Spektrum und asymptotische Eigenwertverteilung singulärer Sturm–Liouville–Probleme mit indefiniter Gewichtsfunktion

Vom Fachbereich 11/Mathematik der

Gerhard-Mercator-Universität–Gesamthochschule Duisburg

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Martin Schröder

aus

Oberhausen

Referent: Prof. Dr. G. Freiling

Korreferent: Prof. Dr. W. Eberhard

Tag der mündlichen Prüfung: 13.5.1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit werden das Spektrum und die Verteilung der Eigenwerte gewisser singulärer Sturm-Liouville-Eigenwertprobleme mit indefiniter Gewichtsfunktion untersucht. Das Eigenwertproblem sei dazu in der folgenden Form gegeben bzw. durch geeignete Transformation in folgende Form übergeführt:

$$-u'' + \chi(x)u = \lambda w(x)u\,, \quad x \in [0,\infty), \tag{0.1}$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad \text{mit fest vorgegebenem } \alpha \in [0, 2\pi), \tag{0.2}$$

$$\int_0^\infty |w(x)||u(x)|^2\,dx < +\infty. \tag{0.3}$$

In der Differentialgleichung (0.1) heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwertparameter* und die Funktion w *Gewichtsfunktion*. Diese sei stets reellwertig und zweimal stetig differenzierbar. Ist $w > 0$ auf $[0,\infty)$ oder ist $w < 0$ auf $[0,\infty)$, so nennen wir w (*positiv* oder *negativ*) *definit*, w heißt *indefinit*, wenn es $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ gibt mit $w(t_1) > 0$ und $w(t_2) < 0$. Ist die Gewichtsfunktion indefinit, so besitzt sie mindestens eine Nullstelle in $(0,\infty)$. Wir betrachten in dieser Arbeit Gewichtsfunktionen mit endlich vielen Nullstellen $x_1, \ldots, x_m \in (0,\infty)$ mit $m \in \mathbb{N}$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen sei, daß $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1$ gilt. Die Nullstellen der Gewichtsfunktion werden im hier untersuchten Zusammenhang auch *turning points* genannt.

Weiter sei die Funktion χ in (0.1) reellwertig, über $[0,\infty)$ lokal (Lebesgue-) integrierbar und auf $[0,1]$ beschränkt, aber nicht notwendig stetig.

Eine Funktion $u : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ soll *Carathéodory-Lösung* (im weiteren kurz *Lösung* genannt) von (0.1) heißen, wenn u und u' lokal absolut stetig auf $[0,\infty)$ sind (dann existiert u'' fast überall auf $[0,\infty)$) und Gleichung (0.1) für fast alle $x \in [0,\infty)$ erfüllt ist. u ist also Carathéodory-Lösung von (0.1) genau dann, wenn u, u' lokal absolut stetig in $[0,\infty)$ sind und

$$\frac{1}{w(x)}(-u''(x) + \chi(x)u(x)) = \lambda u(x) \quad \text{für fast alle } x \in [0,\infty) \tag{0.4}$$

gilt. $\frac{1}{w}(-u'' + \chi u)$ entspricht dem üblicherweise bei definiter Gewichtsfunktion betrachteten Sturm-Liouville-Differentialausdruck; da w bei obigen Voraussetzungen nur endlich viele Nullstellen besitzt, ist also für (0.1) auch die Schreibweise (0.4) wie im definiten Fall zulässig.

Bedingung (0.2) ist eine Anfangsbedingung, die Bedingung (0.3) ersetzt eine Randbedingung, die bei kompaktem Grundintervall am rechten Intervallendpunkt gefordert werden würde.

Jede Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, für die eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung von (0.1) existiert, die (0.2) und (0.3) erfüllt, heißt *Eigenwert* von (0.1), (0.2), (0.3); jede zum Eigenwert λ

gehörende Lösung von (0.1), (0.2), (0.3), die nicht die Nullfunktion ist, nennen wir *Eigenfunktion*; das Problem (0.1), (0.2), (0.3) heißt ein *Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem*. Wie in Ćurgus-Langer [2, S. 42] werden wir das Problem

$$-u'' + q(x)u = \lambda r(x)u\ , \quad x \in (a,b)\ , \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$$
$$\text{wobei } q, r \text{ lokal integrierbar über } (a,b),$$

regulär nennen, falls $-\infty < a < b < +\infty$ und q, r integrierbar über (a, b) sind, andernfalls *singulär*. Der Intervallendpunkt a heißt regulär, falls $a > -\infty$ und q, r integrierbar über $[a, a+\varepsilon]$ sind für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, andernfalls singulär. Ebenso nennen wir b regulär, falls $b < +\infty$ und q, r integrierbar über $[b-\varepsilon, b]$ für passendes $\varepsilon > 0$ sind, ansonsten singulär. Im Sinne dieser Definition ist (0.1), zunächst auf $(0, \infty)$ betrachtet, ein singuläres Problem, $+\infty$ ist singulärer Randpunkt. Da unter den eingangs aufgeführten Voraussetzungen jedoch 0 regulärer Randpunkt ist, kann (0.1) dann auf $[0, \infty)$ betrachtet werden.

Eigenwertprobleme vom Sturm-Liouville-Typ, insbesondere singuläre Probleme, ergeben sich zum Beispiel in der Quantenphysik. Die Schrödinger-Gleichung (siehe z. B. Messiah [19]), ein wesentliches Element der nicht-relativistischen Quantenmechanik, für ein Teilchen der Masse $m > 0$ in einem Potential $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet in ihrer zeitunabhängigen Form

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{0.5}$$

darin ist $\hbar$ eine physikalische Konstante (Planckscher Wirkungsquantum). Gleichung (0.5) wird dann noch durch gewisse Regularitäts- und Randbedingungen ergänzt. Die Eigenwerte E charakterisieren dann die Energie, die zugehörigen Lösungen (Wellenfunktionen genannt) ermöglichen Wahrscheinlichkeitsaussagen über den Aufenthaltsort des betrachteten Teilchens. Auch indefinite Sturm-Liouville-Probleme ergeben sich in der Physik (z.B. bei der Untersuchung des Tunnel-Effektes), siehe z. B. Kaper-Lekkerkerker-Zettl [12] und die in Beals [1] angegebene Literatur.

Eigenwertprobleme vom Sturm-Liouville-Typ mit definiter oder sogar konstanter Gewichtsfunktion sind in der Literatur in weitreichendem Maße untersucht. Wichtige Betrachtungen im indefiniten Falle, auf beschränktem (kompaktem) oder auch unbeschränktem Grundintervall, stammen zum Beispiel von

Ćurgus, Daho, H. Langer ([2], [3]),

Dorodnicyn ([4]),

Eberhard, Freiling, Schneider ([5], [6], [7], [8], [9]),

R. E. Langer ([13], [15], [16]),

Stakun ([27], [28], [29]),

Tamarkin ([30]),

um nur einige wenige zu nennen, auf die sich auch diese Arbeit stützt. Es sollen weiter die fundamentalen Arbeiten von Weyl [33], [34] erwähnt werden, in denen u. a. auch die Klassifizierung nach Grenzpunktfall und Grenzkreisfall sowie deren Einfluß auf das Spektrum im definiten Fall behandelt wurden (siehe dazu auch Pleijel [24]).
Einen Überblick über die historische Entwicklung der Untersuchung indefiniter Sturm-Liouville-Probleme findet man in McHugh [18].
Die Ergebnisse mancher dieser Arbeiten beschränken sich auf das Vorliegen genau einer Nullstelle der Gewichtsfunktion bzw. auf lokale Aussagen in einer Umgebung einer Nullstelle. Die in der oben angegebenen Literatur behandelten Fragestellungen sind u. a. die Verteilung der Eigenwerte, asymptotische Abschätzungen geeigneter Fundamentalsysteme und Entwicklungssätze. Wichtig ist dabei im Hinblick auf Methoden und Ergebnisse zu unterscheiden, ob das Grundintervall beschränkt (kompakt) oder unbeschränkt ist, bzw. ob das Eigenwertproblem regulär oder singulär ist.

Ein möglicher Zugang zu den angesprochenen Problemen ist der folgende:
Die Theorie der sogenannten Liouville-Green-Approximation (siehe Olver [23, Kap. 6], für stetiges χ) liefert die Existenz zweier linear unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung (0.1) mit asymptotischen Abschätzungen (auch Liouville-Green-Funktionen oder JKWB-Funktionen genannt) auf jedem kompakten Teilintervall des Grundintervalls, das *keinen* turning point enthält. Diese Abschätzungen können jedoch nicht in einer Umgebung eines turning points gelten, da Lösungen von (0.1) stetig und auf jedem Kompaktum beschränkt sind, wohingegen Terme in den Approximationen Pole in den turning points besitzen.
R. E. Langer bewies in [13], [15] Abschätzungen für gewisse Lösungen von (0.1), die in einer Umgebung eines turning points gültig sind. Weiter zeigte er dann in [16], daß es bei Vorliegen mehrerer turning points jedoch nicht ohne weiteres möglich ist, das Grundintervall in Teilintervalle, die genau einen turning point enthalten, aufzuteilen und mit den von ihm zuvor bewiesenen Abschätzungen, in jedem Teilintervall angewandt, eine Abschätzung auf dem gesamten Intervall zu erhalten.
Eberhard, Freiling und Schneider haben im Falle eines kompakten Grundintervalls $[0,1]$ mit mehreren turning points und speziellen Zwei-Punkt-Randbedingungen in der Arbeit [9] ausgehend von Langers Ergebnissen in [15] und der Liouville-Green-Theorie unter gewissen Voraussetzungen ein Fundamentalsystem von (0.1) konstruiert, das Abschätzungen auf dem gesamten Grundintervall $[0,1]$ besitzt, so daß damit u. a. auch asymptotische Aussagen über die Eigenwerte möglich sind. In [5] wurde damit bewiesen, daß, ebenfalls unter geeigneten Annahmen, zwei Folgen $(\lambda_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten existieren, die den Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
\lambda_n^+ &= \frac{n^2\pi^2}{R_+^2}\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n\to\infty), \\
\lambda_n^- &= -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}
\tag{0.6}
$$

genügen (siehe [5, S. 26]); dabei seien

$$\begin{aligned} R_+ &:= \int_0^1 \sqrt{\max\{w(t),0\}}\,dt, \\ R_- &:= \int_0^1 \sqrt{\max\{-w(t),0\}}\,dt; \end{aligned}$$

falls R_+ bzw. R_- gleich Null ist, so ist die Folge $(\lambda_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\lambda_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ als leer zu betrachten.

Von Stakun existieren ebenfalls mehrere Arbeiten [27], [28], [29] über obige Problemstellung, allerdings mit unbeschränktem Grundintervall. In [27] betrachtet er (0.1) auf $[0,\infty)$ bei Vorliegen genau eines turning points $x_1 > 0$ mit der von ihm gewählten Gewichtsfunktion $w(x) := (x - x_1)w_0(x)$ für alle $x \in [0,\infty)$, wobei $w_0 > 0$, sowie (0.2) mit $\alpha = 0$ und (0.3). Er zeigt, daß unter geeigneten Bedingungen eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten existiert, für die ebenfalls

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty) \tag{0.7}$$

gilt (siehe [27, S. 1459f.]), und daß ein (nicht-leeres) kontinuierliches Spektrum vorliegt, nämlich das Intervall $(0,\infty)$; der Punkt $\lambda = 0$ wurde dabei nicht untersucht. In [29] betrachtet er auch Nullstellen von w höherer Ordnung.
Stakuns Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Ausgehend von der gegebenen Differentialgleichung (0.1) betrachtet er wie Dorodnicyn und R. E. Langer eine Vergleichs-Differentialgleichung, die explizit durch ein Fundamentalsystem v_1, v_2 lösbar ist, das im wesentlichen aus Hankelfunktionen besteht, und das die Angabe spezieller Lösungen y, Y der gegebenen Gleichung ermöglicht. Diese Funktionen y, Y bilden unter gewissen Bedingungen ein Fundamentalsystem, so daß die Greensche Funktion des vorgelegten Problems damit konstruiert werden kann, und sie besitzen geeignete asymptotische Darstellungen, die man aus den Eigenschaften der Funktionen v_1, v_2 folgert. Zum Beweis der Beziehung (0.7) benutzt Stakun dann Eigenschaften der Resolvente und der Greenschen Funktion.

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir Methoden und Ergebnisse sowohl von Eberhard, Freiling und Schneider aus [5], [9] als auch von Stakun aus [27] zur Untersuchung des gegebenen Eigenwertproblems, also bei Vorliegen mehrerer turning points. Wir werden zeigen, daß unter ähnlichen Voraussetzungen wie bei Stakun [27] für die Eigenwerte (0.7) gilt sowie Stakuns Aussage über das kontinuierliche Spektrum gültig bleibt.

Andere Zugänge zu indefiniten Sturm-Liouville-Problemen sind u. a. die Betrachtung von Differentialoperatoren in Räumen mit indefinitem inneren Produkt (sogenannte Krein-Räume) wie z. B. in Ćurgus-Langer [2] und Daho-Langer [3] mit Hilfe des Begriffes der J-Selbstadjungiertheit. Zur Erläuterung dessen, angewandt auf obiges Problem (0.1), (0.2), (0.3) mit indefinitem w, betrachten wir

$$L^2_{|w|}([0,\infty)) := \Big\{u \mid u : [0,\infty) \to \mathbb{C}, \int_0^\infty |w(x)||u(x)|^2\,dx < +\infty\Big\}$$

(wir identifizieren dabei die Äquivalenzklassen mit ihren Repräsentanten), versehen mit dem indefiniten inneren Produkt

$$[u,v] := \int_0^\infty u(x)\overline{v(x)}w(x)\,dx \qquad (u,v \in L^2_{|w|}([0,\infty))\ );$$

wir nennen den Raum $\mathcal{K} := (L^2_{|w|}([0,\infty)), [\cdot,\cdot])$ einen *Krein-Raum* (siehe Ćurgus-Langer [2, Abschn. 1.1]). $\mathcal{K}$ ist offensichtlich kein Hilbertraum; $\mathcal{H} := (L^2_{|w|}([0,\infty)), (\cdot,\cdot))$ mit

$$(u,v) := \int_0^\infty u(x)\overline{v(x)}|w(x)|\,dx \qquad (u,v \in L^2_{|w|}([0,\infty))\ )$$

ist jedoch ein Hilbertraum, da $|w| \geq 0$ auf $[0,\infty)$ und $\{x \mid x \in [0,\infty),\ w(x) = 0\}$ bei unseren eingangs erwähnten Voraussetzungen endlich, also eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Definieren wir nun speziell für (0.1), (0.2), (0.3) einen linearen Operator A mit Definitionsbereich $D(A)$ zum Beispiel durch (es bezeichne supp u den Träger der Funktion u)

$$\begin{aligned} D(A) &:= \Big\{u \mid u : [0,\infty) \to \mathbb{C},\ u \in C^2([0,\infty)),\ \operatorname{supp} u \subset (0,\infty), \\ &\qquad \operatorname{supp} u \text{ kompakt},\ \frac{1}{w}(-u'' + \chi u) \in L^2_{|w|}([0,\infty))\Big\}, \\ Au &:= \frac{1}{w}(-u'' + \chi u) \qquad (u \in D(A)), \end{aligned}$$

so ist A, betrachtet als Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$, nicht hermitesch, d.h. es gilt nicht

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{für alle } u, v \in D(A),$$

wie man mit partieller Integration und der Indefinitheit von w leicht sieht. Dies gilt ebenfalls für jeden zu (0.1), (0.2), (0.3) gehörenden Operator B mit $D(B) \supset D(A)$.
In beiden Fällen, bei Betrachtung in $\mathcal{H}$ und in $\mathcal{K}$, ist also auf indefinite Sturm-Liouville-Operatoren die funktionalanalytische Theorie symmetrischer und selbstadjungierter Operatoren in Hilberträumen nicht unmittelbar anwendbar. Es ist allerdings möglich, die Begriffe hermitesch, selbstadjungiert usw. für Operatoren in $\mathcal{K}$ zu definieren und eine Theorie über das Spektrum solcher Operatoren in Krein-Räumen zu entwickeln (siehe dazu zum Beispiel Ćurgus-Langer [2], Daho-Langer [3] sowie die dort angegebene Literatur).

Wir verwenden die folgenden allgemeinen Bezeichnungen für Intervalle $J \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u \text{ stetig}\}, \\ C^k(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u\ \ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}, k \in \mathbb{N}, \\ L^k(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ \textstyle\int_J |u(x)|^k\,dx < +\infty\}, k \in \mathbb{N}, \\ L^1_{\mathrm{loc}}(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u|K \in L^1(K) \text{ für jedes kompakte Teilintervall } K \subset J\}, \end{aligned}$$

wobei $u|K$ die Einschränkung der Funktion u auf K bezeichne. Alle Integrale in dieser Arbeit seien Lebesgue-Integrale. Wir schreiben auch

$$\int_a^b u \quad \text{anstelle von} \quad \int_a^b u(x)\,dx \quad \text{bzw. von} \quad \int_{(a,b)} u(x)\,dx$$

für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Wir werden in den weiteren Kapiteln der vorliegenden Arbeit auf die hier in der Einleitung lediglich kurz angerissenen Begriffe noch ausführlicher eingehen.
In Kapitel 1 werden wir einen zum Problem (0.1), (0.2), (0.3) gehörenden Differentialoperator definieren und allgemeine Eigenschaften der Differentialgleichung (0.1) angeben. Zum Ende des Kapitels nennen wir einige funktionalanalytische Definitionen, die im weiteren zugrundegelegt werden sollen. Im zweiten Kapitel untersuchen wir das Spektrum des zu (0.1), (0.2), (0.3) gehörenden Differentialoperators, Kapitel 3 ist dem Beweis der Eigenwertasymptotik und der Betrachtung eines Beispiels gewidmet.
Schließlich soll noch erwähnt werden, daß es — über Fragestellungen nach Entwicklungssätzen bei kompaktem Intervall wie in Eberhard-Freiling [6] hinausgehend — auch bei Vorliegen eines beliebigen, nicht notwendig kompakten Intervalls mit mehreren turning points möglich ist, gewisse Entwicklungssätze anzugeben, zum Beispiel in Ćurgus-Langer [2], auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

Ich möchte mich an dieser Stelle sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. W. Eberhard und Herrn Prof. Dr. G. Freiling für die Anregung zu diesem Thema und die wertvollen Gespräche bedanken. Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. V. A. Yurko (Universität Saratov, Rußland) für die hilfreichen Diskussionen während seiner Besuche an der Universität Duisburg.