Anhang A

Beweise der Lemmata 1.1 und 1.2

Wir beweisen nun die in Kapitel 1 angegebenen Lemmata 1.1 und 1.2.

Beweis von Lemma 1.1.
a) Seien $v, w : J \to \mathbb{C}$ zwei Lösungen von $l_\rho u = 0$ auf J; wir zeigen, daß $W(v,w) : J \to \mathbb{C}$ eine konstante Funktion ist.
Wegen $v, v', w, w' \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$ ist $W(v,w) \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$ fast überall in J differenzierbar mit

$$\begin{aligned}(W(v,w))'(x) &= (vw' - v'w)'(x) \\ &= v'(x)w'(x) + v(x)w''(x) - v''(x)w(x) - v'(x)w'(x) \\ &= v(x)\big(\chi(x) - \rho^2\phi^2(x)\big)w(x) - \big(\chi(x) - \rho^2\phi^2(x)\big)v(x)w(x) \\ &= 0 \quad \text{für fast alle } x \in J.\end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit $W(v,w) \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$, daß $W(v,w)$ in J konstant ist.
b) Es gilt für zwei Lösungen $v, w : J \to \mathbb{C}$ von $l_\rho u = 0$ auf J:

$$\begin{aligned} W(v,w) = \det\begin{pmatrix} v & w \\ v' & w' \end{pmatrix} \neq 0 &\iff \begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ w' \end{pmatrix} \text{ linear unabhängig} \\ &\iff v,\ w \text{ linear unabhängig.}\end{aligned}$$

$\square$

Beweis von Lemma 1.2.
a) Zu zeigen ist zunächst:

$$u : J \to \mathbb{C} \text{ ist Lösung von } l_\rho u = f \text{ auf } J \iff \text{es gibt } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \text{ mit}$$

$$u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{W(y_1,y_2)} f(t)\,dt \qquad (x \in J).$$

Seien zur Abkürzung

$$W := W(y_1, y_2) \neq 0\,, \quad R := \chi - \rho^2\phi^2\,.$$

Da nach Voraussetzung y_1, y_2 ein Fundamentalsystem von $l_\rho u = 0$ auf J ist, gilt insbesondere $y_j,\ y_j' \in AC_{\mathrm{loc}}(J) \subset C(J),\ j = 1,2$, und wegen $\chi \in L^1_{\mathrm{loc}}(J)$ und $\phi^2 \in C(J) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(J)$ ist $R \in L^1_{\mathrm{loc}}(J)$.

(i) "$\Longleftarrow$": Es gelte

$$\text{(A.1)} \qquad u(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \qquad (x \in J),$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ und fest gewähltem $x_0 \in J$. Wir zeigen:

$$u,\ u' \in AC_{\mathrm{loc}}(J),$$

$$u'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1'(x)y_2(t) - y_2'(x)y_1(t)}{W(y_1, y_2)} f(t)\, dt \qquad (x \in J),$$

$$-u''(x) + R(x)u(x) = f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in J.$$

Aufgrund von $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(J), y_j \in C(J)$ für $j = 1, 2$ ist $y_j f \in L^1_{\mathrm{loc}}(J)$ und

$$\Big(J \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{y_j f}{W}\Big) \in AC_{\mathrm{loc}}(J) \qquad (j = 1, 2),$$

zusammen mit $y_j \in AC_{\mathrm{loc}}(J)$ für $j = 1, 2$ folgt nach (A.1)

$$u \in AC_{\mathrm{loc}}(J).$$

Daher ist u fast überall in J differenzierbar mit (siehe (A.1))

$$\text{(A.2)} \quad \left\{ \begin{aligned} u'(x) &= c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + y_1'(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} + y_1(x) \frac{y_2(x) f(x)}{W} \\ &\quad - y_2'(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} - y_2(x) \frac{y_1(x) f(x)}{W} \\ &= c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + y_1'(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} - y_2'(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} \\ &\qquad\qquad (\text{fast alle } x \in J). \end{aligned} \right.$$

Da die rechte Seite von (A.2) lokal absolut stetig und lokal integrierbar auf J ist, gibt es in der Äquivalenzklasse von $u' \in L^1_{\mathrm{loc}}(J)$ einen Repräsentanten, für den (A.2) für *alle* $x \in J$ gilt. Daher folgt

$$u' \in AC_{\mathrm{loc}}(J),$$

und u' ist in J fast überall differenzierbar mit (siehe (A.2))

$$\text{(A.3)} \quad \left\{ \begin{aligned} u''(x) &= c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + y_1''(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} + y_1'(x) \frac{y_2(x) f(x)}{W} \\ &\quad - y_2''(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} - y_2'(x) \frac{y_1(x) f(x)}{W} \\ &= c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1''(x)y_2(t) - y_2''(x)y_1(t)}{W} f(t)\, dt - f(x) \\ &\qquad\qquad (\text{fast alle } x \in J). \end{aligned} \right.$$

Mit (A.1), (A.3) und $l_\rho y_j = 0$ auf J, $j = 1, 2$, verifiziert man durch Einsetzen sofort

$$-u''(x) + R(x)u(x) = f(x) \qquad (\text{fast alle } x \in J).$$

Der Zusatz über u' in der Behauptung wurde in (A.2) und der nachfolgenden Argumentation, daß (A.2) für alle $x \in J$ gilt, bereits bewiesen.

(ii) "$\Longrightarrow$": Sei $u \in AC_{\text{loc}}(J)$ mit $u' \in AC_{\text{loc}}(J)$ und

$$-u''(x) + R(x)u(x) = f(x) \qquad (\text{fast alle } x \in J). \tag{A.4}$$

Sei $x_0 \in J$ fest gewählt. Wir zeigen, daß $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ existieren mit

$$u^{(\tau)}(x) = c_1 y_1^{(\tau)}(x) + c_2 y_2^{(\tau)}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1^{(\tau)}(x) y_2(t) - y_2^{(\tau)}(x) y_1(t)}{W} f(t)\, dt \qquad (x \in J,\ \tau = 0, 1).$$

Dazu transformieren wir (A.4) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung vermöge

$$u_1 := u\,, \quad u_2 := u'\,.$$

Damit ist (A.4) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ R(x)u_1(x) - f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ R(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix} \tag{A.5}$$
$$(\text{fast alle } x \in J).$$

Das zugehörige homogene Differentialgleichungssystem besitzt nach Voraussetzung die Fundamentalmatrix

$$\Phi(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \qquad (x \in J),$$

und wegen $\det \Phi(x) = W \neq 0$ für alle $x \in J$ ist die Matrix $\Phi(x)$ für alle $x \in J$ invertierbar. Mit Hilfe der "Variation der Konstanten"geben wir zunächst eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (A.5) an:

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt \qquad (x \in J).$$

Die allgemeine Lösung von (A.5) lautet deshalb

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt \qquad (x \in J)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dabei ist nun

$$\Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt \;=\; \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\det \Phi(t)} \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \frac{1}{W} \begin{pmatrix} y_2(t)f(t) \\ -y_1(t)f(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \begin{pmatrix} y_1(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} - y_2(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} \\ y_1'(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_2 f}{W} - y_2'(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1 f}{W} \end{pmatrix} \qquad (x \in J),$$

so daß

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1(x)y_2(t) - y_2(x)y_1(t)}{W} f(t)\, dt \\ \int\limits_{x_0}^{x} \frac{y_1'(x)y_2(t) - y_2'(x)y_1(t)}{W} f(t)\, dt \end{pmatrix} \qquad (x \in J);$$

und es folgt:

$$u^{(\tau)}(x) = c_1 y_1^{(\tau)}(x) + c_2 y_2^{(\tau)}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1^{(\tau)}(x) y_2(t) - y_2^{(\tau)}(x) y_1(t)}{W} f(t)\, dt \qquad (x \in J,\ \tau = 0, 1).$$

b) Nach a) besitzt jede Lösung von $l_\rho u = f$ auf J die Gestalt

$$u^{(\tau)}(x) = c_1 y_1^{(\tau)}(x) + c_2 y_2^{(\tau)}(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{y_1^{(\tau)}(x) y_2(t) - y_2^{(\tau)}(x) y_1(t)}{W} f(t)\, dt \qquad (x \in J,\ \tau = 0, 1)$$

mit geeigneten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Dann gilt also

$$\begin{aligned} u(x_0) &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = a, \\ u'(x_0) &= c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = b \end{aligned}$$

genau dann, wenn c_1, c_2 das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\text{(A.6)} \qquad \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0$$

nach Voraussetzung gibt es genau ein $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$, welches (A.6) löst. Daher existiert genau eine Lösung u von $l_\rho u = f$ auf J mit $u(x_0) = a, u'(x_0) = b$.

$\square$

Anhang B

Hankelfunktionen

Hankelfunktionen $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$ der Ordnung $\nu \in \mathbb{C}$ (auch Zylinderfunktionen dritter Art genannt) sind linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\,\frac{du}{dz} + \Big(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\Big)u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{C} \setminus \{0\};\ \nu \in \mathbb{C} \text{ fest.}$$

Sie sind als Funktion von z für festes ν analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und besitzen folgende Eigenschaften:
Sei $\nu \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Dann gilt für $j = 1, 2$:

$$\text{(B.1)} \qquad \Big(\frac{1}{z}\,\frac{d}{dz}\Big)^n \Big(z^\nu H_\nu^{(j)}(z)\Big) = z^{\nu-n}\, H_{\nu-n}^{(j)}(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N})$$

(siehe Magnus-Oberhettinger-Soni [17, S. 67] oder auch Watson [31, S. 74]),

$$\text{(B.2)} \qquad H_{-\nu}^{(j)}(z) = e^{(-1)^{j-1}\nu\pi i}\, H_\nu^{(j)}(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

(siehe [17, S. 66] bzw. [31, S. 74]),

$$\text{(B.3)} \qquad W(H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)})(z) := H_\nu^{(1)}(z)\,\frac{d}{dz}H_\nu^{(2)}(z) - H_\nu^{(2)}(z)\,\frac{d}{dz}H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{4i}{\pi z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

(siehe [17, S. 68], [31, S. 76]),

$$\text{(B.4)} \qquad \left\{ \begin{aligned} H_\nu^{(1)}\Big(ze^{n\pi i}\Big) &= \frac{\sin(1-n)\nu\pi}{\sin \nu\pi}\, H_\nu^{(1)}(z) - e^{-\nu\pi i}\frac{\sin n\nu\pi}{\sin \nu\pi}\, H_\nu^{(2)}(z), \\ H_\nu^{(2)}\Big(ze^{n\pi i}\Big) &= \frac{\sin(1+n)\nu\pi}{\sin \nu\pi}\, H_\nu^{(2)}(z) + e^{\nu\pi i}\frac{\sin n\nu\pi}{\sin \nu\pi}\, H_\nu^{(1)}(z) \\ & \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \right.$$

(siehe [17, S. 68], [31, S. 75]),

$$\text{(B.5)} \qquad H_{\overline{\nu}}^{(1)}(\overline{z}) = \overline{H_\nu^{(2)}(z)}\,, \quad H_{\overline{\nu}}^{(2)}(\overline{z}) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

(siehe [17, S. 66]).

Ferner benötigen wir in Kapitel 2 zur asymptotischen Abschätzung der Funktionen v_1, v_2 die asymptotischen Darstellungen der Hankelfunktionen für $\nu \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$. Nach Watson [31, S. 197f.] gilt für $\nu \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$: Es gibt $c_1, c_2 > 0$, so daß gilt:

$$
\text{(B.6)} \qquad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_1(z)) \\ \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, -\pi + \delta \le \arg z \le 2\pi - \delta, \text{ mit } \delta > 0, \\ \text{mit } |\psi_1(z)| \le c_1 \dfrac{1}{|z|}, \text{ wobei } c_1 \text{ nur von } \nu \text{ und } \delta, \text{ aber nicht von } z \text{ abhängt,} \end{cases}
$$

$$
\text{(B.7)} \qquad \begin{cases} H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{-i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_2(z)) \\ \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, -2\pi + \delta \le \arg z \le \pi - \delta, \text{ mit } \delta > 0, \\ \text{mit } |\psi_2(z)| \le c_2 \dfrac{1}{|z|}, \text{ wobei } c_2 \text{ nur von } \nu \text{ und } \delta, \text{ aber nicht von } z \text{ abhängt.} \end{cases}
$$

Für $H_\nu^{(1)}$ gilt daher insbesondere

$$
\text{(B.8)} \qquad \begin{cases} H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\, e^{i(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot \Big(1 + O\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\Big) \qquad (|z| \to \infty, 0 \le \arg z \le \pi) \\ \text{(gleichmäßig in } 0 \le \arg z \le \pi). \end{cases}
$$

Die Darstellung (B.7) für $H_\nu^{(2)}$ ist jedoch für $\arg z = \pi$ nicht mehr gültig. Um trotzdem eine gleichmäßige Abschätzung für $0 \le \arg z \le \pi$ zu erhalten, wie in Kapitel 2 benötigt, verwenden wir zusätzlich (B.4):
Sei $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\pi - \delta \le \arg z \le 2\pi - \delta$. Es ist dann $-\delta \le \arg(z\, e^{-\pi i}) \le \pi - \delta$, und mit (B.4) gilt

$$
\begin{aligned}
H_\nu^{(2)}(z) &= H_\nu^{(2)}\Big((z\, e^{-\pi i})e^{\pi i}\Big) \\
&= \frac{\sin(2\nu\pi)}{\sin(\nu\pi)}\, H_\nu^{(2)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big) + e^{\nu\pi i}\, H_\nu^{(1)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big) \\
&= 2\cos(\nu\pi)\, H_\nu^{(2)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big) + e^{\nu\pi i}\, H_\nu^{(1)}\Big(z\, e^{-\pi i}\Big).
\end{aligned}
$$

Wegen $-\delta \le \arg(z\, e^{-\pi i}) \le \pi - \delta$ und $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ sind (B.6) und (B.7) anwendbar, und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
H_\nu^{(2)}(z) = {} & 2\cos(\nu\pi)\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\frac{\pi i}{2}}\, e^{-i(-z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_2(z\, e^{-\pi i})) \\
& + e^{\nu\pi i} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{\frac{\pi i}{2}}\, e^{i(-z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \cdot (1 + \psi_1(z\, e^{-\pi i}))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\Big(e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot(1+\psi_1(z\,e^{-\pi i}))\\
&\quad +2\cos(\nu\pi)\,i\,e^{-i(-z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot(1+\psi_2(z\,e^{-\pi i}))\Big)\\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+\psi_1(z\,e^{-\pi i})+2\cos(\nu\pi)\,i\,e^{2iz}(1+\psi_2(z\,e^{-\pi i}))\Big)
\end{aligned}
$$

d.h. es ist speziell für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $0 \le \arg z \le \pi$, mit (B.7) und dem letzten Ergebnis

$$
\begin{aligned}
H_\nu^{(2)}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot(1+\psi_3(z))\\
&\quad \text{mit}\\
\psi_3(z) &= \begin{cases} \psi_2(z), & 0 \le \arg z \le \pi-\delta,\\ \psi_1(z\,e^{-\pi i})+2\cos(\nu\pi)\,i\,e^{2iz}(1+\psi_2(z\,e^{-\pi i})), & \pi-\delta \le \arg z \le \pi. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ist nun $0 \le \arg z \le \pi$, so gilt wegen $|e^{2iz}| = e^{-2\operatorname{Im} z} \le 1$ und (B.6), (B.7)

$$
\begin{aligned}
|\psi_3(z)| &\le \left\{ \begin{array}{cc} c_2\dfrac{1}{|z|}, & 0 \le \arg z \le \pi-\delta \\ c_1\dfrac{1}{|z|}+|2\cos(\nu\pi)|\Big(1+c_2\dfrac{1}{|z|}\Big), & \pi-\delta \le \arg z \le \pi \end{array} \right\}\\
&\le C \qquad \text{für } |z| \ge A,\ 0 \le \arg z \le \pi
\end{aligned}
$$

mit geeigneten $C > 0$, $A > 0$, d.h. es ist

$$
\text{(B.9)} \qquad \begin{cases} H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4})}\cdot\Big(1+O(1)\Big) \qquad (|z|\to\infty, 0 \le \arg z \le \pi)\\ \text{(gleichmäßig in } 0 \le \arg z \le \pi). \end{cases}
$$

Diese Abschätzung ist, auf $0 \le \arg z \le \pi-\delta$ eingeschränkt betrachtet, gegenüber (B.7) zwar gröber, aber sie gilt gleichmäßig in $0 \le \arg z \le \pi$ und ist ausreichend zur Herleitung der gewünschten Ergebnisse.

Symbolverzeichnis

Symbol	Erklärung
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\overline{z}$	die zu $z \in \mathbb{C}$ konjugiert-komplexe Zahl
$\mathrm{Re}\,(z), \mathrm{Im}\,(z)$	Realteil, Imaginärteil von z
$o(f(z)), O(f(z))$	Landau-Symbole
$[c]$	spezielles Landau-Symbol ($c \in \mathbb{C}$)
$AC(I)$	Menge der auf dem Intervall I absolut stetigen Funktionen
$AC_{\mathrm{loc}}(I)$	Menge der auf I lokal absolut stetigen Funktionen
$C(I)$	Menge der auf I stetigen Funktionen
$C^n(I)$	Menge der auf I n-mal stetig differenzierbaren Funktionen ($n \in \mathbb{N}$)
$L^1(I)$	Menge der auf I (Lebesgue-) integrierbaren Funktionen
$L^1_{\mathrm{loc}}(I)$	Menge der auf I lokal integrierbaren Funktionen
$L^2(I)$	Menge der auf I quadratisch integrierbaren Funktionen
$L^2_k(I)$	Menge der auf I mit dem Gewicht k quadratisch integrierbaren Funktionen
H	Hilbertraum $L^2_{\lvert\phi^2\rvert}([0,\infty))$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$
$(\cdot,\cdot)$	Skalarprodukt in $L^2_{\lvert\phi^2\rvert}([0,\infty))$
$M^\perp$	orthogonales Komplement in H der Menge $M \subset H$
$H^{(1)}_\nu, H^{(2)}_\nu$	Hankelfunktionen der Ordnung $\nu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$
$W(u,v)$	Wronskifunktion von u und v
$u\lvert M$	Einschränkung von u auf die Menge M
1_M	Charakteristische Funktion der Menge M

Symbol	Erklärung
$D(T)$	Definitionsbereich des Operators T
$W(T)$	Wertebereich von T
T^{-1}	der zu T inverse Operator
T^*	der zu T adjungierte Operator
$\rho(T)$	Resolventenmenge von T
$\sigma(T)$	Spektrum von T
$\sigma_p(T)$	Punktspektrum von T
$\sigma_c(T)$	Kontinuierliches Spektrum von T
$\sigma^*(T)$	$\sigma^*(T) := \sigma(T) \setminus \{0\}$
$\sigma_p^*(T)$	$\sigma_p^*(T) := \sigma_p(T) \setminus \{0\}$
$\sigma_c^*(T)$	$\sigma_c^*(T) := \sigma_c(T) \setminus \{0\}$
L	der zum gegebenen Eigenwertproblem gehörende Differentialoperator
L_ρ^{-1}	Resolvente von L im Punkt ρ^2
l_ν	Ordnung der Nullstelle x_ν von ϕ^2, $\nu \in \{1, \ldots, m\}$
T_ν	Typ der Nullstelle x_ν, $T_\nu \in \{I, II, III, IV\}$
$C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$	Verbindungsmatrix
$C_{\nu,1}(T_\nu, T_{\nu+1})$	Relevante Teilmatrix von $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$
$C_{\nu,p}(T_\nu, T_{\nu+1})$	Relevante Teilmatrix von $C_\nu(T_\nu, T_{\nu+1})$
S_k	Sektor in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$

Literaturverzeichnis

[1] Beals, R.: Indefinite Sturm-Liouville Problems and Half-Range Completeness. J. Diff. Equ. **56**, 391–407 (1985)

[2] Ćurgus, B., Langer, H.: A Krein Space Approach to Symmetric Ordinary Differential Operators with an Indefinite Weight Function. J. Diff. Equ. **79**, 31–61 (1989)

[3] Daho, K., Langer, H.: Sturm-Liouville operators with an indefinite weight function. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **78A**, 161–191 (1977)

[4] Dorodnicyn, A. A.: Asymptotic laws of distribution of the characteristic values for certain special forms of differential equations of the second order. Amer. Math. Soc. Translations **16** (Series 2), 1–101 (1960). Original in Usp. Mat. Nauk **7**, 3–96 (1952).

[5] Eberhard, W., Freiling, G.: The distribution of the eigenvalues for second order eigenvalue problems in the presence of an arbitrary number of turning points. Res. in Math. **21**, 24–41 (1992)

[6] Eberhard, W., Freiling, G.: An expansion theorem for eigenvalue problems with several turning points. Analysis **13**, 301–308 (1993)

[7] Eberhard, W., Freiling, G., Schneider, A.: On the distribution of the eigenvalues of a class of indefinite eigenvalue problems. J. of Diff. and Integral Equ. **3**, 1167–1179 (1990)

[8] Eberhard, W., Freiling, G., Schneider, A.: Expansion theorems for a class of regular indefinite eigenvalue problems. J. of Diff. and Integral Equ. **3**, 1181–1200 (1990)

[9] Eberhard, W., Freiling, G., Schneider, A.: Connection Formulas for Second Order Differential Equations with a Complex Parameter and Having an Arbitrary Number of Turning Points. Math. Nachr. **165**, 205–229 (1994)

[10] Jörgens, K., Rellich, F.: Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag 1976

[11] Kamke, E.: Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. 9. Auflage. Stuttgart: B. G. Teubner 1977

[12] Kaper, H., Lekkerkerker, C., Zettl, A.: Linear transport theory and an indefinite Sturm-Liouville-problem. In: Conference on Ordinary and Partial Differential Equations Dundee 1982. (Lecture Notes in Mathematics 964, 326–361) New York: Springer-Verlag 1982

[13] Langer, R. E.: The boundary problem associated with a differential equation in which the coefficient of the parameter changes sign. Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 1–24 (1929)

[14] Langer, R. E.: On the zeros of exponential sums and integrals. Bull. Amer. Math. Soc. **37**, 213–239 (1931)

[15] Langer, R. E.: On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 23–64 (1931)

[16] Langer, R. E.: The asymptotic solutions of a linear differential equation of the second order with two turning points. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 113–142 (1959)

[17] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R. P.: Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. Third Edition. New York: Springer-Verlag 1966

[18] McHugh, J.: An Historical Survey of Ordinary Linear Differential Equations with a Large Parameter and Turning Points. Arch. Hist. Exact Sci. **7**, 277–324 (1970/71)

[19] Messiah, A.: Quantenmechanik Band 1. 2. Auflage. Berlin–New York: W. de Gruyter 1991

[20] Mikulina, O. F.: Representations in terms of eigenfunctions of a second-order differential equation with one reversal point. Diff. Equ. **7**, 193–204 (1971). Original in Differents. Uravn. **7**, 244–260 (1971)

[21] Mingarelli, A. B.: Asymptotic Distribution of the Eigenvalues of Non-Definite Sturm-Liouville problems. In: Everitt, W. N., Lewis, R. T. (eds.): Ordinary differential equations and operators. (Lecture Notes in Mathematics 1032, 375–383) Berlin: Springer-Verlag 1983

[22] Naimark, M. A.: Linear Differential Operators, Part II. New York: Fr. Ungar Publishing Co. 1968

[23] Olver, F. W. J.: Asymptotics and special functions. New York–San Francisco–London: Academic Press 1974

[24] Pleijel, Å.: Some remarks about the limit point and limit circle theory. Ark. för Mat. **7**, nr. 41, 543–550 (1968)

[25] Pleijel, Å.: Complementary remarks about the limit point and limit circle theory. Ark. för Mat. **8**, nr. 6, 45–47 (1971)

[26] Reed, M., Simon, B.: Methods of modern mathematical physics II. New York–San Francisco–London: Academic Press 1975

[27] Stakun, A. A.: Resolvent of a singular differential operator with a rotation point. Diff. Equ. **20**, 1455–1462 (1985). Original in Differents. Uravn. **20**, 2066–2075 (1984).

[28] Stakun, A. A.: Formulas for traces for a singular differential operator with a rotation point. Diff. Equ. **21**, 424–432 (1985). Original in Differents. Uravn. **21**, 636–646 (1985).

[29] Stakun, A. A.: Properties of a differential operator with a multiple turning point. Diff. Equ. **23**, 667–671 (1987). Original in Differents. Uravn. **23**, 993–999 (1987).

[30] Tamarkin, J.: Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions. Math. Z. **27**, 1–54 (1928)

[31] Watson, G. N.: A treatise on the theory of Bessel functions. Second Edition. Cambridge: Cambridge University Press 1966

[32] Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen. Stuttgart: B. G. Teubner 1976

[33] Weyl, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220–269 (1909)

[34] Weyl, H.: Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen (2. Note). Nachr. Kgl. Ges. d. Wiss. Göttingen **5**, Math.-phys. Klasse, 442–467 (1910)

[35] Wheeden, R. L., Zygmund, A.: Measure and Integral. New York–Basel: M. Dekker Inc. 1977