Spektrum und asymptotische Eigenwertverteilung singulärer Sturm–Liouville–Probleme mit indefiniter Gewichtsfunktion

Vom Fachbereich 11/Mathematik der

Gerhard-Mercator-Universität–Gesamthochschule Duisburg

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Martin Schröder

aus

Oberhausen

Referent: Prof. Dr. G. Freiling

Korreferent: Prof. Dr. W. Eberhard

Tag der mündlichen Prüfung: 13.5.1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit werden das Spektrum und die Verteilung der Eigenwerte gewisser singulärer Sturm-Liouville-Eigenwertprobleme mit indefiniter Gewichtsfunktion untersucht. Das Eigenwertproblem sei dazu in der folgenden Form gegeben bzw. durch geeignete Transformation in folgende Form übergeführt:

$$-u'' + \chi(x)u = \lambda w(x)u\,, \quad x \in [0,\infty), \tag{0.1}$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad \text{mit fest vorgegebenem } \alpha \in [0,2\pi), \tag{0.2}$$

$$\int_0^\infty |w(x)||u(x)|^2\,dx < +\infty. \tag{0.3}$$

In der Differentialgleichung (0.1) heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ *Eigenwertparameter* und die Funktion w *Gewichtsfunktion*. Diese sei stets reellwertig und zweimal stetig differenzierbar. Ist $w > 0$ auf $[0,\infty)$ oder ist $w < 0$ auf $[0,\infty)$, so nennen wir w (*positiv* oder *negativ*) *definit*, w heißt *indefinit*, wenn es $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ gibt mit $w(t_1) > 0$ und $w(t_2) < 0$. Ist die Gewichtsfunktion indefinit, so besitzt sie mindestens eine Nullstelle in $(0,\infty)$. Wir betrachten in dieser Arbeit Gewichtsfunktionen mit endlich vielen Nullstellen $x_1, \dots, x_m \in (0,\infty)$ mit $m \in \mathbb{N}$, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen sei, daß $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1$ gilt. Die Nullstellen der Gewichtsfunktion werden im hier untersuchten Zusammenhang auch *turning points* genannt.
Weiter sei die Funktion χ in (0.1) reellwertig, über $[0,\infty)$ lokal (Lebesgue-) integrierbar und auf $[0,1]$ beschränkt, aber nicht notwendig stetig.
Eine Funktion $u : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ soll *Carathéodory-Lösung* (im weiteren kurz *Lösung* genannt) von (0.1) heißen, wenn u und u' lokal absolut stetig auf $[0,\infty)$ sind (dann existiert u'' fast überall auf $[0,\infty)$) und Gleichung (0.1) für fast alle $x \in [0,\infty)$ erfüllt ist. u ist also Carathéodory-Lösung von (0.1) genau dann, wenn u, u' lokal absolut stetig in $[0,\infty)$ sind und

$$\frac{1}{w(x)}(-u''(x) + \chi(x)u(x)) = \lambda u(x) \quad \text{für fast alle } x \in [0,\infty) \tag{0.4}$$

gilt. $\frac{1}{w}(-u'' + \chi u)$ entspricht dem üblicherweise bei definiter Gewichtsfunktion betrachteten Sturm-Liouville-Differentialausdruck; da w bei obigen Voraussetzungen nur endlich viele Nullstellen besitzt, ist also für (0.1) auch die Schreibweise (0.4) wie im definiten Fall zulässig.
Bedingung (0.2) ist eine Anfangsbedingung, die Bedingung (0.3) ersetzt eine Randbedingung, die bei kompaktem Grundintervall am rechten Intervallendpunkt gefordert werden würde.
Jede Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$, für die eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung von (0.1) existiert, die (0.2) und (0.3) erfüllt, heißt *Eigenwert* von (0.1), (0.2), (0.3); jede zum Eigenwert λ

gehörende Lösung von (0.1), (0.2), (0.3), die nicht die Nullfunktion ist, nennen wir *Eigenfunktion*; das Problem (0.1), (0.2), (0.3) heißt ein *Sturm-Liouvillesches Eigenwertproblem*. Wie in Ćurgus-Langer [2, S. 42] werden wir das Problem

$$-u'' + q(x)u = \lambda r(x)u\ , \quad x \in (a,b)\ , \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$$
$$\text{wobei } q, r \text{ lokal integrierbar über } (a,b),$$

regulär nennen, falls $-\infty < a < b < +\infty$ und q, r integrierbar über (a,b) sind, andernfalls *singulär*. Der Intervallendpunkt a heißt regulär, falls $a > -\infty$ und q, r integrierbar über $[a, a+\varepsilon]$ sind für ein geeignetes $\varepsilon > 0$, andernfalls singulär. Ebenso nennen wir b regulär, falls $b < +\infty$ und q, r integrierbar über $[b-\varepsilon, b]$ für passendes $\varepsilon > 0$ sind, ansonsten singulär. Im Sinne dieser Definition ist (0.1), zunächst auf $(0,\infty)$ betrachtet, ein singuläres Problem, $+\infty$ ist singulärer Randpunkt. Da unter den eingangs aufgeführten Voraussetzungen jedoch 0 regulärer Randpunkt ist, kann (0.1) dann auf $[0,\infty)$ betrachtet werden.

Eigenwertprobleme vom Sturm-Liouville-Typ, insbesondere singuläre Probleme, ergeben sich zum Beispiel in der Quantenphysik. Die Schrödinger-Gleichung (siehe z. B. Messiah [19]), ein wesentliches Element der nicht-relativistischen Quantenmechanik, für ein Teilchen der Masse $m > 0$ in einem Potential $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lautet in ihrer zeitunabhängigen Form

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) + V(x)u(x) = Eu(x) \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{0.5}$$

darin ist $\hbar$ eine physikalische Konstante (Plancksches Wirkungsquantum). Gleichung (0.5) wird dann noch durch gewisse Regularitäts- und Randbedingungen ergänzt. Die Eigenwerte E charakterisieren dann die Energie, die zugehörigen Lösungen (Wellenfunktionen genannt) ermöglichen Wahrscheinlichkeitsaussagen über den Aufenthaltsort des betrachteten Teilchens. Auch indefinite Sturm-Liouville-Probleme ergeben sich in der Physik (z.B. bei der Untersuchung des Tunnel-Effektes), siehe z. B. Kaper-Lekkerkerker-Zettl [12] und die in Beals [1] angegebene Literatur.

Eigenwertprobleme vom Sturm-Liouville-Typ mit definiter oder sogar konstanter Gewichtsfunktion sind in der Literatur in weitreichendem Maße untersucht. Wichtige Betrachtungen im indefiniten Falle, auf beschränktem (kompaktem) oder auch unbeschränktem Grundintervall, stammen zum Beispiel von

Ćurgus, Daho, H. Langer ([2], [3]),

Dorodnicyn ([4]),

Eberhard, Freiling, Schneider ([5], [6], [7], [8], [9]),

R. E. Langer ([13], [15], [16]),

Stakun ([27], [28], [29]),

Tamarkin ([30]),

um nur einige wenige zu nennen, auf die sich auch diese Arbeit stützt. Es sollen weiter die fundamentalen Arbeiten von Weyl [33], [34] erwähnt werden, in denen u. a. auch die Klassifizierung nach Grenzpunktfall und Grenzkreisfall sowie deren Einfluß auf das Spektrum im definiten Fall behandelt wurden (siehe dazu auch Pleijel [24]).
Einen Überblick über die historische Entwicklung der Untersuchung indefiniter Sturm-Liouville-Probleme findet man in McHugh [18].
Die Ergebnisse mancher dieser Arbeiten beschränken sich auf das Vorliegen genau einer Nullstelle der Gewichtsfunktion bzw. auf lokale Aussagen in einer Umgebung einer Nullstelle. Die in der oben angegebenen Literatur behandelten Fragestellungen sind u. a. die Verteilung der Eigenwerte, asymptotische Abschätzungen geeigneter Fundamentalsysteme und Entwicklungssätze. Wichtig ist dabei im Hinblick auf Methoden und Ergebnisse zu unterscheiden, ob das Grundintervall beschränkt (kompakt) oder unbeschränkt ist, bzw. ob das Eigenwertproblem regulär oder singulär ist.

Ein möglicher Zugang zu den angesprochenen Problemen ist der folgende:
Die Theorie der sogenannten Liouville-Green-Approximation (siehe Olver [23, Kap. 6], für stetiges χ) liefert die Existenz zweier linear unabhängiger Lösungen der Differentialgleichung (0.1) mit asymptotischen Abschätzungen (auch Liouville-Green-Funktionen oder JKWB-Funktionen genannt) auf jedem kompakten Teilintervall des Grundintervalls, das *keinen* turning point enthält. Diese Abschätzungen können jedoch nicht in einer Umgebung eines turning points gelten, da Lösungen von (0.1) stetig und auf jedem Kompaktum beschränkt sind, wohingegen Terme in den Approximationen Pole in den turning points besitzen.
R. E. Langer bewies in [13], [15] Abschätzungen für gewisse Lösungen von (0.1), die in einer Umgebung eines turning points gültig sind. Weiter zeigte er dann in [16], daß es bei Vorliegen mehrerer turning points jedoch nicht ohne weiteres möglich ist, das Grundintervall in Teilintervalle, die genau einen turning point enthalten, aufzuteilen und mit den von ihm zuvor bewiesenen Abschätzungen, in jedem Teilintervall angewandt, eine Abschätzung auf dem gesamten Intervall zu erhalten.
Eberhard, Freiling und Schneider haben im Falle eines kompakten Grundintervalls $[0,1]$ mit mehreren turning points und speziellen Zwei-Punkt-Randbedingungen in der Arbeit [9] ausgehend von Langers Ergebnissen in [15] und der Liouville-Green-Theorie unter gewissen Voraussetzungen ein Fundamentalsystem von (0.1) konstruiert, das Abschätzungen auf dem gesamten Grundintervall $[0,1]$ besitzt, so daß damit u. a. auch asymptotische Aussagen über die Eigenwerte möglich sind. In [5] wurde damit bewiesen, daß, ebenfalls unter geeigneten Annahmen, zwei Folgen $(\lambda_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten existieren, die den Abschätzungen

$$(0.6)\qquad \begin{aligned} \lambda_n^+ &= \frac{n^2\pi^2}{R_+^2}\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n\to\infty),\\ \lambda_n^- &= -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n\to\infty) \end{aligned}$$

genügen (siehe [5, S. 26]); dabei seien

$$R_+ := \int_0^1 \sqrt{\max\{w(t), 0\}}\, dt,$$
$$R_- := \int_0^1 \sqrt{\max\{-w(t), 0\}}\, dt;$$

falls R_+ bzw. R_- gleich Null ist, so ist die Folge $(\lambda_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\lambda_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ als leer zu betrachten.

Von Stakun existieren ebenfalls mehrere Arbeiten [27], [28], [29] über obige Problemstellung, allerdings mit unbeschränktem Grundintervall. In [27] betrachtet er (0.1) auf $[0, \infty)$ bei Vorliegen genau eines turning points $x_1 > 0$ mit der von ihm gewählten Gewichtsfunktion $w(x) := (x - x_1)w_0(x)$ für alle $x \in [0, \infty)$, wobei $w_0 > 0$, sowie (0.2) mit $\alpha = 0$ und (0.3). Er zeigt, daß unter geeigneten Bedingungen eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Eigenwerten existiert, für die ebenfalls

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty) \tag{0.7}$$

gilt (siehe [27, S. 1459f.]), und daß ein (nicht-leeres) kontinuierliches Spektrum vorliegt, nämlich das Intervall $(0, \infty)$; der Punkt $\lambda = 0$ wurde dabei nicht untersucht. In [29] betrachtet er auch Nullstellen von w höherer Ordnung.
Stakuns Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Ausgehend von der gegebenen Differentialgleichung (0.1) betrachtet er wie Dorodnicyn und R. E. Langer eine Vergleichs-Differentialgleichung, die explizit durch ein Fundamentalsystem v_1, v_2 lösbar ist, das im wesentlichen aus Hankelfunktionen besteht, und das die Angabe spezieller Lösungen y, Y der gegebenen Gleichung ermöglicht. Diese Funktionen y, Y bilden unter gewissen Bedingungen ein Fundamentalsystem, so daß die Greensche Funktion des vorgelegten Problems damit konstruiert werden kann, und sie besitzen geeignete asymptotische Darstellungen, die man aus den Eigenschaften der Funktionen v_1, v_2 folgert. Zum Beweis der Beziehung (0.7) benutzt Stakun dann Eigenschaften der Resolvente und der Greenschen Funktion.

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir Methoden und Ergebnisse sowohl von Eberhard, Freiling und Schneider aus [5], [9] als auch von Stakun aus [27] zur Untersuchung des gegebenen Eigenwertproblems, also bei Vorliegen mehrerer turning points. Wir werden zeigen, daß unter ähnlichen Voraussetzungen wie bei Stakun [27] für die Eigenwerte (0.7) gilt sowie Stakuns Aussage über das kontinuierliche Spektrum gültig bleibt.

Andere Zugänge zu indefiniten Sturm-Liouville-Problemen sind u. a. die Betrachtung von Differentialoperatoren in Räumen mit indefinitem inneren Produkt (sogenannte Krein-Räume) wie z. B. in Ćurgus-Langer [2] und Daho-Langer [3] mit Hilfe des Begriffes der J-Selbstadjungiertheit. Zur Erläuterung dessen, angewandt auf obiges Problem (0.1), (0.2), (0.3) mit indefinitem w, betrachten wir

$$L^2_{|w|}([0, \infty)) := \Big\{u \mid u : [0, \infty) \to \mathbb{C}, \int_0^\infty |w(x)||u(x)|^2\, dx < +\infty\Big\}$$

(wir identifizieren dabei die Äquivalenzklassen mit ihren Repräsentanten), versehen mit dem indefiniten inneren Produkt

$$[u,v] := \int_0^\infty u(x)\overline{v(x)}w(x)\,dx \qquad (u,v \in L^2_{|w|}([0,\infty))\ );$$

wir nennen den Raum $\mathcal{K} := (L^2_{|w|}([0,\infty)), [\cdot,\cdot])$ einen *Krein-Raum* (siehe Ćurgus-Langer [2, Abschn. 1.1]). $\mathcal{K}$ ist offensichtlich kein Hilbertraum; $\mathcal{H} := (L^2_{|w|}([0,\infty)), (\cdot,\cdot))$ mit

$$(u,v) := \int_0^\infty u(x)\overline{v(x)}|w(x)|\,dx \qquad (u,v \in L^2_{|w|}([0,\infty))\ )$$

ist jedoch ein Hilbertraum, da $|w| \geq 0$ auf $[0,\infty)$ und $\{x \mid x \in [0,\infty),\ w(x) = 0\}$ bei unseren eingangs erwähnten Voraussetzungen endlich, also eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Definieren wir nun speziell für (0.1), (0.2), (0.3) einen linearen Operator A mit Definitionsbereich $D(A)$ zum Beispiel durch (es bezeichne supp u den Träger der Funktion u)

$$\begin{aligned} D(A) &:= \Big\{u \mid u : [0,\infty) \to \mathbb{C},\ u \in C^2([0,\infty)),\ \operatorname{supp} u \subset (0,\infty), \\ &\qquad \operatorname{supp} u \text{ kompakt},\ \frac{1}{w}(-u'' + \chi u) \in L^2_{|w|}([0,\infty))\Big\}, \\ Au &:= \frac{1}{w}(-u'' + \chi u) \qquad (u \in D(A)), \end{aligned}$$

so ist A, betrachtet als Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$, nicht hermitesch, d.h. es gilt nicht

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \text{für alle } u, v \in D(A),$$

wie man mit partieller Integration und der Indefinitheit von w leicht sieht. Dies gilt ebenfalls für jeden zu (0.1), (0.2), (0.3) gehörenden Operator B mit $D(B) \supset D(A)$.
In beiden Fällen, bei Betrachtung in $\mathcal{H}$ und in $\mathcal{K}$, ist also auf indefinite Sturm-Liouville-Operatoren die funktionalanalytische Theorie symmetrischer und selbstadjungierter Operatoren in Hilberträumen nicht unmittelbar anwendbar. Es ist allerdings möglich, die Begriffe hermitesch, selbstadjungiert usw. für Operatoren in $\mathcal{K}$ zu definieren und eine Theorie über das Spektrum solcher Operatoren in Krein-Räumen zu entwickeln (siehe dazu zum Beispiel Ćurgus-Langer [2], Daho-Langer [3] sowie die dort angegebene Literatur).

Wir verwenden die folgenden allgemeinen Bezeichnungen für Intervalle $J \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u \text{ stetig}\}, \\ C^k(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u\ \ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}, k \in \mathbb{N}, \\ L^k(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ \int_J |u(x)|^k\,dx < +\infty\}, k \in \mathbb{N}, \\ L^1_{\mathrm{loc}}(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u|K \in L^1(K) \text{ für jedes kompakte Teilintervall } K \subset J\}, \end{aligned}$$

wobei $u|K$ die Einschränkung der Funktion u auf K bezeichne. Alle Integrale in dieser Arbeit seien Lebesgue-Integrale. Wir schreiben auch

$$\int_a^b u \quad \text{anstelle von} \quad \int_a^b u(x)\,dx \quad \text{bzw. von} \quad \int_{(a,b)} u(x)\,dx$$

für $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Wir werden in den weiteren Kapiteln der vorliegenden Arbeit auf die hier in der Einleitung lediglich kurz angerissenen Begriffe noch ausführlicher eingehen.
In Kapitel 1 werden wir einen zum Problem (0.1), (0.2), (0.3) gehörenden Differentialoperator definieren und allgemeine Eigenschaften der Differentialgleichung (0.1) angeben. Zum Ende des Kapitels nennen wir einige funktionalanalytische Definitionen, die im weiteren zugrundegelegt werden sollen. Im zweiten Kapitel untersuchen wir das Spektrum des zu (0.1), (0.2), (0.3) gehörenden Differentialoperators, Kapitel 3 ist dem Beweis der Eigenwertasymptotik und der Betrachtung eines Beispiels gewidmet.
Schließlich soll noch erwähnt werden, daß es — über Fragestellungen nach Entwicklungssätzen bei kompaktem Intervall wie in Eberhard-Freiling [6] hinausgehend — auch bei Vorliegen eines beliebigen, nicht notwendig kompakten Intervalls mit mehreren turning points möglich ist, gewisse Entwicklungssätze anzugeben, zum Beispiel in Ćurgus-Langer [2], auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll.

Ich möchte mich an dieser Stelle sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. W. Eberhard und Herrn Prof. Dr. G. Freiling für die Anregung zu diesem Thema und die wertvollen Gespräche bedanken. Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. V. A. Yurko (Universität Saratov, Rußland) für die hilfreichen Diskussionen während seiner Besuche an der Universität Duisburg.

Kapitel 1

Einführung in die Problemstellung

1.1 Grundlegendes und generelle Voraussetzungen

Wir untersuchen Spektrum und asymptotische Eigenwertverteilung der Eigenwertaufgabe

$$-u'' + \chi(x)u = \rho^2\phi^2(x)u, \quad x \in I := [0,\infty), \tag{1.1}$$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0 \quad \text{mit festem } \alpha \in [0, 2\pi), \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty |\phi^2(x)||u(x)|^2\,dx < \infty, \tag{1.3}$$

wobei

$\rho^2 \in \mathbb{C}$ Eigenwertparameter (die Betrachtung von $0 \le \arg\rho \le \pi$, d.h. $\operatorname{Im}(\rho) \ge 0$, ist ausreichend),

ϕ^2 reellwertige Gewichtsfunktion mit m Nullstellen x_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, der Ordnungen $l_\nu \in \mathbb{N}$ mit $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1$ und

$$\phi^2(x) = \prod_{\nu=1}^{m}(x - x_\nu)^{l_\nu}\phi_0(x) \quad (x \in I) \quad \text{mit } \phi_0 \in C^2(I),\ \phi_0 > 0,$$

$\chi \in L^1_{\text{loc}}(I)$ reellwertig und auf $[0,1]$ beschränkt.

Die Tatsache, daß Eigenwertparameter und Gewichtsfunktion in (1.1) als Quadrate ρ^2, ϕ^2 geschrieben wurden, dient nur der Vereinfachung der Schreibweise und Vermeidung von Wurzeln in den nachfolgenden Abschnitten.

Da χ als nicht notwendig stetig vorausgesetzt wird, verwenden wir folgenden Lösungsbegriff für Differentialgleichungen der Gestalt $-u'' + qu = f$:

Definition 1.1. Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $q, f \in L^1_{\text{loc}}(J)$. Eine Funktion $u : J \to \mathbb{C}$ heißt *Carathéodory-Lösung* (im folgenden kurz *Lösung* genannt) von

$$lu := -u'' + qu = f \quad \text{auf } J,$$

wenn

$$u \in AC_{\text{loc}}(J),\ u' \in AC_{\text{loc}}(J) \text{ und } (lu)(x) = f(x) \text{ für fast alle } x \in J \tag{1.4}$$

gilt. Für (1.4) schreiben wir kurz: $lu = f$ auf J.
Zwei Lösungen v, w von $lu = 0$ auf J nennen wir *Fundamentalsystem* von $lu = 0$ auf J, wenn v und w linear unabhängig sind.
Für zwei Lösungen v, w von $lu = 0$ auf J definieren wir die *Wronskifunktion* von v und w durch

$$W(v,w)(x) := v(x)\, w'(x) - v'(x)\, w(x) \quad (x \in J).$$

Anmerkung zu Definition 1.1:
Wir nennen wie üblich (siehe hierzu z. B. Wheeden-Zygmund [35, S. 115]) eine Funktion $u : [a,b] \to \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) *absolut stetig* auf $[a,b]$, wenn für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle paarweise disjunkten Teilintervalle $(a_j, b_j) \subset [a,b]$, $j \in \mathcal{J}$ mit endlicher oder abzählbar unendlicher Indexmenge $\mathcal{J}$, mit $\sum_{j \in \mathcal{J}} (b_j - a_j) < \delta$ gilt:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}} |u(b_j) - u(a_j)| < \epsilon.$$

Sei

$$AC([a,b]) := \{u \mid u : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ absolut stetig}\},$$

und sei für ein beliebiges Intervall $J \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} AC_{\mathrm{loc}}(J) \;:=\; \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u|K &\text{ absolut stetig auf } K \\ &\text{für jedes kompakte Teilintervall } K \subset J\} \end{aligned}$$

die Menge der auf J *lokal absolut stetigen Funktionen*. Es gilt (siehe Wheeden-Zygmund [35, S. 115f.]):

(i) Ist $u \in AC([a,b])$, so existiert die Ableitung u' fast überall in (a,b) mit $u' \in L^1((a,b))$.

(ii) Es ist $u : [a,b] \to \mathbb{C}$ in $AC([a,b])$ genau dann, wenn es ein $v \in L^1([a,b])$ gibt mit

$$u(x) - u(a) = \int_a^x v(t)\, dt \qquad (x \in [a,b]).$$

Gilt dieses, so ist $u'(x) = v(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$.

Ist ein beliebiges Intervall $J \subset \mathbb{R}$ gegeben, so übertragen sich die Eigenschaften (i) und (ii) sinngemäß auf $AC_{\mathrm{loc}}(J)$ bzw. $L^1_{\mathrm{loc}}(J)$.

Sind in Definition 1.1 $q, f \in C(J)$ und $u \in C^2(J)$ mit $(lu)(x) = f(x)$ für alle $x \in J$, so ist u natürlich auch Carathéodory–Lösung von $lu = f$ auf J.
Wegen $\chi \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ und $\phi^2 \in C^2(I)$ ist auch $q := \chi - \rho^2\phi^2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$, so daß Definition 1.1 insbesondere auf Differentialgleichungen vom Typ (1.1) anwendbar ist.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Aussagen über die Differentialgleichung (1.1). Sei dazu gemäß (1.1) für jedes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ der Differentialausdruck

$$l_\rho u := -u'' + \chi u - \rho^2 \phi^2 u$$

definiert; (1.1) ist damit äquivalent zu

$$l_\rho u = 0 \quad \text{auf } I.$$

Wir notieren noch die folgenden bekannten Lemmata, deren Beweise sich in Anhang A befinden:

Lemma 1.1. *Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ fest gewählt und $J \subset I$ ein Intervall.*

a) Für je zwei Lösungen v, w von $l_\rho u = 0$ auf J ist $W(v, w)$ konstant.

b) Für je zwei Lösungen v, w von $l_\rho u = 0$ auf J gilt:

$$W(v, w) \neq 0 \Longleftrightarrow v, w \textit{ sind linear unabhängig.}$$

Beweis. Siehe Anhang A. □

Lemma 1.2. *Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ fest gewählt und $J \subset I$ ein Intervall. Sei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf J, und seien weiter $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(J)$ sowie $x_0 \in J$ fest.*

a) $u : J \to \mathbb{C}$ ist genau dann Lösung von $l_\rho u = f$ auf J, wenn es Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$(1.5) \quad u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x) y_2(t) - y_2(x) y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \quad (x \in J).$$

Gilt (1.5), so ist

$$u'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1'(x) y_2(t) - y_2'(x) y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \quad (x \in J),$$

und es sind $u, u' \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$.

b) Sind $a, b \in \mathbb{C}$, so gibt es genau eine Lösung u von $l_\rho u = f$ auf J mit

$$u(x_0) = a, \quad u'(x_0) = b.$$

Beweis. Siehe Anhang A. □

1.2 Definition des zum Eigenwertproblem gehörenden Differentialoperators

Wir betrachten im folgenden den Vektorraum

$$L^2_{|\phi^2|}(I) := \Big\{ u \mid u : I \to \mathbb{C}, \int\limits_0^\infty |\phi^2||u|^2 < \infty \Big\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt $(u, v) := \int\limits_0^\infty |\phi^2|\, u\,\overline{v}$ für $u, v \in L^2_{|\phi^2|}(I)$; da $|\phi^2| > 0$ fast überall in I, ist $(\cdot,\cdot)$ positiv definit, und $L^2_{|\phi^2|}(I)$ mit $(\cdot,\cdot)$ und der von $(\cdot,\cdot)$ induzierten Norm $\|\cdot\|$ ist ein Hilbertraum.
Gemäß (1.1), (1.2), (1.3) definieren wir einen linearen Operator L durch

$$\begin{aligned} D(L) \;&:=\; \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, u \in L^2_{|\phi^2|}(I), u \in AC_{\text{loc}}(I), u' \in AC_{\text{loc}}(I),\\ &\phantom{:=\;\{} u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0,\\ &\phantom{:=\;\{} \text{es gibt ein } v \in L^2_{|\phi^2|}(I) \text{ mit } -u'' + \chi u = \phi^2 v \text{ auf } I\},\\ Lu \;&:=\; v \qquad\qquad (u \in D(L), v \text{ wie oben}). \end{aligned}$$

Also ist für $u \in D(L)$

$$Lu = \frac{1}{\phi^2}(-u'' + \chi u) \quad \text{und} \quad Lu \in L^2_{|\phi^2|}(I),$$

wie bei der Betrachtung von Sturm–Liouville–Operatoren üblich. Wegen der vorausgesetzten Existenz von Nullstellen von ϕ^2 haben wir (wie z. B. in Daho–Langer [3]) jedoch die obige, in $D(L)$ angegebene Schreibweise bevorzugt. Es ist also für u aus dem Definitionsbereich $D(L)$ von L, v aus dessen Wertebereich und $\rho^2 \in \mathbb{C}$

$$Lu = v \iff -u'' + \chi u = \phi^2 v \text{ auf } I,$$

$$Lu = \rho^2 u \iff -u'' + \chi u = \rho^2\phi^2 u \text{ auf } I;$$

das Problem (1.1), (1.2), (1.3) ist dann äquivalent zum Eigenwertproblem für den Operator L. L ist offensichtlich ein linearer Operator, dessen Definitions– und Wertebereich Teilmengen von $L^2_{|\phi^2|}(I)$ sind.
Im Hinblick auf die angesprochenen Aussagen über das Spektrum werden wir die Resolvente $(L - \rho^2 id)^{-1}$ von L untersuchen (dabei sei id die identische Abbildung in $L^2_{|\phi^2|}(I)$) und definieren dazu für jedes $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ einen linearen Operator L_ρ durch

$$L_\rho := L - \rho^2 id \quad \text{mit } D(L_\rho) := D(L).$$

Wir erhalten damit aber auch

$$\begin{aligned} D(L_\rho) \;&=\; \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, u \in L^2_{|\phi^2|}(I), u, u' \in AC_{\text{loc}}(I),\\ &\phantom{=\;\{} u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0,\\ &\phantom{=\;\{} \text{es gibt ein } v \in L^2_{|\phi^2|}(I) \text{ mit } l_\rho u = \phi^2 v \text{ auf } I\}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

denn die Bedingung *es gibt ein* $v \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ *mit* $-u'' + \chi u = \phi^2 v$ *auf* I in der Definition von $D(L)$ ist wegen $u \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ äquivalent zur Bedingung *es gibt ein* $v \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ *mit* $l_\rho u = -u'' + \chi u - \rho^2 \phi^2 u = \phi^2 v$ *auf* I in obiger Charakterisierung (1.6) von $D(L_\rho)$.
Es gilt für u aus dem Definitionsbereich und v aus dem Wertebereich von L_ρ

$$L_\rho u = v \Longleftrightarrow -u'' + \chi u - \rho^2 \phi^2 u = \phi^2 v \text{ auf } I,$$

nach Definition von L und L_ρ gilt nämlich

$$\begin{aligned} L_\rho u = v &\Longleftrightarrow Lu - \rho^2 u = v \\ &\Longleftrightarrow Lu = v + \rho^2 u \\ &\Longleftrightarrow -u'' + \chi u = \phi^2 (v + \rho^2 u) \text{ auf } I \\ &\Longleftrightarrow -u'' + \chi u - \rho^2 \phi^2 u = \phi^2 v \text{ auf } I. \end{aligned}$$

Nun noch eine Überlegung zur Wahl des Raumes $L^2_{|\phi^2|}(I)$:

Bemerkung 1.1. Der sonst bei Sturm–Liouville–Operatoren mit definiter Gewichtsfunktion $w > 0$ betrachtete Raum $L^2_w(I) := \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, \int_0^\infty w|u|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt $[u, v] := \int_0^\infty w\, u\, \overline{v}$ für $u, v \in L^2_w(I)$ ist, wie bereits erwähnt, im Falle $w = \phi^2$ bei vorliegender Indefinitheit von ϕ^2 *kein* Hilbertraum und $[\cdot, \cdot]$ *nicht* positiv definit. Deshalb betrachten wir stattdessen L und L_ρ wie Stakun [27], [28], [29] und Daho–Langer [3] im Raum $L^2_{|\phi^2|}(I)$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|$.

Bemerkung 1.2. Unter den eingangs aufgeführten Voraussetzungen an ϕ^2 bestehen die folgenden Zusammenhänge zwischen den Räumen $L^2_{|\phi^2|}(I)$, $L^2(I)$ und $L^1_{\text{loc}}(I)$:

a) Falls $\lim\limits_{x\to\infty} \phi^2(x) \geq 1$, so gilt $C(I) \cap L^2_{|\phi^2|}(I) \subset L^2(I)$;

b) $u \in L^2_{|\phi^2|}(I) \Longrightarrow \phi^2 u \in L^1_{\text{loc}}(I)$;

c) Für z. B. $\phi^2(x) := x - \frac{1}{2}$, $x \in I$, gilt $L^2_{|\phi^2|}(I) \not\subset L^2(I)$.

Beweis.
a) Sei $u \in C(I) \cap L^2_{|\phi^2|}(I)$. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \phi^2(x) \geq 1$ gibt es ein $A \geq 0$ mit $\phi^2(x) \geq \frac{1}{2}$ für alle $x \geq A$. Dann gilt

$$\int_A^\infty |u|^2 \leq 2 \int_A^\infty |\phi^2||u|^2 \leq 2 \int_0^\infty |\phi^2||u|^2 < +\infty.$$

Da u stetig und somit auf dem Kompaktum $[0, A]$ beschränkt ist, existiert auch $\int_0^A |u|^2$, mithin ist

$$\int_0^\infty |u|^2 < +\infty.$$

b) Sei K eine beliebige kompakte Teilmenge von I. Wegen $u \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ gilt

$$\int_K |\phi^2||u|^2 \leq \int_0^\infty |\phi^2||u|^2 < +\infty,$$

wegen $\phi^2 \in C(I)$ gilt $\int\limits_K |\phi^2| < +\infty$. Weiter ist

$$|u(x)| \leq \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in I \text{ mit } |u(x)| \leq 1, \\ |u(x)|^2 & \text{für} \quad x \in I \text{ mit } |u(x)| > 1. \end{cases}$$

Setzen wir für $M \subset \mathbb{R}$

$$1_M(x) := \begin{cases} 0, & x \notin M, \\ 1, & x \in M, \end{cases}$$

so gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_K |\phi^2 u| &\leq \int_K \Big(|\phi^2(t)| \cdot 1_{\{x \in I : |u(x)| \leq 1\}}(t) + |\phi^2(t)||u(t)|^2 \cdot 1_{\{x \in I : |u(x)| > 1\}}(t) \Big)\, dt \\ &\leq \int_K |\phi^2| + \int_K |\phi^2||u|^2 < +\infty. \end{aligned}$$

c) Wir geben eine Funktion u mit $u \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ und $u \notin L^2(I)$ an: Sei

$$u(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(\frac{1}{2} - x)^{3/4}} & \text{für} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \text{ oder } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dann gilt nach dem Satz von Levi

$$\int_0^\infty |\phi^2||u|^2 = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - x}}\, dx = \lim_{b \uparrow 1/2} \Big(\int_{1/2-b}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt \Big) = \lim_{b \uparrow 1/2} 2\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{2}-b}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} < +\infty,$$

aber wäre $u \in L^2(I)$, so folgte nach dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} +\infty > \int_0^\infty |u|^2 &= \int_0^{1/2} \frac{1}{(\frac{1}{2} - x)^{3/2}}\, dx = \lim_{b \uparrow 1/2} \int_0^b \frac{1}{(\frac{1}{2} - x)^{3/2}}\, dx \\ &= \lim_{b \uparrow 1/2} \Big(-2t^{-1/2}\Big|_{\frac{1}{2}-b}^{\frac{1}{2}} \Big) = -2\sqrt{2} + 2 \lim_{b \uparrow 1/2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - b}}, \end{aligned}$$

jedoch ist $\lim\limits_{b \uparrow 1/2} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - b}} = +\infty$. $\square$

1.3 Spektraltheoretische Grundbegriffe und Definitionen

Sei nun H ein Hilbertraum mit Norm $\|\cdot\|$ und Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$, und sei $id : H \to H$ die identische Abbildung. Weiter sei T eine lineare Abbildung. Es bezeichne $D(T)$ den Definitionsbereich von T und $R(T) := \{Tu \mid u \in D(T)\}$ den Wertebereich von T. Gilt $D(T), R(T) \subset H$, so nennen wir T einen *linearen Operator in* H.
Sei T ein linearer Operator in H. Wir nennen T *invertierbar*, wenn T injektiv ist; der zu T inverse Operator sei mit $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ bezeichnet, dieser ist ebenfalls ein linearer Operator in H.
Analog zu Weidmann [32] bzw. Naimark [22] definieren wir:
T heißt *beschränkt*, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit

$$\|Tu\| \leq C\|u\| \quad \text{für alle } u \in D(T).$$

Es bezeichne $B(H)$ den Raum aller beschränkten linearen Operatoren in H mit $D(T) = H$. Für jedes $T \in B(H)$ sei

$$\|T\| := \inf\{C \mid C \geq 0, \|Tu\| \leq C\|u\| \text{ für alle } u \in D(T)\}$$

die *Operatornorm* von T; $(B(H), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum (s. Weidmann [32, S. 63]).
Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* (abgekürzt EW) von T, wenn ein $u \in D(T)$ mit $u \neq 0$ existiert, so daß $Tu = \lambda u$. Ist λ EW, so heißt jedes $u \in D(T)\backslash\{0\}$ mit $Tu = \lambda u$ *Eigenvektor* (bei Differentialoperatoren T auch *Eigenfunktion*) von T zum EW λ, weiter heißt

$$E_\lambda := \{u \mid u \in D(T), Tu = \lambda u\}$$

der zu λ gehörende *Eigenraum* (dies ist ein Untervektorraum von $D(T)$), und $\dim E_\lambda$ die (*geometrische*) *Vielfachheit* des EW λ.
Die *Resolventenmenge* von T ist definiert durch

$$\rho(T) := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda\, id) \text{ ist invertierbar}, (T - \lambda\, id)^{-1} \in B(H)\},$$

jedes $\lambda \in \rho(T)$ heißt *regulärer Punkt* von T, und die Abbildung $(T - \lambda\, id)^{-1}$ heißt für $\lambda \in \rho(T)$ die *Resolvente* von T im Punkt λ. Das *Spektrum* von T ist dann die Menge

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Jeder EW von T gehört zu $\sigma(T)$, denn ist λ EW von T, so besitzt $(T - \lambda\, id)u = 0$ nichttriviale Lösungen, d.h. $T - \lambda\, id$ ist nicht invertierbar, so daß $\lambda \notin \rho(T)$ ist, also $\lambda \in \sigma(T)$. Das *Punktspektrum* $\sigma_p(T)$, auch als *diskretes Spektrum* bezeichnet, sei die Menge der EW von T

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \text{ EW von } T\},$$

das *kontinuierliche Spektrum* $\sigma_c(T)$ sei für unsere Zwecke wie in Naimark [22, S. 17] definiert als

$$\sigma_c(T) := \sigma(T) \setminus \sigma_p(T),$$

d.h.

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, (T - \lambda\, id) \text{ ist invertierbar}, (T - \lambda\, id)^{-1} \notin B(H)\}.$$

Weiter nennen wir T *abgeschlossen*, wenn gilt: Ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(T)$, die (bezüglich der Norm in H) gegen ein Element $u \in H$ konvergiert, und ist die Folge $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $u \in D(T)$ und $Tu = \lim_{n\to\infty} Tu_n$. Ist T abgeschlossen, so ist die Abbildung

$$\rho(T) \to B(H)\ , \quad \lambda \mapsto (T - \lambda\, id)^{-1}$$

stetig (s. Weidmann [32, S. 99]).
Schließlich nennen wir T *hermitesch*, wenn

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \text{für alle } u, v \in D(T)$$

gilt. Ist $D(T)$ dicht in H, so heißt der durch

$$\begin{aligned} D(T^*) &:= \{u \mid u \in H, \text{ es existiert } v_u \in H \text{ mit} \\ &\qquad (v_u, w) = (u, Tw) \text{ für alle } w \in D(T)\}, \\ T^*u &:= v_u \qquad (u \in D(T^*),\ v_u \text{ wie oben}) \end{aligned}$$

definierte Operator T^* der *zu T adjungierte Operator*; gilt $D(T) = D(T^*)$, $T = T^*$, so heißt T *selbstadjungiert*.
Weitergehende Ausführungen zu den hier vorgestellten Begriffen findet man z. B. ebenfalls in Weidmann [32] und in Naimark [22].

Kapitel 2

Aussagen über das Spektrum

2.1 Bezeichnungen

Sei für die gesamten weiteren Betrachtungen stets $m \geq 2$, d.h. ϕ^2 besitze mindestens zwei Nullstellen, und sei $\epsilon \in \mathbb{R}$ fest gewählt mit

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_m - x_{m-1}, 1 - x_m\}.$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$I := [0, \infty), \qquad \tilde{I} := [x_m + \epsilon, \infty),$$

$$\xi(x) := \int_{x_m}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\, dt \qquad (x > x_m),$$

$$w(x) := \Big(\frac{3}{2}\xi(x)\Big)^{2/3} \qquad (x > x_m).$$

Da $\sqrt{\phi^2(t)} > 0$ für $t > x_m$ und $\phi^2 \in C^2(I)$, ist ξ streng monoton steigend für $x > x_m$ und $\xi \in C^3((x_m, \infty))$, also $w \in C^3((x_m, \infty))$ mit $w'(x) > 0$ für $x > x_m$. Daher existiert

$$\theta(x) := -\sqrt{w'(x)}\, \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right)(x) \qquad (x > x_m),$$

und ist stetig und reellwertig. Sei weiter

$$F(x) := -\theta(x) - \chi(x) \qquad (x > x_m),$$

es ist dann $F \in L^1_{\mathrm{loc}}((x_m, \infty))$ und reellwertig. Seien

$$\phi_\pm^2 := \max\{\pm\phi^2, 0\}$$

der Positiv– bzw. Negativteil von ϕ^2 sowie

$$R_\pm := \int_0^1 \sqrt{\phi_\pm^2(t)}\, dt.$$

Bemerkung 2.1. Es gilt

$$(2.1)\qquad \theta(x) = \frac{5}{36}\frac{\phi^2(x)}{(\xi(x))^2} - \frac{5}{16}\left(\frac{(\phi^2)'(x)}{\phi^2(x)}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{(\phi^2)''(x)}{\phi^2(x)} \qquad (x > x_m),$$

$$(2.2)\qquad \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} = -\frac{5}{36}\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{(\xi(x))^2} + \frac{5}{16}\frac{((\phi^2)'(x))^2}{(\phi^2(x))^{5/2}} - \frac{1}{4}\frac{(\phi^2)''(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} - \frac{\chi(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \qquad (x > x_m).$$

Beweis. Für $x > x_m$ gilt:

$$w'(x) = \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2}\xi(x)\Big)^{-1/3} \cdot \frac{3}{2}\xi'(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,\xi(x)^{-1/3}\sqrt{\phi^2(x)},$$

also

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right)(x) \;&=\; \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\Big(-\frac{5}{36}(\xi(x))^{-11/6}(\phi^2(x))^{3/4} + \frac{5}{16}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-9/4}((\phi^2)'(x))^2 \\ &\quad -\frac{1}{4}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)''(x)\Big),\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\theta(x) \;&=\; -\sqrt[6]{\frac{2}{3}}(\xi(x))^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\sqrt[6]{\frac{3}{2}}\Big(-\frac{5}{36}(\xi(x))^{-11/6}(\phi^2(x))^{3/4} \\ &\quad +\frac{5}{16}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-9/4}((\phi^2)'(x))^2 - \frac{1}{4}(\xi(x))^{1/6}(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)''(x)\Big) \\ &=\; \frac{5}{36}(\xi(x))^{-2}\phi^2(x) - \frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-2}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-1}(\phi^2)''(x),\end{aligned}$$

d.h. (2.1); daraus folgt mit der Definition von F auch die Behauptung (2.2). $\square$

Die *Landau–Symbole* o, O seien auf folgende Weise definiert, wie wir sie benötigen werden: Sei $\emptyset \neq S \subset \mathbb{C}$, so daß ∞ Häufungspunkt von S ist, und seien $f, g : S \to \mathbb{C}$. Wir schreiben

$$f(z) = O(g(z)) \quad (|z| \to \infty, z \in S), \quad \text{wenn } A \geq 0 \text{ und } C \geq 0 \text{ existieren mit } |f(z)| \leq C|g(z)| \qquad (z \in S, |z| \geq A);$$

bzw.

$$f(z) = o(g(z)) \quad (|z| \to \infty, z \in S), \quad \text{wenn } \lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| = 0.$$

Die angegebene Definition von O wird in der Literatur oft als *gleichmäßig in S gültig* bezeichnet.
o, O seien sinngemäß analog definiert für Funktionen $f, g : J \to \mathbb{C}$ mit $J = [a, \infty)$ bzw. $J = (a, \infty)$ mit festem $a \in \mathbb{R}$ und Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2 Ergebnisse

Sei im folgenden stets der Hilbertraum $H := L^2_{|\phi^2|}(I)$ mit dem bereits angegebenen Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und der davon induzierten Norm $\|\cdot\|$ zugrunde gelegt. Mit id sei die identische Abbildung in H bezeichnet. Die vorher eingeführten Operatoren L und L_ρ sind lineare Operatoren in H.

Falls ein Teilintervall $(x_\nu, x_{\nu+1}) \subset [0,1]$ (mit geeignetem $\nu \in \{1,\ldots,m-1\}$) mit $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in (x_\nu, x_{\nu+1})$ existiert oder $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in [0, x_1)$ ist, gilt im allgemeinen

$$(Lu, v) \neq (u, Lv) \quad \text{für } u, v \in D(L) \cap \{u \mid u \in C^2(I),\ \text{supp } u \subset (0,\infty) \text{ kompakt}\},$$

wie man mit partieller Integration leicht sieht. Dann ist L nicht hermitesch und nicht selbstadjungiert. Die funktionalanalytischen Eigenschaften hermitescher Operatoren sind also hier nicht unmittelbar anwendbar, ebenso ist die Betrachtung der Frage nach der Existenz selbstadjungierter Fortsetzungen eines minimalen Operators, der hermitesch ist, nicht sinnvoll. Deshalb werden wir die Aussagen über das Spektrum von L mit Hilfe von Untersuchungen der Resolvente von L durchführen, wie auch in Stakun [27] geschehen.

Definition 2.1.

a) Als *Spektrum der Eigenwertaufgabe* (1.1), (1.2), (1.3) definieren wir das Spektrum $\sigma(L)$ des zugehörigen Operators L.

b) Wir nennen die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) *normal*, wenn für jede Eigenfunktion u von L
$$\int_0^\infty \phi^2 |u|^2 \neq 0$$
gilt.

Teil b) von Definition 2.1 ist eine naheliegende Verallgemeinerung von Kamke [11, S. 201] für Eigenwertaufgaben auf kompakten Intervallen.

Sei im weiteren stets $\rho \neq 0$. Da die Hauptaussage dieser Arbeit in der asymptotischen Darstellung der Eigenwerte von (1.1), (1.2), (1.3) liegt, bedeutet dies keine Einschränkung. Deshalb definieren wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \sigma^*(L) &:= \sigma(L) \setminus \{0\}, \\ \sigma_p^*(L) &:= \sigma_p(L) \setminus \{0\}, \\ \sigma_c^*(L) &:= \sigma_c(L) \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

und nennen auch $\sigma^*(L)$ (bzw. $\sigma_p^*(L), \sigma_c^*(L)$) das Spektrum (bzw. Punktspektrum, kontinuierliches Spektrum) von L.

Die zentralen Eigenschaften des Spektrums von L formulieren wir im folgenden Satz, der eine Verallgemeinerung von Stakun [27, Thm. 1] und [29] darstellt auf Gewichtsfunktionen mit mehreren Nullstellen, allerdings mit etwas verschärften Voraussetzungen.

Satz 2.1. *Es seien zusätzlich zu den eingangs erwähnten Voraussetzungen an ϕ^2 und χ die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$\lim_{x\to\infty} \xi(x) = +\infty, \tag{2.3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m+\epsilon,\infty)), \tag{2.5}$$

(2.6) *die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) sei normal.*

Dann ist das Spektrum von L reell, das Punktspektrum $\sigma_p^*(L)$ liegt in $(-\infty, 0)$ und besteht aus höchstens abzählbar vielen EWen der (geometrischen) Vielfachheit 1, für das kontinuierliche Spektrum gilt $\sigma_c^*(L) = (0,\infty)$.

Bemerkung 2.2. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.1 gilt: $0 \le R_- < +\infty$.

Bemerkung 2.3. In Satz 2.1 ist zugelassen, daß ϕ^2 zwar Nullstellen in $(0,1)$ besitzt, daß jedoch $\phi^2 \ge 0$ auf I gilt, d.h., daß ϕ^2 nicht indefinit ist. Unter der gegenüber Satz 2.1 zusätzlichen Voraussetzung, daß ein Intervall $(a,b) \subset [0,1]$ mit $\phi^2 < 0$ auf (a,b) existiert, d.h. $R_- > 0$, werden wir in Kapitel 3 zeigen, daß über Satz 2.1 hinausgehend das Punktspektrum $\sigma_p^*(L)$ nicht–leer ist und aus abzählbar unendlich vielen EWen besteht, und werden eine asymptotische Darstellung der EWe angeben.

Bemerkung 2.4. Eine große Klasse von Funktionen ϕ^2 und χ erfüllt die Bedingungen (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) von Satz 2.1. Genauer gilt:

a) Alle Funktionen ϕ^2, die auf $[x_m+\epsilon,\infty)$ gleich einem nullstellenfreien, positiven Polynom vom Grad größer oder gleich 1 mit positivem Leitkoeffizienten sind, d.h. die Gestalt

$$\phi^2(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k > 0 \quad \text{für } x \ge x_m+\epsilon \text{ mit } n \ge 1 \text{ und } a_n > 0 \tag{2.7}$$

besitzen, erfüllen Voraussetzung (2.3) und (2.4). Wählt man dann χ mit

$$|\chi(x)| \le \gamma x^\beta \quad \text{für } x \ge x_m+\epsilon \text{ mit } \gamma > 0 \text{ und } \beta < \frac{n}{2} - 1, \tag{2.8}$$

so ist auch Voraussetzung (2.5) erfüllt.

b) Ist ϕ^2 nicht indefinit, d.h. $\phi^2 > 0$ fast überall auf I, so ist (2.6) offensichtlich erfüllt. Für den interessanteren Fall, daß ϕ^2 indefinit ist, gilt folgendes:

Ist $\alpha \in \{0\} \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ und ist zusätzlich zu (2.7), (2.8)

$$\chi \geq 0 \quad \text{fast überall in } I,$$

so ist schließlich auch Voraussetzung (2.6) erfüllt.

Beweis.

a) Gilt (2.7), so ist offensichtlich (2.3) erfüllt. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
(\phi^2)'(x) &= \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}, \quad x \geq x_m + \epsilon, \\
(\phi^2)''(x) &= \begin{cases} \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)x^{k-2}, & x \geq x_m + \epsilon, \text{ falls } n \geq 2, \\ 0, & x \geq x_m + \epsilon, \text{ falls } n = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Polynomgestalt von ϕ^2 und seinen Ableitungen gelten mit geeigneten $A_1, A_2, A_3 \geq x_m + \epsilon$ die Abschätzungen

$$\begin{array}{rcccll}
\frac{1}{2}a_n x^n & \leq & \phi^2(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n x^n & \text{für } x \geq A_1, \\
\frac{1}{2}a_n n x^{n-1} & \leq & (\phi^2)'(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n x^{n-1} & \text{für } x \geq A_2, \\
0 \leq \frac{1}{2}a_n n(n-1)x^{n-2} & \leq & (\phi^2)''(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n(n-1)x^{n-2} & \text{für } x \geq A_3, n \geq 2, \text{ bzw.} \\
& & (\phi^2)''(x) & = & 0 & \text{für } x \geq x_m + \epsilon, n = 1.
\end{array}$$

Also gibt es ein $A \geq x_m + \epsilon$, so daß (für jedes $n \geq 1$)

$$\left\{ \begin{array}{rcccll}
\frac{1}{2}a_n x^n & \leq & \phi^2(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n x^n & \text{für } x \geq A, \\
\frac{1}{2}a_n n x^{n-1} & \leq & (\phi^2)'(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n x^{n-1} & \text{für } x \geq A, \\
0 & \leq & (\phi^2)''(x) & \leq & \frac{3}{2}a_n n(n-1)x^{n-2} & \text{für } x \geq A.
\end{array} \right. \tag{2.9}$$

Damit folgt

$$0 = \frac{n}{3\sqrt{\frac{3}{2}a_n}} \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{n}{2}-1} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} \leq \frac{3n}{\sqrt{\frac{1}{2}a_n}} \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{n}{2}-1} = 0,$$

also ist auch (2.4) erfüllt.

Aus (2.9) ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= \int_{x_m}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\, dt \;=\; \int_{x_m}^{A} \sqrt{\phi^2(t)}\, dt + \int_{A}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\, dt \\
&\geq \int_{A}^{x} \sqrt{\phi^2(t)}\, dt \;\geq\; \int_{A}^{x} \sqrt{\frac{1}{2} a_n t^n}\, dt \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} a_n}\, \frac{1}{\frac{n}{2}+1}\, t^{\frac{n}{2}+1}\Big|_A^x \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} a_n}\, \frac{2}{n+2} \left(x^{\frac{n}{2}+1} - A^{\frac{n}{2}+1} \right) \qquad (x \geq A),
\end{aligned}$$

und so

$$\frac{1}{\xi(x)^2} \leq \frac{(n+2)^2}{2a_n} \frac{1}{\left(x^{\frac{n}{2}+1} - A^{\frac{n}{2}+1} \right)^2} \qquad (x > A).$$

Nun gibt es ein $B \geq A \geq x_m + \epsilon$, so daß

$$x^{\frac{n}{2}+1} \geq \frac{A^{\frac{n}{2}+1}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad \text{für alle } x \geq B$$

gilt. Dann folgt

$$\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) x^{\frac{n}{2}+1} \geq A^{\frac{n}{2}+1} \qquad (x \geq B),$$

also

$$\left(x^{\frac{n}{2}+1} - A^{\frac{n}{2}+1} \right)^2 \geq \frac{1}{2} x^{n+2} \qquad (x \geq B),$$

so daß

(2.10)
$$\frac{1}{\xi(x)^2} \leq \frac{(n+2)^2}{a_n} \frac{1}{x^{n+2}} \qquad (x \geq B)$$

folgt. Für $|\theta|$ folgt damit nach (2.1), (2.9) und (2.10)

$$\begin{aligned}
|\theta(x)| &\leq \frac{5}{36} \left| \frac{\phi^2(x)}{\xi(x)^2} \right| + \frac{5}{16} \left| \left(\frac{(\phi^2)'(x)}{\phi^2(x)} \right)^2 \right| + \frac{1}{4} \left| \frac{(\phi^2)''(x)}{\phi^2(x)} \right| \\
&\leq \frac{181n^2 + 4n + 40}{48x^2} \qquad (x \geq B),
\end{aligned}$$

also ist mit (2.7) die Funktion $\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}}$ auf $[B, \infty)$ integrierbar; da $\left|\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}}\right|$ auf $[x_m + \epsilon, B]$ stetig ist, folgt insgesamt

$$\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty)).$$

Damit nun (2.5), d.h.

$$\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} = -\frac{\theta}{\sqrt{\phi^2}} - \frac{\chi}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty))$$

erfüllt ist, ist es hinreichend zu zeigen, daß

$$\frac{\chi}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty))$$

ist. Dies ist sicher dann wahr, wenn χ die Bedingung (2.8) erfüllt, denn dann folgt:
Da ϕ^2 auf $[x_m + \epsilon, A]$ stetig und nullstellenfrei ist, gibt es ein $C > 0$ mit

$$\frac{1}{\sqrt{\phi^2(x)}} \leq C \quad \text{für } x \in [x_m + \epsilon, A],$$

und somit zusammen mit (2.8)

$$\frac{|\chi(x)|}{\sqrt{\phi^2(x)}} \leq C\gamma x^\beta \qquad (x \in [x_m + \epsilon, A]);$$

für $x \geq A$ gilt mit (2.9)

$$\frac{|\chi(x)|}{\sqrt{\phi^2(x)}} \leq \frac{\gamma x^\beta}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a_n}\, x^{\frac{n}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,\gamma}{\sqrt{a_n}}\, x^{\beta - \frac{n}{2}} \qquad (x \geq A),$$

mit $\beta - \frac{n}{2} < -1$ nach Voraussetzung. Daher ist

$$\frac{\chi}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty)).$$

Analog zeigt man, daß auch alle Funktionen ϕ^2, χ mit

$$\phi^2(x) = cx^\delta \quad (x \geq x_m + \epsilon) \quad \text{mit } c > 0, \delta \in \mathbb{R}, \delta \geq 1$$

und

$$|\chi(x)| \leq \gamma x^\beta \quad (x \geq x_m + \epsilon) \quad \text{mit } \gamma > 0, \beta < \frac{\delta}{2} - 1$$

die Bedingungen (2.3), (2.4), (2.5) erfüllen.

b) Teil b) werden wir erst im Anschluß an den Beweis von Satz 2.1 nachweisen, wenn alle Hilfsmittel dazu bereitgestellt worden sind. □

Der Rest dieses Kapitels ist dem Beweis von Satz 2.1 und Bemerkung 2.4 b) gewidmet, dazu treffen wir die folgenden Vorbereitungen. Seien im weiteren stets die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Wie eingangs erwähnt, ist es ausreichend, $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$, d.h. $\mathrm{Im}\,(\rho) \geq 0$, zu betrachten.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$l_\rho^\theta u := -u'' + (-\theta - \rho^2\phi^2)u = 0 \quad \text{auf } (x_m, \infty); \tag{2.11}$$

da θ nur vom gegebenen ϕ^2 abhängt (vgl. (2.1)), nennen wir (2.11) *Standardform* der Differentialgleichung (1.1) in Analogie zu Stakun [27], [28] und Dorodnicyn [4]. Diese Differentialgleichung ist nun auf (x_m, ∞) explizit z. B. mit Hilfe von Hankelfunktionen lösbar. Es bezeichne $H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ die Hankelfunktionen der Ordnung ν.

Lemma 2.1. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei $0 \leq \arg\rho \leq \pi$. Die Funktionen*

$$v_j(x,\rho) := \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Big(\rho\xi(x)\Big)^{1/3} H_{1/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \qquad (x \in (x_m,\infty),\ j = 1,2) \tag{2.12}$$

sind Lösungen von (2.11) und bilden (für $\rho \neq 0$) ein Fundamentalsystem von (2.11) auf (x_m, ∞). Es gilt

$$W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho)) = -\frac{6i}{\pi}\rho^{2/3}. \tag{2.13}$$

In Anhang B listen wir einige Eigenschaften von Hankelfunktionen auf, die im weiteren benötigt werden. Zu Lemma 2.1 vgl. auch Stakun [27, S. 1456].

Beweis von Lemma 2.1. Sei ρ fest gewählt. Mit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\Big(z^\nu H_\nu^{(j)}(z)\Big) = z^\nu\, H_{\nu-1}^{(j)}(z) \\ &H_{-\nu}^{(j)}(z) = e^{(-1)^{j-1}\nu\pi i}\, H_\nu^{(j)}(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \nu \in \mathbb{C}, j = 1,2$$

nach Anhang B, (B.1), (B.2), erhalten wir $v_j(\cdot,\rho) \in C^2((x_m,\infty))$ für $j = 1,2$ mit

$$\left\{\begin{aligned} v_j'(x,\rho) \;=\; &\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{w'}}\right)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3} H_{1/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \\ &+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\,\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i}\, H_{2/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \qquad (x > x_m), \end{aligned}\right. \tag{2.14}$$

$$
(2.15)\quad \left\{
\begin{aligned}
v_j''(x,\rho) \;=\;& \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H_{1/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \cdot \Big\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)''(x)(\rho\xi(x))^{1/3} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \rho^2\phi^2(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\, e^{(-1)^{j-1}\pi i} \Big\} \\
&+ \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H_{2/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \cdot \Big\{ 2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\, \rho\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \rho\, \frac{1}{2\sqrt{\phi^2(x)}}\, (\phi^2)'(x)\, (\rho\xi(x))^{1/3}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i} \\
&- \frac{1}{3}\, \rho^2\phi^2(x)\, \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, (\rho\xi(x))^{-2/3}\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i} \Big\} \qquad (x > x_m),
\end{aligned}
\right.
$$

womit dann folgt, daß

$$
\begin{aligned}
l_\rho^\theta v_j(\cdot,\rho) \;=\;& -v_j''(\cdot,\rho) - \theta v_j(\cdot,\rho) - \rho^2\phi^2 v_j(\cdot,\rho) \\
=\;& -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H_{1/3}^{(j)}(\rho\xi) \cdot \Big\{ \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{\sqrt{w'}}\rho^2\phi^2 \cdot (\rho\xi)^{1/3} \\
& -\sqrt{w'} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} + \rho^2\phi^2 \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} \Big\} \\
& -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\, H_{2/3}^{(j)}(\rho\xi)\, e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i} \cdot \Big\{ 2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)' \cdot (\rho\xi)^{1/3}\, \rho\sqrt{\phi^2} \\
& + \frac{1}{\sqrt{w'}}\, \rho\, \frac{1}{2\sqrt{\phi^2}}\, (\phi^2)' \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{3}\rho^2\phi^2\, \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{-2/3} \Big\} \\
=\;& 0,
\end{aligned}
$$

wenn

$$
\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{\sqrt{w'}}\, \rho^2\phi^2 \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'' \cdot (\rho\xi)^{1/3} + \rho^2\phi^2 \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} \;=\; 0
$$

und

$$
2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)' \cdot (\rho\xi)^{1/3}\, \rho\sqrt{\phi^2} + \frac{1}{\sqrt{w'}}\, \rho\, \frac{(\phi^2)'}{2\sqrt{\phi^2}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{3}\rho^2\phi^2\, \frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{-2/3} \;=\; 0.
$$

Die erste der beiden letzten Gleichungen ist offensichtlich erfüllt, die zweite bleibt noch zu verifizieren. Mit

$$
\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x) = \frac{1}{6}\, \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \frac{1}{\xi(x)}\, \sqrt{\phi^2(x)} - \frac{1}{4}\, \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\, \frac{(\phi^2)'(x)}{\phi^2(x)} \qquad (x > x_m)
$$

nach Definition von w gilt

$$\begin{aligned} 2\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)' \cdot (\rho\xi)^{1/3}\,\rho\sqrt{\phi^2} + \frac{1}{\sqrt{w'}}\,\rho\,\frac{(\phi^2)'}{2\sqrt{\phi^2}} \cdot (\rho\xi)^{1/3} - \frac{1}{3}\rho^2\phi^2\,\frac{1}{\sqrt{w'}} \cdot (\rho\xi)^{-2/3} \\ = \frac{1}{\sqrt{w'}}\,\rho^{4/3}\Big(\frac{1}{3}\xi^{-2/3}\phi^2 - \frac{1}{2}\frac{(\phi^2)'}{\sqrt{\phi^2}} \cdot \xi^{1/3} + \xi^{1/3}\frac{(\phi^2)'}{2\sqrt{\phi^2}} - \frac{1}{3}\xi^{-2/3}\phi^2\Big) \\ = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$l_\rho^\theta v_j(\cdot,\rho) = 0 \quad \text{auf } (x_m,\infty),\ j=1,2.$$

Für $W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))$ folgt mit

$$H_\nu^{(1)}(z)\,\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\,\frac{d}{dz}H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{4i}{\pi z} \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}, \nu \in \mathbb{C})$$

nach Anhang B, (B.3), unter Verwendung der Kettenregel

$$W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho)) = -\frac{6i}{\pi}\,\rho^{2/3} \neq 0$$

wegen $\rho \neq 0$. □

Wie bereits erwähnt, heißt (2.11) im Falle der Existenz genau einer Nullstelle x_1 der Ordnung $l_1 = 1$ von ϕ^2 in Stakun [27] die Standardform von (1.1). In Stakun [29] und Langer [15] wird eine zu (2.11) analoge Gleichung auch im Falle der Existenz genau einer Nullstelle x_1 höherer Ordnung $l_1 \geq 1$ *Standardform* bzw. *related equation* genannt. Diese Gleichungen sind mit Hilfe von Funktionen, die im wesentlichen aus Zylinderfunktionen bestehen, explizit lösbar. Bei einer Nullstelle der Ordnung $l_1 > 1$ enthalten die zu v_j analogen Lösungen der Standardform von (1.1) bei Stakun [29] bzw. Langer [15] dann Hankelfunktionen der Ordnung $\mu = \frac{1}{l_1+2}$ im Gegensatz zu $H_{1/3}^{(j)}$ bei v_j (s. [29, S. 667], [15, S. 25–29]). Für unsere Zwecke jedoch ist Gleichung (2.11) ausreichend.

Für v_j und deren Ableitungen wollen wir nun asymptotische Darstellungen angeben. Dies ist möglich durch Verwendung asymptotischer Darstellungen für Hankelfunktionen.

Lemma 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Seien* $C_j := \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,e^{(-1)^j \frac{5}{12}\pi i}$ *für* $j = 1,2$ *und*

$$r(x) := -\frac{1}{4}\frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} + \frac{1}{6}\frac{1}{\xi(x)} \qquad (x > x_m).$$

a) Für $x > x_m$ gilt

$$v_1(x,\rho) = C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big) \qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),$$

$$v_2(x,\rho) = C_2\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big) \qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).$$

b) Für $x > x_m$ gilt

$$v_1'(x,\rho) = C_1\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(r(x)\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big)+i\rho\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big)\Big),$$

$$v_2'(x,\rho) = C_2\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(r(x)\Big(1+O(1)\Big)-i\rho\Big(1+O(1)\Big)\Big)$$

$$(|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).$$

Beweis.
a) Sei $0\le\arg\rho\le\pi$. Mit

$$(2.16)\quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O\big(\tfrac{1}{z}\big)\Big) & (|z|\to\infty, 0\le\arg z\le\pi) \\ \qquad\text{(gleichmäßig in } 0\le\arg z\le\pi), & \\ H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big) & (|z|\to\infty, 0\le\arg z\le\pi) \\ \qquad\text{(gleichmäßig in } 0\le\arg z\le\pi) & \end{cases}$$

für $\nu=\frac{1}{3}$ bzw. $\nu=\frac{2}{3}$ (siehe Anhang B, (B.8), (B.9)) ergibt sich für $x > x_m$ (man beachte $\xi(x)\in(0,\infty)$ für $x>x_m$)

$$v_1(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{-\frac{\pi}{6}i-\frac{\pi}{4}i}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\big)\Big)$$

$$(|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),$$

$$v_2(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{\pi}{4}i}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big)$$

$$(|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi);$$

mit

$$\frac{1}{\sqrt{w'(x)}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,\xi(x)^{1/6} \qquad (x>x_m)$$

also

$$
\begin{aligned}
v_1(x,\rho) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\rho^{-1/6}e^{-\frac{5}{12}\pi i}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&= C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),\\
v_2(x,\rho) &= \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\rho^{-1/6}e^{\frac{5}{12}\pi i}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&= C_2\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).
\end{aligned}
$$

b) Für die Ableitungen gilt nach (2.14) für $j=1,2$

$$
\begin{aligned}
v_j'(x,\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}H_{1/3}^{(j)}(\rho\xi(x))\\
&+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\,\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\,e^{(-1)^{j-1}\frac{2}{3}\pi i}\,H_{2/3}^{(j)}(\rho\xi(x)) \qquad (x>x_m),
\end{aligned}
$$

also wieder mit (2.16)

$$
\begin{aligned}
v_1'(x,\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\,\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\,e^{\frac{2}{3}\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi),\\
v_2'(x,\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x)(\rho\xi(x))^{1/3}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{-i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&+\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{\sqrt{w'(x)}}\,\rho(\rho\xi(x))^{1/3}\,e^{-\frac{2}{3}\pi i}\sqrt{\frac{2}{\pi\rho\xi(x)}}\,e^{-i(\rho\xi(x)-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (|\rho\xi|\to\infty, 0\le\arg\rho\le\pi).
\end{aligned}
$$

Mit

$$\frac{1}{\sqrt{w'(x)}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,\xi(x)^{1/6} \quad (x > x_m),$$

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{w'}}\Big)'(x) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}\Big(-\frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-5/4}\,(\phi^2)'(x)\xi(x)^{1/6} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,\xi(x)^{-5/6}\Big) \qquad (x > x_m)$$

folgt daher

$$\begin{aligned}
v_1'(x,\rho) &= \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,e^{-\frac{5}{12}\pi i}\rho^{-1/6}\Big(-\frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)'(x) + \frac{1}{6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,\frac{1}{\xi(x)}\Big)e^{i\rho\xi(x)}\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&\quad + \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,e^{(\frac{2}{3}\pi i - \frac{7}{12}\pi i)}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,\rho^{5/6}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&= C_1\rho^{-1/6}\,\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\Big\{\Big(-\frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-3/2}(\phi^2)'(x) + \frac{1}{6}\frac{1}{\xi(x)}\Big)\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\\
&\quad + i\rho\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\Big\}\\
&= C_1\rho^{-1/6}\,\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\Big\{r(x)\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big) + i\rho\Big(1 + O\Big(\tfrac{1}{\rho\xi(x)}\Big)\Big)\Big\}\\
&\qquad\qquad (|\rho\xi| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi).
\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned}
v_2'(x,\rho) &= C_2\rho^{-1/6}\,\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{-i\rho\xi(x)}\Big\{r(x)\Big(1 + O(1)\Big) - i\rho\Big(1 + O(1)\Big)\Big\}\\
&\qquad\qquad (|\rho\xi| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi).
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.1. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Dann gilt für festes $\rho \neq 0$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$:*

$$\begin{aligned}
v_1(x,\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),\\
v_2(x,\rho) &= C_2\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1 + O(1)) \qquad (x \to \infty),\\
v_1'(x,\rho) &= C_1 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),\\
v_2'(x,\rho) &= -C_2 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1 + O(1)) \qquad (x \to \infty).
\end{aligned}$$

Beweis. Für festes $\rho \neq 0$ gilt nach (2.3) $\lim_{x\to\infty} |\rho\xi(x)| = +\infty$, daher folgt nach Lemma 2.2 a) die Behauptung für v_1, v_2. Weiter gilt wegen $r(x) = o(1) \quad (x \to \infty)$ nach Voraussetzung (2.3), (2.4) und Lemma 2.2 b)

$$
\begin{aligned}
v_1'(x,\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot \Big(o(1)(1+o(1)) + i\rho(1+o(1))\Big) \\
&= C_1 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \\
v_2'(x,\rho) &= C_2\rho^{-1/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot \Big(o(1)(1+O(1)) - i\rho(1+O(1))\Big) \\
&= -C_2 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (1+O(1)) \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}
$$

$\square$

Sei nun $y(\cdot,\rho)$ für jedes $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ die Lösung von $l_\rho u = 0$ auf I mit

$$y(0,\rho) = \sin\alpha\ , \quad y'(0,\rho) = -\cos\alpha. \tag{2.17}$$

Nach Lemma 1.2 b) ist $y(\cdot,\rho)$ dadurch eindeutig bestimmt, und $y(\cdot,\rho)$ erfüllt die Anfangsbedingung (1.2).

Eine weitere Lösung $Y(\cdot,\rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf I für jedes $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ wird uns die Integralgleichung

$$
\begin{aligned}
Y(x,\rho) &= v_1(x,\rho) - \int_x^\infty \frac{K(x,t,\rho)}{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))} F(t)Y(t,\rho)\,dt \\
&\quad \text{mit} \\
K(x,t,\rho) &:= v_1(x,\rho)v_2(t,\rho) - v_2(x,\rho)v_1(t,\rho) \qquad ((x,t)\in \tilde I\times\tilde I)
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

liefern, die wir von Stakun [27, S. 1457] übernehmen. Wir benutzen dazu die folgenden Substitutionen:
Sei $J \subset I$ ein Intervall und $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$. Die Hilfsfunktionen $\hat Y$, $\hat Y^{(1)}$, $\hat v_j$, $\hat v_j^{(1)}$ seien gegeben durch

$$
\left\{
\begin{aligned}
Y(x,\rho) &= \hat Y(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (x\in J), \\
Y'(x,\rho) &= \hat Y^{(1)}(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (x\in J), \\
v_j(x,\rho) &= \hat v_j(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{(-1)^{j-1}i\rho\xi(x)} \qquad (x > x_m,\ j=1,2), \\
v_j'(x,\rho) &= \hat v_j^{(1)}(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{(-1)^{j-1}i\rho\xi(x)} \qquad (x > x_m,\ j=1,2).
\end{aligned}
\right.
\tag{2.19}
$$

Man beachte, daß $\hat{Y}^{(1)}$ bzw. $\hat{v_j}^{(1)}$ *nicht* die Ableitung von $\hat{Y}$ bzw. $\hat{v_j}$ bezeichnet, sondern die zu Y' bzw. v_j' gehörige Hilfsfunktion.

Seien weiter, falls J ein Intervall in $\mathbb{R}$ ist,

$$\begin{aligned} B(J) &:= \{u \mid u : J \to \mathbb{C},\ u \text{ ist beschränkt}\}, \\ C^b(J) &:= C(J) \cap B(J), \\ \|u\|_\infty &:= \sup_{x \in J} |u(x)| \qquad (u \in B(J)). \end{aligned}$$

$\|\cdot\|_\infty$ ist eine Norm auf $B(J)$, $(B(J), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum, wie man leicht sieht. $C^b(J)$ ist als abgeschlossener Teilraum von $B(J)$ selbst Banachraum, insbesondere gilt im Raum $(C^b(J), \|\cdot\|_\infty)$ der Banachsche Fixpunktsatz.
Aussagen über die Lösbarkeit von (2.18) macht das folgende Lemma.

Lemma 2.3. *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt.*

a) *Für jedes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ gibt es ein $z(\rho) \ge x_m + \epsilon$ so, daß die Integralgleichung (2.18) auf $[z(\rho), \infty)$ genau eine Lösung $Y(\cdot, \rho)$ mit $\hat{Y}(\cdot, \rho) \in C^b([z(\rho), \infty))$ besitzt.*

b) *Weiter gibt es ein $\rho_1 > 0$ so, daß (2.18) für jedes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ und $|\rho| \ge \rho_1$ genau eine Lösung $Y(\cdot, \rho)$ auf $\tilde{I}$ mit $\hat{Y}(\cdot, \rho) \in C^b(\tilde{I})$ besitzt, d.h. für $|\rho| \ge \rho_1$ ist $z(\rho) = x_m + \epsilon$ wählbar.*

c) *Für festes $\rho \neq 0$ mit $0 \le \arg\rho \le \pi$ gilt:*

$$\begin{aligned} Y(x,\rho) &= C_1 \rho^{-1/6} \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \big(1 + o(1)\big) \qquad (x \to \infty); \\ Y'(x,\rho) &= C_1 i \rho^{5/6} \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \big(1 + o(1)\big) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

d) *Schließlich gilt für festes $x \ge x_m + \epsilon$ und für $|\rho| \ge \rho_1$:*

$$\begin{aligned} Y(x,\rho) &= \Big(C_1 \rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big) \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi); \\ Y'(x,\rho) &= \Big(C_1 i \rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big) \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \le \arg\rho \le \pi). \end{aligned}$$

Beweis. Mit den angegebenen Substitutionen (2.19) ist (2.18) äquivalent zur Integralgleichung

$$
(2.20) \qquad
\begin{aligned}
\hat{Y}(x,\rho) &= \hat{v}_1(x,\rho) - \int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t,\rho)}{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t,\rho)\,dt \\
&\text{mit} \\
\hat{K}(x,t,\rho) &:= \hat{v}_1(x,\rho)\hat{v}_2(t,\rho) - \hat{v}_2(x,\rho)\hat{v}_1(t,\rho)e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))} \qquad ((x,t) \in \tilde{I}\times\tilde{I}),
\end{aligned}
$$

die wir nun weiter untersuchen werden. Wir lassen zunächst den Parameter ρ als Argument der Funktionen der Übersichtlichkeit halber weg.

Das Problem des Findens einer beschränkten, stetigen Lösung von (2.20) auf einem Intervall der Gestalt $[z,\infty)$ mit $z \geq x_m + \epsilon$ ist ein Fixpunktproblem für die auf $C^b([z,\infty))$ definierte Abbildung

$$
\Psi(u)(x) := \hat{v}_1(x) - \int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} u(t)\,dt \qquad (u \in C^b([z,\infty)); x \in [z,\infty)),
$$

das wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz lösen werden.

Da in Lemma 2.2 die Funktion $r = -\frac{1}{4}(\phi^2)^{-3/2}(\phi^2)' + \frac{1}{6}\frac{1}{\xi}$ auf $\tilde{I} = [x_m+\epsilon,\infty)$ stetig ist mit $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$ nach (2.3), (2.4), ist r auf $\tilde{I}$ beschränkt, und nach Lemma 2.2 mit (2.19) gibt es daher Zahlen $C, D_1, D_2, A > 0$, so daß für $0 \leq \arg\rho \leq \pi$

$$
(2.21) \qquad
\begin{cases}
|\hat{v}_j(x)| \leq C|\rho|^{-1/6} & \text{für } |\rho\xi(x)| \geq A \text{ mit } x \geq x_m+\epsilon,\ j=1,2, \\
|\hat{v}_j^{(1)}(x)| \leq C|\rho|^{-1/6}(D_1 + D_2|\rho|) & \text{für } |\rho\xi(x)| \geq A \text{ mit } x \geq x_m+\epsilon,\ j=1,2.
\end{cases}
$$

Sei nun für den Beweisteil a) ρ wie angegeben fest gewählt.

a) Sei $z_0 = z_0(\rho) \geq x_m + \epsilon$ so gewählt, daß $|\rho\xi(z_0)| \geq A$ gilt; dieses ist möglich wegen $\rho \neq 0$ und $\lim_{x\to\infty} \xi(x) = +\infty$ nach (2.3). Dann gilt

$$
|\rho\xi(x)| \geq |\rho\xi(z_0)| \geq A \quad \text{für alle } x \geq z_0,
$$

also gemäß (2.21)

$$
(2.22) \qquad
\begin{cases}
|\hat{v}_j(x)| \leq C|\rho|^{-1/6} & \text{für } x \in [z_0,\infty),\ j=1,2, \\
|\hat{v}_j^{(1)}(x)| \leq C|\rho|^{-1/6}(D_1 + D_2|\rho|) & \text{für } x \in [z_0,\infty),\ j=1,2.
\end{cases}
$$

Daher ist

$$(2.23)\quad \left\{\begin{array}{lll} \left|\dfrac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)}\right| & \overset{(2.13)}{\leq} & \dfrac{|\hat{v}_1(x)||\hat{v}_2(t)| + |\hat{v}_2(x)||\hat{v}_1(t)|\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)(\xi(x)-\xi(t))}}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ & \overset{(2.22)}{\leq} & \dfrac{C^2|\rho|^{-1/3} + C^2|\rho|^{-1/3}\cdot 1}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ & = & D|\rho|^{-1} \qquad\qquad (x,t\in[z_0,\infty),\ t\geq x) \\ & & \text{mit } D := \dfrac{C^2\pi}{3} > 0. \end{array}\right.$$

Wegen (2.22), (2.23) und $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ nach (2.5) ist für jedes $u \in C^b([z_0,\infty))$ die Funktion

$$h_u(x) := \int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} u(t)\, dt \qquad (x\in[z_0,\infty))$$

beschränkt und stetig:

Zur Beschränktheit von h_u:

$$\begin{aligned} |h_u(x)| &\leq \int_x^\infty \frac{|\hat{K}(x,t)|}{|W(v_1,v_2)|}\left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right||u(t)|\, dt \\ &\overset{(2.23)}{\leq} \int_x^\infty D|\rho|^{-1}\|u\|_\infty \left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right| dt \\ &\leq D|\rho|^{-1}\|u\|_\infty \int_{x_m+\epsilon}^\infty \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < +\infty \qquad (x\in[z_0,\infty)). \end{aligned}$$

Zur Stetigkeit von h_u:
Seien $x, x_0 \in [z_0,\infty)$. Wir zeigen die Stetigkeit von h_u in x_0. Für $x > x_0$ gilt:

$$\begin{aligned} &|h_u(x) - h_u(x_0)| \\ &= \left|\int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)}\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}u(t)\, dt - \int_{x_0}^\infty \frac{\hat{K}(x_0,t)}{W(v_1,v_2)}\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}u(t)\, dt\right| \\ &= \left|\int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)-\hat{K}(x_0,t)}{W(v_1,v_2)}\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}u(t)\, dt - \int_{x_0}^x \frac{\hat{K}(x_0,t)}{W(v_1,v_2)}\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}u(t)\, dt\right| \\ &\leq \frac{\|u\|_\infty}{|W(v_1,v_2)|}\Big(\int_x^\infty |\hat{K}(x,t)-\hat{K}(x_0,t)|\left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right| dt + \int_{x_0}^x |\hat{K}(x_0,t)|\left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right| dt\Big), \end{aligned}$$

wobei (man beachte $|e^{2i\rho\xi(t)}| = e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(t)} \leq 1$ für $t > x_m$)

$$
\begin{aligned}
&\int_x^\infty |\hat{K}(x,t) - \hat{K}(x_0,t)| \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| \, dt \\
&\quad = \int_x^\infty \Big| \hat{v}_1(x)\hat{v}_2(t) - \hat{v}_2(x)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))} - \\
&\qquad\qquad - \hat{v}_1(x_0)\hat{v}_2(t) + \hat{v}_2(x_0)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x_0)-\xi(t))} \Big| \cdot \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| \, dt \\
&\quad \leq \int_{x_0}^\infty \Big(|\hat{v}_2(t)||\hat{v}_1(x) - \hat{v}_1(x_0)| + \\
&\qquad\qquad + \Big|\hat{v}_1(t)\, e^{2i\rho\xi(t)}\Big| \Big|\hat{v}_2(x_0)\, e^{-2i\rho\xi(x_0)} - \hat{v}_2(x)\, e^{-2i\rho\xi(x)}\Big| \Big) \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| \, dt \\
&\quad \overset{(2.22)}{\leq} \int_{x_0}^\infty \Big(C|\rho|^{-1/6} |\hat{v}_1(x) - \hat{v}_1(x_0)| + \\
&\qquad\qquad + C|\rho|^{-1/6}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(t)} \Big|\hat{v}_2(x_0)\, e^{-2i\rho\xi(x_0)} - \hat{v}_2(x)\, e^{-2i\rho\xi(x)}\Big| \Big) \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| \, dt \\
&\quad \leq \Big(|\hat{v}_1(x) - \hat{v}_1(x_0)| + \Big|\hat{v}_2(x_0)\, e^{-2i\rho\xi(x_0)} - \hat{v}_2(x)\, e^{-2i\rho\xi(x)}\Big| \Big) C|\rho|^{-1/6} \int_{x_0}^\infty \Big| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \Big| \to 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x \to x_0)
\end{aligned}
$$

wegen $\hat{v}_1, \hat{v}_2 \in C((x_m,\infty))$, und

$$
\int_{x_0}^x |\hat{K}(x_0,t)| \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| \, dt \;\to\; 0 \qquad (x \to x_0),
$$

d.h.

$$
\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} h_u(x) = h_u(x_0).
$$

Analog zeigt man dies für $x < x_0$.
Also ist $h_u \in C^b([z_0,\infty))$; da auch $\hat{v}_1 \in C^b([z_0,\infty))$, ist für jedes $u \in C^b([z_0,\infty))$ dann auch $\Psi(u) = \hat{v}_1 - h_u \in C^b([z_0,\infty))$, d.h. Ψ bildet $C^b([z_0,\infty))$ in sich ab. Weiter gilt für beliebige Funktionen $u, v \in C^b([z_0,\infty))$

$$
\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_\infty &= \sup_{z_0 \leq x < \infty} \Big| \int_x^\infty \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \big(u(t) - v(t)\big) \, dt \Big| \\
&\leq \sup_{z_0 \leq x < \infty} \int_x^\infty \Big| \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \Big| \cdot \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| \cdot \Big| u(t) - v(t) \Big| \, dt
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2.23)}{\leq} \sup_{z_0 \leq x < \infty} \left(\int_x^\infty D|\rho|^{-1} \left| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \right| \cdot \|u - v\|_\infty \, dt \right) \\
&\leq \left(D|\rho|^{-1} \int_{z_0}^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \right) \cdot \|u - v\|_\infty,
\end{aligned}$$

dabei wurde $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ nach (2.5) benutzt.

Da $\int\limits_z^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \to 0 \quad (z \to \infty)$ nach dem Satz von Lebesgue, gibt es für jedes feste ρ ein $z = z(\rho) \geq z_0 \geq x_m + \epsilon$, so daß

$$D|\rho|^{-1} \int_z^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| < 1.$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert auf $[z, \infty)$ genau eine Lösung $\hat{Y} \in C^b([z, \infty))$ von (2.20), insbesondere ist $\hat{Y}$ auf $[z, \infty)$ also beschränkt. Durch Rücksubstitution gemäß (2.19) erhalten wir die gesuchte Lösung Y von (2.18).

b) Wegen $\xi(x_m + \epsilon) > 0$ gibt es ein $\rho_0 > 0$, so daß $\rho_0 \xi(x_m + \epsilon) \geq A$ gilt (vgl. (2.21) zur Wahl von A). Dann ist für alle $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ und $|\rho| \geq \rho_0$ und alle $x \geq x_m + \epsilon$

$$|\rho \xi(x)| \geq \rho_0 \xi(x_m + \epsilon) \geq A.$$

Also gilt gemäß (2.21)

$$\left. \begin{array}{c} |\hat{v}_j(x)| \leq C|\rho|^{-1/6} \\[2ex] |\hat{v}_j^{(1)}(x)| \leq C|\rho|^{-1/6}(D_1 + D_2|\rho|) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle } x \in \tilde{I} \text{ und alle } \rho \neq 0 \text{ mit} \\[2ex] 0 \leq \arg \rho \leq \pi \text{ und } |\rho| \geq \rho_0, \ j = 1, 2. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Für $|\rho| \geq \rho_0$ ist dann $\dfrac{\hat{K}}{W(v_1, v_2)}$ wie bei (2.23), nun aber mit (2.24) für alle $t \geq x \geq x_m + \epsilon$ abschätzbar:

$$\left| \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1, v_2)} \right| \leq D|\rho|^{-1} \quad \text{für alle } t \geq x \geq x_m + \epsilon \text{ und } |\rho| \geq \rho_0. \tag{2.25}$$

Wir betrachten nun (2.20) für $x \in \tilde{I}$ und $|\rho| \geq \rho_0$. Es ist für beliebige $u, v \in C^b(\tilde{I})$

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_\infty &\leq \sup_{x \in \tilde{I}} \int_x^\infty \left| \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1, v_2)} \right| \cdot \left| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \right| \cdot \big| u(t) - v(t) \big| \, dt \\
&\overset{(2.25)}{\leq} \left(D|\rho|^{-1} \sup_{x \in \tilde{I}} \int_x^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \right) \cdot \|u - v\|_\infty \\
&= \left(D|\rho|^{-1} \int_{x_m + \epsilon}^\infty \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| \right) \cdot \|u - v\|_\infty
\end{aligned}$$

wegen $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$. Da D nicht von ρ abhängt, gibt es ein $\rho_1 \geq \rho_0 > 0$ mit

$$(2.26) \qquad D|\rho|^{-1} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < \frac{1}{2} \quad \text{für alle } \rho \text{ mit } 0 \leq \arg\rho \leq \pi \text{ und } |\rho| \geq \rho_1.$$

Für $|\rho| \geq \rho_1$ existiert daher wieder nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau eine Lösung $\hat{Y} \in C^b(\tilde{I})$ von (2.20) auf $\tilde{I}$; durch Rücksubstitution gemäß (2.19) erhält man die Lösung Y von (2.18) auf $\tilde{I}$.

c) Nach a) ist $\hat{Y}$ auf $[z,\infty)$ (wobei nach b) $z = x_m + \epsilon$ für $|\rho| \geq \rho_1$) beschränkt. Sei ρ wieder wie angegeben fest gewählt. Es gilt dann mit (2.23)

$$\left|\int_x^{\infty} \frac{\hat{K}(x,t)}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t)\, dt\right| \overset{(2.23)}{\leq} D|\rho|^{-1} \sup_{z\leq s<\infty} |\hat{Y}(s)| \cdot \int_x^{\infty} \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| \to 0 \qquad (x\to\infty)$$

nach dem Satz von Lebesgue. Also ist mit (2.20)

$$(2.27) \qquad \hat{Y}(x) = \hat{v}_1(x) + o(1) \qquad (x\to\infty),$$

woraus mit (2.19)

$$(2.28) \qquad Y(x) = v_1(x) + \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot o(1) \qquad (x\to\infty)$$

folgt. Mit Korollar 2.1 ergibt sich daraus die Behauptung für Y.

Zum Nachweis der Abschätzung für Y':

Wegen $\hat{Y}, \hat{v}_1, \hat{v}_2 \in C^b([z,\infty))$ und $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ gilt mit (2.19)

$$\begin{aligned}
\left|\int_z^{\infty} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)}\right| &\leq \frac{1}{|W(v_1,v_2)|} \int_z^{\infty} \left|\hat{v}_2 \hat{Y} \frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < +\infty, \\
\left|\int_z^{\infty} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)}\right| &\leq \frac{1}{|W(v_1,v_2)|} \int_z^{\infty} \left|\hat{v}_1 \hat{Y} e^{2i\rho\xi} \frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| < +\infty
\end{aligned}$$

(dabei wurde $|e^{2i\rho\xi(x)}| = e^{-2\mathrm{Im}(\rho)\xi(x)} \leq 1$ für $x \geq x_m + \epsilon$ benutzt). Also gilt nach (2.18)

$$(2.29) \qquad \left\{\begin{aligned}
Y(x) &= v_1(x) - v_1(x)\int_x^{\infty} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)} + v_2(x)\int_x^{\infty} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)} \\
&= v_1(x)\Big(1 - \int_z^{\infty} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)} + \int_z^{x} \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) \\
&\quad + v_2(x)\Big(\int_z^{\infty} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)} - \int_z^{x} \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) \qquad (x \in [z,\infty)).
\end{aligned}\right.$$

Aufgrund von $Y \in C([z,\infty))$, $v_j \in C^2((x_m,\infty))$ und $F \in L^1_{\text{loc}}(\tilde{I})$ ist $v_j F Y \in L^1_{\text{loc}}([z,\infty))$ für $j = 1, 2$, also sind die Funktionen

$$\left([z,\infty) \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_z^x \frac{v_j F Y}{W(v_1,v_2)}\right) \in AC_{\text{loc}}([z,\infty)),\ j = 1, 2;$$

da auch $v_j \in AC_{\text{loc}}([z,\infty))$, ist nach (2.29)

$$Y \in AC_{\text{loc}}([z,\infty)),$$

und Y ist in $[z,\infty)$ fast überall differenzierbar mit

$$\begin{aligned} Y'(x) &= v_1'(x)\Big(1 - \int_z^\infty \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)} + \int_z^x \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) + v_1(x)\,\frac{v_2(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)} \\ &\quad + v_2'(x)\Big(\int_z^\infty \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)} - \int_z^x \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) - v_2(x)\,\frac{v_1(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(fast alle } x \in [z,\infty)), \end{aligned}$$

also

$$(2.30)\quad \begin{cases} Y'(x) = v_1'(x)\Big(1 - \displaystyle\int_z^\infty \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)} + \int_z^x \frac{v_2 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) \\ \qquad + v_2'(x)\Big(\displaystyle\int_z^\infty \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)} - \int_z^x \frac{v_1 F Y}{W(v_1,v_2)}\Big) \qquad \text{(fast alle } x \in [z,\infty)). \end{cases}$$

Da auch $v_j' \in AC_{\text{loc}}([z,\infty))$, $j = 1, 2$, ist die rechte Seite von (2.30) lokal absolut stetig, insbesondere stetig in $[z,\infty)$. Daher gibt es in der Äquivalenzklasse von $Y' \in L^1_{\text{loc}}([z,\infty))$ einen Repräsentanten, der (2.30) für *alle* $x \in [z,\infty)$ erfüllt und somit lokal absolut stetig ist. Also ist

$$Y' \in AC_{\text{loc}}([z,\infty)),$$

und es gilt (2.30) für alle $x \in [z,\infty)$, d.h.

$$(2.31)\qquad Y'(x) = v_1'(x) - \int_x^\infty \frac{v_1'(x)v_2(t) - v_2'(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt \qquad (x \in [z,\infty)),$$

wobei nun weiter gilt

$$(2.32)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_x^\infty \frac{v_1'(x)v_2(t) - v_2'(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt \\ \overset{(2.19)}{=} \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \displaystyle\int_x^\infty \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x)\hat{v}_2(t) - \hat{v}_2^{(1)}(x)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1,v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\hat{Y}(t)\,dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x \in [z,\infty)), \end{cases}$$

mit $t \geq x \geq z$ ergibt sich dabei

$$(2.33)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\hat{v}_1^{(1)}(x)\hat{v}_2(t) - \hat{v}_2^{(1)}(x)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1, v_2)}\right| \\ \overset{(2.13)}{\leq} \quad \dfrac{|\hat{v}_1^{(1)}(x)||\hat{v}_2(t)| + |\hat{v}_2^{(1)}(x)||\hat{v}_1(t)|\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)(\xi(x)-\xi(t))}}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ \overset{(2.22)}{\leq} \quad \dfrac{2C|\rho|^{-1/6}(D_1 + D_2|\rho|)C|\rho|^{-1/6}}{\frac{6}{\pi}|\rho|^{2/3}} \\ = \quad \dfrac{D(D_1 + D_2|\rho|)}{|\rho|} \quad =: \ d(\rho) \qquad (x, t \in [z, \infty),\ t \geq x), \end{cases}$$

(mit D wie in (2.23) definiert), und daraus folgt

$$\begin{aligned} &\left|\int_x^\infty \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x)\hat{v}_2(t) - \hat{v}_2^{(1)}(x)\hat{v}_1(t)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1, v_2)} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t)\, dt\right| \\ &\qquad \overset{(2.33)}{\leq} \quad d(\rho) \sup_{z \leq s < \infty} |\hat{Y}(s)| \int_x^\infty \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| \to 0 \qquad (x \to \infty), \end{aligned}$$

also gemäß (2.31) und (2.32)

$$(2.34)\qquad Y'(x) = v_1'(x) + \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot o(1) \qquad (x \to \infty).$$

Mit Korollar 2.1 folgt daraus die Behauptung für Y'.

d) Wir zeigen als erstes, daß ein $d_0 > 0$ existiert, so daß

$$(2.35)\qquad S(\rho) := \sup_{t \in \tilde{I}} |\hat{Y}(t, \rho)| \leq d_0 |\rho|^{-1/6} \quad \text{für } |\rho| \geq \rho_1,\ 0 \leq \arg\rho \leq \pi$$

gilt.

Zum Nachweis von (2.35):

Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|\rho| \geq \rho_1$, $0 \leq \arg\rho \leq \pi$; wegen $|\rho| \geq \rho_1 \geq \rho_0$ gelten dann (2.24) und (2.25). Hiermit folgt in (2.20):

$$\begin{aligned} |\hat{Y}(x, \rho)| &\leq |\hat{v}_1(x, \rho)| + \int_x^\infty \left|\frac{\hat{K}(x, t, \rho)}{W(v_1(\cdot, \rho), v_2(\cdot, \rho))}\right| \cdot \left|\frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}}\right| \cdot S(\rho)\, dt \\ &\leq C|\rho|^{-1/6} + D|\rho|^{-1} S(\rho) \int_{x_m+\epsilon}^\infty \left|\frac{F}{\sqrt{\phi^2}}\right| \qquad (x \in \tilde{I}), \end{aligned}$$

also durch Übergang zum Supremum

$$S(\rho) \leq C|\rho|^{-1/6} + D|\rho|^{-1} S(\rho) \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right|.$$

Nach Wahl von ρ_1 in b) gilt gemäß (2.26)

$$D|\rho|^{-1} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right| < \frac{1}{2},$$

also $S(\rho) \leq C|\rho|^{-1/6} + \frac{1}{2} S(\rho)$, d.h.

$$S(\rho) \leq 2C|\rho|^{-1/6} =: d_0|\rho|^{-1/6}.$$

Damit ist (2.35) bewiesen.
Sei nun $x \in \tilde{I}$ fest gewählt. Für das Integral in (2.20) ergibt sich für $|\rho| \geq \rho_1$, $0 \leq \arg \rho \leq \pi$

$$\left| \int_x^{\infty} \frac{\hat{K}(x,t,\rho)}{W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t,\rho)\, dt \right| \leq D|\rho|^{-1} \cdot d_0 |\rho|^{-1/6} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \right|$$

mit (2.25) und (2.35), woraus

$$\hat{Y}(x,\rho) = \hat{v}_1(x,\rho) + O(\rho^{-7/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg \rho \leq \pi)$$

folgt; und mit Rücksubstitution gemäß (2.19) dann

$$Y(x,\rho) = v_1(x,\rho) + \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot O(\rho^{-7/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg \rho \leq \pi).$$

Mit Lemma 2.2 a) ergibt sich daraus wegen

$$v_1(x,\rho) = \left(C_1 \rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6}) \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg \rho \leq \pi)$$

die Behauptung für Y.
Zum Nachweis der Abschätzung für Y':
Nach (2.31) folgt mit Substitution (2.19)

$$\begin{aligned} \hat{Y}^{(1)}(x,\rho) &= \hat{v}_1^{(1)}(x,\rho) - \\ &\quad - \int_x^{\infty} \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_2(t,\rho) - \hat{v}_2^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_1(t,\rho)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t,\rho)\, dt \\ &\qquad\qquad (|\rho| \geq \rho_1,\ 0 \leq \arg \rho \leq \pi,\ x \in \tilde{I}). \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (2.33), die für $|\rho| \geq \rho_1$ nun sogar für alle $t \geq x \geq x_m + \epsilon$ gilt (man verwende in (2.33) statt (2.22) dann (2.24)), folgt hier

$$\Big| \int_x^\infty \frac{\hat{v}_1^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_2(t,\rho) - \hat{v}_2^{(1)}(x,\rho)\hat{v}_1(t,\rho)\, e^{-2i\rho(\xi(x)-\xi(t))}}{W(v_1(\cdot,\rho), v_2(\cdot,\rho))} \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \hat{Y}(t,\rho)\, dt \Big|$$

$$\stackrel{(2.33)}{\leq} \int_{x_m+\epsilon}^\infty \frac{D(D_1 + D_2|\rho|)}{|\rho|} \Big| \frac{F(t)}{\sqrt{\phi^2(t)}} \Big| S(\rho)\, dt$$

$$\stackrel{(2.35)}{\leq} \frac{D(D_1 + D_2|\rho|)}{|\rho|} d_0 |\rho|^{-1/6} \int_{x_m+\epsilon}^\infty \Big| \frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \Big| \qquad (|\rho| \geq \rho_1,\ 0 \leq \arg\rho \leq \pi,\ x \in \tilde{I}),$$

also für festes $x \in \tilde{I}$

$$\hat{Y}^{(1)}(x,\rho) = \hat{v}_1^{(1)}(x,\rho) + O(\rho^{-1/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg\rho \leq \pi),$$

mit (2.19) folgt so für fest gewähltes $x \in \tilde{I}$

$$Y'(x,\rho) = v_1'(x,\rho) + \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot O(\rho^{-1/6}) \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg\rho \leq \pi).$$

Mit Lemma 2.2 b) ergibt sich daraus die Behauptung für Y' wegen

$$v_1'(x,\rho) = C_1 i \rho^{5/6}\Big(1 + O(\rho^{-1/6})\Big) \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \qquad (|\rho| \to \infty, 0 \leq \arg\rho \leq \pi).$$

□

Wir listen nun einige Eigenschaften von Y auf; wir zeigen insbesondere, daß $Y(\cdot,\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf $[z(\rho), \infty)$ löst.

Lemma 2.4. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fest gewählt mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$.*

- a) *Es ist $Y(\cdot,\rho)$ Lösung von $l_\rho u = 0$ auf $[z(\rho), \infty)$.*
- b) *Als Lösung von $l_\rho u = 0$ auf $[z(\rho), \infty)$ kann $Y(\cdot,\rho)$ in eindeutiger Weise auf ganz I fortgesetzt werden mit $l_\rho Y(\cdot,\rho) = 0$ auf I.*

Beweis. Sei ρ fest gewählt; wir lassen den Parameter ρ in den Argumenten der Funktionen weg.
a) Im Beweis von Lemma 2.3 c) ist gezeigt worden, daß $Y \in AC_{\text{loc}}([z,\infty))$ gilt, und in Formel (2.31), daß Y auf $[z,\infty)$ differenzierbar ist mit

$$Y'(x) = v_1'(x) - \int_x^\infty \frac{v_1'(x)v_2(t) - v_2'(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\, dt \qquad (x \in [z,\infty))$$

und $Y' \in AC_{\rm loc}([z,\infty))$. Also ist Y' fast überall in $[z,\infty)$ differenzierbar mit (vgl. (2.30))

$$\begin{aligned}
Y''(x) &= v_1''(x)\Big(1 - \int_z^\infty \frac{v_2 FY}{W(v_1,v_2)} + \int_z^x \frac{v_2 FY}{W(v_1,v_2)}\Big) + v_1'(x)\frac{v_2(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)} \\
&\quad + v_2''(x)\Big(\int_z^\infty \frac{v_1 FY}{W(v_1,v_2)} - \int_z^x \frac{v_1 FY}{W(v_1,v_2)}\Big) + v_2'(x)\Big(-\frac{v_1(x)F(x)Y(x)}{W(v_1,v_2)}\Big) \\
&= v_1''(x) - \int_x^\infty \frac{v_1''(x)v_2(t) - v_2''(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt - F(x)Y(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(fast alle } x \in [z,\infty)).
\end{aligned}$$

Wegen $l_\rho^\theta v_j = 0$ auf (x_m,∞), $j = 1,2$, folgt daher

$$\begin{aligned}
l_\rho Y(x) &= -Y''(x) + \chi(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= -v_1''(x) + \int_x^\infty \frac{v_1''(x)v_2(t) - v_2''(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt \\
&\quad + F(x)Y(x) + \chi(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= \rho^2\phi^2(x)v_1(x) + \theta(x)v_1(x) \\
&\quad + \int_x^\infty \frac{\big(-\theta(x) - \rho^2\phi^2(x)\big)v_1(x)v_2(t) + \big(\theta(x) + \rho^2\phi^2(x)\big)v_2(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt \\
&\quad - \theta(x)Y(x) - \chi(x)Y(x) + \chi(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= \big(\rho^2\phi^2(x) + \theta(x)\big)\Big(v_1(x) - \int_x^\infty \frac{v_1(x)v_2(t) - v_2(x)v_1(t)}{W(v_1,v_2)} F(t)Y(t)\,dt\Big) \\
&\quad - \theta(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= \big(\rho^2\phi^2(x) + \theta(x)\big)Y(x) - \theta(x)Y(x) - \rho^2\phi^2(x)Y(x) \\
&= 0 \qquad\qquad \text{(fast alle } x \in [z,\infty)).
\end{aligned}$$

b) Sei $A > z$ fest ausgewählt. Dann gibt es nach Lemma 1.2 b) genau eine Lösung $\tilde{Y}(\cdot,\rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf I mit

$$\tilde{Y}(A,\rho) = Y(A,\rho)\,, \quad \tilde{Y}'(A,\rho) = Y'(A,\rho)\,,$$

deshalb ist $\tilde{Y}(\cdot,\rho) = Y(\cdot,\rho)$ auf $[z,\infty)$, d.h. $\tilde{Y}(\cdot,\rho)$ ist die gesuchte, eindeutig bestimmte Fortsetzung von $Y(\cdot,\rho)$ auf I. $\square$

Wir bezeichnen die Fortsetzung von $Y(\cdot,\rho)$ auf I gemäß Lemma 2.4 b) wieder mit $Y(\cdot,\rho)$.

Lemma 2.5. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Für $\rho > 0$ gilt*

$$\begin{aligned} y(x,-\rho) &= y(x,\rho) \qquad (x \in I), \\ Y(x,-\rho) &= -\overline{Y(x,\rho)} \qquad (x \in I). \end{aligned}$$

Beweis. *Zur Behauptung über y:* Nach Wahl von $y(\cdot,\rho)$ gemäß (2.17) ist $y(\cdot,\rho)$ für jedes $\rho \neq 0$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ die eindeutig bestimmte Funktion mit

$$l_\rho y(\cdot,\rho) = 0 \text{ auf } I\ , \quad y(0,\rho) = \sin\alpha\ , \quad y'(0,\rho) = -\cos\alpha\ .$$

Ist nun $\rho > 0$ fest, so erfüllt wegen

$$0 = l_{-\rho}y(\cdot,-\rho) = -y''(\cdot,-\rho) + \chi y(\cdot,-\rho) - (-\rho)^2\phi^2 y(\cdot,-\rho) = l_\rho y(\cdot,-\rho) \quad \text{auf } I,$$

$$y(0,-\rho) = \sin\alpha\ , \quad y'(0,-\rho) = -\cos\alpha$$

die Funktion $y(\cdot,-\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I und dieselben Anfangsbedingungen wie $y(\cdot,\rho)$. Nach Lemma 1.2 b) folgt

$$y(\cdot,\rho) = y(\cdot,-\rho).$$

Zur Behauptung über Y: Der Beweis der Behauptung über Y ist etwas aufwendiger als der der Behauptung über y, da Y nicht mit Hilfe von Anfangsbedingungen gegeben ist.
Wir zeigen zunächst für jedes $\rho > 0$:

$$Y(x,-\rho) = -\overline{Y(x,\rho)} \qquad \text{für alle } x \in [a,\infty) \text{ mit geeignetem } a \geq x_m + \epsilon;$$

wir benutzen dazu die die Funktion Y definierende Integralgleichung (2.18). Benötigt werden zunächst Beziehungen zwischen $\overline{v_j(\cdot,\rho)}$ und $v_j(\cdot,-\rho)$, $j = 1,2$, für $\rho > 0$, die wir nun herleiten werden.
Sei dazu $\rho > 0$, $\arg\rho = 0$. Mit (B.4), (B.5) in Anhang B und $\rho\xi(x) > 0$ für $x > x_m$ gilt

$$\begin{aligned} (-\rho\xi(x))^{1/3} H^{(1)}_{1/3}(-\rho\xi(x)) &= \Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)^{1/3} H^{(1)}_{1/3}\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big) \\ &= e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}\Big(-e^{-\frac{\pi i}{3}} H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x))\Big) \\ &= -(\rho\xi(x))^{1/3} H^{(2)}_{\overline{1/3}}(\overline{\rho\xi(x)}) \\ &= -\overline{(\rho\xi(x))^{1/3} H^{(1)}_{1/3}(\rho\xi(x))} \qquad (x > x_m), \end{aligned}$$

woraus mit der Definition (2.12) von v_1

$$v_1(x,-\rho) = -\overline{v_1(x,\rho)} \qquad (x > x_m) \tag{2.36}$$

folgt, und

$$
\begin{aligned}
(-\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{1/3}(-\rho\xi(x)) &= \Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)^{1/3}H^{(2)}_{1/3}\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big) \\
&= e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}\Big(\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\;H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x)) + e^{\frac{\pi i}{3}}H^{(1)}_{1/3}(\rho\xi(x))\Big) \\
&= e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{\overline{1/3}}(\overline{\rho\xi(x)}) + e^{\frac{2\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(1)}_{\overline{1/3}}(\overline{\rho\xi(x)}) \\
&= e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(\rho\xi(x))} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x))} \\
&\qquad\qquad (x > x_m),
\end{aligned}
$$

also ergibt sich

$$
v_2(x,-\rho) = e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(x,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(x,\rho)} \qquad (x > x_m). \tag{2.37}
$$

Mit (2.36) und (2.37) folgt nun

$$
\begin{aligned}
W\Big(v_1(\cdot,-\rho), v_2(\cdot,-\rho)\Big) &= W\Big(-\overline{v_1(\cdot,\rho)}, e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(\cdot,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big) \\
&= W\Big(-\overline{v_1(\cdot,\rho)}, e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(\cdot,\rho)}\Big) + W\Big(-\overline{v_1(\cdot,\rho)}, e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big) \\
&= -e^{\frac{2\pi i}{3}}W\Big(\overline{v_1(\cdot,\rho)}, \overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big),
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
&\frac{K(x,t,-\rho)}{W(v_1(\cdot,-\rho),v_2(\cdot,-\rho))} \\
&= \frac{v_1(x,-\rho)v_2(t,-\rho) - v_2(x,-\rho)v_1(t,-\rho)}{W(v_1(\cdot,-\rho),v_2(\cdot,-\rho))} \\
&= \frac{-\overline{v_1(x,\rho)}\Big(e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(t,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(t,\rho)}\Big) - \Big(e^{\frac{\pi i}{3}}\overline{v_1(x,\rho)} + e^{\frac{2\pi i}{3}}\overline{v_2(x,\rho)}\Big)\Big(-\overline{v_1(t,\rho)}\Big)}{-e^{\frac{2\pi i}{3}}W\Big(\overline{v_1(\cdot,\rho)},\overline{v_2(\cdot,\rho)}\Big)} \\
&= \frac{\overline{K(x,t,\rho)}}{\overline{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))}} \qquad\qquad (x,t > x_m).
\end{aligned}
$$

Wir erhalten nach (2.18) unter Beachtung der Reellwertigkeit von F für $\rho > 0$:

$$
\begin{aligned}
-\overline{Y(x,\rho)} &= -\overline{v_1(x,\rho)} + \int_x^\infty \frac{\overline{K(x,t,\rho)}}{\overline{W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho))}}\overline{F(t)Y(t,\rho)}\,dt \\
&= v_1(x,-\rho) - \int_x^\infty \frac{K(x,t,-\rho)}{W(v_1(\cdot,-\rho),v_2(\cdot,-\rho))}F(t)\Big(-\overline{Y(t,\rho)}\Big)\,dt \\
&\qquad\qquad (x \in [z(\rho),\infty)).
\end{aligned}
$$

Die Funktion $-\overline{Y(\cdot,\rho)}$ löst also auf $[z(\rho),\infty)$ die zu $-\rho$ gehörende Integralgleichung (2.18), deren Lösung ist aber $Y(\cdot,-\rho)$ auf $[z(-\rho),\infty)$, die nach Lemma 2.3 a) eindeutig bestimmt ist. Also folgt, wenn wir $z_0(\rho) := \max\{z(\rho), z(-\rho)\}$ setzen,

$$-\overline{Y(x,\rho)} = Y(x,-\rho) \quad \text{für alle } x \in [z_0(\rho),\infty). \tag{2.38}$$

Wegen $l_{-\rho} = l_\rho$ und

$$l_{-\rho}\Big(-\overline{Y(\cdot,\rho)}\Big) = l_\rho\Big(-\overline{Y(\cdot,\rho)}\Big) = -\overline{l_\rho Y(\cdot,\rho)} = 0 = l_{-\rho}Y(\cdot,-\rho) \quad \text{auf } I$$

lösen $Y(\cdot,-\rho)$ und $-\overline{Y(\cdot,\rho)}$ die Differentialgleichung $l_{-\rho}u = 0$ auf I und stimmen, wie gerade in (2.38) gezeigt, auf $[z_0(\rho),\infty)$ überein; mit Lemma 1.2 b) folgert man

$$Y(x,-\rho) = -\overline{Y(x,\rho)} \qquad (x \in I).$$

$\square$

Im folgenden Lemma können wir nun in Abhängigkeit von ρ gewisse Fundamentalsysteme von $l_\rho u = 0$ auf I angeben.

Lemma 2.6. *Seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei $\rho \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ fest gewählt mit $0 \le \arg\rho \le \pi$.*

a) Es gilt

$$W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) = Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha;$$

also ist $y(\cdot,\rho)$, $Y(\cdot,\rho)$ Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I genau dann, wenn $Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha \neq 0$ gilt.

b) Für $\rho > 0$ gilt

$$W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho)) = \frac{6i}{\pi}\rho^{2/3} \neq 0;$$

also bilden für $\rho > 0$ die Funktionen $Y(\cdot,\rho)$, $Y(\cdot,-\rho)$ ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I.

Beweis.

a) Es gilt mit (2.17)

$$\begin{aligned} W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) &= W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho))|_{x=0} = y(0,\rho)Y'(0,\rho) - y'(0,\rho)Y(0,\rho) \\ &= \sin\alpha \cdot Y'(0,\rho) + \cos\alpha \cdot Y(0,\rho). \end{aligned}$$

b) Sei $\rho > 0$. Dann ist $l_\rho = l_{-\rho}$, und daher erfüllen sowohl $Y(\cdot,\rho)$ als auch $Y(\cdot,-\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I. Nach (2.28), (2.34) aus dem Beweis von Lemma 2.3 c) gilt wegen $|e^{\pm i\rho\xi(x)}| = 1$ für $x > x_m$:

$$\begin{aligned} Y(x,\pm\rho) &= v_1(x,\pm\rho) + \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\cdot o(1) \qquad (x\to\infty), \\ Y'(x,\pm\rho) &= v_1'(x,\pm\rho) + \sqrt[4]{\phi^2(x)}\cdot o(1) \qquad (x\to\infty), \end{aligned}$$

zusammen mit

$$
\begin{aligned}
v_1(x,-\rho) &= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,(-\rho\xi(x))^{1/3}H^{(1)}_{1/3}(-\rho\xi(x))\\
&= \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)^{1/3}H^{(1)}_{1/3}\Big(e^{\pi i}\rho\xi(x)\Big)\\
&\overset{(B.4)}{=} \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,e^{\frac{\pi i}{3}}(\rho\xi(x))^{1/3}\Big(-e^{-\frac{\pi i}{3}}\Big)H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x))\\
&= -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{w'(x)}}\,(\rho\xi(x))^{1/3}H^{(2)}_{1/3}(\rho\xi(x))\\
&= -v_2(x,\rho) \qquad\qquad (x > x_m)
\end{aligned}
$$

also:

$$
\begin{aligned}
W(Y(\cdot,\rho),Y(\cdot,-\rho)) \;&=\; \Big(v_1(x,\rho)+\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)\Big)\Big(-v_2'(x,\rho)+\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)\Big)\\
&\quad -\Big(v_1'(x,\rho)+\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)\Big)\Big(-v_2(x,\rho)+\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)\Big)\\
= \;& -v_1(x,\rho)v_2'(x,\rho)+v_1(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)-v_2'(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)+o(1)\\
&+v_1'(x,\rho)v_2(x,\rho)-v_1'(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\,o(1)+v_2(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\,o(1)+o(1) \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}
$$

Nach Korollar 2.1 folgt, daß

$$
v_j(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)} = O(1)\;,\quad v_j'(x,\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} = O(1) \qquad (x\to\infty,\ j=1,2)
$$

wegen $e^{\pm i\rho\xi(x)} = O(1) \quad (x\to\infty)$, da $\rho\xi(x)\in\mathbb{R}$ für $x > x_m$. Also gilt

$$
W(Y(\cdot,\rho),Y(\cdot,-\rho)) = -W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho)) + o(1) \qquad (x\to\infty),
$$

durch Grenzübergang $x\to\infty$ folgern wir mit (2.13)

$$
W(Y(\cdot,\rho),Y(\cdot,-\rho)) = -W(v_1(\cdot,\rho),v_2(\cdot,\rho)) = \frac{6i}{\pi}\,\rho^{2/3} \neq 0.
$$

$\square$

Mit Lemma 2.6 definieren wir für $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$:

$$\mathcal{W}(\rho, \alpha) := W(y(\cdot, \rho), Y(\cdot, \rho)) = Y(0, \rho) \cos \alpha + Y'(0, \rho) \sin \alpha.$$

Eine asymptotische Darstellung für $y(\cdot, \rho)$ und $y'(\cdot, \rho)$ erhalten wir so:

Hilfssatz 2.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in L^1([a, \infty))$ und $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg \rho < \pi$. Dann gibt es ein Fundamentalsystem φ_1, φ_2 der Differentialgleichung*

$$-u'' + \psi(x)u - \rho^2 u = 0 \quad \textit{auf } [a, \infty) \tag{2.39}$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= e^{(-1)^k i\rho x} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty), \\ \varphi_k'(x) &= (-1)^k i\rho \, e^{(-1)^k i\rho x} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty) \end{aligned}$$

für $k = 1, 2$.

Beweis. Siehe Naimark [22, S. 180, Thm. 8]. □

Für $\operatorname{Im}(\rho) > 0$ wird φ_1 *dominante Lösung* von (2.39) genannt, φ_2 *subdominante Lösung* von (2.39).

Lemma 2.7. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt.*

a) Sei $\rho \neq 0$ mit $0 < \arg \rho < \pi$ fest gewählt. Sei weiter zur Abkürzung

$$M(\rho) := -\frac{i}{2C_1 \rho^{5/6}} \mathcal{W}(\rho, \alpha)$$

gesetzt (mit $C_1 \neq 0$ aus Lemma 2.2). Dann gilt

$$\begin{aligned} y(x, \rho) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot \Big(M(\rho) + o(1)\Big) \qquad (x \to \infty), \\ y'(x, \rho) &= -i\rho \sqrt[4]{\phi^2(x)} \, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot \Big(M(\rho) + o(1)\Big) \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

b) Sei $\rho > 0$. Dann gilt

$$\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$$

und

$$y(x, \rho) = \frac{\pi C_1 i}{6\rho^{5/6}} \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \Big(\overline{\mathcal{W}(\rho, \alpha)} \, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho, \alpha) \, e^{-i\frac{\pi}{6}} \, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big) \qquad (x \to \infty).$$

Beweis.
a) Sei $\rho \neq 0$ mit $0 < \arg \rho < \pi$ gewählt. Wir führen für die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf $\tilde{I}$ eine *Liouville–Transformation* (siehe hierzu auch Olver [23, Kap. 6])

$$\tilde{u}(\xi) := u(x)\sqrt[4]{\phi^2(x)} \qquad (x \in \tilde{I})\,, \qquad \text{wobei } \xi \text{ wie bisher definiert ist },$$

durch. Wegen $\sqrt{\phi^2} > 0$ auf $\tilde{I}$ ist ξ streng monoton wachsend auf $\tilde{I}$ und bildet $\tilde{I}$ bijektiv auf $\tilde{J} := [\xi_0, \infty)$ mit $\xi_0 := \xi(x_m + \epsilon) \in (0, \infty)$ ab. Die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf $\tilde{I}$ ist dann äquivalent zu

$$-\tilde{u}''(\xi) + \tilde{\chi}(\xi)\tilde{u}(\xi) - \rho^2\tilde{u}(\xi) = 0 \quad \text{auf } \tilde{J} \tag{2.40}$$

mit

$$\tilde{\chi}(\xi) := -\frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-3}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-2}(\phi^2)''(x) + \frac{\chi(x)}{\phi^2(x)} \qquad (\xi \in \tilde{J}).$$

Dies ist nun eine Eigenwertaufgabe der Form

$$-\tilde{u}'' + \tilde{\chi}(\xi)\tilde{u} = \rho^2\tilde{u} \quad \text{auf } \tilde{J}$$

ohne Gewichtsfunktion. Es gilt für $\tilde{\chi}$ mit Formel (2.2) aus Bemerkung 2.1, (2.3) und dem Satz von Levi:

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_0}^{\infty} |\tilde{\chi}(\xi)|\,d\xi &= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| -\frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-3}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-2}(\phi^2)''(x) + \frac{\chi(x)}{\phi^2(x)} \right| \cdot \xi'(x)\,dx \\
&= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| -\frac{5}{16}(\phi^2(x))^{-5/2}((\phi^2)'(x))^2 + \frac{1}{4}(\phi^2(x))^{-3/2}(\phi^2)''(x) + \frac{\chi(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx \\
&\overset{(2.2)}{=} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| -\frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} - \frac{5}{36}\frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{(\xi(x))^2} \right| dx \\
&\leq \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx + \frac{5}{36}\int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \frac{\sqrt{\phi^2(x)}}{(\xi(x))^2}\,dx \\
&= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx - \frac{5}{36}\left(\lim_{b\to\infty} \int_{x_m+\epsilon}^{b} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\xi(x)}\right) dx \right) \\
&= \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx - \frac{5}{36}\left(\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\xi(x)}\Big|_{x_m+\epsilon}^{b} \right) \\
&\overset{(2.3)}{=} \int_{x_m+\epsilon}^{\infty} \left| \frac{F(x)}{\sqrt{\phi^2(x)}} \right| dx + \frac{5}{36}\frac{1}{\xi(x_m+\epsilon)} \;<\; \infty
\end{aligned}$$

wegen $\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1(\tilde{I})$ nach Voraussetzung (2.5), so daß also $\tilde{\chi} \in L^1(\tilde{J})$ gilt.

Da die Funktion $y(\cdot,\rho)$ die Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I, also insbesondere auf $\tilde{I}$, löst, ist gemäß obiger Liouville–Transformation

$$\tilde{y}(\xi,\rho) := y(x,\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)} \qquad (x \in \tilde{I}) \tag{2.41}$$

Lösung der Differentialgleichung (2.40). Als Lösung von (2.40) ist $\tilde{y}$ mit Hilfssatz 2.1 als Linearkombination eines Fundamentalsystems φ_1, φ_2 von (2.40), bestehend aus einer dominanten Lösung φ_1 sowie einer subdominanten Lösung φ_2, darstellbar. Also gibt es Zahlen $M_1 = M_1(\rho), M_2 = M_2(\rho)$ aus $\mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{y}(\xi,\rho) &= M_1\varphi_1(\xi) + M_2\varphi_2(\xi) \\
&= M_1\, e^{-i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) + M_2\, e^{i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) \\
&= e^{-i\rho\xi}\cdot\Big(M_1 + M_1 o(1) + M_2\, e^{2i\rho\xi}\cdot(1+o(1))\Big) \\
&= e^{-i\rho\xi}\cdot(M_1 + o(1)) \qquad (\xi\to\infty); \\
\frac{d}{d\xi}\tilde{y}(\xi,\rho) &= M_1\frac{d}{d\xi}\varphi_1(\xi) + M_2\frac{d}{d\xi}\varphi_2(\xi) \\
&= -M_1 i\rho\, e^{-i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) + M_2 i\rho\, e^{i\rho\xi}\cdot(1+o(1)) \\
&= -i\rho\, e^{-i\rho\xi}\cdot\Big(M_1 + M_1 o(1) - M_2\, e^{2i\rho\xi}\cdot(1+o(1))\Big) \\
&= -i\rho\, e^{-i\rho\xi}\cdot(M_1+o(1)) \qquad (\xi\to\infty),
\end{aligned}$$

denn wegen $\operatorname{Im}(\rho) > 0$ gilt $e^{2i\rho\xi} = o(1) \quad (\xi\to\infty)$. Daraus folgt mit (2.41)

$$y(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(M_1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \tag{2.42}$$

und wegen

$$y'(x,\rho) = \frac{d\tilde{y}(\cdot,\rho)}{d\xi}(\xi(x))\sqrt[4]{\phi^2(x)} - \frac{1}{4}\tilde{y}(\xi(x),\rho)(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)'(x) \qquad (x\in\tilde{I})$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
y'(x,\rho) &= -i\rho\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(M_1+o(1))\sqrt[4]{\phi^2(x)} \\
&\quad -\frac{1}{4}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(M_1+o(1))(\phi^2(x))^{-5/4}(\phi^2)'(x) \\
&= \sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(-i\rho(M_1+o(1)) - \frac{1}{4}\frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}}(M_1+o(1))\Big) \\
&\qquad\qquad (x\to\infty),
\end{aligned}$$

mit (2.4) also

$$y'(x,\rho) = -i\rho\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot\Big(M_1 + o(1) + \frac{1}{4}o(1)(M_1+o(1))\Big) \qquad (x\to\infty),$$

d. h.

(2.43) $$y'(x,\rho) = -i\rho\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M_1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Es reicht nun zu zeigen, daß für obiges M_1 gilt

$$M_1 = -\frac{i}{2C_1\rho^{5/6}}\, \mathcal{W}(\rho,\alpha).$$

Mit (2.42), (2.43) und Lemma 2.3 c) gilt

$$\begin{aligned}
&W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M_1 + o(1)) C_1 i\rho^{5/6}\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \\
&\quad -\Big(- i\rho\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M_1 + o(1))\Big) C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \\
&= (M_1 + o(1)) C_1 i\rho^{5/6} \cdot (1 + o(1)) + (M_1 + o(1)) C_1 i\rho^{5/6} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty),
\end{aligned}$$

woraus nach Grenzübergang $x \to \infty$ folgt

$$\mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) = \lim_{x\to\infty} W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho))(x) = 2M_1C_1 i\rho^{5/6},$$

also

$$M_1 = -\frac{i}{2C_1\rho^{5/6}}\mathcal{W}(\rho,\alpha) = M(\rho).$$

Zusammen mit (2.42), (2.43) folgt die Behauptung.

b) Sei $\rho > 0$. Nach Lemma 2.6 b) bilden wegen $\rho > 0$ die Funktionen $Y(\cdot,\rho)$, $Y(\cdot,-\rho)$ ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I. Also gibt es Zahlen $c_1(\rho), c_2(\rho) \in \mathbb{C}$ mit

$$y(x,\rho) = c_1(\rho) Y(x,\rho) + c_2(\rho) Y(x,-\rho) \qquad (x \in I),$$

wobei die Cramersche Regel, Lemma 2.5, Lemma 2.6 b) und (2.17) liefern

$$\begin{aligned}
c_1(\rho) &= \frac{W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{W(y(\cdot,\rho)), \overline{Y(\cdot,\rho)})}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} \\
&= -\frac{y(0,\rho)\overline{Y'(0,\rho)} - \overline{Y(0,\rho)}y'(0,\rho)}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} \\
&= -\frac{\overline{Y'(0,\rho)}\sin\alpha + \overline{Y(0,\rho)}\cos\alpha}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\pi}{6i\rho^{2/3}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
c_2(\rho) &= \frac{W(Y(\cdot,\rho), y(\cdot,\rho))}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho))}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} \\
&= -\frac{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}{W(Y(\cdot,\rho), Y(\cdot,-\rho))} = -\frac{\mathcal{W}(\rho,\alpha)\pi}{6i\rho^{2/3}},
\end{aligned}$$

also

$$(2.44) \qquad y(x,\rho) = \frac{\pi i}{6\rho^{2/3}}\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}Y(x,\rho) + \mathcal{W}(\rho,\alpha)Y(x,-\rho)\Big) \qquad (x \in I).$$

Wäre nun $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$ für ein $\rho > 0$, so folgte nach (2.44) dann $y(\cdot,\rho) = 0$ im Widerspruch zu (2.17). Also ist $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ für jedes $\rho > 0$.
Nach Lemma 2.3 c) gilt nun

$$\begin{aligned} Y(x,\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \\ Y(x,-\rho) &= C_1\rho^{-1/6}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty), \end{aligned}$$

so daß wegen $e^{\pm i\rho\xi(x)} = O(1) \quad (x\to\infty)$ aufgrund von $\rho > 0$

$$\begin{aligned} y(x,\rho) &= \frac{\pi C_1 i}{6\rho^{5/6}}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1))\Big) \\ &= \frac{\pi C_1 i}{6\rho^{5/6}}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big) \qquad (x\to\infty). \end{aligned}$$

□

Aussagen über die Integrierbarkeit von $y(\cdot,\rho)$ und $Y(\cdot,\rho)$ liefert

Lemma 2.8. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Für fest gewähltes $\rho \neq 0$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ gilt:*

a) $\quad Y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)\,, \quad Y'(\cdot,\rho) \in L^2(I).$

b) $\quad y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I) \iff \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0.$

Für $\rho > 0$ gilt:

c) $\quad y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I).$

Beweis.
a) Sei ρ fest gewählt mit $0 < \arg\rho < \pi$, also $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$. Nach Lemma 2.3 c) gilt mit einer Konstanten $C(\rho) := C_1\rho^{-1/6} \neq 0$

$$Y(x,\rho) = C(\rho)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty).$$

Also gibt es ein $A \geq 1$ mit

$$|Y(x,\rho)| \leq 2|C(\rho)|\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \qquad (x \geq A),$$

woraus folgt

$$(2.45) \qquad |\phi^2(x)||Y(x,\rho)|^2 \le 4|C(\rho)|^2\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \qquad (x \ge A).$$

Dabei gilt mit (2.3)

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\int_A^b \sqrt{\phi^2(x)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_A^b \frac{d}{dx}\Big(-\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)}\Big)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)} e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(A)} - \frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)} e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(b)}\Big) \\
&= \frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(A)} \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

so daß nach dem Satz von Levi $\sqrt{\phi^2}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi}$ über $[A,\infty)$ integrierbar ist. Mit (2.45) folgt

$$\int_A^\infty |\phi^2||Y(\cdot,\rho)|^2 < \infty,$$

da ferner $Y(\cdot,\rho)$ und ϕ^2 auf $[0,A]$ stetig sind, ist $|\phi^2||Y(\cdot,\rho)|^2$ auf $[0,A]$ beschränkt und deshalb integrierbar, woraus dann $\int\limits_0^\infty |\phi^2||Y(\cdot,\rho)|^2 < \infty$ folgt, also $Y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$.

Für $Y'(\cdot,\rho)$ gilt nach Lemma 2.3 c) mit einer Konstanten $C(\rho) \ne 0$

$$Y'(x,\rho) = C(\rho)\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Also gibt es ein $A \ge 1$ mit

$$|Y'(x,\rho)| \le 2|C(\rho)|\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \qquad (x \ge A),$$

woraus folgt

$$|Y'(x,\rho)|^2 \le 4|C(\rho)|^2\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \qquad (x \ge A).$$

Wegen $\int\limits_A^\infty \sqrt{\phi^2}\, e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} < \infty$ folgt

$$\int_A^\infty |Y'(\cdot,\rho)|^2 < \infty;$$

da $Y'(\cdot,\rho)$ auf $[0,A]$ stetig ist, existiert auch $\int\limits_0^A |Y'(\cdot,\rho)|^2$, also ist $Y'(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$.

b) Sei ρ fest gewählt mit $0 < \arg\rho < \pi$, also $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$.
Sei $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \ne 0$. Dann folgt in Lemma 2.7, daß $|M(\rho)| > 0$ ist und ein $A \ge 1$ existiert mit

$$|y(x,\rho)| \ge \frac{|M(\rho)|}{2}\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}|e^{-i\rho\xi(x)}| \qquad (x \ge A),$$

also

$$|\phi^2(x)||y(x,\rho)|^2 \geq \frac{|M(\rho)|^2}{4}\sqrt{\phi^2(x)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)} \geq 0 \qquad (x \geq A).$$

Wäre nun $y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$, also $|\phi^2||y(\cdot,\rho)|^2 \in L^1(I)$, so folgte wegen $|M(\rho)| > 0$ dann $\sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} \in L^1([A,\infty))$. Nach dem Satz von Lebesgue folgte dann

$$\lim_{b\to\infty}\int_A^b \sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} = \int_A^\infty \sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} < \infty;$$

aber es ist wegen $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$ und (2.3)

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty}\int_A^b \sqrt{\phi^2}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi} &= \lim_{b\to\infty}\int_A^b \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(x)}\Big)\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big(\frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(b)} - \frac{1}{2\mathrm{Im}\,(\rho)}\, e^{2\mathrm{Im}\,(\rho)\xi(A)}\Big) = +\infty,
\end{aligned}$$

Widerspruch. Also ist $y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I)$.
Ist dagegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y(\cdot,\rho), Y(\cdot,\rho)) = 0$, so sind $y(\cdot,\rho)$ und $Y(\cdot,\rho)$ linear abhängig. Da nach a) $Y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ ist, folgt $y(\cdot,\rho) \in L^2_{|\phi^2|}(I)$.

c) Sei $\rho > 0$. Nach Lemma 2.7 b) gilt $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ und

$$|y(x,\rho)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\phi^2(x)}}\frac{\pi^2|C_1|^2}{36\rho^{5/3}}\Big|\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big|^2 \qquad (x\to\infty).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
&\Big|\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big|^2 \\
&= \Big(\overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\rho\xi(x)} + \mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\, e^{-i\rho\xi(x)} + o(1)\Big)\cdot \\
&\quad \cdot\Big(\mathcal{W}(\rho,\alpha)\, e^{-i\rho\xi(x)} + \overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, e^{i\frac{\pi}{6}}\, e^{i\rho\xi(x)} + o(1)\Big) \\
&= |\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + \mathcal{W}(\rho,\alpha)^2\, e^{-2i\rho\xi(x)-i\frac{\pi}{6}} + \overline{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}^2\, e^{2i\rho\xi(x)+i\frac{\pi}{6}} + |\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + o(1) \\
&= 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + 2\mathrm{Re}\Big(\mathcal{W}(\rho,\alpha)^2\, e^{-2i\rho\xi(x)-i\frac{\pi}{6}}\Big) + o(1) \\
&= 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2 + 2\mathrm{Re}\Big(|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\, e^{2i\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha)-2i\rho\xi(x)-i\frac{\pi}{6}}\Big) + o(1) \\
&= 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\cdot\Big(1+\cos(2\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha) - 2\rho\xi(x) - \tfrac{\pi}{6}) + o(1)\Big) \qquad (x\to\infty).
\end{aligned}$$

Sei $\varphi := 2\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha) - \frac{\pi}{6}$, also $\cos(2\arg\mathcal{W}(\rho,\alpha) - 2\rho\xi(x) - \frac{\pi}{6}) = \cos(2\rho\xi(x)-\varphi)$ für $x > x_m$. Also gibt es ein $A \geq 1$ mit

$$|y(x,\rho)|^2 \geq \frac{1}{\sqrt{\phi^2(x)}}\frac{\pi^2|C_1|^2}{36\rho^{5/3}}\cdot 2|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\cdot\Big(1+\cos(2\rho\xi(x)-\varphi) - \frac{1}{2}\Big) \qquad (x \geq A),$$

also

$$|\phi^2(x)||y(x,\rho)|^2 \geq \sqrt{\phi^2(x)}\,\frac{\pi^2|C_1|^2}{18\rho^{5/3}}\,|\mathcal{W}(\rho,\alpha)|^2\Big(\frac{1}{2}+\cos(2\rho\xi(x)-\varphi)\Big) \qquad (x \geq A),$$

wobei für $b \geq A$ wiederum wegen (2.3)

$$\begin{aligned}\int_A^b \sqrt{\phi^2(x)}\Big(\frac{1}{2}+\cos(2\rho\xi(x)-\varphi)\Big)\,dx &= \int_{2\rho\xi(A)-\varphi}^{2\rho\xi(b)-\varphi} \frac{1}{2\rho}\Big(\frac{1}{2}+\cos v\Big)\,dv \\ = \frac{\xi(b)-\xi(A)}{2} + \frac{1}{2\rho}\sin(2\rho\xi(b)-\varphi) &- \frac{1}{2\rho}\sin(2\rho\xi(A)-\varphi) \;\to\; +\infty \qquad (b\to\infty).\end{aligned}$$

Wie im ersten Teil des Beweises zu b) folgt $y(\cdot,\rho) \notin L^2_{|\phi^2|}(I)$. □

Wir notieren noch zwei wichtige Beziehungen für $Y(\cdot,\rho)$ und $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$, die später benötigt werden:

Lemma 2.9. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt.*

a) Für $0 < \arg\rho < \pi$ gilt:

$$Y'(0,\rho)\overline{Y(0,\rho)} - Y(0,\rho)\overline{Y'(0,\rho)} = 4i\,(\operatorname{Re}\rho)(\operatorname{Im}\rho)\int_0^\infty \phi^2|Y(\cdot,\rho)|^2.$$

b) Die Abbildung $\mathcal{W}(\cdot,\alpha) : \rho \mapsto \mathcal{W}(\rho,\alpha)$ ist für $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ stetig und holomorph für $0 < \arg\rho < \pi$; außerdem ist $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ nicht die Nullfunktion.

Beweis.
a) Sei ρ wie angegeben fest gewählt; wir lassen der kürzeren Schreibweise wegen die Angabe des Parameters ρ in den Argumenten der Funktionen weg. Da $l_\rho Y(\cdot,\rho) = 0$ fast überall in I (vgl. Lemma 2.4), folgt

$$-Y'' + \chi Y - \rho^2\phi^2 Y = 0 \quad \text{fast überall in } I$$

und durch Übergang zum Konjugiert-Komplexen, da χ und ϕ^2 reellwertig sind,

$$-\overline{Y''} + \chi\overline{Y} - \overline{\rho^2}\phi^2\overline{Y} = 0 \quad \text{fast überall in } I.$$

Wir multiplizieren die erste dieser Gleichungen mit $\overline{Y}$, die zweite mit Y, subtrahieren diese dann voneinander und erhalten

$$(2.46) \qquad -Y''\overline{Y} + \overline{Y''}Y = (\rho^2 - \overline{\rho^2})\phi^2|Y|^2 \quad \text{fast überall in } I.$$

Sei $b > 0$ beliebig. Wegen

$$\overline{Y''}Y - Y''\overline{Y} = (\overline{Y'}Y - Y'\overline{Y})' \quad \text{fast überall in } I$$

gilt

$$(2.47)\qquad \int_0^b (\overline{Y''}Y - Y''\overline{Y}) = \overline{Y'(b)}Y(b) - Y'(b)\overline{Y(b)} - \overline{Y'(0)}Y(0) + Y'(0)\overline{Y(0)}.$$

Also folgt mit (2.46) und (2.47)

$$(2.48)\qquad \overline{Y'(b)}Y(b) - Y'(b)\overline{Y(b)} - \overline{Y'(0)}Y(0) + Y'(0)\overline{Y(0)} = (\rho^2 - \overline{\rho^2}) \int_0^b \phi^2|Y|^2.$$

Nach Lemma 2.3 c) gilt mit $C(\rho) := C_1\rho^{-1/6} \neq 0$ für $\tau = 0, 1$

$$Y^{(\tau)}(x) = C(\rho)(i\rho)^\tau \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\right)^{1-2\tau} \cdot e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Damit folgt für $b \to \infty$ wegen $\operatorname{Im}\rho > 0$

$$\begin{aligned}
&\overline{Y'(b)}Y(b) - Y'(b)\overline{Y(b)}\\
&\quad= 2i\operatorname{Im}(\overline{Y'(b)}Y(b))\\
&\quad= 2i\operatorname{Im}\left(\overline{C(\rho)i\rho}\,\sqrt[4]{\phi^2(b)}\,\overline{\left(e^{i\rho\xi(b)}\right)} \cdot (1 + o(1)) \cdot C(\rho)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(b)}}\,e^{i\rho\xi(b)} \cdot (1 + o(1))\right)\\
&\quad= 2i\operatorname{Im}\left(-|C(\rho)|^2\, i\overline{\rho}\,|e^{i\rho\xi(b)}|^2\,(1 + o(1))\right)\\
&\quad= -2i|C(\rho)|^2 e^{-2\operatorname{Im}(\rho)\xi(b)} \cdot \operatorname{Im}\left(i\overline{\rho}(1 + o(1))\right)\\
&\quad= o(1) \qquad (b \to \infty).
\end{aligned}$$

Da $Y \in L^2_{|\phi^2|}(I)$ nach Lemma 2.8 a), ist $|\phi^2||Y|^2$ integrierbar. Nach dem Satz von Lebesgue gilt daher

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \phi^2|Y|^2 = \int_0^\infty \phi^2|Y|^2.$$

Also liefert (2.48) mit $b \to \infty$ und

$$(\rho^2 - \overline{\rho^2}) = 4i\,(\operatorname{Re}\rho)(\operatorname{Im}\rho)$$

die behauptete Gleichung

$$Y'(0)\overline{Y(0)} - \overline{Y'(0)}Y(0) = 4i\,(\operatorname{Re}\rho)(\operatorname{Im}\rho) \int_0^\infty \phi^2|Y|^2.$$

b) Stetigkeit bzw. Holomorphie von $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ folgen aufgrund allgemeiner Eigenschaften der Differentialgleichung $l_\rho u = 0$.
Nach Lemma 2.7 b) ist $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$ für alle $\rho > 0$ $(\arg\rho = 0)$. Wäre $\mathcal{W}(\rho, \alpha) = 0$ für alle $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg\rho < \pi$, so folgte wegen der Stetigkeit auch $\mathcal{W}(\rho, \alpha) = 0$ für $\rho > 0$ im Widerspruch zu Lemma 2.7 b). □

Als Hilfsmittel zum Beweis des folgenden Satzes werden wir in Hilfssatz 2.2 die Funktionen ϕ^2 und ξ auf geeignete Weise auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen:

Hilfssatz 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Sei ϕ^2 wie folgt auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt:*

$$\phi^2(t) := \phi^2(0) \qquad \text{für } t \in (-\infty, 0).$$

Dann besitzt ϕ^2 keine Nullstellen auf $(-\infty, 0)$ und es ist $\phi^2 \in C(\mathbb{R})$.
Sei weiter

$$\eta(x) := \int_{x_m}^{x} \sqrt{|\phi^2(t)|}\, dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dann ist mit den Bezeichnungen $U := \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ und $V := \mathbb{R} \setminus \{\eta(x_1), \ldots, \eta(x_m)\}$ die Funktion $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ und $\eta|(x_m, \infty) = \xi$, außerdem ist $\eta|U : U \to V$ C^1–invertierbar.

Beweis. Die Stetigkeit der auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Funktion ϕ^2 ist offensichtlich, ebenso die Nullstellenfreiheit auf $(-\infty, 0)$. Wegen $\sqrt{|\phi^2|} \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ist $\eta \in AC_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, und wegen $\eta'(x) = \sqrt{|\phi^2(x)|}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$ und $\sqrt{|\phi^2|} \in C(\mathbb{R})$ gibt es in der Äquivalenzklasse von $\eta' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ einen Repräsentanten, so daß $\eta' = \sqrt{|\phi^2|}$ auf ganz $\mathbb{R}$ gilt. Also ist $\eta \in C^1(\mathbb{R})$. Da $\phi^2 \geq 0$ auf (x_m, ∞), also $\phi^2 = |\phi^2|$ auf (x_m, ∞), gilt $\eta|(x_m, \infty) = \xi$, d.h. η ist eine Fortsetzung von ξ. Es bleiben die Bijektivität von η sowie die C^1–Invertierbarkeit von $\eta|U$ zu zeigen.
$\eta|\mathbb{R}$ ist injektiv, denn, angenommen, für $r, s \in \mathbb{R}$ mit o. B. d. A. $r > s$ gilt $\eta(r) = \eta(s)$, so folgt $\eta(r) - \eta(s) = \int\limits_s^r \sqrt{|\phi^2|} = 0$. Wegen $r > s$ ergibt sich dann

$$\sqrt{|\phi^2|} = 0 \quad \text{fast überall in } [s, r]$$

im Widerspruch zu

$$\sqrt{|\phi^2(x)|} = 0 \Longleftrightarrow x \in \{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Also erhalten wir $\eta(r) = \eta(s) \Longrightarrow r = s$, d.h. η ist injektiv.
Es gilt $\eta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ wegen der Stetigkeit von η und

$$\lim_{x \to \infty} \eta(x) = \lim_{x \to \infty} \xi(x) = +\infty$$

nach (2.3) und

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \eta(x) &= \lim_{x \to -\infty} \int_{x_m}^{x} \sqrt{|\phi^2|} = \lim_{x \to -\infty} - \int_{x}^{x_m} \sqrt{|\phi^2|} \\ &\leq \lim_{x \to -\infty} - \int_{x}^{0} \sqrt{|\phi^2|} = \lim_{x \to -\infty} - \int_{x}^{0} \sqrt{|\phi^2(0)|} = -\infty. \end{aligned}$$

Also ist $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und daher ist auch $\tilde{\eta} := \eta|U : U \to V = \eta(U)$ bijektiv. Wegen $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ gilt natürlich $\tilde{\eta} \in C^1(U)$, und $\tilde{\eta}'(x) = \sqrt{|\phi^2(x)|} > 0$ für alle $x \in U$, insbesondere ist $\tilde{\eta}$ auf jeder Zusammenhangskomponente von U streng monoton wachsend. Deshalb ist $\tilde{\eta}^{-1}$ stetig und differenzierbar auf V mit

$$(\tilde{\eta}^{-1})'(x) = \frac{1}{\tilde{\eta}'(\tilde{\eta}^{-1}(x))} \qquad (x \in V).$$

Da $\tilde{\eta}^{-1} \in C(V)$, $\tilde{\eta}' \in C(U)$ und $\tilde{\eta}' \neq 0$ auf U, folgt schließlich $(\tilde{\eta}^{-1})' \in C(V)$, d.h. $\tilde{\eta}^{-1} \in C^1(V)$, also ist $\tilde{\eta}$ C^1–invertierbar. □

2.3 Darstellung der Resolvente

Vor dem folgenden Satz 2.2, der für $0 < \arg\rho < \pi$ eine Darstellung der Resolvente L_ρ^{-1} von L angibt, erinnern wir daran, daß die Funktion $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ nach Lemma 2.9 b) nicht die Nullfunktion ist; es gibt also $\rho \in \mathbb{C}$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$.
Analog zu Stakun [27, S. 1458] gilt der folgende Satz:

Satz 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Sei für $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$*

$$G(x,t,\rho) := \begin{cases} -\dfrac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(x,\rho)\, Y(t,\rho) & \text{für} \quad x,t \in I,\ x \leq t, \\[2ex] -\dfrac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(t,\rho)\, Y(x,\rho) & \text{für} \quad x,t \in I,\ x > t. \end{cases} \tag{2.49}$$

Dann ist für alle $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg\rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$ der lineare Operator L_ρ invertierbar, und es gilt für alle $v \in D(L_\rho^{-1}) = H$

$$(L_\rho^{-1} v)(x) = \int_0^\infty G(x,t,\rho)\, \phi^2(t)\, v(t)\, dt \qquad (x \in I), \tag{2.50}$$

und

$$L_\rho^{-1} : H \to D(L_\rho)$$

ist ein Element von $B(H)$.

Die Funktion G aus Satz 2.2, die die Darstellung (2.50) von $L_\rho^{-1} v$ ermöglicht, nennen wir *Greensche Funktion* (analog zum definiten Fall, siehe z. B. Jörgens-Rellich [10, S. 79 bzw. S. 170]). Im Anschluß an den Beweis von Satz 2.2 werden wir zeigen, daß G durch (2.50) in gewissem Sinne eindeutig bestimmt ist.

Beweis von Satz 2.2. Sei ρ fest gewählt, so daß $0 < \arg\rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$. Wir lassen deshalb die Angabe des Parameters ρ in den Argumenten der Funktionen meist weg.

Sei zunächst
$$(Jv)(x) := \int_0^\infty G(x,t)\phi^2(t)v(t)\,dt \qquad (x \in I)$$
für alle $v \in H$.

1. Schritt: Wir zeigen, daß $Jv \in D(L_\rho)$ für jedes $v \in H$ gilt, und daß J beschränkt ist. Nach Definition (2.49) von G gilt (mit $\mathcal{W} := \mathcal{W}(\rho,\alpha)$ zur Abkürzung):

$$(2.51) \qquad (Jv)(x) = -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(Y(x)\int_0^x y\phi^2 v + y(x)\int_x^\infty Y\phi^2 v\Big) \qquad (x \in I;\ v \in H).$$

Es ist also zunächst die Existenz der beiden in (2.51) vorkommenden Integrale nachzuweisen. Seien dazu $x \in I$ und $v \in H$ gewählt. Nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$(2.52) \qquad \begin{aligned} \Big|\int_0^x y\phi^2 v\Big| &\le \int_0^x |\phi y||\phi v| \le \Big(\int_0^x |\phi^2||y|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_0^x |\phi^2||v|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \Big(\int_0^x |\phi^2||y|^2\Big)^{1/2} \cdot \|v\| \ < \ \infty, \end{aligned}$$

da $|\phi^2||y|^2$ auf $[0,x]$ stetig, also beschränkt ist, und

$$(2.53) \qquad \begin{aligned} \Big|\int_x^\infty Y\phi^2 v\Big| &\le \int_x^\infty |\phi Y||\phi v| \le \Big(\int_x^\infty |\phi^2||Y|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_x^\infty |\phi^2||v|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \|Y\| \cdot \|v\| \ < \ \infty, \end{aligned}$$

wegen $Y \in H$ nach Lemma 2.8 a). Also ist $(Jv)(x) \in \mathbb{C}$ für alle $v \in H$, $x \in I$.
Wir zeigen nun $Jv \in H$ für jedes $v \in H$. Sei dazu $v \in H$ gewählt. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Hilfssatz 2.2 und definieren die folgenden Funktionen

$$\begin{aligned} f(r) &:= e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|r|} \qquad (r \in \mathbb{R}); \\ \tilde{v}(\eta(t)) &:= \begin{cases} \sqrt[4]{|\phi^2(t)|}\,|v(t)|\,, & t \in [0,\infty) \\ 0\,, & t \in (-\infty,0), \end{cases} \end{aligned}$$

da η bijektiv ist (siehe Hilfssatz 2.2), ist $\tilde{v}$ eindeutig definiert. Dann ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ wegen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f| &= \int_{\mathbb{R}} |e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|r|}|\,dr = 2\int_0^\infty e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)r}\,dr = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)r}\,dr \\ &= -\frac{2}{\mathrm{Im}\,(\rho)}\lim_{b\to\infty} e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)r}\Big|_0^b = \frac{2}{\mathrm{Im}\,(\rho)} \ < \ \infty \end{aligned}$$

mit Hilfe des Satzes von Levi und $\mathrm{Im}\,(\rho) > 0$ nach Voraussetzung, und $\tilde{v} \in L^2(\mathbb{R})$ wegen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{v}|^2 &= \int_V |\tilde{v}|^2 = \int_U \eta'(t)|\tilde{v}(\eta(t))|^2\,dt \\ &= \int\limits_{[0,\infty)\setminus\{x_1,\ldots,x_m\}} \sqrt{|\phi^2(t)|}\cdot\Big|\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}\,v(t)\Big|^2\,dt = \int_0^\infty |\phi^2||v|^2 \\ &= \|v\|^2 \ < \ \infty \end{aligned}$$

mit Hilfssatz 2.2.
Mit der Youngschen Ungleichung (vgl. z. B. Reed–Simon [26, S. 29]) ergibt sich (man beachte $f, \tilde{v} \geq 0$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(r-s)\tilde{v}(s)\, ds \Big)^2 dr &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} f(r-s)\tilde{v}(s)\, ds \Big|^2 dr \\ &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f| \Big)^2 \cdot \int_{\mathbb{R}} |\tilde{v}|^2 = \frac{4}{(\mathrm{Im}\,\rho)^2} \, \|v\|^2. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Wir werden nun eine Abschätzung für G, die fast überall auf $I \times I$ gilt, herleiten. Nach Lemma 2.7 a) gilt

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{-i\rho\xi(x)} \cdot (M(\rho) + o(1)) \qquad (x \to \infty)$$

mit $M(\rho) \neq 0$ wegen $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$ nach Voraussetzung, und nach Lemma 2.3 c) ist

$$Y(x) = C_1 \rho^{-1/6} \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{i\rho\xi(x)} \cdot (1 + o(1)) \qquad (x \to \infty).$$

Also gibt es Zahlen $D_1 > 0$, $A \geq 1$ mit (unter Verwendung von $\xi = \eta$ auf $[A, \infty)$ nach Hilfssatz 2.2)

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq D_1 \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \geq A), \\ |Y(x)| &\leq D_1 \frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}} \, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \geq A). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Da $|\phi^2|$ auf $[0, A]$ stetig und beschränkt ist, gibt es ein $D_2 > 0$ mit

$$\frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \geq D_2 \qquad (x \in [0, A] \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}).$$

Außerdem ist $e^{\pm \mathrm{Im}\,(\rho)\eta}$ auf $[0, A]$ stetig und von Null verschieden, es existiert daher ein $D_3 > 0$ mit

$$e^{\pm \mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \geq D_3 \qquad (x \in [0, A]).$$

Mit $D_4 := D_2 D_3 > 0$ gilt somit

$$\frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \, e^{\pm \mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \geq D_4 > 0 \qquad (x \in [0, A] \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}). \tag{2.56}$$

Weiter sind auch $|y|$, $|Y|$ auf $[0, A]$ stetig, deshalb gibt es ein $D_5 > 0$ mit

$$|y(x)| \leq D_4 D_5 \,, \quad |Y(x)| \leq D_4 D_5 \qquad (x \in [0, A]),$$

also mit (2.56) auch

$$
(2.57) \qquad \begin{aligned}
|y(x)| &\leq D_5 \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in [0,A] \setminus \{x_1,\dots,x_m\}),\\
|Y(x)| &\leq D_5 \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in [0,A] \setminus \{x_1,\dots,x_m\}).
\end{aligned}
$$

Wir wählen nun $D := \max\{D_1, D_5\} > 0$, dann gilt mit (2.55) und (2.57)

$$
\begin{aligned}
|y(x)| &\leq D \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in I \setminus \{x_1,\dots,x_m\}),\\
|Y(x)| &\leq D \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)\eta(x)} \qquad (x \in I \setminus \{x_1,\dots,x_m\}).
\end{aligned}
$$

Damit folgt für $x, t \in I \setminus \{x_1,\dots,x_m\}$ gemäß (2.49)

$$
|G(x,t)| \leq \begin{cases} \dfrac{D^2}{|\mathcal{W}|} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)(\eta(x)-\eta(t))}, & x \leq t,\\[2ex] \dfrac{D^2}{|\mathcal{W}|} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{\mathrm{Im}\,(\rho)(\eta(t)-\eta(x))}, & x > t. \end{cases}
$$

Weil η monoton wachsend auf I ist, gilt

$$
|G(x,t)| \leq \frac{D^2}{|\mathcal{W}|} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|} \qquad \text{für fast alle } x \in I, \text{ fast alle } t \in I.
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|(Jv)(x)|^2 &= \Big| \int_0^\infty G(x,t)\phi^2(t)v(t)\,dt \Big|^2\\
&\leq \Big(\frac{D^2}{|\mathcal{W}|} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|} |\phi^2(t)v(t)|\,dt \Big)^2\\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2} \Big(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}} \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\, e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|} |\phi^2(t)v(t)|\,dt \Big)^2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für fast alle } x \in I,
\end{aligned}
$$

und so

$$
\begin{aligned}
\|Jv\|^2 &= \int_0^\infty |\phi^2||Jv|^2 \\
&\le \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_0^\infty |\phi^2(x)|\Big(\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(x)|}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{|\phi^2(t)|}}\,e^{-\mathrm{Im}\,(\rho)|\eta(x)-\eta(t)|}|\phi^2(t)||v(t)|\,dt\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_0^\infty \sqrt{|\phi^2(x)|}\Big(\int_0^\infty f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\sqrt{|\phi^2(t)|}\,dt\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_0^\infty \eta'(x)\Big(\int_0^\infty f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\eta'(t)\,dt\Big)^2 dx.
\end{aligned}
$$

Da $\eta'(x) \ge 0$, $f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\eta'(t) \ge 0$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$, folgt (mit den Bezeichnungen U, V aus Hilfssatz 2.2)

$$
\begin{aligned}
\|Jv\|^2 &\le \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_U \eta'(x)\Big(\int_U f(\eta(x)-\eta(t))\tilde{v}(\eta(t))\eta'(t)\,dt\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_U \eta'(x)\Big(\int_V f(\eta(x)-s)\tilde{v}(s)\,ds\Big)^2 dx \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_V \Big(\int_V f(r-s)\tilde{v}(s)\,ds\Big)^2 dr \\
&= \frac{D^4}{|\mathcal{W}|^2}\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(r-s)\tilde{v}(s)\,ds\Big)^2 dr \\
&\overset{(2.54)}{\le} \frac{4D^4}{|\mathcal{W}|^2(\mathrm{Im}\,\rho)^2}\,\|v\|^2,
\end{aligned}
$$

also

$$\|Jv\| \le \frac{2D^2}{|\mathcal{W}|\,\mathrm{Im}\,\rho}\,\|v\|,$$

d.h. $Jv \in H$ und $J \in B(H)$ mit $\|J\| \le \dfrac{2D^2}{|\mathcal{W}|\,\mathrm{Im}\,\rho}$.

Als nächstes weisen wir Jv, $(Jv)' \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ und $l_\rho(Jv) = \phi^2 v$ auf I für jedes $v \in H$ nach. Sei dazu $v \in H$ gewählt. Nach (2.53) existiert $\int_x^\infty Y\phi^2 v$ für alle $x \in I$, so daß also

$$\int_x^\infty Y\phi^2 v = \int_0^\infty Y\phi^2 v - \int_0^x Y\phi^2 v \qquad (x \in I)$$

gilt, und deshalb

$$
(2.58)\qquad
\begin{aligned}
(Jv)(x) &= -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(Y(x)\int_0^x y\phi^2 v + y(x)\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v - \int_0^x Y\phi^2 v\Big)\Big)\\
&= \Big(-\frac{1}{\mathcal{W}}\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)y(x) + \int_0^x \frac{y(x)Y(t)-Y(x)y(t)}{\mathcal{W}}\phi^2(t)v(t)\,dt\\
&\qquad\qquad (x\in I).
\end{aligned}
$$

Da nach Voraussetzung $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y,Y) \neq 0$, bilden y, Y ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I. Wegen $v \in H$ ist $\phi^2 v \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ nach Bemerkung 1.2 b). Mittels Lemma 1.2 a) ist die Funktion Jv gemäß der Gestalt (2.58) Lösung der Differentialgleichung $l_\rho u = \phi^2 v$ auf I, d.h. es gilt $l_\rho(Jv) = \phi^2 v$ auf I, und Lemma 1.2 a) liefert Jv, $(Jv)' \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ sowie

$$
(2.59)\qquad
(Jv)'(x) = \Big(-\frac{1}{\mathcal{W}}\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)y'(x) + \int_0^x \frac{y'(x)Y(t)-Y'(x)y(t)}{\mathcal{W}}\phi^2(t)v(t)\,dt \qquad (x\in I).
$$

Dann bleibt noch

$$
(Jv)(0)\cos\alpha + (Jv)'(0)\sin\alpha = 0
$$

zu beweisen. Nach (2.58), (2.59) und (2.17) gilt

$$
\begin{aligned}
&(Jv)(0)\cos\alpha + (Jv)'(0)\sin\alpha\\
&\quad= -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)\cdot y(0)\cos\alpha - \frac{1}{\mathcal{W}}\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)\cdot y'(0)\sin\alpha\\
&\quad= -\frac{1}{\mathcal{W}}\Big(\int_0^\infty Y\phi^2 v\Big)\cdot \big(y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha\big)\\
&\quad\overset{(2.17)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist insgesamt $Jv \in D(L_\rho)$ und $l_\rho(Jv) = \phi^2 v$ auf I, d.h. $L_\rho(Jv) = v$, für jedes $v \in H$ gezeigt.

2. Schritt: Wir zeigen die Injektivität von L_ρ, daß L_ρ^{-1} eine Einschränkung von J ist, und daß $D(L_\rho^{-1}) = H$ ist.

Nach Definition von L_ρ gilt für $u_0 \in D(L_\rho)$, $v_0 \in R(L_\rho)$ die Gleichung $L_\rho u_0 = v_0$ genau dann, wenn

$$
l_\rho u_0 = -u_0'' + \chi u_0 - \rho^2\phi^2 u_0 = \phi^2 v_0 \text{ auf } I
$$

gilt. Also ist L_ρ injektiv genau dann, wenn es zu jedem $v_0 \in R(L_\rho)$ *genau ein* $u_0 \in D(L_\rho)$ mit $l_\rho u_0 = \phi^2 v_0$ auf I gibt. Ist dieses erfüllt, so ist L_ρ^{-1} derjenige auf $R(L_\rho)$ definierte lineare Operator, der v_0 auf die Lösung $u_0 \in D(L_\rho)$ von $l_\rho u = \phi^2 v_0$ auf I abbildet.

Sei nun $v_0 \in R(L_\rho)$ fest gewählt. Dann gibt es mindestens ein $u_0 \in D(L_\rho)$ mit $v_0 = L_\rho u_0$, also mit $l_\rho u_0 = \phi^2 v_0$ auf I, insbesondere sind u_0, $v_0 \in H$ nach Definition von L_ρ. Da nach Voraussetzung $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y,Y) \neq 0$ gilt, bilden y, Y ein Fundamentalsystem der

Differentialgleichung $l_\rho u = 0$ auf I, und nach Lemma 1.2 a) besitzt u_0 wegen $\phi^2 v_0 \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ (gemäß Bemerkung 1.2 b)) die Darstellung

$$u_0(x) = c_1 y(x) + c_2 Y(x) + \int_0^x \frac{y(x)Y(t) - Y(x)y(t)}{\mathcal{W}} \phi^2(t) v_0(t)\, dt \qquad (x \in I) \tag{2.60}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Da nach (2.53) $\int\limits_x^\infty Y\phi^2 v_0$ für alle $x \in I$ existiert, schreiben wir wieder

$$\int_0^x Y\phi^2 v_0 = \int_0^\infty Y\phi^2 v_0 - \int_x^\infty Y\phi^2 v_0 \qquad (x \in I),$$

dann gilt mit

$$\tilde{c_1} := c_1 + \int_0^\infty \frac{Y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}} \in \mathbb{C}$$

somit

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \left(c_1 + \int_0^x \frac{Y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\right) y(x) + \left(c_2 - \int_0^x \frac{y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\right) Y(x) \\ &= \left(\tilde{c_1} - \int_x^\infty \frac{Y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\right) y(x) + \left(c_2 - \int_0^x \frac{y\phi^2 v_0}{\mathcal{W}}\right) Y(x) \qquad (x \in I), \end{aligned}$$

d.h. nach Gleichung (2.51) für J

$$u_0(x) = \tilde{c_1} y(x) + c_2 Y(x) + (Jv_0)(x) \qquad (x \in I). \tag{2.61}$$

Weil nach (2.61) und Lemma 1.2 a) u_0, $u_0' \in AC_{\mathrm{loc}}(I)$ sind, ist $u_0 \in D(L_\rho)$ genau dann, wenn

$$u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha = 0 \tag{2.62}$$

und

$$u_0 \in H \tag{2.63}$$

gelten.

Zu (2.62): Da nach (2.17)

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$$

und nach Definition von $\mathcal{W}(\rho, \alpha)$

$$Y(0)\cos\alpha + Y'(0)\sin\alpha = \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$$

nach Voraussetzung gilt sowie

$$(Jv_0)(0)\cos\alpha + (Jv_0)'(0)\sin\alpha = -\frac{1}{\mathcal{W}} \int_0^\infty Y\phi^2 v_0 \cdot \Big(y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha\Big) = 0$$

mit Hilfe von (2.58) und (2.59), gilt gemäß (2.61)

$$\begin{aligned} u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha &= \tilde{c_1}\Big(y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha\Big) + c_2\Big(Y(0)\cos\alpha + Y'(0)\sin\alpha\Big) \\ &\quad + (Jv_0)(0)\cos\alpha + (Jv_0)'(0)\sin\alpha \\ &= c_2 \mathcal{W}(\rho,\alpha) \ = \ 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & c_2 = 0 \end{aligned}$$

wegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ nach Voraussetzung.
Zu (2.63): Wegen $y \notin H$, $Y \in H$ nach Lemma 2.8 und $Jv_0 \in H$ nach dem 1. Schritt gilt

$$u_0 \overset{(2.61)}{=} \tilde{c}_1 y + c_2 Y + Jv_0 \in H \Longleftrightarrow \tilde{c}_1 = 0.$$

Also ist für $u_0 \in D(L_\rho)$ notwendig und hinreichend, daß $\tilde{c}_1 = c_2 = 0$ gilt, d.h. daß

$$u_0 = Jv_0.$$

Daher ist u_0 als Lösung von $l_\rho u = \phi^2 v_0$ mit $u_0 \in D(L_\rho)$, $v_0 \in R(L_\rho)$ *eindeutig* bestimmt und L_ρ deshalb injektiv, also invertierbar, und es gilt $u_0 = Jv_0$.
Sei jetzt $\tilde{J} := J|R(L_\rho)$. Wir zeigen

$$\tilde{J} = L_\rho^{-1}.$$

Für jedes $v \in D(\tilde{J}) = R(L_\rho)$ ist, wie im 1. Schritt bewiesen, $u := \tilde{J}v \in D(L_\rho)$, und es gilt dann

$$L_\rho(\tilde{J}v) = v, \tag{2.64}$$

d.h.

$$L_\rho \circ \tilde{J} = id|R(L_\rho).$$

Umgekehrt ist für jedes $u \in D(L_\rho)$ die Funktion $v := L_\rho u \in R(L_\rho) = D(\tilde{J})$ mit

$$L_\rho\Big(\tilde{J}(L_\rho u)\Big) = L_\rho u$$

nach (2.64), angewandt auf $v = L_\rho u$. Da L_ρ injektiv ist, gilt

$$\tilde{J}(L_\rho u) = u,$$

also

$$\tilde{J} \circ L_\rho = id|D(L_\rho).$$

Damit ist insgesamt

$$L_\rho^{-1} = \tilde{J} = J|R(L_\rho),$$

insbesondere besitzt L_ρ^{-1} die behauptete Darstellung (2.50), und ist beschränkt.
Wir zeigen schließlich noch

$$D(L_\rho^{-1}) = H;$$

L_ρ^{-1} ist dann auf ganz H definiert, also $L_\rho^{-1} \in B(H)$. Es ist dazu lediglich $H \subset R(L_\rho)$ zu beweisen. Sei $v \in H$, dann ist nach dem 1. Schritt $Jv \in D(L_\rho)$. Also existiert $L_\rho(Jv)$, und nach dem 1. Schritt gilt $v = L_\rho(Jv) \in R(L_\rho)$. □

Korollar 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Die Greensche Funktion $G(\cdot,\cdot,\rho)$ aus Satz 2.2 ist für fest gewähltes $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ und $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$ auf $I \times I$ stetig, weiter ist für fest gewählte $x, t \in I$ dann auch $G(x,t,\cdot)$ auf der Menge $\{\rho \mid \rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 0 \leq \arg\rho \leq \pi, \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0\}$ stetig.*

Beweis.
1. Schritt: Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$. Die Funktionen $y(\cdot, \rho)$ und $Y(\cdot, \rho)$ sind auf I lokal absolut stetig, also stetig. Deshalb ist $G(\cdot, \cdot, \rho)$ auf den Mengen

$$A := \{(x,t) \mid x, t \in I, x \leq t\}, \quad B := \{(x,t) \mid x, t \in I, t < x\}$$

stetig, so daß nur noch die Diagonale $D := \{(a,a) \mid a \in I\}$ zu untersuchen ist. Ist $a \in I$, so gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in A}} G(x,t,\rho) &= \lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in A}} -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(x,\rho)Y(t,\rho) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(a,\rho)Y(a,\rho) \\
&= G(a,a,\rho), \\
\lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in B}} G(x,t,\rho) &= \lim_{\substack{(x,t)\to(a,a)\\(x,t)\in B}} -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(t,\rho)Y(x,\rho) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(a,\rho)Y(a,\rho) \\
&= G(a,a,\rho),
\end{aligned}$$

so daß $G(\cdot, \cdot, \rho)$ also auf $I \times I$ stetig ist.
2. Schritt: Seien $x, t \in I$ fest gewählt, o. B. d. A. sei $x \leq t$. Da $y(x, \cdot)$, $Y(t, \cdot)$ und $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ stetig für alle $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 \leq \arg \rho \leq \pi$ sind, ist

$$G(x,t,\cdot) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\cdot,\alpha)}\, y(x,\cdot)Y(t,\cdot) \text{ stetig auf } \{\rho \mid \rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 0 \leq \arg\rho \leq \pi, \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0\};$$

analoges gilt, falls $x > t$. □

Korollar 2.3. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg \rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$. Für festes $x \in I$ ist*

$$G(x, \cdot, \rho) \in H.$$

Beweis. Seien ρ und x wie angegeben. Für $t > x$ gilt

$$G(x,t,\rho) = -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho,\alpha)}\, y(x,\rho)Y(t,\rho);$$

wegen $Y(\cdot, \rho) \in H$ nach Lemma 2.8 a) ist $\int_x^\infty |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt < \infty$. Da $G(x, \cdot, \rho)$ nach Korollar 2.2 auf $[0, x]$ stetig ist, gilt auch

$$\int_0^\infty |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt = \int_0^x |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt + \int_x^\infty |\phi^2(t)||G(x,t,\rho)|^2\, dt < \infty,$$

also $G(x, \cdot, \rho) \in H$. □

Wir werden im folgenden Satz zeigen, daß die Greensche Funktion in gewissem Sinne eindeutig bestimmt ist.

Satz 2.3. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, und sei $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg \rho < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho, \alpha) \neq 0$. Ist $\tilde{G} : I \times I \to \mathbb{C}$ eine weitere Funktion mit den Eigenschaften*

(i) für jedes $v \in H$ gilt $(L_\rho^{-1} v)(x) = \int_0^\infty \tilde{G}(x,t)\, \phi^2(t)\, v(t)\, dt \qquad (x \in I)$,

(ii) für jedes feste $x \in I$ ist $\tilde{G}(x, \cdot) \in H \cap C(I)$,

so gilt

$$\tilde{G}(x,t) = G(x,t,\rho) \quad \text{für alle } x, t \in I.$$

Beweis. Mit Satz 2.2 gilt für alle $x \in I$

$$\int_0^\infty \Big(G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t)\Big)\phi^2(t) v(t)\, dt = 0 \quad \text{für alle } v \in H.$$

Sei nun $x \in I$ fest gewählt. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \Big(G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t)\Big)\phi^2(t) v(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty |\phi^2(t)| \Big(G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t)\Big)(\operatorname{sign} \phi^2(t)) v(t)\, dt \\ &= \Big(\, G(x,\cdot,\rho) - \tilde{G}(x,\cdot),\ (\operatorname{sign} \phi^2) v\, \Big) \quad \text{für alle } v \in H, \end{aligned}$$

wobei nach Korollar 2.3 $G(x, \cdot, \rho) \in H$ und nach Voraussetzung $\tilde{G}(x, \cdot) \in H$ sind. Da

$$v \in H \Longleftrightarrow w := (\operatorname{sign} \phi^2) v \in H$$

wegen $|v(t)| = |(\operatorname{sign} \phi^2(t)) v(t)|$ für fast alle $t \in I$, gilt

$$\Big(G(x,\cdot,\rho) - \tilde{G}(x,\cdot), w\Big) = 0 \quad \text{für alle } w \in H,$$

d.h. $G(x, \cdot, \rho) - \tilde{G}(x, \cdot) \in H^\perp = \{0\}$, es ist also

$$G(x,t,\rho) - \tilde{G}(x,t) = 0 \quad \text{für fast alle } t \in I.$$

Da nach Korollar 2.2 $G(x, \cdot, \rho) \in C(I)$ und nach Voraussetzung $\tilde{G}(x, \cdot) \in C(I)$, folgt

$$G(x,t,\rho) = \tilde{G}(x,t) \quad \text{für alle } t \in I.$$

□

Eine weitere wichtige Eigenschaft von L notieren wir im

> **Satz 2.4.** *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Dann ist L ein abgeschlossener Operator.*

Beweis. Sei $\rho_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $0 < \arg \rho_0 < \pi$ und $\mathcal{W}(\rho_0, \alpha) \neq 0$ fest gewählt; ein solches ρ_0 existiert nach Lemma 2.9 b). Wir zeigen zunächst, daß L_{ρ_0} abgeschlossen ist.
Seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(L_{\rho_0})$ und $u \in H$ mit $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, und sei $(L_{\rho_0} u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann gibt es ein $v \in H$ mit $v = \lim\limits_{n\to\infty} L_{\rho_0} u_n$. Da nach Satz 2.2 $L_{\rho_0}^{-1} \in B(H)$ ist, folgt

$$L_{\rho_0}^{-1} v = \lim_{n\to\infty} L_{\rho_0}^{-1}(L_{\rho_0} u_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Also ist $u \in R(L_{\rho_0}^{-1}) = D(L_{\rho_0})$ und

$$L_{\rho_0} u = L_{\rho_0}(L_{\rho_0}^{-1} v) = v = \lim_{n\to\infty} L_{\rho_0} u_n,$$

d.h. L_{ρ_0} ist abgeschlossen. Nach Weidmann [32, S.93, Folg. 7 u. Satz 5.5] ist dann auch L abgeschlossen. □

2.4 Beweis der Aussagen über das Spektrum

Mit den bisher bereitgestellten Hilfsmitteln beweisen wir in diesem Abschnitt Satz 2.1 und im Anschluß daran Bemerkung 2.4 b).

Wir erinnern noch einmal an die Voraussetzungen von Satz 2.1

(2.65) $$\lim_{x\to\infty} \xi(x) = +\infty,$$

(2.66) $$\lim_{x\to\infty} \frac{(\phi^2)'(x)}{(\phi^2(x))^{3/2}} = 0,$$

(2.67) $$\frac{F}{\sqrt{\phi^2}} \in L^1([x_m + \epsilon, \infty)),$$

(2.68) das Eigenwertproblem (1.1), (1.2), (1.3) sei normal,

und an die Behauptung

$\sigma^*(L) \subset \mathbb{R}$, $\sigma_p^*(L) \subset (-\infty, 0)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen EWen der Vielfachheit 1, $\sigma_c^*(L) = (0, \infty)$.

Gemäß der Darstellungen von L_ρ^{-1} und G in Satz 2.2 entspricht $\mathcal{W}(\rho, \alpha)$ anschaulich formal der charakteristischen Determinante bei Rand–Eigenwertproblemen auf kompakten

Intervallen. Wir beginnen daher den Beweis mit einer Untersuchung der Nullstellen der Funktion $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$, zunächst für $0 < \arg\rho < \pi$, also $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$, und werden zeigen, daß ein $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ genau dann EW von (1.1), (1.2), (1.3) ist, wenn $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$ ist. Die im Intervall $[0,\infty)$ gelegenen Teilmengen des Spektrums von L untersuchen wir dann später gesondert.

Beweis von Satz 2.1.

1. Schritt: $0 < \arg\rho < \pi$, d.h. $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$

Ist für ein $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ nun $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$, so ist nach Satz 2.2 L_ρ injektiv, L_ρ^{-1} existiert und $L_\rho^{-1} \in B(H)$; das Problem

$$L_\rho u = 0$$

besitzt also nur die triviale Lösung

$$u = L_\rho^{-1}(0) = 0.$$

Deshalb ist dann ρ^2 kein EW von L, und es gilt

$$\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty) \text{ mit } \mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0 \Longrightarrow \rho^2 \in \rho(L). \tag{2.69}$$

Ist für ein $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ hingegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$, so werden wir im folgenden Lösungen

$$u \in D(L) \setminus \{0\} \text{ mit } L_\rho u = 0 \tag{2.70}$$

angeben, d.h. ρ^2 ist dann EW von L. Wenn (2.70) gezeigt ist, erhalten wir zusammen mit (2.69) das Resultat: Das in $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ gelegene Punktspektrum von L

$$\hat{\sigma_p}(L) := \sigma_p^*(L) \cap (\mathbb{C} \setminus [0,\infty))$$

ist genau die Menge

$$\hat{\sigma_p}(L) = \{\rho^2 \mid \rho^2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ 0 < \arg\rho < \pi,\ \mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0\}. \tag{2.71}$$

Zur Untersuchung von (2.70):

Die Funktion $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ ist auf $\{\rho \mid \rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 0 < \arg\rho < \pi\}$ nicht die Nullfunktion, wie in Lemma 2.9 b) gezeigt. Besitzt daher $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ keine Nullstelle in dieser Menge, so ist nach (2.69) dann $\mathbb{C} \setminus [0,\infty) \subset \rho(L)$, also $\hat{\sigma_p}(L)$ leer, und (2.71) ist in diesem Sonderfall richtig. Sei daher im weiteren vorausgesetzt, daß $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ mindestens eine Nullstelle besitzt.

Nach Lemma 2.9 b) ist die Abbildung $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ für $0 < \arg\rho < \pi$ holomorph und für $0 \leq \arg\rho \leq \pi$ stetig. Deshalb besitzt $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ für $0 < \arg\rho < \pi$ abzählbar (endlich oder unendlich) viele diskrete Nullstellen

$$\rho_n,\ n \in N, \text{ mit geeigneter Indexmenge}$$

$$N := \begin{cases} \mathbb{N} & \text{oder} \\ \{1,\ldots,N_0\} & \text{mit passendem } N_0 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(dabei sei jede Nullstelle ungeachtet ihrer Ordnung genau einmal aufgeführt), und

$$\operatorname{Im}(\rho_n) > 0 \qquad (n \in N) \tag{2.72}$$

wegen $0 < \arg \rho_n < \pi$. Sei für jedes $n \in N$

$$E_n := \{u \mid u : I \to \mathbb{C}, u \in D(L), l_{\rho_n} u = 0 \text{ auf } I\}$$

der zu ρ_n^2 gehörende Unterraum der Lösungen von (1.1), die in $D(L)$ liegen. Es ist dann

$$\rho_n^2 \text{ EW} \Longleftrightarrow E_n \neq \{0\};$$

falls ρ_n^2 EW, so ist E_n der zu ρ_n^2 gehörende Eigenraum des Operators L. Nach Lemmata 2.8 a) und 2.4 ist für $n \in N$

$$Y(\cdot, \rho_n) \in H\ , \quad l_{\rho_n} Y(\cdot, \rho_n) = 0 \text{ auf } I,$$

weiter gilt, da ρ_n Nullstelle von $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$,

$$Y(0, \rho_n) \cos\alpha + Y'(0, \rho_n) \sin\alpha = \mathcal{W}(\rho_n, \alpha) = 0,$$

also $Y(\cdot, \rho_n) \in D(L)$.
Außerdem ist $Y(\cdot, \rho_n)$ nicht die Nullfunktion (wäre nämlich $Y(\cdot, \rho_n) = 0$, so folgte nach (2.18) $v_1(\cdot, \rho_n) = 0$ auf $[z(\rho_n), \infty)$ im Widerspruch zur Definition von v_1), so daß insgesamt gilt

$$Y(\cdot, \rho_n) \in E_n \setminus \{0\} \quad \text{für jedes } n \in N. \tag{2.73}$$

Damit sind (2.70) und (2.71) bewiesen, und es gilt

$$\hat{\sigma}_p(L) = \{\rho_n^2 \mid n \in N\}$$

sowie

$$\dim E_n \geq 1 \qquad (n \in N). \tag{2.74}$$

Nach (2.69) und (2.71) besteht also $\sigma^*(L) \cap (\mathbb{C} \setminus [0, \infty))$ genau aus dem in $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ gelegenen Punktspektrum $\hat{\sigma}_p(L)$.
Wir zeigen nun, daß jeder EW ρ_n^2, $n \in N$, die Vielfachheit 1 besitzt, d.h.

$$\dim E_n = 1.$$

Dazu ist wegen (2.74) lediglich noch $\dim E_n \leq 1$ zu zeigen. Seien dazu $n \in N$ fest gewählt und $u, v \in E_n \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\left\{ \begin{aligned} & l_{\rho_n} u = l_{\rho_n} v = 0 \text{ auf } I, \\ & u(0) \cos\alpha + u'(0) \sin\alpha = 0, \\ & v(0) \cos\alpha + v'(0) \sin\alpha = 0, \end{aligned} \right. \tag{2.75}$$

so daß

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \cdot W(u,v) &= \cos\alpha \cdot W(u,v)\Big|_{x=0} \\
&= (u(0)\cos\alpha)v'(0) - (v(0)\cos\alpha)u'(0) \\
&\overset{(2.75)}{=} (-u'(0)\sin\alpha)v'(0) - (-v'(0)\sin\alpha)u'(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

gilt. Falls $\cos\alpha \neq 0$, gilt somit $W(u,v) = 0$. Ist hingegen $\cos\alpha = 0$, so ist $\sin\alpha \neq 0$, und mit (2.75) folgt

$$u'(0) = v'(0) = 0$$

und

$$W(u,v) = W(u,v)\Big|_{x=0} = u(0)v'(0) - v(0)u'(0) = 0,$$

also insgesamt

$$W(u,v) = 0 \quad \text{für jedes } \alpha \in [0, 2\pi),$$

d.h. u und v sind linear abhängig. Deshalb folgt

$$\dim E_n \leq 1,$$

mit (2.74) und mit (2.73) also

$$\dim E_n = 1\ , \quad E_n = \operatorname{span}\{Y(\cdot,\rho_n)\} \qquad (n \in N). \tag{2.76}$$

Im sich nun anschließenden Beweisteil werden wir

$$\operatorname{Re}(\rho_n) = 0 \qquad (n \in N) \tag{2.77}$$

beweisen.
Sei dazu $n \in N$. Wegen $Y(\cdot,\rho_n) \in E_n \subset D(L) \subset H$ existiert

$$\int_0^\infty \phi^2 |Y(\cdot,\rho_n)|^2;$$

da nach Voraussetzung (2.68) die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) als normal gegeben ist, gilt

$$\int_0^\infty \phi^2 |Y(\cdot,\rho_n)|^2 \neq 0. \tag{2.78}$$

Mit Lemma 2.9 a), angewandt auf ρ_n, gilt

$$Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)} = 4i\,(\operatorname{Re}\rho_n)(\operatorname{Im}\rho_n)\int_0^\infty \phi^2 |Y(\cdot,\rho_n)|^2. \tag{2.79}$$

Wegen

$$Y(0,\rho_n)\cos\alpha + Y'(0,\rho_n)\sin\alpha = \mathcal{W}(\rho_n,\alpha) = 0 \tag{2.80}$$

folgt, falls $\alpha \in [0, 2\pi)$ so gegeben ist, daß $\cos\alpha \neq 0$, dann

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha \cdot \Big(Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)}\Big) \\
&\overset{(2.80)}{=} \quad Y'(0,\rho_n)\Big(- \overline{Y'(0,\rho_n)}\sin\alpha\Big) - \Big(- Y'(0,\rho_n)\sin\alpha\Big)\overline{Y'(0,\rho_n)} \\
&= \quad 0,
\end{aligned}$$

also

$$Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)} = 0.$$

Ist nun hingegen $\cos\alpha = 0$, so ist $\sin\alpha \neq 0$, und es gilt wegen (2.80) dann $Y'(0,\rho_n) = 0$, so daß ebenfalls folgt

$$Y'(0,\rho_n)\overline{Y(0,\rho_n)} - Y(0,\rho_n)\overline{Y'(0,\rho_n)} = 0.$$

Also ist für jedes $\alpha \in [0, 2\pi)$ gemäß (2.79)

$$4i\,(\operatorname{Re}\rho_n)(\operatorname{Im}\rho_n)\int_0^\infty \phi^2|Y(\cdot,\rho_n)|^2 = 0,$$

woraus wegen (2.78) und (2.72) dann

$$\operatorname{Re}(\rho_n) = 0$$

folgt, das ist die zu zeigende Beziehung (2.77).

Also sind nach (2.72), (2.77) die EWe ρ_n^2 negativ

$$\rho_n^2 < 0 \qquad (n \in N)$$

und besitzen nach (2.76) die Vielfachheit 1.

2. Schritt: $\arg\rho \in \{0, \pi\}$, d.h. $\rho^2 \in (0, \infty)$

Wir zeigen in diesem Beweisteil, daß in $(0,\infty)$ keine weiteren EWe von L liegen, d.h., daß

$$\sigma_p^*(L) \cap (0,\infty) = \emptyset \tag{2.81}$$

ist:

Wir nehmen dazu indirekt an, daß ein EW $\rho^2 \in (0,\infty)$ von L existiert, dabei sei o. B. d. A. $\rho > 0$. Dann gibt es ein $u_0 \in D(L) \setminus \{0\}$ mit $L_\rho u_0 = 0$, also mit $l_\rho u_0 = 0$ auf I, $u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha = 0$ und $u_0 \in H$. Nach Lemma 2.7 b) ist $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = W(y, Y) \neq 0$, also bilden $y(\cdot,\rho)$ und $Y(\cdot,\rho)$ ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf I; u_0 ist also eine Linearkombination

$$u_0(x) = c_1 y(x,\rho) + c_2 Y(x,\rho) \qquad (x \in I)$$

mit geeigneten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dann ist wegen $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha \neq 0$ und weil $y(\cdot,\rho)$ die Anfangsbedingung (1.2) erfüllt

$$\begin{aligned} 0 &= u_0(0)\cos\alpha + u_0'(0)\sin\alpha \\ &= c_1\Big(y(0,\rho)\cos\alpha + y'(0,\rho)\sin\alpha\Big) + c_2\Big(Y(0,\rho)\cos\alpha + Y'(0,\rho)\sin\alpha\Big) \\ &= c_2\mathcal{W}(\rho,\alpha) \qquad \Longrightarrow \qquad c_2 = 0, \end{aligned}$$

also $u_0 = c_1 y(\cdot,\rho)$. Da aber $u_0 \in H$ und nach Lemma 2.8 c) $y(\cdot,\rho) \notin H$, folgt $c_1 = 0$, also $u_0 = 0$ im Widerspruch zu $u_0 \in D(L) \setminus \{0\}$.
Also gilt zusammenfassend für das Punktspektrum

$$\begin{aligned} \sigma_p^*(L) \cap (\mathbb{C} \setminus [0,\infty)) &= \{\rho_n^2 \mid n \in N\} \subset (-\infty,0), \\ \sigma_p^*(L) \cap (0,\infty) &= \emptyset, \end{aligned}$$

d.h.

$$\sigma_p^*(L) = \{\rho_n^2 \mid n \in N\} \subset (-\infty,0);$$

es existieren über die im 1. Schritt gefundenen EWe hinausgehend keine weiteren EWe.

3. Schritt: Wir zeigen $\sigma_c^*(L) = (0,\infty)$.
Im 1. Schritt haben wir gesehen, daß für jedes $\rho^2 \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$

$$\text{entweder } \rho^2 \in \rho(L) \qquad \text{oder } \rho^2 \in \sigma_p^*(L)$$

gilt (der erste Fall tritt nach (2.69) genau dann ein, falls $\mathcal{W}(\rho,\alpha) \neq 0$, der zweite nach (2.71) genau dann, falls $\mathcal{W}(\rho,\alpha) = 0$). Das kontinuierliche Spektrum kann also (falls nicht-leer) nur in $(0,\infty)$ liegen:

$$\sigma_c^*(L) \subset (0,\infty).$$

Wir beweisen nun noch

$$(0,\infty) \subset \sigma_c^*(L). \tag{2.82}$$

Sei $\rho_0^2 \in (0,\infty)$ und o. B. d. A. $\rho_0 > 0$. Nach dem 2. Schritt ist ρ_0^2 kein EW von L, es gilt also

$$\text{entweder } \rho_0^2 \in \rho(L) \qquad \text{oder } \rho_0^2 \in \sigma_c^*(L).$$

Wenn wir also zeigen, daß $\rho_0^2 \notin \rho(L)$, so folgt $\rho_0^2 \in \sigma_c^*(L)$. Nehmen wir deshalb indirekt an, daß $\rho_0^2 \in \rho(L)$ sei. Da L nach Satz 2.4 abgeschlossen ist, ist die Resolvente, aufgefaßt als Abbildung

$$\rho(L) \to B(H), \quad \rho^2 \mapsto L_\rho^{-1}$$

stetig (siehe z. B. Weidmann [32, S. 99, Satz 5.15]), also insbesondere im Punkt ρ_0^2 stetig, und es gilt daher

$$\lim_{s\downarrow 0}\left(\Big(L - (\rho_0^2 + is)\,id\Big)^{-1} - \Big(L - (\rho_0^2 - is)\,id\Big)^{-1}\right) = 0. \tag{2.83}$$

Dies werden wir nun widerlegen; dafür ist nachzuweisen, daß

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big((L_{\sqrt{\rho_0^2+is}})^{-1}-(L_{\sqrt{\rho_0^2-is}})^{-1}\Big)\neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{s\downarrow 0}\Big((L_{\rho_0+is})^{-1}-(L_{-\rho_0+is})^{-1}\Big)\neq 0$$

gilt; dafür wiederum reicht es, für die Greensche Funktion den Grenzwert

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big) \quad \text{für } x,t\in I$$

zu untersuchen und zu zeigen, daß dieser nicht gleich der Nullfunktion auf $I\times I$ ist.
Nach Lemma 2.5 gilt wegen $\rho_0>0$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(-\rho_0,\alpha) &= Y(0,-\rho_0)\cos\alpha+Y'(0,-\rho_0)\sin\alpha\\ &= -\overline{Y(0,\rho_0)}\cos\alpha-\overline{Y'(0,\rho_0)}\sin\alpha\\ &= -\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)},\end{aligned}$$

so daß mit Lemma 2.7 b) aufgrund von $\rho_0>0$

$$\mathcal{W}(-\rho_0,\alpha)=-\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\neq 0$$

ist. Weil weiter für fest gewählte $x,t\in I$ die Funktion $G(x,t,\cdot)$ im Punkt $\rho_0>0$ und im Punkt $-\rho_0<0$ gemäß Korollar 2.2 stetig ist, gilt wiederum mit Lemma 2.5 für $x\leq t$

$$\begin{aligned}\lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big) &= G(x,t,\rho_0)-G(x,t,-\rho_0)\\ = \; -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\,y(x,\rho_0)\,Y(t,\rho_0)&+\frac{1}{\mathcal{W}(-\rho_0,\alpha)}\,y(x,-\rho_0)\,Y(t,-\rho_0)\\ = \; -\frac{1}{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\,y(x,\rho_0)\,Y(t,\rho_0)&-\frac{1}{\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}}\,y(x,\rho_0)\,Y(t,-\rho_0)\\ = \; -\frac{y(x,\rho_0)\Big(\overline{\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)}\,Y(t,\rho_0)+\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)\,Y(t,-\rho_0)\Big)}{|\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)|^2}&,\end{aligned}$$

so daß mit Formel (2.44) aus dem Beweis von Lemma 2.7 b) für $x\leq t$ folgt

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big)=-\frac{6\rho_0^{2/3}}{\pi i}\frac{y(x,\rho_0)\,y(t,\rho_0)}{|\mathcal{W}(\rho_0,\alpha)|^2}; \tag{2.84}$$

dies zeigt man analog auch für $x>t$.
Wegen $y(0,\rho_0)=\sin\alpha$, $y'(0,\rho_0)=-\cos\alpha$ gibt es ein $a\in\mathbb{R}$ mit $0<a<x_1$ und

$$y(t,\rho_0)\neq 0 \quad \text{für alle } t\in(0,a).$$

Also ist mit (2.84) zumindest

$$\lim_{s\downarrow 0}\Big(G(x,t,\rho_0+is)-G(x,t,-\rho_0+is)\Big)\neq 0 \quad \text{für alle } x,t\in I \text{ mit } x,t\in(0,a).$$

Damit ist (2.83) widerlegt und $\rho_0^2 \in \sigma_c^*(L)$.
Insbesondere gilt nach den bisherigen Überlegungen

$$\sigma^*(L) = \sigma_p^*(L) \cup \sigma_c^*(L) \subset (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \subset \mathbb{R}.$$

□

Korollar 2.4. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Ist $\rho \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gewählt mit $0 \leq \arg \rho < \pi$, so gilt*

$$\rho^2 \textit{ ist Eigenwert von } L \iff \mathcal{W}(\rho, \alpha) = 0.$$

Beweis. Siehe Formel (2.71), falls $0 < \arg \rho < \pi$, und (2.81) und Lemma 2.7 b), falls $\arg \rho = 0$. □

Nun ist noch Teil b) der Bemerkung 2.4 zu beweisen.

Beweis von Bemerkung 2.4 b). Wir wollten in diesem Teil der Bemerkung herleiten, daß bei vorliegender Indefinitheit von ϕ^2 die Eigenwertaufgabe (1.1), (1.2), (1.3) dann normal ist, wenn zusätzlich zu den Voraussetzungen (2.7), (2.8) aus Teil a) noch

(2.85) $$\alpha \in \{0\} \cup [\tfrac{\pi}{2}, \pi] \cup [\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi) \quad \text{und} \quad \chi \geq 0 \text{ fast überall in } I$$

gilt. Es gelte nun also (2.7), (2.8) und (2.85). Dann sind nach Bemerkung 2.4 a) die Voraussetzungen (2.3), (2.4), (2.5) von Satz 2.1 erfüllt, und der Beweis von Satz 2.1 bleibt von seinem Anfang bis hin zu Formel (2.76) weiter gültig, da erst nach Formel (2.76) die dort vorausgesetzte Normalität (d.h. Bedingung (2.6)) in den Beweis eingeht.
Um zu zeigen, daß das gegebene Eigenwertproblem normal ist, sei $n \in N$ fest gewählt und u Eigenfunktion zum EW ρ_n^2 von L. Wir lassen im folgenden die Angabe des Parameters ρ_n in den Argumenten der Funktionen meist weg.
Wegen (2.76) ist $u = c \cdot Y$ mit einem geeigneten $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ wegen $u \neq 0$. Es reicht also zu zeigen, daß

(2.86) $$\int_0^\infty \phi^2 |Y|^2 \neq 0$$

gilt. Dazu beweisen wir zunächst:

(2.87) $$\lim_{b \to \infty} \int_0^b Y'' \overline{Y} \in (-\infty, 0);$$

(2.88) $$\lim_{b \to \infty} \int_0^b \chi |Y|^2 \in [0, \infty).$$

Zum Nachweis von (2.87):
Es ist für $b > 0$ wegen $Y, Y' \in AC_{\text{loc}}(I)$, $Y'' \in L^1_{\text{loc}}(I)$

(2.89) $$\int_0^b Y'' \overline{Y} = Y'(b)\overline{Y(b)} - Y'(0)\overline{Y(0)} - \int_0^b |Y'|^2;$$

wir untersuchen die Terme auf der rechten Seite. Nach Lemma 2.3 c) gilt mit Konstanten $C, C' \neq 0$

$$\begin{aligned} Y(x) &= C\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(x)}}\, e^{i\rho_n\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty),\\ Y'(x) &= C'\sqrt[4]{\phi^2(x)}\, e^{i\rho_n\xi(x)}\cdot(1+o(1)) \qquad (x\to\infty),\end{aligned}$$

woraus wegen $\mathrm{Im}\,(\rho_n) > 0$ gemäß (2.72)

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} Y'(b)\overline{Y(b)} &= C'\overline{C}\lim_{b\to\infty} e^{i\rho_n\xi(b)}\Big(\overline{e^{i\rho_n\xi(b)}}\Big)\cdot(1+o(1))\\ &= C'\overline{C}\lim_{b\to\infty} e^{-2\mathrm{Im}\,(\rho_n)\xi(b)}\cdot(1+o(1))\\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.90}$$

folgt. Aufgrund von $0 = \mathcal{W}(\rho_n,\alpha) = Y(0)\cos\alpha + Y'(0)\sin\alpha$ ist

$$Y(0)\cos\alpha = -Y'(0)\sin\alpha, \tag{2.91}$$

dies liefert

$$-\,Y'(0)\overline{Y(0)}\cos\alpha = -Y'(0)\Big(-\,\overline{Y'(0)}\sin\alpha\Big) = |Y'(0)|^2\sin\alpha. \tag{2.92}$$

Ist nun $\alpha \in \{0\}\cup(\frac{\pi}{2},\pi]\cup(\frac{3\pi}{2},2\pi)$, so ist $\tan\alpha \le 0$ und mit (2.92)

$$-Y'(0)\overline{Y(0)} = |Y'(0)|^2\tan\alpha \le 0,$$

ist hingegen $\alpha \in \{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}$, also $\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha \neq 0$, folgt aus (2.91) sofort $Y'(0) = 0$, dann ist

$$-Y'(0)\overline{Y(0)} = 0.$$

Also gilt für jedes in Voraussetzung (2.85) zugelassene α

$$-\,Y'(0)\overline{Y(0)} \le 0. \tag{2.93}$$

Nach Lemma 2.8 a) ist $Y' \in L^2(I)$; nach dem Satz von Lebesgue ist daher

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b |Y'|^2 = \int_0^\infty |Y'|^2 < \infty. \tag{2.94}$$

Also folgt in (2.89) mit $b\to\infty$ zusammen mit (2.90), (2.93) und (2.94) die Existenz von $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b Y''\overline{Y}$ und

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b Y''\overline{Y} \le -\int_0^\infty |Y'|^2 \in (-\infty,0]. \tag{2.95}$$

Wäre nun hierbei $\int\limits_0^\infty |Y'|^2 = 0$, so folgte $Y'(x) = 0$ für fast alle $x \in I$. Da $Y \in AC_{\text{loc}}(I)$, folgte, daß Y auf I konstant wäre, d.h.

$$Y(x) = c \quad \text{für alle } x \in I$$

mit geeignetem $c \in \mathbb{C}$. Wäre nun, wieder indirekt angenommen, $c = 0$, also Y die Nullfunktion, ergibt sich ein Widerspruch zu (2.18), wäre $c \neq 0$, ergäbe sich

$$\int_0^\infty |\phi^2||Y|^2 = |c|^2 \int_0^\infty |\phi^2| = +\infty$$

wegen (2.7), das ist ein Widerspruch zu $Y \in H$ gemäß Lemma 2.8 a).
Also ist $\int\limits_0^\infty |Y'|^2 > 0$, und in (2.95) dann

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b Y''\overline{Y} \in (-\infty, 0),$$

das ist (2.87).

Zum Nachweis von (2.88):
Wegen $l_{\rho_n} Y = 0$ auf I nach Lemma 2.4 gilt für jedes $b > 0$

$$0 = \int_0^b (l_{\rho_n} Y)\overline{Y} = -\int_0^b Y''\overline{Y} + \int_0^b \chi|Y|^2 - \rho_n^2 \int_0^b \phi^2|Y|^2,$$

also

(2.96) $$\int_0^b \chi|Y|^2 = \int_0^b Y''\overline{Y} + \rho_n^2 \int_0^b \phi^2|Y|^2.$$

Nach Lemma 2.8 a) existiert $\int\limits_0^\infty |\phi^2||Y|^2$, so daß der Satz von Lebesgue die Existenz von

(2.97) $$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \phi^2|Y|^2 = \int_0^\infty \phi^2|Y|^2$$

liefert; mit $b \to \infty$ in (2.96) zusammen mit (2.87) folgt die Existenz von $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b \chi|Y|^2$, und mit $\chi|Y|^2 \geq 0$ fast überall in I gemäß Voraussetzung (2.85) erhalten wir

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi|Y|^2 \in [0, \infty).$$

Damit ist auch (2.88) bewiesen.
Es folgt nun mit (2.96), (2.97)

(2.98) $$\rho_n^2 \int_0^\infty \phi^2|Y|^2 \overset{(2.97)}{=} \rho_n^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^b \phi^2|Y|^2 \overset{(2.96)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi|Y|^2 - \lim_{b\to\infty} \int_0^b Y''\overline{Y}.$$

Wäre nun (2.86) falsch, also $\rho_n^2 \int\limits_0^\infty \phi^2|Y|^2 = 0$, so folgte mit (2.87) und (2.88)

$$0 \leq \lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi|Y|^2 \overset{(2.98)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b Y''\overline{Y} < 0;$$

Widerspruch. Daher ist (2.86) wahr, d.h. das Eigenwertproblem ist normal. □

Wir schließen dieses Kapitel mit

Bemerkung 2.5. *Setzt man in Bemerkung 2.4 b) statt* $\chi \geq 0$ *fast überall nun* $\chi \leq 0$ *fast überall voraus, so wird der Beweis von Bemerkung 2.4 b) falsch.*

Beweis. Sei $\chi \leq 0$ fast überall in I. Im Beweis von Bemerkung 2.4 b) gilt dann statt (2.88)

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi|Y|^2 \in (-\infty, 0]$$

und wie bisher

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b Y''\overline{Y} \in (-\infty, 0),$$

so daß mit (2.98) keine Aussage darüber möglich ist, ob

$$\rho_n^2 \int_0^\infty \phi^2|Y|^2 \overset{(2.98)}{=} \lim_{b\to\infty} \int_0^b \chi|Y|^2 - \lim_{b\to\infty} \int_0^b Y''\overline{Y}$$

von Null verschieden ist, bzw. kein Widerspruch wie dort zu erzielen ist. □

Die bisherige Vorgehensweise ist weitgehend analog zu Stakun [27], [29], insbesondere die Betrachtung der Standardform der Differentialgleichung (1.1), die Wahl der Lösungen y durch Anfangsbedingungen und Y durch eine geeignete Integralgleichung, und die Möglichkeit der Darstellung der Resolvente L_ρ^{-1} vermöge y und Y, um die gewünschten Aussagen über das Spektrum von L herzuleiten, und daß dabei $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ zur Bestimmung der Eigenwerte herangezogen werden kann. Ebenfalls zeigen sich viele Übereinstimmungen in den Resultaten dieses Kapitels und denen von Stakun in [27].

Im folgenden Kapitel über die Eigenwertasymptotik werden wir Ergebnisse aus Eberhard-Freiling-Schneider [9] verwenden, die Vorgehensweise wird analog zu Eberhard-Freiling [5] sein.

Kapitel 3

Asymptotik der Eigenwerte

3.1 Hauptsatz über die Eigenwertasymptotik

Da nach Satz 2.1 die EWe ρ_n^2, $n \in N$, von L reell und negativ sind sowie Vielfachheit 1 besitzen, seien sie im folgenden durch eventuelle Umnumerierung der Größe nach geordnet:

$$0 > \rho_1^2 > \rho_2^2 > \rho_3^2 > \dots$$

Ziel dieser Arbeit ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 3.1. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt. Weiter sei ϕ^2 indefinit, d. h.*

es gebe ein $\nu \in \{1, \dots, m-1\}$ mit $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in (x_\nu, x_{\nu+1}) \subset [0,1]$,
oder
es gelte $\phi^2(x) < 0$ für alle $x \in [0, x_1)$.

Dann existieren abzählbar unendlich viele EWe ρ_n^2, $n \in \mathbb{N}$, von L. Diese besitzen die asymptotische Darstellung

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty). \tag{3.1}$$

Bemerkung 3.1. Stakun hat in [29, S. 671] u. a. gezeigt, daß das Punktspektrum von L eine endliche Menge ist, falls

$$m = 1, \qquad \phi^2(x) = (x - x_1)^{l_1}\phi_0(x) \quad (x \in I), \text{ wobei } l_1 \in \mathbb{N} \textit{ gerade},$$
$$\text{und } \phi_0 \in C^2(I) \text{ mit } \phi_0 > 0,\ \chi \in C(I);$$

es ist dann $\phi^2 \geq 0$ auf I und $R_- = 0$. Um dieses in Satz 3.1 auszuschließen, haben wir in den Voraussetzungen von Satz 3.1 gefordert, daß ein Teilintervall $(a,b) \subset I$ mit $\phi^2 < 0$ auf (a,b) existiert. Dann ist stets $R_- > 0$, und wegen $\phi^2 > 0$ auf (x_m, ∞) gilt $R_- < \infty$.

3.2 Bezeichnungen und Definitionen

Wir führen folgende Bezeichnungen wie in [5], [9] ein:
Seien mit dem eingangs fest gewählten $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} D_{0,\epsilon} &:= [0, x_1 - \epsilon], \\ D_{\nu,\epsilon} &:= [x_\nu + \epsilon, x_{\nu+1} - \epsilon] \quad \text{für } 1 \le \nu \le m-1, \\ D_{m,\epsilon} &:= [x_m + \epsilon, 1], \\ I_{\nu,\epsilon} &:= D_{\nu-1,\epsilon} \cup [x_\nu - \epsilon, x_\nu + \epsilon] \cup D_{\nu,\epsilon} \quad \text{für } 1 \le \nu \le m. \end{aligned}$$

Gemäß der Wahl von ϵ sind alle $D_{\nu,\epsilon} \neq \emptyset$ $(0 \le \nu \le m)$, und $I_{\nu,\epsilon}$ $(1 \le \nu \le m)$ ist eine abgeschlossene Umgebung von x_ν, die keine weitere Nullstelle von ϕ^2 enthält. Die folgende Skizze zeigt ein Beispiel für den Fall $m = 3$.

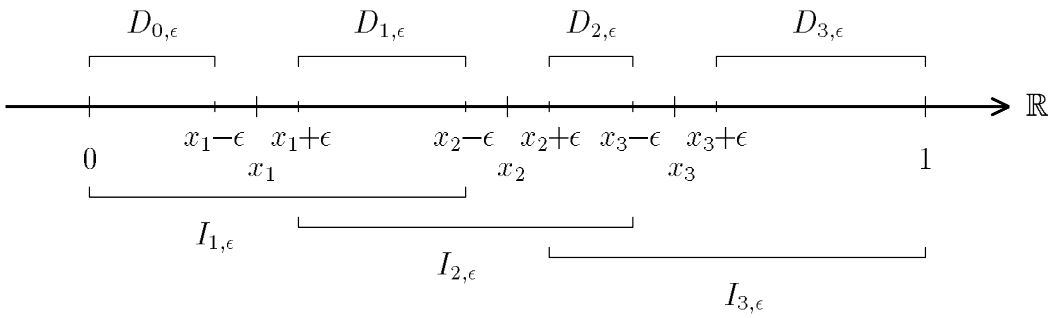

Bild 3.1: Beispiel

Wir übernehmen aus [5], [9] die Definition des sogenannten Typs jeder Nullstelle $x_1, \ldots, x_m$ von ϕ^2:

Definition 3.1. Sei $\nu \in \{1, \ldots, m\}$ und (wie eingangs) $l_\nu \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle x_ν von ϕ^2. Dann heißt x_ν *Nullstelle* (bzw. *turning point*) *vom Typ*

$$T_\nu := \begin{cases} I\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ gerade ist und } \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} < 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}; \\ II\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ gerade ist und } \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} > 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}; \\ III\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ ungerade ist und } \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} < 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}; \\ IV\,, & \text{wenn } l_\nu \text{ ungerade ist und } \quad \phi^2(x)(x-x_\nu)^{-l_\nu} > 0 \text{ für alle } x \in I_{\nu,\epsilon}. \end{cases}$$

Bemerkung 3.2. a) Das lokale Verhalten von ϕ^2 in einer Umgebung eines turning points x_ν vom Typ T_ν $(1 \leq \nu \leq m)$ veranschaulicht folgende Abbildung:

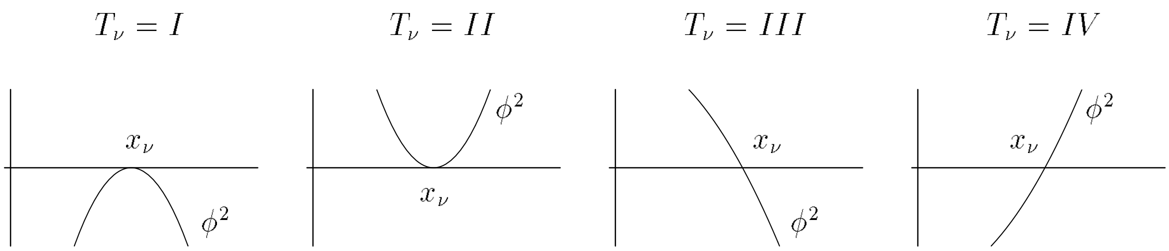

Bild 3.2: Typ der turning points

Das nächste Bild zeigt ein Beispiel für den Fall $m = 4$; hier ist $T_1 = IV$, $T_2 = II$, $T_3 = III$, $T_4 = IV$.

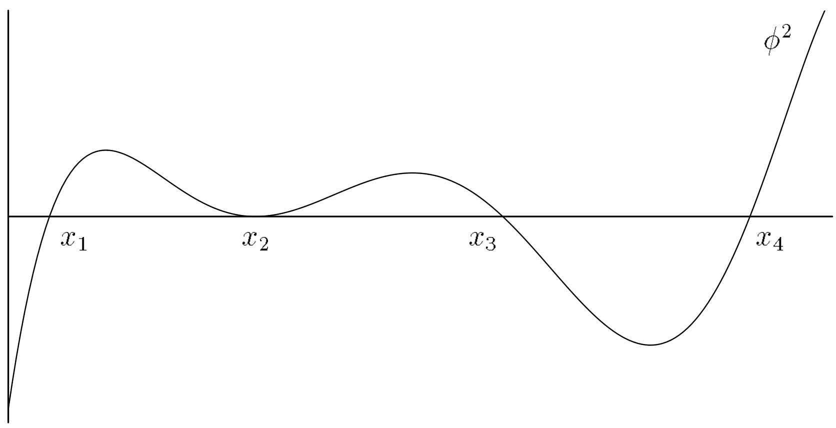

Bild 3.3: Beispiel für ϕ^2

b) Aufgrund der Stetigkeit von ϕ^2 sind für aufeinanderfolgende turning points x_ν, $x_{\nu+1}$ $(1 \leq \nu \leq m-1)$ nur die folgenden Möglichkeiten für T_ν und $T_{\nu+1}$ erlaubt:

T_ν	I	II	III	IV
$T_{\nu+1}$	I oder IV	II oder III	I oder IV	II oder III

Tabelle 3.1: Kombinationen der turning points

Weiter definieren wir für $1 \leq \nu \leq m$ wie in [5] und [9] mit einem wie dort fest gewählten δ_0 mit $0 < \delta_0 < 1$

$$\begin{aligned}
\mu_\nu &:= \frac{1}{2 + l_\nu}; \\
\sigma_\nu &:= \begin{cases} 1\,, & \text{falls } \mu_\nu > \frac{1}{4}; \\ 1 - \delta_0\,, & \text{falls } \mu_\nu = \frac{1}{4}; \\ 4\mu_\nu\,, & \text{falls } \mu_\nu < \frac{1}{4}; \end{cases} \\
\sigma_0 &:= \min\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt offensichtlich

$$0 < \sigma_0 \leq 1.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ setzen wir als Verallgemeinerung der Landau–Symbole zur Abkürzung

$$[z] := z + \rho^{-\sigma_0} \cdot B(x, \rho) \quad \text{mit einer beschränkten Funktion } B,$$

deren Definitionsbereich sich jeweils aus dem Zusammenhang ergeben wird, und die bei wiederholtem Auftreten des Symbols $[z]$ verschieden sein darf. Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir schließlich folgende Sektoren in der punktierten komplexen Ebene:

$$S_k := \Big\{ z \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \tfrac{k\pi}{4} \leq \arg z \leq \tfrac{(k+1)\pi}{4} \Big\}.$$

Wir geben nun einen Überblick über die Vorgehensweise bei dem Beweis von Satz 3.1 und treffen auch bereits einige Vorbereitungen dazu.
Um Satz 3.1 zu beweisen, werden wir gemäß Korollar 2.4 eine asymptotische Darstellung für die Nullstellen ρ_n von $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ herleiten. Da $\mathcal{W}(\cdot, \alpha) = Y(0, \cdot) \cos \alpha + Y'(0, \cdot) \sin \alpha$ und die die Funktion $Y(\cdot, \rho)$ definierende Integralgleichung (2.18) nur für $x \geq z(\rho) \geq x_m + \epsilon$ und somit *nicht* für $x = 0$ gilt (siehe Lemma 2.3), lassen sich direkt aus (2.18) keine Erkenntnisse für $Y(0, \cdot)$, $Y'(0, \cdot)$ und $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ gewinnen.
Um die bisherigen Ergebnisse und die Resultate von Eberhard-Freiling bzw. Eberhard-Freiling-Schneider in [5], [9], die dort nur für das *kompakte* Intervall $[0, 1]$ formuliert und bewiesen sind, doch anwenden zu können, werden wir deshalb $Y(\cdot, \rho)$ für $|\rho| \geq \rho_1$ (siehe Lemma 2.3 zur Bedeutung von ρ_1) auf dem Intervall $D_{m,\epsilon} = [x_m + \epsilon, 1] = [0, 1] \cap [x_m + \epsilon, \infty)$ als Linearkombination eines geeigneten Fundamentalsystems von $l_\rho u = 0$ auf $[0, 1]$ mit für unsere Zwecke geeigneten asymptotischen Abschätzungen für $|\rho| \to \infty$, die wir dann [9] entnehmen, schreiben. Genauer werden wir folgendes aus den Arbeiten [5], [9] verwenden:

Sei $1 \leq \nu \leq m$ und x_ν Nullstelle von ϕ^2 vom Typ T_ν, und sei $\rho \in S_k$ mit fest gewähltem $k \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es nach [9, Thm. 3.2] ein Fundamentalsystem $w_{\nu,1}^{T_\nu}(\cdot, \rho)$, $w_{\nu,2}^{T_\nu}(\cdot, \rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf $I_{\nu,\epsilon}$, für das gewisse asymptotische Darstellungen für $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S_k$ existieren; der Beweis dieses Satzes verwendet im wesentlichen Ergebnisse aus Langer [15].
Weiter sind in [9] die sogenannten *Verbindungsmatrizen* untersucht. Diese beschreiben den Übergang des Fundamentalsystems $w_{\nu,1}^{T_\nu}(\cdot, \rho)$, $w_{\nu,2}^{T_\nu}(\cdot, \rho)$ auf $I_{\nu,\epsilon}$ zu $w_{\nu+1,1}^{T_{\nu+1}}(\cdot, \rho)$, $w_{\nu+1,2}^{T_{\nu+1}}(\cdot, \rho)$ auf $I_{\nu+1,\epsilon}$, d.h. sie sind 2×2–Matrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1}) = C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho)$, die von T_ν, $T_{\nu+1}$

und von ρ und k abhängen, mit

$$\begin{pmatrix} w_{\nu,1}^{T_\nu}(x,\rho) \\ w_{\nu,2}^{T_\nu}(x,\rho) \end{pmatrix} = C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho) \begin{pmatrix} w_{\nu+1,1}^{T_{\nu+1}}(x,\rho) \\ w_{\nu+1,2}^{T_{\nu+1}}(x,\rho) \end{pmatrix} \qquad (x \in D_{\nu,\epsilon}),$$

für fest gewählte $\nu \in \{1, \dots, m-1\}$ und $\rho \in S_k$. Für die Verbindungsmatrizen sind ebenfalls in [9, Thm. 4.1] asymptotische Darstellungen für $|\rho| \to \infty$, $\rho \in S_k$ bewiesen. Ist $z_j(\cdot, \rho)$ die Fortsetzung von $w_{1,j}^{T_1}(\cdot, \rho)$ auf $[0,1]$ ($j = 1, 2, \rho \in S_k$), so gilt

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} z_1(x,\rho) \\ z_2(x,\rho) \end{pmatrix} = \prod_{\nu=1}^{j} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho) \begin{pmatrix} w_{j+1,1}^{T_{j+1}}(x,\rho) \\ w_{j+1,2}^{T_{j+1}}(x,\rho) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (0 \leq j \leq m-1, \\ x \in I_{j+1,\epsilon}, \rho \in S_k), \end{matrix}$$

und man erhält ein Fundamentalsystem $z_1(\cdot, \rho)$, $z_2(\cdot, \rho)$ von $l_\rho u = 0$ auf dem ganzen Intervall $[0,1]$ (vgl. [9, Abschn. 4.2] zusammen mit [5, S. 27]), das u. a. zum Beweis von Satz 3.1 geeignet ist.
Nachdem wir dann $Y(\cdot, \rho)$ als Linearkombination von $z_1(\cdot, \rho)$, $z_2(\cdot, \rho)$ geschrieben haben und Darstellungen für die Koeffizienten gefunden haben, erhalten wir mit Hilfe der asymptotischen Eigenschaften von z_1, z_1', z_2 und z_2' aus [5], [9] eine asymptotische Darstellung für $\mathcal{W}(\cdot, \alpha)$ für $|\rho| \to \infty$ als sogenannte asymptotische Exponentialsumme, deren Nullstellen das folgende Lemma 3.1 unter gewissen Voraussetzungen liefern wird. Dazu wird im Beweis von Satz 3.1 eine Fallunterscheidung je nach Typ der turning points $x_1, \dots, x_m$ erforderlich werden.

Aus [5] übernehmen wir das folgende

Lemma 3.1. ([5, Lemma 1]) *Seien $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\vartheta_1 < \vartheta_2 < \ldots < \vartheta_p$ reelle Zahlen, und für $j = 1, \dots, p$ seien $\epsilon_j : S_{-1} \cup S_0 \to \mathbb{C}$ Funktionen mit*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \epsilon_j(\lambda) = 0,$$

weiter seien $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{C}$ mit $c_1 \neq 0$ und $c_p \neq 0$, und sei

$$E : S_{-1} \cup S_0 \to \mathbb{C}, \ \lambda \mapsto \sum_{j=1}^{p} \Big(c_j + \epsilon_j(\lambda)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda}$$

holomorph. Dann erfüllen die Nullstellen λ_n von E die asymptotische Abschätzung

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{\vartheta_p - \vartheta_1}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

Beweis. Folgerung aus Tamarkin [30, S. 26]; auch in Langer [14, Part I]. □

Definition 3.2. Wir nennen (wie in [5]) jede Funktion E mit der in Lemma 3.1 angegebenen Gestalt eine *asymptotische Exponentialsumme*.

Die Verbindungsmatrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ und deren asymptotisches Verhalten gehen gemäß (3.2) in wesentlicher Weise in das Fundamentalsystem $z_1(\cdot, \rho)$, $z_2(\cdot, \rho)$ ein. Die asymptotischen Abschätzungen für die Verbindungsmatrizen entnehmen wir [9]:

Lemma 3.2. ([9, Thm. 4.1]) *Für $\rho \in S_1$ und $1 \le \nu \le m-1$ gilt:*

$$C_\nu(I,I) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin \pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_\nu \cos\pi\mu_{\nu+1}]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_{\nu+1}]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix}$$
$$(|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(I,IV) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin \pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix}$$
$$(|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(II,II) =$$
$$C_\nu(II,III) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin \pi\mu_\nu} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{i\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{-i\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [0]\sin\pi\mu_\nu e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix}$$
$$(|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(III,I) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_{\nu+1}]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_{\nu+1}]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$
$$(|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(III,IV) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\rho| \to \infty),$$

$$C_\nu(IV,II) =$$

$$C_\nu(IV,III) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{i\rho\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{-i\rho\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [0]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} e^{i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\rho| \to \infty).$$

Beweis. Siehe [9, Thm. 4.1]. □

Für spätere Zwecke definieren wir noch folgende Matrizen, deren Bedeutung und Verwendung erst im Beweis des Satzes 3.1 deutlich werden wird, die aber bereits hier notiert werden sollen. Die Herleitung der Gestalt dieser Matrizen wird analog zu [5] verlaufen.

Definition 3.3. Die folgenden Matrizen nennen wir (wie in [5]) *relevante Teilmatrizen*: Seien für $1 \leq \nu \leq m-1$ und $\rho \in S_1$

$$\hat{C}_{\nu,1}(I,I) := \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_\nu \cos\pi\mu_{\nu+1}}{\sin\pi\mu_\nu} & \frac{i\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu} \\ -i\cos\pi\mu_{\nu+1}\sin\pi\mu_\nu & \sin\pi\mu_\nu \end{pmatrix},$$

$$C_{\nu,1}(I,I) := \hat{C}_{\nu,1}(I,I)e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|},$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(I,I) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{\nu,p}(I,I) := \hat{C}_{\nu,p}(I,I)e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|},$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(I,IV) := \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu} & \frac{i\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu} \\ -i\sin\pi\mu_\nu & \sin\pi\mu_\nu \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,1}(I,IV) := \hat{C}_{\nu,1}(I,IV)e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(I,IV) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,p}(I,IV) := \hat{C}_{\nu,p}(I,IV)e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(II,II) := \hat{C}_{\nu,1}(II,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,1}(II,II) := C_{\nu,1}(II,III) := \hat{C}_{\nu,1}(II,II)e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(II,II) := \hat{C}_{\nu,p}(II,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$C_{\nu,p}(II,II) := C_{\nu,p}(II,III) := \hat{C}_{\nu,p}(II,II)e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(III,I) := \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_{\nu+1}}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}\cos\pi\mu_{\nu+1} & 2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$C_{\nu,1}(III,I) := \hat{C}_{\nu,1}(III,I)e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(III,I) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$C_{\nu,p}(III,I) := \hat{C}_{\nu,p}(III,I)e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,1}(III,IV) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$C_{\nu,1}(III,IV) := \hat{C}_{\nu,1}(III,IV)e^{-\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} ,$$

$$\hat{C}_{\nu,p}(III,IV) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} ,$$

$$
\begin{aligned}
C_{\nu,p}(III,IV) &:= \hat{C}_{\nu,p}(III,IV)e^{\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\,,\\
\hat{C}_{\nu,1}(IV,II) &:= \hat{C}_{\nu,1}(IV,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}\,,\\
C_{\nu,1}(IV,II) &:= C_{\nu,1}(IV,III) := \hat{C}_{\nu,1}(IV,II)e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\,,\\
\hat{C}_{\nu,p}(IV,II) &:= \hat{C}_{\nu,p}(IV,III) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_\nu}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}\,,\\
C_{\nu,p}(IV,II) &:= C_{\nu,p}(IV,III) := \hat{C}_{\nu,p}(IV,II)e^{-i\rho\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\,.
\end{aligned}
$$

Um mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens des Fundamentalsystems $z_1(\cdot,\rho)$, $z_2(\cdot,\rho)$ aus (3.2) Aussagen über $Y(0,\cdot)$, $Y'(0,\cdot)$ und $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ zu erhalten, verwenden wir die folgenden drei Hilfssätze.

Hilfssatz 3.1. *Seien die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt, und sei $\varphi_1(\cdot,\rho)$, $\varphi_2(\cdot,\rho)$ ein fest gewähltes Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf $[0,1]$ für jedes feste $\rho \in S_1 \cup S_2$. Dann gilt mit* $h(\rho) := \dfrac{C_1 e^{i\rho\xi(1)}\rho^{5/6}}{W(\varphi_1(\cdot,\rho),\varphi_2(\cdot,\rho))\sqrt[4]{\phi^2(1)}}$ $(\rho \in S_1 \cup S_2)$ *für $\tau = 0,1$:*

$$
\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) &= h(\rho)\Big\{\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\\
&\quad+\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\Big\}\\
&\qquad\qquad(|\rho|\to\infty,\rho\in S_1\cup S_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}(\rho,\alpha) &= h(\rho)\Big\{\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2(0,\rho)\Big)\cos\alpha\\
&\quad+\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1'(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2'(0,\rho)\Big)\sin\alpha\\
&\quad+\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1(0,\rho)\Big)\cos\alpha\\
&\quad+\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2'(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1'(0,\rho)\Big)\sin\alpha\Big\}\\
&\qquad\qquad(|\rho|\to\infty,\rho\in S_1\cup S_2).
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir lassen den Parameter ρ in den Argumenten der Funktionen meist weg. Da φ_1, φ_2 Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf $[0,1]$ ist, gilt

(3.3) $$Y^{(\tau)}(x) = c_1(\rho)\varphi_1^{(\tau)}(x) + c_2(\rho)\varphi_2^{(\tau)}(x) \qquad (x\in[0,1];\tau=0,1)$$

mit $c_1(\rho), c_2(\rho) \in \mathbb{C}$, nach der Cramerschen Regel ist dabei

$$c_1 = \frac{W(Y,\varphi_2)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\,, \quad c_2 = \frac{W(\varphi_1,Y)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\,.$$

Da die asymptotischen Abschätzungen für Y und Y' in Lemma 2.3 d) für $|\rho| \geq \rho_1$ für alle $x \in [x_m+\epsilon,\infty)$ gelten, werden wir die Wronskifunktionen in c_1 und c_2 deshalb an der Stelle $x = 1 \in [x_m+\epsilon,\infty) \cap [0,1]$ auswerten. Nach Lemma 2.3 d) gilt

$$\begin{aligned} Y(1,\rho) &= \Big(C_1\rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)} \qquad (|\rho|\to\infty, \rho \in S_1\cup S_2),\\ Y'(1,\rho) &= \Big(C_1 i\rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big)\,\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)} \qquad (|\rho|\to\infty, \rho \in S_1\cup S_2). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} W(Y,\varphi_2) &= W(Y,\varphi_2)|_{x=1}\\ &= \Big(C_1\rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2'(1,\rho)\\ &\quad -\Big(C_1 i\rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big)\,\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2(1,\rho) \qquad (|\rho|\to\infty, \rho \in S_1\cup S_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(\varphi_1,Y) &= W(\varphi_1,Y)|_{x=1}\\ &= \varphi_1(1,\rho)\Big(C_1 i\rho^{5/6} + O(\rho^{-1/6})\Big)\,\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\\ &\quad -\varphi_1'(1,\rho)\Big(C_1\rho^{-1/6} + O(\rho^{-7/6})\Big)\,\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)} \qquad (|\rho|\to\infty, \rho \in S_1\cup S_2). \end{aligned}$$

Also ist

$$c_1 = \frac{\Big(C_1\rho^{-1/6}+O(\rho^{-7/6})\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2'(1,\rho)-\Big(C_1 i\rho^{5/6}+O(\rho^{-1/6})\Big)\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_2(1,\rho)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}$$

$$(|\rho|\to\infty, \rho \in S_1\cup S_2),$$

$$c_2 = \frac{\Big(C_1 i\rho^{5/6}+O(\rho^{-1/6})\Big)\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_1(1,\rho)-\Big(C_1\rho^{-1/6}+O(\rho^{-7/6})\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\varphi_1'(1,\rho)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}$$

$$(|\rho|\to\infty, \rho \in S_1\cup S_2),$$

so daß gemäß (3.3)

$$
\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) &= \frac{\Big(C_1\rho^{-1/6}+O(\rho^{-7/6})\Big)\frac{1}{\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\,e^{i\rho\xi(1)}\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)\Big)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\\
&\quad+\frac{\Big(C_1 i\rho^{5/6}+O(\rho^{-1/6})\Big)\sqrt[4]{\phi^2(1)}\,e^{i\rho\xi(1)}\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)\Big)}{W(\varphi_1,\varphi_2)}\\
&\qquad\qquad (|\rho|\to\infty,\rho\in S_1\cup S_2;\tau=0,1).
\end{aligned}
$$

Also gelten in $S_1\cup S_2$ die asymptotischen Abschätzungen

$$
\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) &= \frac{C_1 e^{i\rho\xi(1)}\rho^{5/6}}{W(\varphi_1,\varphi_2)\sqrt[4]{\phi^2(1)}}\Big\{\Big(\rho^{-1}+O(\rho^{-2})\Big)\Big(\varphi_2'(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_1'(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\\
&\quad+\Big(i|\phi(1)|+O(\rho^{-1})\Big)\Big(\varphi_1(1,\rho)\varphi_2^{(\tau)}(0,\rho)-\varphi_2(1,\rho)\varphi_1^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\Big\}\\
&\qquad\qquad (|\rho|\to\infty,\rho\in S_1\cup S_2;\tau=0,1).
\end{aligned}
$$

Mit der Definition von h und mit $\mathcal{W}(\rho,\alpha)=Y(0,\rho)\cos\alpha+Y'(0,\rho)\sin\alpha$ folgt daraus die Behauptung. □

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 3.1 dient ferner:

Hilfssatz 3.2. *Es seien mit a_1, a_2, a_3, a_4 : $S_1\to\mathbb{C}$ die Elemente der 2×2-Matrix $\prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ bezeichnet, d.h.*

$$
\begin{pmatrix} a_1(\rho) & a_2(\rho)\\ a_3(\rho) & a_4(\rho)\end{pmatrix} := \prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})(\rho) \qquad (\rho\in S_1), \tag{3.4}
$$

und sei $z_1(\cdot,\rho)$, $z_2(\cdot,\rho)$ für $\rho\in S_1$ das Fundamentalsystem gemäß (3.2). Dann gilt für $\tau=0,1$

$$
\begin{aligned}
&z_2'(1,\rho)\,z_1^{(\tau)}(0,\rho)-z_1'(1,\rho)\,z_2^{(\tau)}(0,\rho)\\
&\quad= (w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\\
&\qquad+(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho\in S_1),\\
&z_1(1,\rho)\,z_2^{(\tau)}(0,\rho)-z_2(1,\rho)\,z_1^{(\tau)}(0,\rho)\\
&\quad= w_{m,1}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\\
&\qquad+w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)-a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho\in S_1).
\end{aligned}
$$

Beweis. Nach (3.2) gilt für $\rho \in S_1$, $\tau = 0,1$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} z_1^{(\tau)}(0,\rho) \\ z_2^{(\tau)}(0,\rho) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\ (w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} z_1^{(\tau)}(1,\rho) \\ z_2^{(\tau)}(1,\rho) \end{pmatrix} &= \prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})(\rho) \begin{pmatrix} (w_{m,1}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \\ (w_{m,2}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1(\rho)(w_{m,1}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) + a_2(\rho)(w_{m,2}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \\ a_3(\rho)(w_{m,1}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) + a_4(\rho)(w_{m,2}^{T_m})^{(\tau)}(1,\rho) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

damit ist dann für $\tau = 0,1$

$$\begin{aligned}
&z_2'(1,\rho)\, z_1^{(\tau)}(0,\rho) - z_1'(1,\rho)\, z_2^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= \Big(a_3(\rho)(w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho) + a_4(\rho)(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\qquad -\Big(a_1(\rho)(w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho) + a_2(\rho)(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= (w_{m,1}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
&\qquad +(w_{m,2}^{T_m})'(1,\rho)\Big(a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho \in S_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_1(1,\rho)\, z_2^{(\tau)}(0,\rho) - z_2(1,\rho)\, z_1^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= \Big(a_1(\rho)w_{m,1}^{T_m}(1,\rho) + a_2(\rho)w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\qquad -\Big(a_3(\rho)w_{m,1}^{T_m}(1,\rho) + a_4(\rho)w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) \\
&\quad= w_{m,1}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_1(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_3(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\
&\qquad +w_{m,2}^{T_m}(1,\rho)\Big(a_2(\rho)(w_{1,2}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho) - a_4(\rho)(w_{1,1}^{T_1})^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \qquad (\rho \in S_1).
\end{aligned}$$

$\square$

Hilfssatz 3.3. Wir setzen für $\rho \in S_1$ $\rho =: i\lambda$ mit $\lambda \in S_{-1}$. a_1, a_2, a_3 und a_4 besitzen dann die Gestalt

$$(3.5) \qquad \left\{ \begin{aligned}
a_k(i\lambda) &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j^{(k)}\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \\
&\text{für } k = 1,2,3,4; \text{ mit } \theta^{(k)} \in \mathbb{R},\ p_k \in \mathbb{N},\ d_j^{(k)} \in \mathbb{C}, \\
&\vartheta_1^{(k)} < \vartheta_2^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)}.
\end{aligned} \right.$$

Beweis. Aus der allgemeinen Gestalt der Verbindungsmatrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ gemäß Lemma 3.2 und (3.4) ist (nach Substitution $\rho =: i\lambda$, $\lambda \in S_{-1}$) ersichtlich, daß jedes $a_k(i\lambda)$ folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} e^{\theta_j^{(k)}\lambda} \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \\ & \quad \text{für } k = 1,2,3,4; \text{ mit } p_k \in \mathbb{N},\ \hat{d}_j^{(k)} \in \mathbb{C},\ \hat{\vartheta}_j^{(k)} \in \mathbb{R}, \\ & \quad \theta_j^{(k)} \in \mathbb{R} \ \text{ für } j = 1, \ldots, p_k. \end{aligned}$$

Seien für $k = 1,2,3,4$

$$\begin{aligned} \theta^{(k)} &:= \max\{\theta_1^{(k)}, \ldots, \theta_{p_k}^{(k)}\}, \\ F^{(k)} &:= \Big\{ j \mid j \in \{1, \ldots, p_k\}\, ,\ \theta_j^{(k)} = \theta^{(k)} \Big\}, \end{aligned}$$

so gilt:

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{(\theta_j^{(k)} - \theta^{(k)})\lambda} e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \\ &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \Big(\sum_{j \in F^{(k)}} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} + \sum_{j \in \{1,\ldots,p_k\} \setminus F^{(k)}} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{(\theta_j^{(k)} - \theta^{(k)})\lambda} e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \Big) \\ &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \Big(\sum_{j \in F^{(k)}} \Big(\hat{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} + \sum_{j \in \{1,\ldots,p_k\} \setminus F^{(k)}} o(1) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \Big) \\ &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(\tilde{d}_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\hat{\vartheta}_j^{(k)}\lambda} \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{d}_j^{(k)} := \begin{cases} \hat{d}_j^{(k)}, & \text{falls } j \in F^{(k)}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad\qquad (k = 1,2,3,4).$$

Nach eventueller Umindizierung haben die $a_k(i\lambda)$ also die behauptete Gestalt

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= e^{\theta^{(k)}\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j^{(k)}\lambda} \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \\ & \quad \text{für } k = 1,2,3,4; \text{ mit } \theta^{(k)} \in \mathbb{R},\ p_k \in \mathbb{N},\ d_j^{(k)} \in \mathbb{C}, \\ & \quad \vartheta_1^{(k)} < \vartheta_2^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)}. \end{aligned}$$

□

3.3 Beweis des Hauptsatzes über die Eigenwertasymptotik

Wir beginnen nun den

Beweis von Satz 3.1.
Nach Korollar 2.4 sind die Nullstellen $\rho_n, n \in N$, von $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ zu untersuchen.
Wir machen zunächst eine Vorüberlegung dazu, welche Sektoren S_k zum Beweis der Behauptung zu betrachten sind. Nach Satz 2.1 liegen die Nullstellen $\rho_n, n \in N$, von $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ auf der positiven imaginären Achse, also sowohl in S_1 als auch in S_2. Weiter ist $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ nach Lemma 2.9 b) in jedem Punkt von $S_1 \cup S_2$ holomorph, und für jedes $k \in \{1,2\}$ sind $z_j(x,\cdot)$, $z_j'(x,\cdot)$, $j = 1,2$, für jedes $x \in [0,1]$ holomorph in S_k (vgl. [5], [9]).
Setzt man in Hilfssatz 3.1 $\varphi_1(\cdot,\rho) := z_1(\cdot,\rho)$, $\varphi_2(\cdot,\rho) := z_2(\cdot,\rho)$, zunächst für $\rho \in S_1$, dann für $\rho \in S_2$, so erhält man Darstellungen für $\mathcal{W}(\rho,\alpha)$, jeweils für S_1 und für S_2, die formal identisch sind. Wegen $\rho_n \in S_1 \cap S_2$, $n \in N$, ist es daher ausreichend, $\mathcal{W}(\cdot,\alpha)$ allein in S_1 zu betrachten. (Ebenso wäre natürlich auch die Untersuchung in S_2 ausreichend und lieferte dasselbe Ergebnis wie in S_1.)
Also erhalten wir mit Hilfssatz 3.1

$$(3.6)\quad \begin{cases} Y^{(\tau)}(0,\rho) = h(\rho)\Big\{\Big(\rho^{-1} + O(\rho^{-2})\Big)\Big(z_2'(1,\rho)z_1^{(\tau)}(0,\rho) - z_1'(1,\rho)z_2^{(\tau)}(0,\rho)\Big) \\ \qquad + \Big(i|\phi(1)| + O(\rho^{-1})\Big)\Big(z_1(1,\rho)z_2^{(\tau)}(0,\rho) - z_2(1,\rho)z_1^{(\tau)}(0,\rho)\Big)\Big\} \\ \qquad\qquad (|\rho| \to \infty, \rho \in S_1), \\ \text{wobei } h \text{ in } S_1 \text{ nullstellenfrei ist.} \end{cases}$$

Da das asymptotische Verhalten von z_1, z_1', z_2 und z_2' vom Typ der turning points abhängt, führen wir, wie bereits erläutert, eine Fallunterscheidung für das weitere Vorgehen durch. Den zuerst behandelten Fall A.1 werden wir ausführlich untersuchen, um die Methodik der Vorgehensweise deutlich zu machen, bei den nachfolgenden Fällen werden wir uns hingegen etwas kürzer fassen.

A. $\phi^2(0) > 0$

1. $T_1 = III$, $T_m = IV$

Dann gilt nach [9, Thm. 3.2] für $\tau = 0,1$

$$(w_{1,1}^{III})^{(\tau)}(0,\rho) = |\phi(0)|^{\tau-\frac{1}{2}}(-i\rho)^{\tau}e^{-i\rho\int_{x_1}^{0}|\phi|}\cdot[1] \qquad (|\rho| \to \infty, \rho \in S_1),$$

$$(w_{1,2}^{III})^{(\tau)}(0,\rho) = |\phi(0)|^{\tau-\frac{1}{2}}(i\rho)^{\tau}e^{i\rho\int_{x_1}^{0}|\phi|}\cdot[1] \qquad (|\rho| \to \infty, \rho \in S_1),$$

$$
\begin{aligned}
(w_{m,1}^{IV})^{(\tau)}(1,\rho) &= |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(-i\rho)^{\tau}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\ e^{-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot[1] \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),\\
(w_{m,2}^{IV})^{(\tau)}(1,\rho) &= |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(i\rho)^{\tau}2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\ e^{i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot[1] \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1).
\end{aligned}
$$

Daher sind in (3.6) mit Hilfssatz 3.2

$$
\begin{aligned}
&z_2'(1,\rho)\,z_1^{(\tau)}(0,\rho)-z_1'(1,\rho)\,z_2^{(\tau)}(0,\rho)\\
&=\sqrt{\frac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\rho\Big\{\frac{-i}{2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\Big((-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_3(\rho)[1]-e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_1(\rho)[1]\Big)\\
&\quad+2i\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\Big((-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_4(\rho)[1]-e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_2(\rho)[1]\Big)\Big\}\Big(|\phi(0)|i\rho\Big)^{\tau}\\
&\qquad\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1; \tau=0,1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_1(1,\rho)\,z_2^{(\tau)}(0,\rho)-z_2(1,\rho)\,z_1^{(\tau)}(0,\rho)\\
&=\frac{1}{\sqrt{|\phi(0)\phi(1)|}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\Big\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\Big(e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_1(\rho)[1]-(-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_3(\rho)[1]\Big)\\
&\quad+2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\Big(e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_2(\rho)[1]-(-1)^{\tau}e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}a_4(\rho)[1]\Big)\Big\}\Big(|\phi(0)|i\rho\Big)^{\tau}\\
&\qquad\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1; \tau=0,1).
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich in (3.6) wegen

$$
\begin{aligned}
(\rho^{-1}+O(\rho^{-2}))[1]\rho &= 1+O(\rho^{-\sigma_0}) \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1);\\
(1+O(\rho^{-1}))[1] &= 1+O(\rho^{-\sigma_0}) \qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1)
\end{aligned}
$$

die Beziehung

$$
(3.7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
Y^{(\tau)}(0,\rho) &= h(\rho)e^{i\frac{\pi}{4}}i\sqrt{\tfrac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}}\Big(|\phi(0)|i\rho\Big)^{\tau}\cdot\\
&\quad\cdot\Big(a_1(\rho)(1+O(\rho^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\ e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&\quad+a_2(\rho)O(\rho^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\ e^{-i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&\quad+a_3(\rho)(-1)^{\tau}(-1+O(\rho^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\ e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|-i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&\quad+a_4(\rho)(-1)^{\tau}O(\rho^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\ e^{i\rho\int_0^{x_1}|\phi|+i\rho\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)\\
&\qquad\qquad (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1; \tau=0,1).
\end{aligned}
\right.
$$

Um Lemma 3.1 anwenden zu können, setzen wir für $\rho \in S_1$

$$\rho =: i\lambda \quad \text{mit} \quad \lambda \in S_{-1}$$

und

$$\Delta(\lambda) := \mathcal{W}(\rho, \alpha) = \mathcal{W}(i\lambda, \alpha) = Y(0, i\lambda)\cos\alpha + Y'(0, i\lambda)\sin\alpha \qquad (\lambda \in S_{-1}).$$

Wir verwenden für λ die Landau-Symbole in derselben Weise wie für ρ; es ist $|\lambda| = |\rho|$ für alle $\lambda \in S_{-1}$.

Mit (3.7) erhalten wir folgende Darstellung für Δ in S_{-1}:
Es gilt mit

$$g(\lambda) := h(i\lambda)e^{i\frac{\pi}{4}} i\sqrt{\frac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}} \qquad (\lambda \in S_{-1})$$

dann

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \quad = \quad g(\lambda) \cdot \Big\{ \; & \cos\alpha \cdot \Big(a_1(i\lambda)(1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_3(i\lambda)(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big) \\
+(-|\phi(0)|\lambda)\sin\alpha \cdot & \Big(a_1(i\lambda)(1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_3(i\lambda)(1 + O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
& + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)\Big\} \\
& \qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),
\end{aligned}$$

also

$$
(3.8)\quad \begin{cases}
\Delta(\lambda) \;=\; g(\lambda)\cdot \\
\cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big((1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\cos\alpha-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)\dfrac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
+a_2(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0})\cos\alpha-O(\lambda^{-\sigma_0})\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
+a_3(i\lambda)\Big((-1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\cos\alpha-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)\dfrac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
+a_4(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0})\cos\alpha-O(\lambda^{-\sigma_0})\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\Big)2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big) \\
\hfill (|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}), \\
\text{wobei } g \text{ in } S_{-1} \text{ nullstellenfrei ist.}
\end{cases}
$$

Wir unterscheiden nun die beiden folgenden Fälle:

(i) Ist $\sin\alpha = 0$, also $\cos\alpha = \pm 1$, so läßt sich in (3.8) auf der rechten Seite der Term $\cos\alpha$ ausklammern, deshalb reicht es o. B. d. A. aus, $\cos\alpha = 1$ zu untersuchen. Dann ist mit (3.8)

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \;=\; g(\lambda)\cdot\Big(& a_1(i\lambda)(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&+ a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&+ a_3(i\lambda)(-1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&+ a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big) \qquad (|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}).
\end{aligned}
$$

(ii) Ist $\sin\alpha \neq 0$, so liefert Ausklammern von $\lambda|\phi(0)|\sin\alpha$ in (3.8) (man beachte, daß $0<\sigma_0\le 1$)

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \;=\;& g(\lambda)\lambda|\phi(0)|\sin\alpha\,\cdot \\
&\cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-1})-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&+ a_2(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0-1})-O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&+ a_3(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-1})-(1+O(\lambda^{-\sigma_0}))\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&+ a_4(i\lambda)\Big(O(\lambda^{-\sigma_0-1})-O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= g(\lambda)\lambda|\phi(0)|\sin\alpha \cdot \\
&\quad \cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big(-1+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&\quad + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&\quad + a_3(i\lambda)\Big(-1+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&\quad + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big) \qquad (|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}).
\end{aligned}
$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$
s_\alpha := \begin{cases} 1, & \text{falls } \sin\alpha = 0, \\ -1, & \text{falls } \sin\alpha \neq 0, \end{cases}
$$

$$
g_\alpha(\lambda) := \begin{cases} g(\lambda), & \text{falls } \sin\alpha = 0 \\ g(\lambda)\lambda|\phi(0)|\sin\alpha, & \text{falls } \sin\alpha \neq 0 \end{cases} \qquad (\lambda\in S_{-1});
$$

g_α ist holomorph in jedem Punkt von S_{-1} und in S_{-1} nullstellenfrei. Dann gilt für jedes α, gemeinsam für

(i) und (ii)

$$
(3.9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= g_\alpha(\lambda)\cdot\Big(a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&\quad + a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&\quad + a_3(i\lambda)\Big(-1+O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|} \\
&\quad + a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\,e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi|-\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big) \\
&\qquad\qquad (|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}).
\end{aligned}
\right.
$$

Wir untersuchen zunächst den (einfachsten) Fall der Existenz zweier turning points von ϕ^2, also

1. a) $m = 2,\ T_1 = III,\ T_2 = IV$

Es ist dann wegen

$$
\phi^2(x) > 0 \quad \text{für } x\in[0,x_1)\cup(x_2,1] \qquad \text{und} \qquad \phi^2(x) < 0 \quad \text{für } x\in(x_1,x_2)
$$

offensichtlich

$$R_- = \int_0^1 \sqrt{\phi_-^2} = \int_{x_1}^{x_2} |\phi| \,, \quad R_+ = \int_0^1 \sqrt{\phi_+^2} = \int_0^{x_1} |\phi| + \int_{x_2}^1 |\phi|.$$

Mit $\rho =: i\lambda$, $\lambda \in S_{-1}$, ist gemäß Lemma 3.2

$$C_1(III,IV) = \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_1+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_1+\epsilon}^{x_2}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_2-\epsilon}^{x_2}|\phi|} + [-i]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).$$

Also ist mit (3.9)

$$(3.10)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(\lambda) = {} & g_\alpha(\lambda) e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_2}^1|\phi|} \cdot \\ & \cdot \Big\{ s_\alpha \cdot \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ & + s_\alpha \cdot \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0}) \frac{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_1+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_1+\epsilon}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_{x_2}^1|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0}) \frac{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_{x_2}^1|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0}) \frac{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_2-\epsilon}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|} \\ & + \Big(i + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big) \frac{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|} \\ & + O(\lambda^{-\sigma_0}) 4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - 2\lambda\int_{x_2}^1|\phi|} \Big\} \\ & (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}). \end{aligned} \right.$$

Durch Zusammenfassen in der Summe innerhalb der geschweiften Klammern auf der rechten Seite von (3.10) ergibt sich mit $\int\limits_0^{x_1} |\phi| + \int\limits_{x_2}^1 |\phi| = R_+$ die Beziehung

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda R_+} \left(\frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \right) \tag{3.11}$$
$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),$$

denn für den dritten bis siebten Summanden innerhalb der geschweiften Klammern in (3.10) gilt, daß sie wegen $\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda \leq 0$ in S_{-1} gleich

$$O(\lambda^{-\sigma_0})\, e^{\pm i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

sind, und sich deshalb mit dem ersten bzw. zweiten Summanden zusammenfassen lassen. Bei dem vorletzten Summanden beachte man dazu, daß $|\mathrm{Im}\,\lambda| \leq |\mathrm{Re}\,\lambda|$ in S_{-1} gilt, also

$$|\lambda|^2 = (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 + (\mathrm{Re}\,\lambda)^2 \leq 2\,(\mathrm{Re}\,\lambda)^2 \quad \text{für alle } \lambda \in S_{-1}, \tag{3.12}$$

und daher dann

$$\begin{aligned}
\left|(i+O(\lambda^{-\sigma_0}))\, e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|}\right| &\leq |\lambda|^{-\sigma_0}\left|\lambda^{\sigma_0} i e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|} + O(1)e^{-2\lambda\int_0^{x_1}|\phi|}\right| \\
&\leq |\lambda|^{-\sigma_0}\left(|\lambda|^{\sigma_0} e^{-2\mathrm{Re}\,(\lambda)\int_0^{x_1}|\phi|} + Ce^{-2\mathrm{Re}\,(\lambda)\int_0^{x_1}|\phi|}\right) \\
&\overset{(3.12)}{\leq} |\lambda|^{-\sigma_0}\left((\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\lambda)^{\sigma_0} e^{-2\mathrm{Re}\,(\lambda)\int_0^{x_1}|\phi|} + C\right) \\
&\leq |\lambda|^{-\sigma_0}\tilde{C} \qquad\qquad (\lambda \in S_{-1}, |\lambda| \geq \lambda_0)
\end{aligned}$$

mit geeigneten Zahlen C, $\tilde{C}$, $\lambda_0 \geq 0$ wegen

$$\lim_{t\to\infty} t^{\sigma_0} e^{-2t\int_0^{x_1}|\phi|} = 0$$

(mit $t := \mathrm{Re}\,\lambda$) nach der Regel von de l'Hospital.
Der folgende Ausdruck in (3.11)

$$E(\lambda) := \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{1+O(\lambda^{-\sigma_0})}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}}\, e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

stellt nun eine asymptotische Exponentialsumme dar. Dabei ist die in (3.11) vor E befindliche Funktion $S_{-1} \to \mathbb{C}$, $\lambda \mapsto s_\alpha g_\alpha(\lambda) e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda R_+}$ holomorph und nullstellenfrei, so daß die Nullstellen von Δ nur durch E bestimmt werden.
E ist in jedem Punkt von S_{-1} holomorph, denn es gilt

$$E(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{s_\alpha g_\alpha(\lambda) e^{\lambda R_+}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\mathcal{W}(i\lambda, \alpha)}{s_\alpha g_\alpha(\lambda) e^{\lambda R_+}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad (\lambda \in S_{-1}),$$

darin ist $\mathcal{W}(i\lambda, \alpha)$ in jedem Punkt von S_{-1} holomorph (vgl. Lemma 2.9 b)) und der Nenner ebenfalls in jedem Punkt von S_{-1} holomorph und nullstellenfrei.

Lemma 3.1 mit

$$p := 2\ , \quad c_1 := \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} \neq 0\ , \quad c_2 := \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_2}{2}} \neq 0\ ,$$

$$\vartheta_1 := -\int_{x_1}^{x_2} |\phi| = -R_-\ , \qquad \vartheta_2 := \int_{x_1}^{x_2} |\phi| = R_-$$

liefert für die Nullstellen λ_n von E (und damit von Δ)

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{2R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

also gilt für die Eigenwerte ρ_n^2

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

das ist die Behauptung.
Nun zum allgemeineren Fall

1. b) $T_1 = III,\ T_2 = \ldots = T_{m-1} = I,\ T_m = IV;\ m \geq 3$

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für ϕ^2 mit $m = 6$.

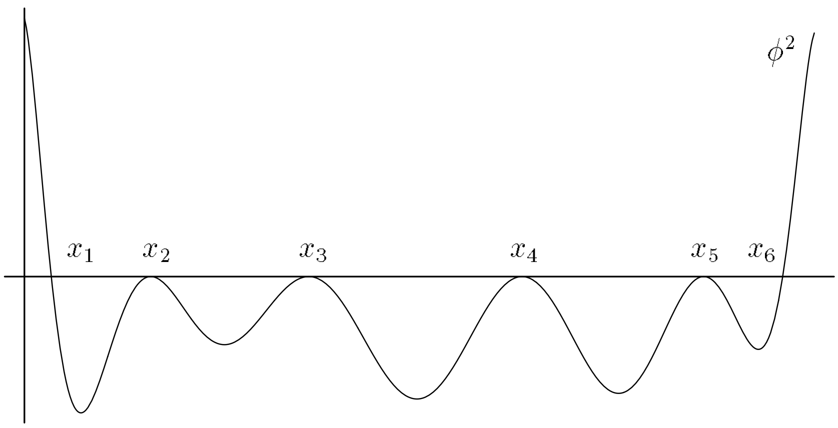

Bild 3.4: Beispiel für ϕ^2 im Fall 1.b)

In der hier untersuchten Situation 1.b) gilt

$$R_- = \int_{x_1}^{x_m} |\phi| \quad , \qquad R_+ = \int_0^{x_1} |\phi| + \int_{x_m}^{1} |\phi|\ .$$

Es ist mit $\rho =: i\lambda$ gemäß Lemma 3.2

$$C_1(III,I) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_2]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_1+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_1+\epsilon}^{x_2}|\phi|} + \frac{[i]}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \\ [0]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_2-\epsilon}^{x_2}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_2]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} & [1]2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|} \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}),$$

$$C_\nu(I,I) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_\nu\cos\pi\mu_{\nu+1}]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{i\lambda\int_{x_\nu}^{x_\nu+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_\nu+\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_\nu]}{\sin\pi\mu_\nu} e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_\nu e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_{\nu+1}-\epsilon}^{x_{\nu+1}}|\phi|} + [-i\cos\pi\mu_{\nu+1}]\sin\pi\mu_\nu e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_\nu e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|} \end{pmatrix}$$

$$(|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}; \nu = 2,\dots,m-2),$$

$$C_{m-1}(I,IV) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{[1]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} + \frac{[\cos\pi\mu_{m-1}]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} & \frac{[0]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_{m-1}+\epsilon}|\phi|} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}+\epsilon}^{x_m}|\phi|} + \frac{[i\cos\pi\mu_{m-1}]}{\sin\pi\mu_{m-1}} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} \\ [0]\sin\pi\mu_{m-1} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m-\epsilon}|\phi|} e^{i\lambda\int_{x_m-\epsilon}^{x_m}|\phi|} + [-i]\sin\pi\mu_{m-1} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} & [1]\sin\pi\mu_{m-1} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|} \end{pmatrix}$$

$$(|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}).$$

Wir betrachten nun a_1, a_2, a_3, a_4 und die Summe innerhalb der großen Klammern von (3.9). Da $C_1(III,I)$, $C_\nu(I,I)$ für $\nu = 2,\dots,m-2$ und $C_{m-1}(I,IV)$ nur $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta\in\mathbb{R}$ enthalten, liest man aus der Gestalt der $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ ab, daß in (3.5) gilt

$$(3.13) \qquad \begin{cases} \theta^{(k)} = 0 \qquad \text{sowie} \\ -R_- = -\int_{x_1}^{x_m}|\phi| \le \vartheta_1^{(k)} < \vartheta_2^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \le \int_{x_1}^{x_m}|\phi| = R_- \\ \text{für} \quad k = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Weiter ist mit (3.13)

$$a_k(i\lambda) = e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1,2,3,4), \tag{3.14}$$

denn nach (3.5) ist

$$\begin{aligned} a_k(i\lambda) &= \sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j^{(k)}\lambda} \\ &= e^{iR_-\lambda} \sum_{j=1}^{p_k} \Big(d_j^{(k)} + o(1)\Big) e^{i(\vartheta_j^{(k)} - R_-)\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}) \end{aligned}$$

mit

$$\left| e^{i(\vartheta_j^{(k)} - R_-)\lambda} \right| = e^{\mathrm{Im}\,(\lambda)(R_- - \vartheta_j^{(k)})} \le 1 \qquad (\lambda \in S_{-1}; j = 1, \ldots, p_k)$$

wegen $\mathrm{Im}\,\lambda \le 0$ und (3.13).

Da in der Summe innerhalb der großen Klammern von (3.9) der Term $e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|}$ derjenige von den Faktoren $e^{\pm\lambda \int_0^{x_1} |\phi| \pm \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|}$ ist, der für $|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}$ das stärkste Wachstum besitzt und die a_k nur $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ besitzen, werden wir die Summe in der großen Klammer von (3.9) wie folgt ausrechnen (die so durchgeführte Vereinfachung der asymptotischen Exponentialsumme H in der folgenden Rechnung ist analog zu Langer [14, Part I, Section 9]):

$$\begin{aligned} H(\lambda) \;:=\;& a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ &+ a_2(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ &+ a_3(i\lambda)\Big(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ &+ a_4(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ =\;& e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \\ &\qquad + a_2(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ &\qquad + a_3(i\lambda)\Big(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\, e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi|} \\ &\qquad + a_4(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\, e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - 2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \Big) \\ \overset{(3.14)}{=}\;& e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda)\Big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} + e^{iR_-\lambda} \cdot o(1) \Big) \end{aligned}$$

$$\overset{(3.5)}{=} \quad \frac{e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot\left\{s_\alpha\left(\sum_{j=1}^{p_1}\Big(d_j^{(1)}+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda}\right)+e^{iR_-\lambda}\cdot o(1)\right\}$$

$$= \quad \frac{s_\alpha e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot\left\{\left(\sum_{j=1}^{p_1}\Big(d_j^{(1)}+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda}\right)+e^{iR_-\lambda}\cdot o(1)\right\}$$

$$(|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}),$$

so daß (3.9) hier lautet (mit $p:=p_1,\ d_j:=d_j^{(1)},\ \vartheta_j:=\vartheta_j^{(1)}$ für $j=1,\ldots,p$ zur Abkürzung)

$$\Delta(\lambda) \;=\; s_\alpha g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\left\{\left(\sum_{j=1}^{p}\Big(d_j+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j\lambda}\right)+o(1)\,e^{i\lambda R_-}\right\} \tag{3.15}$$

$$(|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}),$$

dabei wurde $\int\limits_0^{x_1}|\phi|+\int\limits_{x_m}^1|\phi|=R_+$ eingesetzt.
Um Lemma 3.1 anwenden zu können, werden wir nun zeigen:

$$\vartheta_1=-R_-\ ,\quad \vartheta_p=R_-\ ,\quad d_1\neq 0\ ,\quad d_p\neq 0\ . \tag{3.16}$$

Zur Bestimmung von $\vartheta_1,\ \vartheta_p,\ d_1,\ d_p$:
Zur Bestimmung von $d_1,\ \vartheta_1$ aus $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1}C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ sind, wie in [5] beschrieben, genau die Terme in $C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ zu berücksichtigen, die einen Faktor der Form $e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$ enthalten, denn für alle Exponentialterme $e^{i\vartheta\lambda}$ in den Matrizen $C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ gilt $\vartheta\geq-\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|$ und die Terme mit $\vartheta>-\int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|$ liefern keinen Beitrag zu ϑ_1. Deshalb reicht es gemäß [5] aus, die in Definition 3.3 angegebenen, für d_1,ϑ_1 relevanten Teilmatrizen zu betrachten; hier ist

$$C_{1,1}(III,I) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_2}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\cos\pi\mu_2 & 2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_2}|\phi|}\ ,$$

$$C_{\nu,1}(I,I) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_\nu\cos\pi\mu_{\nu+1}}{\sin\pi\mu_\nu} & \frac{i\cos\pi\mu_\nu}{\sin\pi\mu_\nu} \\ -i\cos\pi\mu_{\nu+1}\sin\pi\mu_\nu & \sin\pi\mu_\nu\end{pmatrix} e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}\ ,$$

$$(\nu=2,\ldots,m-2)\ ,$$

$$C_{m-1,1}(I,IV) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\cos\pi\mu_{m-1}}{\sin\pi\mu_{m-1}} & \frac{i\cos\pi\mu_{m-1}}{\sin\pi\mu_{m-1}} \\ -i\sin\pi\mu_{m-1} & \sin\pi\mu_{m-1}\end{pmatrix} e^{-i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m}|\phi|}\ ;$$

nach [5] ist es ausreichend, statt $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1}C_\nu(T_\nu,T_{\nu+1})$ nun $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1}C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1})$ zu untersuchen.

Hier ist

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \Big(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu}\Big)\, e^{-i\lambda \int_{x_1}^{x_m} |\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_1}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$d_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \Big(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu}\Big) \neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_1 = -\int_{x_1}^{x_m} |\phi| = -R_-.$$

Entsprechend sind für die Bestimmung von d_p, ϑ_p gemäß [5] genau die Terme in den Matrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ zu berücksichtigen, die einen Term der Gestalt $e^{i\lambda \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|}$ enthalten, denn für alle $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme in $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ gilt $\vartheta \le \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|$ und alle $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta < \int\limits_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|$ liefern keinen Beitrag zu ϑ_p. Deshalb betrachten wir die in Definition 3.3 angegebenen, für d_p, ϑ_p relevanten Teilmatrizen

$$\begin{aligned} C_{1,p}(III, I) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_2} |\phi|}, \\ C_{\nu,p}(I, I) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} |\phi|} \qquad (\nu = 2, \ldots, m-2), \\ C_{m-1,p}(I, IV) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\pi\mu_{m-1}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda\int_{x_{m-1}}^{x_m} |\phi|}. \end{aligned}$$

Nun ist es ausreichend, $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ statt $\prod\limits_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ zu untersuchen. Hier ist

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \Big(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu}\Big) e^{i\lambda \int_{x_1}^{x_m} |\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$d_p = e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \Big(\prod_{\nu=2}^{m-1} \frac{1}{\sin \pi\mu_\nu}\Big) \neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_p = \int_{x_1}^{x_m} |\phi| = R_-,$$

womit (3.16) bewiesen ist.
Wegen $\vartheta_p = R_-$ läßt sich nun in (3.15) zusammenfassen:

$$\text{(3.17)} \qquad \Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).$$

Der Vorfaktor vor der asymptotischen Exponentialsumme

$$E(\lambda) := \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

in (3.17) ist nullstellenfrei, Δ und E besitzen in S_{-1} also dieselben Nullstellen. Wie bei Fall 1.a) sieht man, daß E in jedem Punkt von S_{-1} holomorph ist. Nach Lemma 3.1 gilt mit (3.16) für die Nullstellen λ_n von E bzw. von Δ

$$\lambda_n = \frac{2n\pi}{2R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

womit für die Eigenwerte ρ_n^2 dann

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

das ist die Behauptung, folgt.

Nun verallgemeinern wir das Ergebnis von 1.b):

1. c) $T_1 = III,\ T_2 = \ldots = T_{l-1} = I,\ T_l = IV,$ $T_{l+1} = III,\ T_{l+2} = \ldots = T_{m-1} = I,\ T_m = IV$

Die folgende Abbildung zeigt ein Beispiel für $m = 6$, $l = 3$.

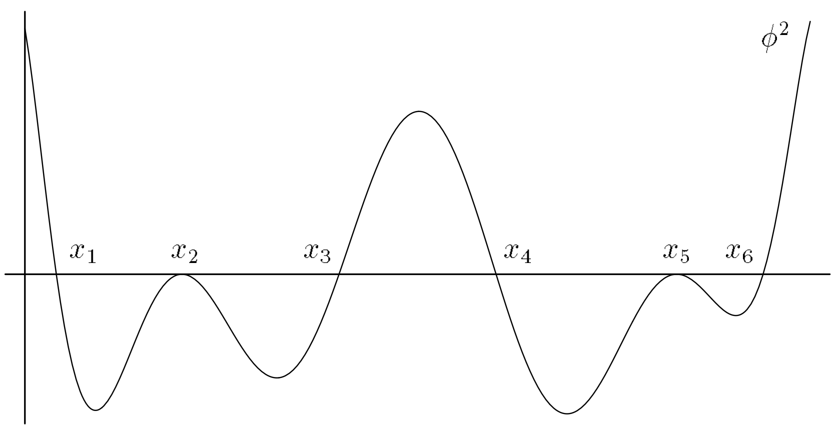

Bild 3.5: Beispiel für ϕ^2 im Fall 1.c)

Es entspricht in Fall 1.c) also $T_1, \dots, T_l$ und $T_{l+1}, \dots, T_m$ jeweils der Situation in Fall 1.b) bzw. 1.a); nun ist

$$R_+ = \int_0^{x_1} |\phi| + \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| + \int_{x_m}^{1} |\phi| \,, \quad R_- = \int_{x_1}^{x_l} |\phi| + \int_{x_{l+1}}^{x_m} |\phi| \,.$$

Es gilt mit $\rho =: i\lambda$, $\lambda \in S_{-1}$

$$C_l(IV, III) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{[1]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} & \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{\lambda \int_{x_l}^{x_l+\epsilon} |\phi|} e^{-\lambda \int_{x_l+\epsilon}^{x_{l+1}} |\phi|} + \frac{[0]}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} \\ [0] 2\sin\frac{\pi\mu_l}{2} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}-\epsilon} |\phi|} e^{\lambda \int_{x_{l+1}-\epsilon}^{x_{l+1}} |\phi|} + [0] 2\sin\frac{\pi\mu_l}{2} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} & [1] 2\sin\frac{\pi\mu_l}{2} e^{-\lambda \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi|} \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

nach Lemma 3.2. Die anderen Matrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ mit $\nu \neq l$ enthalten nur $e^{i\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ (vgl. Fälle 1.a), 1.b)). Man liest auch hier aus der Gestalt der $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ ab, daß

$$(3.18) \quad \begin{cases} \theta^{(1)} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| \,, \qquad -\int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| \le \theta^{(k)} \le \int_{x_l}^{x_{l+1}} |\phi| \quad \text{für } k = 2, 3, 4; \\ -R_- = -\int_{x_1}^{x_l} |\phi| - \int_{x_{l+1}}^{x_m} |\phi| \le \vartheta_1^{(k)} < \dots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \le \int_{x_1}^{x_l} |\phi| + \int_{x_{l+1}}^{x_m} |\phi| = R_- \\ \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

so daß mit (3.5) folgt:

$$(3.19) \qquad a_k(i\lambda) = e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1, 2, 3, 4).$$

Analog zu Fall 1.b) erhalten wir für die Summe H in der großen Klammer von (3.9)

$$\begin{aligned} H(\lambda) \;&=\; e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda)\big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \\ &\qquad + a_2(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\; e^{-2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \\ &\qquad + a_3(i\lambda)\big(-1 + O(\lambda^{-\sigma_0})\big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\; e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi|} \\ &\qquad + a_4(i\lambda) O(\lambda^{-\sigma_0})\, 2\sin\tfrac{\pi\mu_m}{2}\; e^{-2\lambda \int_0^{x_1} |\phi| - 2\lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \Big) \\ &\overset{(3.19)}{=} e^{\lambda \int_0^{x_1} |\phi| + \lambda \int_{x_m}^1 |\phi|} \cdot \Big(a_1(i\lambda)\big(s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\big) \frac{1}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} + e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot o(1) \Big) \end{aligned}$$

$$\overset{(3.5)}{=} \frac{e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot \left\{ e^{\theta^{(1)}\lambda} s_\alpha \left(\sum_{j=1}^{p_1} \left(d_j^{(1)} + o(1)\right) e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda} \right) + e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot o(1) \right\}$$

$$\overset{(3.18)}{=} \frac{s_\alpha e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \cdot \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p_1} \left(d_j^{(1)} + o(1)\right) e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda} \right) + o(1)\, e^{iR_-\lambda} \right\}$$

$$(|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),$$

(3.9) lautet also hier (mit $p := p_1$, $d_j := d_j^{(1)}$, $\vartheta_j := \vartheta_j^{(1)}$ für $j = 1, \ldots, p$ zur Abkürzung)

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p} \left(d_j + o(1)\right) e^{i\vartheta_j\lambda} \right) + o(1)\, e^{i\lambda R_-} \right\} \quad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}). \tag{3.20}$$

Wir werden zeigen:

$$\vartheta_1 = -R_- \ , \quad \vartheta_p = R_- \ , \quad d_1 \neq 0 \ , \quad d_p \neq 0 \ . \tag{3.21}$$

Wie bei 1.a) bzw. 1.b) erhält man für die relevanten Teilmatrizen

$$\prod_{\nu=1}^{l-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\prod_{\nu=2}^{l-1} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} \right) e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_1}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_1}{2} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

und analog

$$\prod_{\nu=l+1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(\prod_{\nu=l+2}^{m-1} \frac{1}{\sin\pi\mu_\nu} \right) e^{-i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|} \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & \frac{i}{2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} \\ -2i\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2} & 2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Da in $C_l(IV, III)$ nur $e^{\vartheta\lambda}$–Terme mit $\vartheta \in \mathbb{R}$ vorhanden sind, sind gemäß (3.18), (3.19) und der Vereinfachung von H gemäß Langer [14] wie bei 1.b) als relevante Teilmatrizen

$$\left\{ \begin{aligned} C_{l,1}(IV, III) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|} , \\ C_{l,p}(IV, III) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|} \end{aligned} \right. \tag{3.24}$$

zu berücksichtigen, nämlich jeweils der für $|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}$ am stärksten wachsende Term (vgl. auch [5]).
Die weiteren in Definition 3.3 angegebenen relevanten Teilmatrizen, die in den nachfolgenden Untersuchungen benötigt werden, sind wie bei [5] nach demselben Prinzip gebildet wie hier und in Fall 1.b).
Es ist dann wieder gemäß [5] ausreichend, $\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ statt $\prod_{\nu=1}^{m-1} C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ zu untersuchen. Mit (3.22), (3.23) und (3.24) folgt:

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1}) \;=\; e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)\cdot$$

$$\cdot e^{-i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|-i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|}\cdot e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & \frac{i}{4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\\ \frac{-i\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & \frac{\sin\frac{\pi\mu_1}{2}}{\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$d_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_l}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big),$$

also

$$d_1\neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_1 = -\int_{x_1}^{x_l}|\phi| - \int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi| = -R_-\ .$$

Für d_p und ϑ_p hat man wie bei 1.a) bzw. 1.b)

$$\prod_{\nu=1}^{l-1} C_{\nu,p}(T_\nu,T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\Big(\prod_{\nu=2}^{l-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_1}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

und wieder analog zu 1.a) bzw. 1.b)

$$\prod_{\nu=l+1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu,T_{\nu+1}) = e^{-i\frac{\pi}{4}}\Big(\prod_{\nu=l+2}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)e^{i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

so daß mit (3.24)

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} C_{\nu,p}(T_\nu,T_{\nu+1}) \;=$$

$$e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sin\frac{\pi\mu_l}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big)e^{i\lambda\int_{x_1}^{x_l}|\phi|+i\lambda\int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi|}\cdot e^{\lambda\int_{x_l}^{x_{l+1}}|\phi|}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{4\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Daraus liest man ab

$$d_p = e^{-i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8\sin\frac{\pi\mu_1}{2}\sin\frac{\pi\mu_l}{2}\sin\frac{\pi\mu_{l+1}}{2}}\Big(\prod_{\substack{\nu=2\\ \nu\neq l,l+1}}^{m-1}\frac{1}{\sin\pi\mu_\nu}\Big),$$

und so

$$d_p\neq 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_p = \int_{x_1}^{x_l}|\phi| + \int_{x_{l+1}}^{x_m}|\phi| = R_-\ .$$

Damit ist (3.21) bewiesen. Wegen $\vartheta_p = R_-$ läßt sich in (3.20) zusammenfassen:

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\,\sum_{j=1}^{p}\Big(d_j+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j\lambda} \qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}).$$

Auch hier ist der Vorfaktor vor der asymptotischen Exponentialsumme

$$E(\lambda) := \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

nullstellenfrei, und E ist in jedem Punkt von S_{-1} holomorph, wie man wie bei 1.a) zeigt. Nach Lemma 3.1 gilt mit (3.21) für die Nullstellen λ_n von Δ

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

d.h. es gilt auch hier

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

Nun zum allgemeinen Fall

1. d) $T_1 = III,\ T_m = IV;\ m \geq 3$

Aus Lemma 3.2 ist ersichtlich, daß (mit $\rho = i\lambda$) die Exponentialterme in den Verbindungsmatrizen $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$ nicht nur in diesem Fall 1.d), sondern allgemein folgender Eigenschaft genügen:

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für alle } T_1, \ldots, T_m \text{ und } \nu \in \{1, \ldots, m-1\} \text{ gilt:} \\ C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ enthält nur } e^{i\vartheta\lambda}\text{–Terme mit } \vartheta \in \mathbb{R} \iff \phi^2 < 0 \text{ in } (x_\nu, x_{\nu+1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{und} \\ C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ enthält nur } e^{\vartheta\lambda}\text{–Terme mit } \vartheta \in \mathbb{R} \iff \phi^2 > 0 \text{ in } (x_\nu, x_{\nu+1}). \end{array} \right.$$

Deshalb erhält man in (3.5) aus der Gestalt der Verbindungsmatrizen in Lemma 3.2 in zu 1.b) und 1.c) analoger Weise

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta^{(1)} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2}\,, \qquad -\int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \leq \theta^{(k)} \leq \int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \quad \text{für } k = 2, 3, 4; \\ -R_- \leq \vartheta_1^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \leq R_- \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4, \end{array} \right.$$

woraus gemäß (3.5)

$$(3.27) \qquad a_k(i\lambda) = e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1, 2, 3, 4)$$

folgt. Gleichung (3.9) läßt sich daher wieder wie bei 1.b), c) schreiben als (mit $p := p_1$, $d_j := d_j^{(1)}$, $\vartheta_j := \vartheta_j^{(1)}$ für $j = 1, \ldots, p$)

$$
\Delta(\lambda) \;=\; s_\alpha g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}\left\{\left(\sum_{j=1}^{p}\Big(d_j + o(1)\Big)e^{i\vartheta_j\lambda}\right) + o(1)\,e^{i\lambda R_-}\right\} \qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}). \tag{3.28}
$$

Wir untersuchen nun die Zahlen ϑ_1, ϑ_p, d_1, d_p.

Zur Bestimmung von ϑ_1, ϑ_p:
Mit (3.25) ergeben sich entsprechend der $e^{-i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$–Terme und der $e^{i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$–Terme in den Verbindungsmatrizen wieder die Beziehungen

$$
\vartheta_1 = -R_-\,, \qquad \vartheta_p = R_-\,. \tag{3.29}
$$

Zur Bestimmung von d_1, d_p:
Da die Exponentialterme $e^{\pm i\lambda\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}}|\phi|}$ in den relevanten Teilmatrizen $C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ bzw. $C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ nur für die Bestimmung von ϑ_1 bzw. ϑ_p von Bedeutung sind und nicht für die Untersuchung von d_1 bzw. d_p, verwenden wir im weiteren der kürzeren Formulierung halber die ebenfalls in Definition 3.3 angegebenen Matrizen

$$
\hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ statt } C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) \quad \text{und} \quad \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) \text{ statt } C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}),
$$

bei denen lediglich die Exponentialterme weggelassen wurden.
Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von ϕ^2 erhielten wir die in Bemerkung 3.2 b) angegebene Tabelle 3.1 für $T_{\nu+1}$ in Abhängigkeit von T_ν für $\nu = 1,\dots,m-1$; andere Kombinationen sind nicht möglich. Daher gilt:
Auf einen turning point x_ν vom Typ $T_\nu = III$ folgt einer vom Typ $T_{\nu+1} = IV$ oder einer oder mehrere vom Typ I sowie dann ein turning point vom Typ IV. Diese ergeben in $\prod_{\nu=1}^{m-1}\hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ ein Teilprodukt der Gestalt

$$
\hat{C}_{\nu,1}(III, IV) \quad \text{oder} \quad \hat{C}_{\nu,1}(III, I)\cdot\hat{C}_{\nu+1,1}(I, I)\cdot\ldots\cdot\hat{C}_{\nu+l,1}(I, IV), \tag{3.30}
$$

es soll immer mit einer Nullstelle vom Typ IV enden. Falls diese Nullstelle nicht bereits die letzte, also x_m ist, so gilt für die nachfolgenden Nullstellen (vgl. wieder Tabelle 3.1):
Auf $T_\mu = IV$ folgt $T_{\mu+1} = III$ oder ein oder mehrere turning points vom Typ II sowie dann ein turning point vom Typ III. Diese ergeben in $\prod_{\nu=1}^{m-1}\hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ ein Teilprodukt der Gestalt

$$
\hat{C}_{\mu,1}(IV, III) \quad \text{oder} \quad \hat{C}_{\mu,1}(IV, II)\cdot\hat{C}_{\mu+1,1}(II, II)\cdot\ldots\cdot\hat{C}_{\mu+k,1}(II, III), \tag{3.31}
$$

es endet stets mit einer Nullstelle vom Typ III. Daran schließt sich wegen $T_m = IV$ wieder ein Teilprodukt der Gestalt (3.30) an.
In $\prod_{\nu=1}^{m-1}\hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ wechseln sich daher stets ein Teilprodukt der Form (3.30) mit einem der Gestalt (3.31) ab, beginnend mit (3.30) wegen $T_1 = III$ und endend mit (3.30) wegen $T_m = IV$.

Nach Lemma 3.2 und einer zu 1.b) analogen Rechnung ergibt sich nun, daß jedes Produkt der Form (3.30) die Gestalt

$$\gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{i}{\beta} \\ -i\beta & \beta \end{pmatrix} \qquad \text{mit geeigneten } \beta,\, \gamma \neq 0$$

besitzt, und jedes Produkt der Form (3.31) die Gestalt

$$\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit geeignetem } \delta \neq 0$$

besitzt; letzteres, da jede Matrix $\hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ im Teilprodukt (3.31) nach Lemma 3.2 selbst die Form $\delta_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\delta_\nu \neq 0$ besitzt. Das Produkt eines Teilproduktes vom Typ (3.30) mit einem vom Typ (3.31) hat deshalb die Gestalt

$$\gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ -i\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit passenden } \beta,\, \gamma \neq 0. \tag{3.32}$$

$\prod\limits_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$ besteht so aus einem oder mehreren Faktoren (3.32) und besitzt als letzten Faktor ein Teilprodukt der Form (3.30), d.h. mit geeigneten Zahlen $\gamma_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$ für $j = 1, \ldots, j_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) &= \left(\prod_{j=1}^{j_0-1} \gamma_j \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_j} & 0 \\ -i\beta_j & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \gamma_{j_0} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_{j_0}} & \frac{i}{\beta_{j_0}} \\ -i\beta_{j_0} & \beta_{j_0} \end{pmatrix} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{j_0} \gamma_j \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0-1}} & 0 \\ \frac{-i\beta_1}{\beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0-1}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_{j_0}} & \frac{i}{\beta_{j_0}} \\ -i\beta_{j_0} & \beta_{j_0} \end{pmatrix} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{j_0} \gamma_j \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} & \frac{i}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} \\ \frac{-i\beta_1}{\beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} & \frac{\beta_1}{\beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

also ist

$$d_1 = \frac{\gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_{j_0}}{\beta_1 \cdot \ldots \cdot \beta_{j_0}} \neq 0.$$

Da alle $\hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ Matrizen der Form $\alpha_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit passenden Zahlen $\alpha_\nu \neq 0$ für $\nu = 1, \ldots, m-1$ sind, ist

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \alpha_0 := \prod_{\nu=1}^{m-1} \alpha_\nu \neq 0,$$

also gilt

$$d_p = \alpha_0 \neq 0\,.$$

Mit $\vartheta_p = R_-$ nach (3.29) läßt sich (3.28) vereinfachen zu

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}} \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}).$$

Auch hier ist der Vorfaktor $S_{-1} \to \mathbb{C},\ \lambda \mapsto s_\alpha g_\alpha(\lambda)\dfrac{e^{\lambda R_+}}{\sin\frac{\pi\mu_m}{2}}$ vor der asymptotischen Exponentialsumme

$$E(\lambda) := \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1)\Big) e^{i\vartheta_j\lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1})$$

nullstellenfrei, und E ist in jedem Punkt von S_{-1} holomorph. Nach Lemma 3.1 gilt mit (3.29) auch hier für die Nullstellen von Δ

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{R_-}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

also

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty),$$

das ist die Behauptung.

Im folgenden Fall untersuchen wir

2. $T_1 = II,\ T_m = IV$

Wegen $\phi^2 \in C(I)$ ist dann $m \geq 3$, und es existiert ein $l \in \{1, \ldots, m-1\}$ mit $T_l = III$, vgl. Tabelle 3.1 in Bemerkung 3.2 b); l sei dabei kleinstmöglich gewählt, d.h.

$$l := \min\Big\{k \mid k \in \{1, \ldots, m-1\},\ T_k = III\Big\}.$$

Dann ist also

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_{l-1} = II,\ \ T_l = III, \ldots, T_m = IV.$$

Nach [9, Thm. 3.2] gelten für $(w_{1,1}^{II})^{(\tau)}(0,\rho)$, $(w_{1,2}^{II})^{(\tau)}(0,\rho)$ für $\rho \in S_{-1}$ und $\tau = 0, 1$ die gleichen Abschätzungen wie für $(w_{1,1}^{III})^{(\tau)}(0,\rho)$, $(w_{1,2}^{III})^{(\tau)}(0,\rho)$ in Fall 1. Also bleibt auch hier Gleichung (3.9) gültig.
Nach Lemma 3.2 ergibt sich mit (3.25)

$$\text{(3.33)} \qquad \begin{cases} \theta^{(1)} = \displaystyle\int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2}\,, \qquad -\int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \leq \theta^{(k)} \leq \int_{x_1}^{x_m} \sqrt{\phi_+^2} \quad \text{für } k = 2, 3, 4; \\ -R_- \leq \vartheta_1^{(k)} < \ldots < \vartheta_{p_k}^{(k)} \leq R_- \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Daraus folgt ebenfalls

$$a_k(i\lambda) = e^{\theta^{(1)}\lambda} e^{iR_-\lambda} \cdot O(1) \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}; k = 1,2,3,4), \tag{3.34}$$

so daß sich (3.9) vereinfacht zu (mit $p := p_1$, $d_j := d_j^{(1)}$, $\vartheta_j := \vartheta_j^{(1)}$ für $j = 1, \ldots, p$)

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) \;&=\; s_\alpha g_\alpha(\lambda) \, \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin \frac{\pi \mu_m}{2}} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1) \Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \right) + o(1) \, e^{i\lambda R_-} \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}). \end{aligned} \tag{3.35}$$

Mit (3.25) erhält man wie bisher

$$\vartheta_1 = -R_- \, , \quad \vartheta_p = R_- \, . \tag{3.36}$$

Zur Bestimmung von d_1, d_p:
Es ist nach Lemma 3.2 bzw. Definition 3.3

$$\prod_{\nu=1}^{l-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit einem geeigneten } \beta \neq 0,$$

für $T_l = III, \ldots, T_m = IV$ ergibt sich analog zu 1.d)

$$\prod_{\nu=l}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \delta \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{i}{\gamma} \\ -i\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{mit geeigneten } \delta, \gamma \neq 0.$$

Damit erhalten wir

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \beta\, \delta \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} & \frac{i}{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$d_1 = \frac{\beta\, \delta}{\gamma} \neq 0 \, .$$

Alle Matrizen $\hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ sind von der Form $\alpha_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha_\nu \neq 0$ für $\nu = 1, \ldots, m-1$, deshalb folgt

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha_0 \neq 0,$$

d.h.

$$d_p = \alpha_0 \neq 0 \, .$$

Mit (3.33), (3.35) und (3.36) ergibt sich dann

$$\Delta(\lambda) = s_\alpha g_\alpha(\lambda) \frac{e^{\lambda R_+}}{\sin \frac{\pi \mu_m}{2}} \sum_{j=1}^{p} \Big(d_j + o(1) \Big) e^{i\vartheta_j \lambda} \qquad (|\lambda| \to \infty, \lambda \in S_{-1}),$$

und Lemma 3.1 liefert

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

3. $T_1 = II$ oder $T_1 = III$, $T_m = II$

Nach [9, Thm. 3.2] gilt für $\tau = 0, 1$

$$\begin{aligned}
(w_{1,1}^{II})^{(\tau)}(0,\rho) &= (w_{1,1}^{III})^{(\tau)}(0,\rho) = |\phi(0)|^{\tau-\frac{1}{2}}(-i\rho)^\tau e^{-i\rho\int_{x_1}^0 |\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),\\
(w_{1,2}^{II})^{(\tau)}(0,\rho) &= (w_{1,2}^{III})^{(\tau)}(0,\rho) = |\phi(0)|^{\tau-\frac{1}{2}}(i\rho)^\tau e^{i\rho\int_{x_1}^0 |\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),\\
(w_{m,1}^{II})^{(\tau)}(1,\rho) &= |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(-i\rho)^\tau \frac{1}{\sin\pi\mu_m}\, e^{-i\rho\int_{x_m}^1 |\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),\\
(w_{m,2}^{II})^{(\tau)}(1,\rho) &= |\phi(1)|^{\tau-\frac{1}{2}}(i\rho)^\tau \sin\pi\mu_m\, e^{i\rho\int_{x_m}^1 |\phi|}\cdot[1] && (|\rho|\to\infty, \rho\in S_1),
\end{aligned}$$

gegenüber den Fällen 1. und 2. ist in den Abschätzungen für $(w_{m,j}^{II})^{(\tau)}(1,\rho)$, $j = 1, 2$, der Faktor $2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}$ in $(w_{m,j}^{IV})^{(\tau)}(1,\rho)$ nun durch $\sin\pi\mu_m$ und $e^{i\frac{\pi}{4}}$ durch 1 zu ersetzen.
Mit $\rho =: i\lambda$, $\lambda \in S_{-1}$, und

$$g_\alpha(\lambda) := \begin{cases} h(i\lambda)i\sqrt{\dfrac{|\phi(1)|}{|\phi(0)|}}, & \text{falls } \sin\alpha = 0,\\[2ex] h(i\lambda)i\sqrt{|\phi(0)\phi(1)|}\cdot\lambda\sin\alpha, & \text{falls } \sin\alpha \neq 0\end{cases}$$

gilt durch analoges Vorgehen wie bei Fall 1. statt (3.9) nun

$$(3.37)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Delta(\lambda) \;=\; g_\alpha(\lambda)\cdot\Big(&a_1(i\lambda)\Big(2s_\alpha + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\pi\mu_m}\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+ a_2(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})\sin\pi\mu_m\, e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+ a_3(i\lambda)\Big(-2 + O(\lambda^{-\sigma_0})\Big)\frac{1}{\sin\pi\mu_m}\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| + \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\\
&+ a_4(i\lambda)O(\lambda^{-\sigma_0})\sin\pi\mu_m\, e^{-\lambda\int_0^{x_1}|\phi| - \lambda\int_{x_m}^1|\phi|}\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad (|\lambda|\to\infty, \lambda\in S_{-1}),
\end{aligned}\right.$$

gegenüber (3.9) ist nur $2\sin\frac{\pi\mu_m}{2}$ durch $\sin\pi\mu_m$ sowie der Faktor $e^{i\frac{\pi}{4}}$ in g_α durch 1 zu ersetzen. Da gemäß (3.25) auch hier (3.33) und (3.34) gelten, ist in (3.37) in analoger Weise

$$\Delta(\lambda) \;=\; g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda\int_0^{x_1}|\phi|+\lambda\int_{x_m}^1|\phi|}}{\sin\pi\mu_m}\left\{2s_\alpha\, e^{\theta^{(1)}\lambda}\Big(\sum_{j=1}^{p_1}\Big(d_j^{(1)}+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j^{(1)}\lambda}\Big)+o(1)\,e^{\theta^{(1)}\lambda}e^{iR_-\lambda}\right\}$$

$$(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}),$$

mit $\theta^{(1)}=\int\limits_{x_1}^{x_m}\sqrt{\phi_+^2}$ nach (3.33) und $p:=p_1$, $d_j:=d_j^{(1)}$, $\vartheta_j:=\vartheta_j^{(1)}$ für $j=1,\ldots,p$ also

(3.38)
$$\Delta(\lambda) \;=\; 2s_\alpha g_\alpha(\lambda)\,\frac{e^{\lambda R_+}}{\sin\pi\mu_m}\left\{\Big(\sum_{j=1}^{p}\Big(d_j+o(1)\Big)e^{i\vartheta_j\lambda}\Big)+o(1)\,e^{i\lambda R_-}\right\}$$

$$(|\lambda|\to\infty,\lambda\in S_{-1}).$$

Beziehung (3.25) liefert

(3.39)
$$\vartheta_1=-R_-\ ,\qquad \vartheta_p=R_-\ .$$

Da $\phi^2(0)>0$ und nach Voraussetzung ϕ^2 indefinit ist, existiert (mindestens) ein Teilintervall $(x_\nu,x_{\nu+1})\subset[0,1]$ mit $\nu\in\{1,\ldots,m-1\}$, so daß $\phi^2<0$ auf $(x_\nu,x_{\nu+1})$ ist. Also gibt es mindestens ein $l\in\{2,\ldots,m-2\}$ mit $T_l=IV$, dieses l sei maximal gewählt, und ein $k\in\{1,\ldots,m-3\}$ mit $T_k=III$, dieses k sei minimal gewählt. $T_1,\ldots,T_l$ entspricht dann der Situation in Fall 1, falls $T_1=III$, bzw. der in Fall 2, falls $T_1=II$.

3. a) $T_1=III$

Dann ist also $k=1$, und $T_{l+1}=\ldots=T_m=II$, denn wäre für ein $s\in\{l+1,\ldots,m\}$ $T_s\neq II$, so gäbe es wegen $\phi^2\in C(I)$ ein $t\in\{l+1,\ldots,m\}$ mit $T_t=IV$ (vgl. Tabelle 3.1 in Bemerkung 3.2 b)) im Widerspruch zur Wahl von l.
Nach 1.d) gilt

$$\prod_{\nu=1}^{l-1}\hat C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1})=\gamma\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta} & \frac{i}{\beta}\\ -i\beta & \beta\end{pmatrix}\qquad\text{mit }\ \beta,\gamma\neq 0.$$

Nach Lemma 3.2 bzw. Definition 3.3 ist

$$\begin{aligned}\prod_{\nu=l}^{m-1}\hat C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1}) &= \hat C_{l,1}(IV,II)\prod_{\nu=l+1}^{m-1}\hat C_{\nu,1}(II,II)\\ &= \delta\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\text{mit }\ \delta\neq 0.\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$\prod_{\nu=1}^{m-1}\hat C_{\nu,1}(T_\nu,T_{\nu+1})=\gamma\,\delta\begin{pmatrix}\frac{1}{\beta} & 0\\ -i\beta & 0\end{pmatrix}$$

mit

$$d_1 = \frac{\gamma\,\delta}{\beta} \neq 0\,.$$

Alle Matrizen $\hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$ besitzen sämtlich die Gestalt $\alpha_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha_\nu \neq 0$ für $\nu = 1, \ldots, m-1$, daher folgt

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \ \alpha_0 \neq 0,$$

also

$$d_p = \alpha_0 \neq 0\,.$$

Wie bisher folgt durch Zusammenfassen in (3.38) mit Hilfe von (3.39) und Anwendung von Lemma 3.1

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

3. b) $\quad T_1 = II$

Dann ist $k > 1$ und $T_1 = \ldots = T_{k-1} = II$ aufgrund der Wahl von k, denn wäre für ein $s \in \{2, \ldots, k-1\}$ $\ T_s \neq II$, so gäbe es ein $t \in \{2, \ldots, k-1\}$ mit $T_t = III$ (vgl. Tabelle 3.1) im Widerspruch zur Minimalität von k. Es gilt nach Definition 3.3

$$\prod_{\nu=1}^{k-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \ \delta \neq 0.$$

Analog zu 3.a) ist

$$\prod_{\nu=k}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ -i\beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \ \beta, \gamma \neq 0,$$

so daß

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \delta\,\gamma \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt, mit

$$d_1 = \frac{\delta\,\gamma}{\beta} \neq 0\,.$$

Weiter gilt mit Definition 3.3 wie auch bisher

$$\prod_{\nu=1}^{m-1} \hat{C}_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1}) = \alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \ \alpha_0 \neq 0,$$

also

$$d_p = \alpha_0 \neq 0\,.$$

Zusammenfassen in (3.38) mit Hilfe von (3.39) und Anwendung von Lemma 3.1 zeigt

$$\rho_n^2 = -\lambda_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty).$$

B. $\phi^2(0) < 0$

Diesen Fall untersucht man analog zu [5] und der bisherigen Vorgehensweise.

□

3.4 Beispiel

Abschließend betrachten wir das folgende

Beispiel 3.1. Wir untersuchen ein Eigenwertproblem im Zusammenhang mit der Airy-Differentialgleichung, nämlich

$$-u'' + xu = \rho^2\phi^2(x)u\,, \quad x \in I := [0,\infty)\,, \tag{3.40}$$

$$u(0) = 0\,, \tag{3.41}$$

$$\int_0^\infty |\phi^2(x)||u(x)|^2\,dx < \infty\,, \tag{3.42}$$

mit

$$\begin{aligned} \phi^2(x) &:= (x - \tfrac{1}{3})(x - \tfrac{2}{3})\phi_0(x) \qquad (x \in I),\\ \phi_0(x) &:= \begin{cases} 9, & x \in [0, \tfrac{2}{3}],\\ 9((x - \tfrac{2}{3})^3 + 1), & x \in (\tfrac{2}{3}, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Zur Einordnung in den Kontext der bisherigen Betrachtungen ist $\alpha := 0$ sowie $\chi(x) := x$ für alle $x \in I$ zu wählen. Es gilt

$$\begin{aligned} m = 2, \quad x_1 = \tfrac{1}{3}, \quad l_1 = 1, \quad T_1 = III,\\ x_2 = \tfrac{2}{3}, \quad l_2 = 1, \quad T_2 = IV, \end{aligned}$$

weiter ist $\phi_0 > 0$ auf I mit $\phi_0 \in C^2(I)$ wegen

$$\phi_0'(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{2}{3}], \\ 27(x - \frac{2}{3})^2, & x \in (\frac{2}{3}, \infty), \end{cases} \qquad \phi_0''(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{2}{3}], \\ 54(x - \frac{2}{3}), & x \in (\frac{2}{3}, \infty), \end{cases}$$

schließlich ist χ auf $[0,1]$ beschränkt und über I lokal integrierbar.
Wir zeigen zunächst, daß ϕ^2 und χ die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllen. Es ist $\phi^2 > 0$ auf $[0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$ und $\phi^2 < 0$ auf $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, d.h. ϕ^2 ist indefinit. Für $x \geq x_2$ gilt

$$\phi^2(x) = 9x^5 - 27x^4 + 32x^3 - \frac{29}{3}x^2 - \frac{11}{3}x + \frac{38}{27},$$

also erfüllt ϕ^2 Bedingung (2.7) aus Bemerkung 2.4 a) mit $n := 5$, für χ gilt

$$|\chi(x)| = |x| \leq 1 \cdot x^\beta \quad \text{für alle } x \in I \text{ mit } \beta := 1 < \frac{n}{2} - 1 = \frac{3}{2},$$

daher erfüllt χ Bedingung (2.8) aus Bemerkung 2.4 a), außerdem ist $\chi \geq 0$ auf I. Bemerkung 2.4 liefert daher die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 2.1 und Satz 3.1.
In unserem Beispiel gilt

$$\phi_-^2(x) = \begin{cases} -\phi^2(x), & x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \\ 0, & x \in I \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \end{cases}$$

und daher

$$\begin{aligned} R_- &= \int_0^1 \sqrt{\phi_-^2} = \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{-\phi^2(t)}\, dt = \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{-9(t - \tfrac{1}{3})(t - \tfrac{2}{3})}\, dt \\ &= 3 \int_{1/3}^{2/3} \sqrt{\tfrac{1}{36} - (t - \tfrac{1}{2})^2}\, dt = \frac{1}{12} \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2}\, du \\ &= \frac{\pi}{24}, \end{aligned}$$

so daß für die Eigenwerte von (3.40), (3.41), (3.42) gemäß (3.1)

$$\rho_n^2 = -\frac{n^2\pi^2}{R_-^2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = -24^2 n^2 \Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = -576\, n^2 \Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \qquad (n \to \infty)$$

folgt. Damit ergibt sich auch die folgende Aussage: Es gibt eine Nullfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, so daß

$$\rho_n^2 = -576\, n^2 (1 + c_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gilt.

Anhang A

Beweise der Lemmata 1.1 und 1.2

Wir beweisen nun die in Kapitel 1 angegebenen Lemmata 1.1 und 1.2.

Beweis von Lemma 1.1.
a) Seien $v, w : J \to \mathbb{C}$ zwei Lösungen von $l_\rho u = 0$ auf J; wir zeigen, daß $W(v,w) : J \to \mathbb{C}$ eine konstante Funktion ist.
Wegen $v, v', w, w' \in AC_{\text{loc}}(J)$ ist $W(v,w) \in AC_{\text{loc}}(J)$ fast überall in J differenzierbar mit

$$\begin{aligned}(W(v,w))'(x) &= (vw' - v'w)'(x) \\ &= v'(x)w'(x) + v(x)w''(x) - v''(x)w(x) - v'(x)w'(x) \\ &= v(x)\big(\chi(x) - \rho^2\phi^2(x)\big)w(x) - \big(\chi(x) - \rho^2\phi^2(x)\big)v(x)w(x) \\ &= 0 \quad \text{für fast alle } x \in J.\end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit $W(v,w) \in AC_{\text{loc}}(J)$, daß $W(v,w)$ in J konstant ist.
b) Es gilt für zwei Lösungen $v, w : J \to \mathbb{C}$ von $l_\rho u = 0$ auf J:

$$\begin{aligned} W(v,w) = \det\begin{pmatrix} v & w \\ v' & w' \end{pmatrix} \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig} \\ &\Longleftrightarrow \quad v,\ w \text{ linear unabhängig.}\end{aligned}$$

□

Beweis von Lemma 1.2.
a) Zu zeigen ist zunächst:

$$u : J \to \mathbb{C} \text{ ist Lösung von } l_\rho u = f \text{ auf } J \Longleftrightarrow \text{es gibt } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ mit}$$

$$u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{W(y_1,y_2)} f(t)\, dt \qquad (x \in J).$$

Seien zur Abkürzung

$$W := W(y_1, y_2) \neq 0\,, \quad R := \chi - \rho^2\phi^2\,.$$

Da nach Voraussetzung y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf J ist, gilt insbesondere $y_j,\ y_j' \in AC_{\text{loc}}(J) \subset C(J),\ j = 1, 2$, und wegen $\chi \in L^1_{\text{loc}}(J)$ und $\phi^2 \in C(J) \subset L^1_{\text{loc}}(J)$ ist $R \in L^1_{\text{loc}}(J)$.

(i) "$\Longleftarrow$": Es gelte

$$u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \qquad (x \in J), \tag{A.1}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und fest gewähltem $x_0 \in J$. Wir zeigen:

$$u,\ u' \in AC_{\text{loc}}(J),$$

$$u'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1'(x)y_2(t) - y_2'(x)y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \qquad (x \in J),$$

$$-u''(x) + R(x)u(x) = f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in J.$$

Aufgrund von $f \in L^1_{\text{loc}}(J), y_j \in C(J)$ für $j = 1, 2$ ist $y_j f \in L^1_{\text{loc}}(J)$ und

$$\Big(J \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{y_j f}{W}\Big) \in AC_{\text{loc}}(J) \qquad (j = 1, 2),$$

zusammen mit $y_j \in AC_{\text{loc}}(J)$ für $j = 1, 2$ folgt nach (A.1)

$$u \in AC_{\text{loc}}(J).$$

Daher ist u fast überall in J differenzierbar mit (siehe (A.1))

$$\text{(A.2)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u'(x) & = & c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + y_1'(x) \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} + y_1(x) \frac{y_2(x) f(x)}{W} \\ & & -y_2'(x) \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} - y_2(x) \frac{y_1(x) f(x)}{W} \\ & = & c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + y_1'(x) \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} - y_2'(x) \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} \\ & & \hfill (\text{fast alle } x \in J). \end{array} \right.$$

Da die rechte Seite von (A.2) lokal absolut stetig und lokal integrierbar auf J ist, gibt es in der Äquivalenzklasse von $u' \in L^1_{\text{loc}}(J)$ einen Repräsentanten, für den (A.2) für *alle* $x \in J$ gilt. Daher folgt

$$u' \in AC_{\text{loc}}(J),$$

und u' ist in J fast überall differenzierbar mit (siehe (A.2))

$$\text{(A.3)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u''(x) & = & c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + y_1''(x) \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} + y_1'(x) \frac{y_2(x) f(x)}{W} \\ & & -y_2''(x) \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} - y_2'(x) \frac{y_1(x) f(x)}{W} \\ & = & c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{y_1''(x)y_2(t) - y_2''(x)y_1(t)}{W} f(t)\, dt - f(x) \\ & & \hfill (\text{fast alle } x \in J). \end{array} \right.$$

Mit (A.1), (A.3) und $l_\rho y_j = 0$ auf J, $j = 1,2$, verifiziert man durch Einsetzen sofort

$$-u''(x) + R(x)u(x) = f(x) \qquad (\text{fast alle } x \in J).$$

Der Zusatz über u' in der Behauptung wurde in (A.2) und der nachfolgenden Argumentation, daß (A.2) für alle $x \in J$ gilt, bereits bewiesen.

(ii) "$\Longrightarrow$": Sei $u \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$ mit $u' \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$ und

$$-u''(x) + R(x)u(x) = f(x) \qquad (\text{fast alle } x \in J). \tag{A.4}$$

Sei $x_0 \in J$ fest gewählt. Wir zeigen, daß $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$u^{(\tau)}(x) = c_1 y_1^{(\tau)}(x) + c_2 y_2^{(\tau)}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1^{(\tau)}(x)y_2(t) - y_2^{(\tau)}(x)y_1(t)}{W} f(t)\,dt \qquad (x \in J,\ \tau = 0,1).$$

Dazu transformieren wir (A.4) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung vermöge

$$u_1 := u\,, \quad u_2 := u'\,.$$

Damit ist (A.4) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ R(x)u_1(x) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ R(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

$$(\text{fast alle } x \in J).$$

Das zugehörige homogene Differentialgleichungssystem besitzt nach Voraussetzung die Fundamentalmatrix

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \qquad (x \in J),$$

und wegen $\det \Phi(x) = W \neq 0$ für alle $x \in J$ ist die Matrix $\Phi(x)$ für alle $x \in J$ invertierbar. Mit Hilfe der "Variation der Konstanten"geben wir zunächst eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (A.5) an:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt \qquad (x \in J).$$

Die allgemeine Lösung von (A.5) lautet deshalb

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt \qquad (x \in J)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dabei ist nun

$$\Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt \;=\; \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\det \Phi(t)} \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \quad \Phi(x)\int_{x_0}^{x}\frac{1}{W}\begin{pmatrix} y_2(t)f(t) \\ -y_1(t)f(t)\end{pmatrix}dt$$

$$= \quad \begin{pmatrix} y_1(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{y_2 f}{W} - y_2(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{y_1 f}{W} \\ y_1'(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{y_2 f}{W} - y_2'(x)\int\limits_{x_0}^{x}\frac{y_1 f}{W}\end{pmatrix} \qquad (x \in J),$$

so daß

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int\limits_{x_0}^{x}\frac{y_1(x)y_2(t)-y_2(x)y_1(t)}{W}f(t)\,dt \\ \int\limits_{x_0}^{x}\frac{y_1'(x)y_2(t)-y_2'(x)y_1(t)}{W}f(t)\,dt\end{pmatrix} \qquad (x \in J);$$

und es folgt:

$$u^{(\tau)}(x) = c_1 y_1^{(\tau)}(x) + c_2 y_2^{(\tau)}(x) + \int_{x_0}^{x}\frac{y_1^{(\tau)}(x)y_2(t) - y_2^{(\tau)}(x)y_1(t)}{W}f(t)\,dt \qquad (x \in J,\ \tau = 0, 1).$$

b) Nach a) besitzt jede Lösung von $l_\rho u = f$ auf J die Gestalt

$$u^{(\tau)}(x) = c_1 y_1^{(\tau)}(x) + c_2 y_2^{(\tau)}(x) + \int_{x_0}^{x}\frac{y_1^{(\tau)}(x)y_2(t) - y_2^{(\tau)}(x)y_1(t)}{W}f(t)\,dt \qquad (x \in J,\ \tau = 0, 1)$$

mit geeigneten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt also

$$\begin{aligned} u(x_0) &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = a, \\ u'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = b \end{aligned}$$

genau dann, wenn c_1, c_2 das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

(A.6) $$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0)\end{pmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

nach Voraussetzung gibt es genau ein $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, welches (A.6) löst. Daher existiert genau eine Lösung u von $l_\rho u = f$ auf J mit $u(x_0) = a, u'(x_0) = b$.

□

Anhang B

Hankelfunktionen

Hankelfunktionen $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ der Ordnung $\nu \in \mathbb{C}$ (auch Zylinderfunktionen dritter Art genannt) sind linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \Big(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\Big)u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{C} \setminus \{0\};\ \nu \in \mathbb{C} \text{ fest.}$$

Sie sind als Funktion von z für festes ν analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und besitzen folgende Eigenschaften:
Sei $\nu \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Dann gilt für $j = 1, 2$:

$$\text{(B.1)} \qquad \Big(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big)^n \Big(z^\nu H_\nu^{(j)}(z)\Big) = z^{\nu - n} H_{\nu - n}^{(j)}(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N})$$

(siehe Magnus-Oberhettinger-Soni [17, S. 67] oder auch Watson [31, S. 74]),

$$\text{(B.2)} \qquad H_{-\nu}^{(j)}(z) = e^{(-1)^{j-1}\nu\pi i} H_\nu^{(j)}(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

(siehe [17, S. 66] bzw. [31, S. 74]),

$$\text{(B.3)} \qquad W(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)})(z) := H_\nu^{(1)}(z)\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\frac{d}{dz}H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{4i}{\pi z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

(siehe [17, S. 68], [31, S. 76]),

$$\text{(B.4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} H_\nu^{(1)}\Big(ze^{n\pi i}\Big) &= \frac{\sin(1-n)\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_\nu^{(1)}(z) - e^{-\nu\pi i}\frac{\sin n\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_\nu^{(2)}(z), \\ H_\nu^{(2)}\Big(ze^{n\pi i}\Big) &= \frac{\sin(1+n)\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_\nu^{(2)}(z) + e^{\nu\pi i}\frac{\sin n\nu\pi}{\sin \nu\pi} H_\nu^{(1)}(z) \\ & \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \right.$$

(siehe [17, S. 68], [31, S. 75]),

$$\text{(B.5)} \qquad H_{\overline{\nu}}^{(1)}(\overline{z}) = \overline{H_\nu^{(2)}(z)}\,, \quad H_{\overline{\nu}}^{(2)}(\overline{z}) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

(siehe [17, S. 66]).

Ferner benötigen wir in Kapitel 2 zur asymptotischen Abschätzung der Funktionen v_1, v_2 die asymptotischen Darstellungen der Hankelfunktionen für $\nu \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Nach Watson [31, S. 197f.] gilt für $\nu \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$: Es gibt $c_1, c_2 > 0$, so daß gilt:

$$\text{(B.6)} \quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_1(z)) \\ \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, -\pi + \delta \le \arg z \le 2\pi - \delta, \text{ mit } \delta > 0, \\ \text{mit } |\psi_1(z)| \le c_1 \dfrac{1}{|z|}, \text{ wobei } c_1 \text{ nur von } \nu \text{ und } \delta, \text{ aber nicht von } z \text{ abhängt,} \end{cases}$$

$$\text{(B.7)} \quad \begin{cases} H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{-i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_2(z)) \\ \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, -2\pi + \delta \le \arg z \le \pi - \delta, \text{ mit } \delta > 0, \\ \text{mit } |\psi_2(z)| \le c_2 \dfrac{1}{|z|}, \text{ wobei } c_2 \text{ nur von } \nu \text{ und } \delta, \text{ aber nicht von } z \text{ abhängt.} \end{cases}$$

Für $H_\nu^{(1)}$ gilt daher insbesondere

$$\text{(B.8)} \quad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot \Big(1 + O\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\Big) \qquad (|z| \to \infty, 0 \le \arg z \le \pi) \\ \text{(gleichmäßig in } 0 \le \arg z \le \pi). \end{cases}$$

Die Darstellung (B.7) für $H_\nu^{(2)}$ ist jedoch für $\arg z = \pi$ nicht mehr gültig. Um trotzdem eine gleichmäßige Abschätzung für $0 \le \arg z \le \pi$ zu erhalten, wie in Kapitel 2 benötigt, verwenden wir zusätzlich (B.4):
Sei $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\pi - \delta \le \arg z \le 2\pi - \delta$. Es ist dann $-\delta \le \arg(z\, e^{-\pi i}) \le \pi - \delta$, und mit (B.4) gilt

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(z) &= H_\nu^{(2)}\Big((z\, e^{-\pi i}) e^{\pi i}\Big) \\ &= \frac{\sin(2\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)}\, H_\nu^{(2)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big) + e^{\nu\pi i}\, H_\nu^{(1)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big) \\ &= 2\cos(\nu\pi)\, H_\nu^{(2)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big) + e^{\nu\pi i}\, H_\nu^{(1)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big). \end{aligned}$$

Wegen $-\delta \le \arg(z\, e^{-\pi i}) \le \pi - \delta$ und $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ sind (B.6) und (B.7) anwendbar, und wir erhalten

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(z) &= 2\cos(\nu\pi) \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\frac{\pi i}{2}}\, e^{-i(-z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_2(z\, e^{-\pi i})) \\ &\quad + e^{\nu\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\frac{\pi i}{2}}\, e^{i(-z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_1(z\, e^{-\pi i})) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big(e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot(1+\psi_1(z\,e^{-\pi i}))\\
&\quad +2\cos(\nu\pi)\,i\,e^{-i(-z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot(1+\psi_2(z\,e^{-\pi i}))\Big)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+\psi_1(z\,e^{-\pi i})+2\cos(\nu\pi)\,i\,e^{2iz}(1+\psi_2(z\,e^{-\pi i}))\Big)
\end{aligned}
$$

d.h. es ist speziell für $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $0\le\arg z\le\pi$, mit (B.7) und dem letzten Ergebnis

$$
\begin{aligned}
H_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot(1+\psi_3(z))\\
&\quad\text{mit}\\
\psi_3(z) &= \begin{cases} \psi_2(z), & 0\le\arg z\le\pi-\delta,\\ \psi_1(z\,e^{-\pi i})+2\cos(\nu\pi)\,i\,e^{2iz}(1+\psi_2(z\,e^{-\pi i})), & \pi-\delta\le\arg z\le\pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ist nun $0\le\arg z\le\pi$, so gilt wegen $|e^{2iz}|=e^{-2\mathrm{Im}\,z}\le 1$ und (B.6), (B.7)

$$
\begin{aligned}
|\psi_3(z)| &\le \left\{\begin{array}{ll} c_2\dfrac{1}{|z|}, & 0\le\arg z\le\pi-\delta\\ c_1\dfrac{1}{|z|}+|2\cos(\nu\pi)|\Big(1+c_2\dfrac{1}{|z|}\Big), & \pi-\delta\le\arg z\le\pi \end{array}\right\}\\
&\le C \qquad \text{für } |z|\ge A,\ 0\le\arg z\le\pi
\end{aligned}
$$

mit geeigneten $C>0$, $A>0$, d.h. es ist

$$
\text{(B.9)}\qquad \begin{cases} H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big) & (|z|\to\infty, 0\le\arg z\le\pi)\\ \text{(gleichmäßig in } 0\le\arg z\le\pi). \end{cases}
$$

Diese Abschätzung ist, auf $0\le\arg z\le\pi-\delta$ eingeschränkt betrachtet, gegenüber (B.7) zwar gröber, aber sie gilt gleichmäßig in $0\le\arg z\le\pi$ und ist ausreichend zur Herleitung der gewünschten Ergebnisse.

Symbolverzeichnis

Symbol	Erklärung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\overline{z}$	die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert-komplexe Zahl
$\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z)$	Realteil, Imaginärteil von z
$o(f(z)), O(f(z))$	Landau-Symbole
$[c]$	spezielles Landau-Symbol ($c \in \mathbb{C}$)
$AC(I)$	Menge der auf dem Intervall I absolut stetigen Funktionen
$AC_{\mathrm{loc}}(I)$	Menge der auf I lokal absolut stetigen Funktionen
$C(I)$	Menge der auf I stetigen Funktionen
$C^n(I)$	Menge der auf I n-mal stetig differenzierbaren Funktionen ($n \in \mathbb{N}$)
$L^1(I)$	Menge der auf I (Lebesgue-) integrierbaren Funktionen
$L^1_{\mathrm{loc}}(I)$	Menge der auf I lokal integrierbaren Funktionen
$L^2(I)$	Menge der auf I quadratisch integrierbaren Funktionen
$L^2_k(I)$	Menge der auf I mit dem Gewicht k quadratisch integrierbaren Funktionen
H	Hilbertraum $L^2_{\lvert\phi^2\rvert}([0,\infty))$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$
$(\cdot,\cdot)$	Skalarprodukt in $L^2_{\lvert\phi^2\rvert}([0,\infty))$
$M^\perp$	orthogonales Komplement in H der Menge $M \subset H$
$H^{(1)}_\nu, H^{(2)}_\nu$	Hankelfunktionen der Ordnung $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$W(u,v)$	Wronskifunktion von u und v
$u \vert M$	Einschränkung von u auf die Menge M
1_M	Charakteristische Funktion der Menge M

Symbol	Erklärung
$D(T)$	Definitionsbereich des Operators T
$W(T)$	Wertebereich von T
T^{-1}	der zu T inverse Operator
T^*	der zu T adjungierte Operator
$\rho(T)$	Resolventenmenge von T
$\sigma(T)$	Spektrum von T
$\sigma_p(T)$	Punktspektrum von T
$\sigma_c(T)$	Kontinuierliches Spektrum von T
$\sigma^*(T)$	$\sigma^*(T) := \sigma(T) \setminus \{0\}$
$\sigma_p^*(T)$	$\sigma_p^*(T) := \sigma_p(T) \setminus \{0\}$
$\sigma_c^*(T)$	$\sigma_c^*(T) := \sigma_c(T) \setminus \{0\}$
L	der zum gegebenen Eigenwertproblem gehörende Differentialoperator
L_ρ^{-1}	Resolvente von L im Punkt ρ^2
l_ν	Ordnung der Nullstelle x_ν von ϕ^2, $\nu \in \{1, \ldots, m\}$
T_ν	Typ der Nullstelle x_ν, $T_\nu \in \{I, II, III, IV\}$
$C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$	Verbindungsmatrix
$C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$	Relevante Teilmatrix von $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$
$C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$	Relevante Teilmatrix von $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$
S_k	Sektor in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$

Literaturverzeichnis

[1] Beals, R.: Indefinite Sturm-Liouville Problems and Half-Range Completeness. J. Diff. Equ. **56**, 391–407 (1985)

[2] Ćurgus, B., Langer, H.: A Krein Space Approach to Symmetric Ordinary Differential Operators with an Indefinite Weight Function. J. Diff. Equ. **79**, 31–61 (1989)

[3] Daho, K., Langer, H.: Sturm-Liouville operators with an indefinite weight function. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **78A**, 161–191 (1977)

[4] Dorodnicyn, A. A.: Asymptotic laws of distribution of the characteristic values for certain special forms of differential equations of the second order. Amer. Math. Soc. Translations **16** (Series 2), 1–101 (1960). Original in Usp. Mat. Nauk **7**, 3–96 (1952).

[5] Eberhard, W., Freiling, G.: The distribution of the eigenvalues for second order eigenvalue problems in the presence of an arbitrary number of turning points. Res. in Math. **21**, 24–41 (1992)

[6] Eberhard, W., Freiling, G.: An expansion theorem for eigenvalue problems with several turning points. Analysis **13**, 301–308 (1993)

[7] Eberhard, W., Freiling, G., Schneider, A.: On the distribution of the eigenvalues of a class of indefinite eigenvalue problems. J. of Diff. and Integral Equ. **3**, 1167–1179 (1990)

[8] Eberhard, W., Freiling, G., Schneider, A.: Expansion theorems for a class of regular indefinite eigenvalue problems. J. of Diff. and Integral Equ. **3**, 1181–1200 (1990)

[9] Eberhard, W., Freiling, G., Schneider, A.: Connection Formulas for Second Order Differential Equations with a Complex Parameter and Having an Arbitrary Number of Turning Points. Math. Nachr. **165**, 205–229 (1994)

[10] Jörgens, K., Rellich, F.: Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1976

[11] Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 9. Auflage. Stuttgart: B. G. Teubner 1977

[12] Kaper, H., Lekkerkerker, C., Zettl, A.: Linear transport theory and an indefinite Sturm-Liouville-problem. In: Conference on Ordinary and Partial Differential Equations Dundee 1982. (Lecture Notes in Mathematics 964, 326–361) New York: Springer-Verlag 1982

[13] Langer, R. E.: The boundary problem associated with a differential equation in which the coefficient of the parameter changes sign. Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 1–24 (1929)

[14] Langer, R. E.: On the zeros of exponential sums and integrals. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 213–239 (1931)

[15] Langer, R. E.: On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 23–64 (1931)

[16] Langer, R. E.: The asymptotic solutions of a linear differential equation of the second order with two turning points. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 113–142 (1959)

[17] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R. P.: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Third Edition. New York: Springer-Verlag 1966

[18] McHugh, J.: An Historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with a Large Parameter and Turning Points. Arch. Hist. Exact Sci. **7**, 277–324 (1970/71)

[19] Messiah, A.: Quantenmechanik Band 1. 2. Auflage. Berlin–New York: W. de Gruyter 1991

[20] Mikulina, O. F.: Representations in terms of eigenfunctions of a second-order differential equation with one reversal point. Diff. Equ. **7**, 193–204 (1971). Original in Differents. Uravn. **7**, 244–260 (1971)

[21] Mingarelli, A. B.: Asymptotic Distribution of the Eigenvalues of Non-Definite Sturm-Liouville problems. In: Everitt, W. N., Lewis, R. T. (eds.): Ordinary differential equations and operators. (Lecture Notes in Mathematics 1032, 375–383) Berlin: Springer-Verlag 1983

[22] Naimark, M. A.: Linear Differential Operators, Part II. New York: Fr. Ungar Publishing Co. 1968

[23] Olver, F. W. J.: Asymptotics and special functions. New York–San Francisco–London: Academic Press 1974

[24] Pleijel, Å.: Some remarks about the limit point and limit circle theory. Ark. för Mat. **7**, nr. 41, 543–550 (1968)

[25] Pleijel, Å.: Complementary remarks about the limit point and limit circle theory. Ark. för Mat. **8**, nr. 6, 45–47 (1971)

[26] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics II. New York–San Francisco–London: Academic Press 1975

[27] Stakun, A. A.: Resolvent of a singular differential operator with a rotation point. Diff. Equ. **20**, 1455–1462 (1985). Original in Differents. Uravn. **20**, 2066–2075 (1984).

[28] Stakun, A. A.: Formulas for traces for a singular differential operator with a rotation point. Diff. Equ. **21**, 424–432 (1985). Original in Differents. Uravn. **21**, 636–646 (1985).

[29] Stakun, A. A.: Properties of a differential operator with a multiple turning point. Diff. Equ. **23**, 667–671 (1987). Original in Differents. Uravn. **23**, 993–999 (1987).

[30] Tamarkin, J.: Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions. Math. Z. **27**, 1–54 (1928)

[31] Watson, G. N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press 1966

[32] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen. Stuttgart: B. G. Teubner 1976

[33] Weyl, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220–269 (1909)

[34] Weyl, H.: Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2. Note). Nachr. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen **5**, Math.-phys. Klasse, 442–467 (1910)

[35] Wheeden, R. L., Zygmund, A.: Measure and Integral. New York–Basel: M. Dekker Inc. 1977