke wie in Naimark [22, S. 17] definiert als

$$\sigma_c(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_p(T),$$

d.h.

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda\, id) \text{ ist invertierbar}, (T - \lambda\, id)^{-1} \notin B(H)\}.$$

Weiter nennen wir T *abgeschlossen*, wenn gilt: Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(T)$, die (bezüglich der Norm in H) gegen ein Element $u \in H$ konvergiert, und ist die Folge $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $u \in D(T)$ und $Tu = \lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$. Ist T abgeschlossen, so ist die Abbildung

$$\rho(T) \to B(H)\ , \quad \lambda \mapsto (T - \lambda\, id)^{-1}$$

stetig (s. Weidmann [32, S. 99]).
Schließlich nennen wir T *hermitesch*, wenn

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \text{für alle } u, v \in D(T)$$

gilt. Ist $D(T)$ dicht in H, so heißt der durch

$$\begin{aligned} D(T^*) \ &:= \ \{u \mid u \in H, \text{ es existiert } v_u \in H \text{ mit} \\ &\qquad (v_u, w) = (u, Tw) \text{ für alle } w \in D(T)\}, \\ T^*u \ &:= \ v_u \qquad (u \in D(T^*),\ v_u \text{ wie oben}) \end{aligned}$$

definierte Operator T^* der *zu T adjungierte Operator*; gilt $D(T) = D(T^*)$, $T = T^*$, so heißt T *selbstadjungiert*.
Weitergehende Ausführungen zu den hier vorgestellten Begriffen findet man z. B. ebenfalls in Weidmann [32] und in Naimark [22].