

Computersimulationen zur
statistischen Skaleninvarianz von Grenzflächen
in heterogenen magnetischen Systemen

Vom Fachbereich Physik-Technologie
der Gerhard-Mercator-Universität
Gesamthochschule Duisburg
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

von

Michael Jost

aus

Duisburg

Referent: Prof. Dr. K. D. Usadel
Korreferent: Prof. Dr. D. E. Wolf
Tag der mündlichen Prüfung: 22.12.1997

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die morphologischen und dynamischen Eigenschaften von getriebenen Grenzflächen in heterogenen magnetischen Systemen diskutiert. Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt hierbei auf Computersimulationen von Spinmodellen mit Zufallsfeldunordnung und der numerischen Behandlung von Bewegungsgleichungen, welche zur Beschreibung dieser Grenzflächen in der Literatur diskutiert werden.

Die getriebene Grenzflächendynamik in ungeordneten Systemen ist mit der Existenz eines sogenannten *depinning*-Übergangs verknüpft, welcher durch die Konkurrenz der treibenden Kraft und der Unordnung hervorgerufen wird. Am *depinning*-Übergang kann die Unordnung die Bewegung der Grenzfläche gerade noch stoppen, während für größere treibende Kräfte die Grenzfläche sich mit einer kraftabhängigen mittleren Geschwindigkeit bewegt.

In den hier betrachteten Systemen kann die Grenzflächendynamik am *depinning*-Übergang durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung beschrieben werden, was hier durch die Ableitung einer Bewegungsgleichung für eine Grenzfläche im *Soft-Spin*-Modell nochmals gezeigt wird. Das Skalenverhalten von Grenzflächen, die durch diese Gleichung beschrieben werden, und welches durch den dynamischen Exponenten z und den Rauigkeitsexponenten α vollständig bestimmt ist, wird in der Literatur kontrovers diskutiert, und es ist eine Aufgabe dieser Arbeit, dieses Problem detailliert zu untersuchen. Mit den hier durchgeführten skalentheoretischen Betrachtungen erhält man $z = 2$, unabhängig von der Grenzflächendimension \mathcal{D} , und $\alpha = (4 - \mathcal{D})/3$. Eine numerische Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung in $\mathcal{D} = 1$ zeigt, daß Abweichungen von diesen Ergebnissen in Simulationen auf *finite-size*-Effekte zurückgeführt werden können. Die theoretischen Ergebnisse werden ebenfalls durch Computersimulationen des *Soft-Spin*-Modells in $\mathcal{D} = 1$ und $\mathcal{D} = 2$ bestätigt.

Zusätzlich werden die hier erzielten Ergebnisse mit einer experimentellen Arbeit zur Domänenwandbewegung in CoPt-Filmen verglichen. Eine Analyse der Daten zeigt, daß im Rahmen der Fehlergrenzen diese Domänenwandbewegung eine experimentelle Realisierung einer Grenzfläche darstellt, welche durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung beschrieben werden kann.

In einem weiteren Teil der Arbeit wird das Leschhornsche Automatenmodell untersucht. Dieses Modell reproduziert die morphologischen Eigenschaften der Edwards-Wilkinson-Gleichung, jedoch nicht deren dynamischen Eigenschaften, so daß die Vermutung widerlegt ist, daß das Automatenmodell zu der Universalitätsklasse der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung gehört. Der Vorteil des Automatenmodells besteht zum einen in der Möglichkeit, sehr große System zu simulieren, und zum anderen darin die lawinenartige Bewegung der Grenzfläche zwischen zwei *pinning*-Zuständen zu studieren. Am *depinning*-Übergang sind die charakteristischen Lawinengrößen skaleninvariant, so daß ein Zusammenhang zwischen der Grenzflächendynamik und selbstorganisierter Kritikalität besteht.

Summary

In the present thesis the morphological and dynamical properties of driven interfaces in heterogenous magnetic systems are discussed. The focal points are computer simulations of spin systems with random-field disorder and the numerical treatment of equations of motion which are discussed in the literature for the description of interfaces.

Typical for the driven interface dynamics in disordered systems is the occurrence of the so-called depinning transition, which is based on the competition of the driving force and the disorder. Depending on the strength of the driving force the interface either gets pinned by the random impurities or moves steadily with non-zero velocity.

For the systems discussed here, the interface dynamics at the depinning transition can be described by the Edwards-Wilkinson equation with quenched disorder as it is shown here by the construction of an equation of motion for an interface in the soft spin model. In the literature, the scaling behavior of interfaces which are described by this equation, which is completely determined by the dynamic exponent z and the roughness exponent α , is controversially discussed and it is the purpose of this thesis to study this problem in detail. A rescaling analysis leads to $z = 2$ which is independent of the interface dimension \mathcal{D} , and to $\alpha = (4 - \mathcal{D})/3$. A numerical integration of the Edwards-Wilkinson equation in $\mathcal{D} = 1$ shows that deviations from these results in simulations can be traced back to finite-size effects. The theoretical results are confirmed likewise by simulations of the soft spin model in $\mathcal{D} = 1$ and $\mathcal{D} = 2$.

Furthermore the results obtained are compared with an experiment which studies the domain wall motion in CoPt-films. The analysis of the data shows that this domain wall motion is a first experimental realization of an interface which can be described by the Edwards-Wilkinson equation with quenched disorder.

In a further part of the thesis the automaton model of Leschhorn is analyzed. The model reproduced the morphological properties of the Edwards-Wilkinson equation but not the dynamical ones. Thus the presumption that the automaton model belongs to the universality class of the Edwards-Wilkinson equation with quenched disorder is disproved. However, the advantage of the automaton model is the possibility to study the avalanche-like motion of the interface between two pinning states and it is shown that the characteristic avalanche quantities are scale invariant at the depinning transition so that a context between the interface dynamics and self-organized criticality exists.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen	11
2.1	Grenzflächen in ungeordneten Medien	11
2.2	Quantitative Analyse der Grenzflächendynamik	15
3	Grenzflächen im Zufallsfeld-Ising-Modell	21
3.1	Das Ising-Modell mit Zufallsfeldunordnung	21
3.2	Kontinuumstheorie zur Grenzflächendynamik	24
3.3	Die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung . . .	29
4	Numerische Ergebnisse	33
4.1	Simulation des <i>Soft-Spin</i> -Modells	34
4.2	RFIM: Exakte Berechnung der Grenzflächenmorphologie	38
4.3	Die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung . . .	42
4.4	Das Leschhornsche Automatenmodell	50
4.4.1	Definition des Automatenmodells	50
4.4.2	Simulationen am <i>depinning</i> -Übergang	51
4.4.3	Aspekte von selbstorganisierter Kritikalität	60
5	Vergleich mit Experimenten: Rauigkeit von Domänenwänden in CoPt-Filmen	73
6	Zusammenfassung der Ergebnisse und Vergleich mit der Literatur	81

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zur Definition der Korrelationslängen ξ_{\parallel} und ξ_{\perp}	13
4.1	Höhenkorrelationsfunktion $C(r, \tau)$ im <i>Soft-Spin</i> -Modell	36
4.2	Skalenplot der Höhenkorrelationsfunktion $C(r, \tau)$ im <i>Soft-Spin</i> -Modell	36
4.3	Höhenkorrelationsfunktion $C(r)$ der exakten Grenzflächenmorphologie im zweidimensionalen Zufallsfeld-Ising-Modell	39
4.4	Grenzflächengeschwindigkeit $v(F)$ in $\mathcal{D} = 1$ (Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung)	43
4.5	Abhängigkeit der Korrelationslänge ξ_{\parallel} von der treibenden Kraft in $\mathcal{D} = 1$ (Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung) .	44
4.6	Der Strukturfaktor $S(k, t \gg t_s)$ im stationären Zustand am <i>depinning</i> -Übergang in $\mathcal{D} = 1$ (Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung)	45
4.7	Zeitabhängigkeit der Größen $C(1, t)$ und $C(L/2, t)$ am <i>depinning</i> -Übergang in $\mathcal{D} = 1$ (Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung)	46
4.8	Zeitabhängigkeit der Korrelationslänge ξ_{\parallel} am <i>depinning</i> -Übergang in $\mathcal{D} = 1$ (Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung) .	48
4.9	Der Strukturfaktor $S(k, t \gg t_s)$ im stationären Zustand in $\mathcal{D} = 1$ (Leschhornsches Automatenmodell)	52
4.10	Systemgrößenabhängigkeit der mittleren quadratischen Stufenhöhe $C_L(1)$ in $\mathcal{D} = 1$ (Leschhornsches Automatenmodell)	54
4.11	Zeitabhängigkeit der Größen $C(1, t)$ und $C(L/2, t)$ in $\mathcal{D} = 1$ (Leschhornsches Automatenmodell)	55
4.12	Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ in $\mathcal{D} = 2$ (Leschhornsches Automatenmodell)	56
4.13	Strukturfaktor $S(k, t \gg t_s)$ im stationären Zustand in $\mathcal{D} = 2$ (Leschhornsches Automatenmodell)	56
4.14	Zeitabhängigkeit der Größe $C(L/2, t)$ in $\mathcal{D} = 2$ (Leschhornsches Automatenmodell)	57

4.15	Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ in $\mathcal{D} = 3$ (Leschhornsches Automatenmodell)	58
4.16	Zeitabhängigkeit der Größe $C(L/2, t)$ und Systemlängenabhängigkeit des Exponenten β in $\mathcal{D} = 3$ (Leschhornsches Automatenmodell) . . .	58
4.17	Aufeinanderfolgende Serie Grenzflächen im <i>pinning</i> -Zustand im erweiterten Automatenmodell von Leschhorn	63
4.18	Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen im erweiterten Automatenmodell von Leschhorn	65
4.19	Die Lawinendauer $\tau(w)$ und die Lawinenhöhe $h(w)$ im erweiterten Automatenmodell von Leschhorn	67
4.20	Strukturfaktor $S(k)$ der Grenzfläche im <i>pinning</i> -Zustand im erweiterten Automatenmodell von Leschhorn	68
4.21	Bestimmung des Korrelationslängenexponenten ν im erweiterten Automatenmodell von Leschhorn	69
5.1	Zeitaufgelöstes Domänenwachstum in einem $\text{Co}_{28}\text{Pt}_{72}$ -Film	75
5.2	Konturplot derselben Domänen wie in Abb. 5.1	76
5.3	Zeitabhängigkeit des mittleren Domänenradius im $\text{Co}_{28}\text{Pt}_{72}$ -Film . . .	77
5.4	Höhenkorrelationsfunktion $C(s, t)$ im $\text{Co}_{28}\text{Pt}_{72}$ -Film	78
5.5	Zeitabhängigkeit der Rauigkeit $w^2(t)$ im $\text{Co}_{28}\text{Pt}_{72}$ -Film	78

1 Einleitung

Domänenwände sind Grenzflächen in magnetischen Systemen, sie trennen Bereiche unterschiedlicher Magnetisierungsrichtungen. Domänen entstehen z. B. beim Abkühlen in die ferromagnetische Tieftemperaturphase [1, 2, 3] oder beim feldinduzierten Wachstum in ansonsten homogen magnetisierten Medien [4, 5]. Wie das letzte Beispiel zeigt, ist die getriebene Dynamik von Domänenwänden [6, 7, 8] in ungeordneten magnetischen Materialien nicht nur von wissenschaftlichem, sondern auch von technologischem Interesse im Hinblick auf magnetische und magnetooptische Speichermedien, welche in der Informationstechnologie Verwendung finden.

Für die Morphologie und die Dynamik der Grenzflächen sind unterschiedliche Mechanismen verantwortlich, welche im folgenden am Beispiel eines Ferromagneten mit Zufallsfeldunordnung, bei dem eine Grenzfläche zwei Domänen entgegengesetzter Magnetisierungsrichtung trennt, kurz erläutert werden sollen. Durch ein äußeres homogenes Magnetfeld wird eine Domäne auf Kosten der anderen wachsen, so daß auch die Grenzfläche zwischen den Domänen ihre Position verändert. Je nach Vorzeichen der Zufallsfelder wird das Wachstum der Domäne lokal unterstützt oder gehemmt, was somit auch einen Einfluß auf die Grenzfläche hat. Weiterhin beeinflußt noch die Wechselwirkung der einzelnen magnetischen Momente untereinander das Wachstum der Domäne bzw. die Bewegung der Grenzfläche. Aufgrund dieser Wechselwirkung kann die Grenzfläche näherungsweise als elastische Membran angesehen werden [9], so daß die elastischen Kräfte zwischen unterschiedlichen Teilen der Grenzfläche den Zufallsfeldkräften entgegenwirken. Diese Konkurrenz zwischen den Kräften führt dazu, daß die Grenzflächen aufräumen.

Typisch für die Grenzflächenbewegung in ungeordneten Medien ist die Existenz eines sogenannten *depinning*-Übergangs. Bei diesem Übergang ist die treibende Kraft gerade so groß, daß die ortsfeste bzw. eingefrorene Unordnung (*quenched disorder*) die Bewegung der Grenzfläche noch stoppen kann, während für größere treibende Kräfte die Grenzfläche sich mit einer kraftabhängigen mittleren Geschwindigkeit bewegt. Das *Pinning* von Grenzflächen findet man nicht nur in magnetischen Systemen, sondern z. B. auch bei fluiden Grenzflächen in porösen Medien [10], wie sie in der Erdölförderung [6] vorkommen. Weiterhin findet man *pinning*-Effekte bei Ladungsdichtewellen [11, 12] und bei Flußlinien in Typ-II-Supraleitern [13].

Eine spezielle Form von Grenzflächen stellen die Oberflächen von Festkörpern dar, welche durch Anlagerung von Atomen wachsen können. Aufgrund der Relevanz in der Mikroelektronik ist hier als wichtigste Wachstumsmethode die Molekularstrahlepitaxie (MBE) zu nennen [14]. Im Gegensatz zu der Bewegung von Grenzflächen in ungeordneten Medien ist die Unordnung, die auf Fluktuationen in der Anlagerungsrate beruht, zeitabhängig, so daß hier ein *depinning*-Übergang nicht auftritt. Durch die Fluktuationen der Anlagerungsrate werden die Oberflächen jedoch auch

rauh, wobei diese Prozesse mit den gleichen Methoden beschrieben werden können, wie der Aufrauungsprozeß der Grenzflächen in ungeordneten Medien.

Die aufgeführten Beispiele zeigen, daß die Problematik der Grenzflächendynamik auf sehr unterschiedlichen Längenskalen existiert. Zur Beschreibung dieser Prozesse ist die statistische Skaleninvarianz mit den Konzepten der selbstaffinen Fraktale [15] und des *dynamic-scaling*-Ansatzes [16] von großer Bedeutung. Hierbei lassen sich die räumlichen und dynamischen Korrelationen der Grenzflächen durch Potenzgesetze beschreiben. Diese Konzepte sind jedoch nicht nur auf Grenzflächenprobleme beschränkt. Sie werden auch in der Molekularbiologie eingesetzt, um DNS-Sequenzen im Hinblick auf Korrelationen in der Abfolge des Auftretens der einzelnen Nukleinsäuren zu analysieren und somit den Aufbau und die Evolution der DNS-Sequenzen zu verstehen [17]. Codiert man die DNS-Sequenzen in Form einer Zeitreihe, so läßt sich dann diese Zeitreihe als selbstaffines Fraktal auffassen. Es zeigt sich, daß die Teile der DNS mit hohem Informationsgehalt durch einen kleineren Rauigkeitsexponenten beschrieben werden können als Teile mit geringem Informationsgehalt. Eine ähnliche Methode zeigt, daß Herzrhythmusstörungen durch das Fehlen von Korrelationen im Herzrhythmus charakterisiert werden können [18]. Ein weiteres aktuelles Gebiet ist die Analyse und Vorhersage von ökonomischen Zeitreihen, insbesondere von Börsenindizes. Hier zeigt sich, daß diese Zeitreihen durch Lévy-Walks beschrieben werden können [19]. In Analogie zu den biologischen und medizinischen Anwendungen findet man in der zeitlichen Umgebung eines Börsencrashes einen größeren Rauigkeitsexponenten als vor und nach einem Crash [20]. Im Zusammenhang mit der Vorhersage von Börsenindizes zeigt sich, daß das skaleninvariante Verhalten auf Zeitskalen von einigen Hundert Börsentagen vor einem Crash charakteristische Korrekturen aufweist [21]. Ähnliche Effekte findet man auch bei der seismischen Aktivität von Erdplatten, so daß die Hoffnung besteht, eine Methode zur Vorhersage von Erdbeben zu entwickeln.

Ziel dieser Dissertation ist es, die physikalischen Eigenschaften der zu Beginn angesprochenen Grenzflächen in ungeordneten magnetischen Medien zu diskutieren. Hierbei beschränke ich mich auf Untersuchungen der Grenzflächen am bzw. in der Nähe des *depinning*-Übergangs, da die Untersuchungen der Grenzflächen in der *pinning*-Phase und in dem Regime oberhalb des *depinning*-Übergangs schon in meiner Diplomarbeit [22] und in einer darauf aufbauenden Arbeit [23] durchgeführt wurden. Da ein scharfer *depinning*-Übergang bei endlichen Temperaturen aufgrund von thermischen Anregungen nicht existiert, sind die in dieser Arbeit dargestellten Computersimulationen und theoretischen Betrachtungen für $T = 0$ durchgeführt worden.

Ein häufig diskutiertes mikroskopisches Modell zur Beschreibung ungeordneter Fer-

romagnete ist das Zufallsfeld-Ising-Modell (*RFIM: random field Ising Model*), während diese Systeme auf mesoskopischen Skalen durch einen Ginzburg-Landau-Hamiltonian beschrieben werden können [24]. Dieses Modell, welches häufig auch als *Soft-Spin*-Modell bezeichnet wird [24], hat den Vorteil, daß dessen zeitliche Entwicklung durch eine Langevin-Dynamik beschrieben wird, so daß es auch bei $T = 0$ eine nichttriviale Dynamik besitzt. Somit ist das *Soft-Spin*-Modell zur Untersuchung der Dynamik der Grenzflächen besser geeignet als das Zufallsfeld-Ising-Modell, dessen zeitliche Entwicklung gewöhnlich auf der Monte-Carlo-Technik [25] beruht.

Mit der Annahme, daß Grenzflächen im Zufallsfeld-Ising-Modell durch eine elastische Membran angenähert werden können [9], zeigten Bruinsma und Aeppli [8], daß diese Grenzflächen am *depinning*-Übergang durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung [26] mit eingefrorener Unordnung

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \gamma \nabla^2 \mathbf{h} + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + F \quad (1.1)$$

beschrieben werden. Hierbei beschreibt der erste Summand den glättenden Einfluß der Oberflächenspannung, der zweite den Einfluß der ortsfesten, eingefrorenen Unordnung des einbettenden Mediums und der dritte eine äußere treibende Kraft. Eine weitere in der Literatur diskutierte Gleichung zur Beschreibung von Grenzflächen in ungeordneten Medien ist die Kardar-Parisi-Zhang- (KPZ) Gleichung [27] mit eingefrorener Unordnung

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \gamma \nabla^2 \mathbf{h} + \frac{\lambda}{2} (\nabla \mathbf{h})^2 + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + F, \quad (1.2)$$

wobei der Vorfaktor λ der KPZ-Nichtlinearität proportional zur mittleren Grenzflächengeschwindigkeit ist (für einen Überblick siehe [28]).

Das Skalenverhalten von Grenzflächen, welche durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung beschrieben werden, wird in der Literatur kontrovers diskutiert. Zur Lösung dieses Problems möchte die vorliegende Arbeit beitragen.

Im folgenden wird die Gliederung der Arbeit skizziert und jeweils die Motivation zu den durchgeführten Untersuchungen dargestellt.

Zur Bestätigung der theoretische Annahme, daß Grenzflächen im Zufallsfeld-Ising-Modell am *depinning*-Übergang durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung beschrieben werden können, wird in Abschnitt 3.2, basierend auf der exakten Lösung einer planaren Grenzfläche im reinen *Soft-Spin*-Modell [29], eine Bewegungsgleichung für die Grenzfläche hergeleitet. Am *depinning*-Übergang

entspricht diese der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung. Um eine Vorhersage über das Skalenverhalten von Grenzflächen zu erhalten, welche durch diese Gleichung beschrieben werden, wird die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung in Abschnitt 3.3 mit skalentheoretischen Methoden analysiert und mit anderen theoretischen Vorhersagen verglichen.

Problematisch bei der Ableitung von Bewegungsgleichungen für die Grenzflächendynamik ist, daß zur analytischen Behandlung Näherungen, wie z.B. das Ausschließen von Überhängen, gemacht werden müssen und auftretende Terme höherer Ordnung wie auch multiplikatives Rauschen vernachlässigt werden. Da diese Näherungen zum Teil heuristischer Art sind, hat auch die Untersuchung der zugrundeliegenden Spin-Modelle ihre Berechtigung, um zum einen ein vollständigeres Bild von den physikalischen Eigenschaften der untersuchten Systeme zu bekommen. Zum anderen erlauben die Simulationen der Spin-Modelle, die Richtigkeit der durchgeführten Annahmen und Näherungen zu überprüfen, um somit die Gültigkeit der erhaltenen Bewegungsgleichung und der zugehörigen Exponenten zu bestätigen. Die in meiner Diplomarbeit [22] durchgeführten Untersuchungen des *Soft-Spin*-Modells in der Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 1$ und eine darauf aufbauende Arbeit [23] ergaben für den Rauigkeitsexponenten und den dynamischen Exponenten am *depinning*-Übergang $\alpha \simeq 0.89$ bzw. $z \simeq 2.01$. Somit bestätigt insbesondere der numerisch gefundene Wert des dynamischen Exponenten das skalentheoretische Ergebnis. Aufgrund der recht großen Abweichung des Rauigkeitsexponenten vom theoretischen Ergebnis wird in Abschnitt 4.1 das *Soft-Spin*-Modell numerisch in der Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 2$ untersucht [30], um festzustellen, ob die Abweichung des Rauigkeitsexponenten im Spin-Modell systematisch oder auf Ungenauigkeiten der Simulationen zurückzuführen ist.

Die in [22, 23] gefundene Selbstaffinität der Grenzfläche in $\mathcal{D} = 1$ steht im Widerspruch zu den Ergebnissen von Ji und Robbins [31], welche in dieser Grenzflächendimension keine selbstaffinen Grenzflächen mit ihrem $T = 0$ -Modell des Zufallsfeld-Ising-Modells erhalten. Zur Klärung dieser Diskrepanz wird deshalb in Abschnitt 4.2 die Grenzflächenmorphologie im Zufallsfeld-Ising-Modell numerisch exakt mit graphentheoretischen Methoden berechnet [32].

Die erzielten numerischen und theoretischen Ergebnisse stehen zum Teil im Widerspruch mit anderen numerischen [23, 33] - [44] und theoretischen Betrachtungen [12, 33, 45, 46, 47] der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 1.1. Aus diesem Grund werden in Abschnitt 4.3 die erzielten theoretischen Ergebnisse durch eine numerische Integration der Bewegungsgleichung Gl. 1.1 in der Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 1$ überprüft. Numerische Untersuchungen ergaben bisher zum Teil [36, 38, 39], daß der Rauigkeitsexponent einen Wert größer als eins

hat. Dieses *super-roughening*-Skalenverhalten [48] tritt bei anderen Systemen nur im nichtasymptotischen Bereich kleiner Korrelationslängen auf, so z.B. im Wolf-Villain-Modell zur MBE [49, 50]. Deshalb wird hier ein System in den stationären Zustand getrieben, welches viel größer ist als die in der Literatur studierten Systeme, um so zu untersuchen, ob hier auch für sehr große Korrelationslängen das *super-roughening*-Skalenverhalten in ein normales Skalenverhalten mit Rauigkeitsexponenten $\alpha \leq 1$ übergeht.

Leschhorn schlug ein Automatenmodell vor [36, 42], das zur Edwards-Wilkinson-Universalitätsklasse gehören soll. Die Invarianz der Grenzflächengeschwindigkeit unter einer mittleren Verkipfung bestätigt zwar die Vermutung dahingehend, daß die KPZ-Nichtlinearität in diesem Modell nicht vorliegt [51]. Jedoch stimmen die Werte der charakteristischen Exponenten, welche Leschhorn erhält, nicht mit denen überein, welche in dieser Arbeit für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 1.1 erzielt wurden. Zum Verständnis dieser Diskrepanzen soll im Abschnitt 4.4.2 die charakteristischen Exponenten des Automatenmodells nochmals numerisch bestimmt werden [52].

Weiterhin wird in dieser Arbeit (Abschnitt 4.4.3) ein Zusammenhang zwischen der Grenzflächendynamik am *depinning*-Übergang und selbstorganisierten kritischen Verhalten (SOC) diskutiert. Selbstorganisierte Kritikalität [53] in getriebenen Systemen ist durch einen stationären Zustand fernab vom Gleichgewicht definiert, welcher durch die von lokalen Störungen initiierten Relaxationsprozesse, sogenannten Lawinen, erzeugt wird. Hierbei sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen skaleninvariant. Paradigmen sind die sogenannten Sandhaufenmodelle, welche durch Zellularautomaten beschrieben werden, siehe z.B. [54]. In diesen Modellen wird *Sand* solange auf zufällig ausgewählten Gitterpunkten verteilt, bis eine das spezielle Modell charakterisierende Stabilitätsbedingung verletzt ist. Durch diese Störung wird dann eine Lawine ausgelöst, die beendet ist, wenn das Stabilitätskriterium wieder für das gesamte System erfüllt ist. Basierend auf diesen Sandhaufenmodellen wird eine Erweiterung des Automatenmodells vorgeschlagen [55], die das Studium von lawinenartigen Bewegungen der Grenzfläche zwischen zwei *pinning*-Zuständen erlaubt [56]. Zusätzlich zu der Diskussion des aktuellen Themas der selbstorganisierten Kritikalität ermöglicht die Analyse der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch noch eine zu den *dynamic-scaling*-Methoden alternative Bestimmung des Skalenverhaltens der Grenzfläche.

Grenzflächen in ungeordneten Medien werden, außer mit analytischen Methoden, vorwiegend mit Computersimulationen von Modellsystemen oder durch die numerische Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung Gl. 1.1 oder der KPZ- Gl. 1.2 studiert. Experimentelle Untersuchungen sind in der Literatur nur für Systeme be-

kannt, welche der KPZ-Universalitätsklasse zuzuordnen sind. Hier sind zum einen sogenannte *paper-wetting*-Experimente zu nennen, bei denen das Fortschreiten einer feucht-trocken Grenzfläche in Papier betrachtet wird [57, 58]. Aufgrund der anisotropen Anordnung der Papierfasern, welche die ortsfeste Unordnung darstellen, ist der KPZ-Term am *depinning*-Übergang relevant [59]. Vergleiche mit Computersimulationen und theoretische Überlegungen zeigen, daß bei diesen Experimenten ein Zusammenhang mit der gerichteten Perkolation besteht [56, 58, 59], wobei die charakteristischen Exponenten in diesem Perkulationsproblem mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen. Weiterhin wurden Experimente zur Dynamik von fluiden Grenzflächen in porösen Medien durchgeführt, bei denen die Unordnung durch zufällig verteilte, ortsfeste Glasperlen zwischen zwei Glasplatten realisiert wird [60, 61, 62]. Nach Koplik und Levine [6] sollen fluide Grenzflächen in porösen Medien durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung beschreibbar sein. Eine Analyse der experimentellen Daten [62] und Computersimulationen [63] zeigen jedoch, daß die Grenzflächen im Experiment durch die KPZ-Gleichung mit einer effektiven algebraisch verteilten, zeitabhängigen Unordnung beschrieben werden können, wobei die erhaltenen Exponenten mit skalentheoretischen Überlegungen [64, 65] übereinstimmen. Experimente bei denen die Grenzflächen durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung beschrieben werden können, wurden erstmals in dünnen CoPt-Filmen realisiert [66, 67], bei denen das Ummagnetisierungsverhalten des Materials studiert wurde [66, 68]. In Kapitel 5 werden die Grenzflächen der hierbei auftretenden Domänen analysiert und im Zusammenhang mit dem *Soft-Spin*-Modell und der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung diskutiert.

Abschließend werden in Kapitel 6 die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefaßt und im Zusammenhang mit der Literatur dargestellt.

2 Grundlagen

2.1 Grenzflächen in ungeordneten Medien

Ziel dieses Abschnitts ist es, die grundlegenden Eigenschaften einer \mathcal{D} -dimensionalen getriebenen Grenzfläche in einem $d = \mathcal{D} + 1$ -dimensionalen Medium mit eingefrorener Unordnung zu diskutieren. Betrachtet man die Grenzfläche auf mesoskopischen Skalen, so können Überhänge, welche auf mikroskopischen Skalen existieren können, vernachlässigt werden. Die Grenzfläche kann dann durch eine einwertige Funktion $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ beschrieben werden, welche die Grenzflächenposition \mathbf{h} am Ort \mathbf{x} zur Zeit t beschreibt. Hierbei ist die Bewegungsrichtung der Grenzfläche \mathbf{h} senkrecht zum \mathcal{D} -dimensionalen Ortsvektor \mathbf{x} .

depinning-Übergang

Charakteristisch für das Problem der Bewegung einer Grenzfläche in einem Medium mit eingefrorener Unordnung ist die Existenz eines sogenannten *depinning*-Übergangs. Ist die treibende Kraft F kleiner als ein kritischer Wert F_C , so wird die Bewegung der Grenzfläche durch die Unordnung gestoppt, d. h., die lokale Geschwindigkeit dh/dt aller Punkte der Grenzfläche ist null. Für $F > F_C$ hingegen bewegt sich die Grenzfläche mit einer mittleren Geschwindigkeit $v = \langle dh/dt \rangle$, wobei $\langle \dots \rangle$ sowohl eine Mittelung über alle Grenzflächenelemente als auch über unterschiedliche Realisierungen der Unordnung beschreibt. In der Nähe des Schwellwertes F_C gehorcht der Zeitmittelwert dieser Geschwindigkeit einem Potenzgesetz

$$\langle v \rangle \sim (F - F_C)^\theta . \quad (2.1)$$

Die Bewegung der Grenzfläche in der Nähe des Schwellwertes, und somit der Wert der Geschwindigkeit v , variiert mit der Zeit, was wie folgt verstanden werden kann: Zu einem bestimmten Zeitpunkt besteht die Grenzfläche aus Regionen, bei denen die Unordnung die Bewegung gestoppt hat und aus solchen, welche sich mit einer von null verschiedenen Geschwindigkeit bewegen. Letztere können durch starke *pinning*-Zentren gestoppt werden, so daß der Wert von v kleiner wird. Im Gegensatz dazu können Regionen mit starken *pinning*-Zentren, welche die Grenzfläche temporär stoppen, aufgrund der elastischen Kräfte und der treibenden Kraft überwunden werden, d. h., v wird erhöht. Die größte Längenskala, auf der diese lokalen *depinning*-Prozesse ablaufen, kann man mit einer Korrelationslänge $\xi_{||}$ charakterisieren, welche bei der Annäherung an den Schwellwert F_C divergiert

$$\xi_{||} \sim |F - F_C|^{-\nu} . \quad (2.2)$$

Bei der folgenden Diskussion der Morphologie und Dynamik der Grenzfläche wird sich zeigen, daß der Geschwindigkeitsexponent θ und der Korrelationslängenexponent ν über eine Skalenbeziehung miteinander verknüpft sind.

Morphologie und Dynamik der Grenzfläche

Zur Diskussion der Zeitentwicklung der Grenzfläche gehen wir davon aus, daß die Grenzfläche zur Zeit $t = 0$ glatt ist, d. h. $h(\mathbf{x}, t = 0) = 0 \forall \mathbf{x}$. Auf die Grenzfläche wirkt eine effektive Kraft, welche sich aus der von außen wirkenden homogenen treibenden Kraft und den *pinning*-Kräften zusammensetzt. Für die in dieser Arbeit diskutierten magnetischen Systeme sind dies ein äußeres homogenes Magnetfeld und die Zufallsfelder. Aufgrund der Fluktuationen der effektiv wirkenden Kraft wird die anfangs glatte Grenzfläche ebenfalls Fluktuationen aufweisen. Diesem Aufrauungsprozeß wirken die elastischen Kräfte entgegen, so daß es zu einem komplizierten und in der Regel analytisch nicht exakt beschreibbaren Aufrauungsverhalten der Grenzfläche kommt. Dieses Aufrauen der Grenzfläche kann durch die größte Wellenlänge der Grenzflächenfluktuationen ξ_{\parallel} und der größten Amplitude ξ_{\perp} dieser Fluktuationen charakterisiert werden.

Wie Abb. 2.1 exemplarisch zeigt, wächst die Korrelationslänge ξ_{\parallel} mit der Zeit an. Typisch für die Dynamik von Grenzflächen ist, daß dieses Wachstum durch ein Potenzgesetz beschrieben werden kann

$$\xi_{\parallel}(t) \sim t^{1/z}, \quad (2.3)$$

wobei z als dynamischer Exponent bezeichnet wird. Für das Zeitverhalten der maximalen Amplitude der Fluktuationen ξ_{\perp} findet man ebenfalls ein Potenzgesetz,

$$\xi_{\perp}(t) \sim t^{\beta}. \quad (2.4)$$

Zu einem Zeitpunkt $t_S \simeq L^z$ gelangt ξ_{\parallel} in die Größenordnung der Systemlänge L und das Potenzgesetz Gl. 2.3 verliert seine Gültigkeit, da in einem endlichen System die Wellenlänge der größten Grenzflächenfluktuation nicht größer als die Systemlänge sein kann. Durch einen Vergleich der Gln. 2.3 und 2.4 findet man, daß die Amplitude der Grenzflächenfluktuationen skaliert wie

$$\xi_{\perp} \sim L^{\alpha}, \quad (2.5)$$

wobei α als Rauigkeitsexponent bezeichnet wird. Mit dieser Definition des Rauigkeitsexponenten findet man für den dynamischen Exponenten z durch Substitution

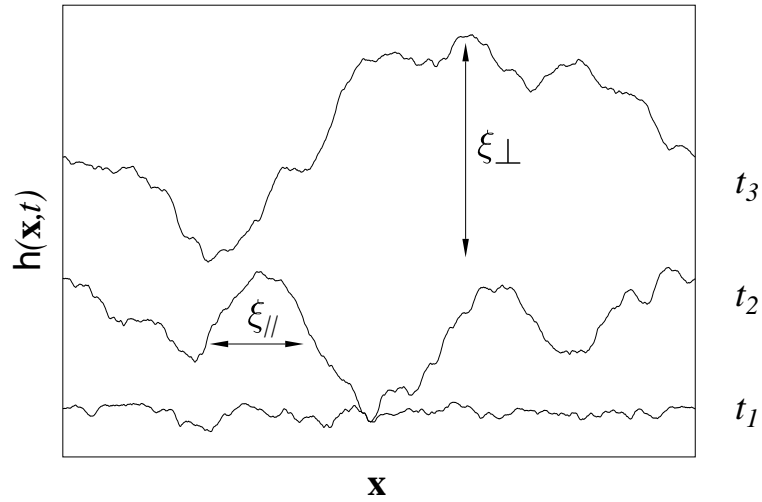


Abbildung 2.1: Exemplarische Grenzflächenkonfigurationen $h(\mathbf{x}, t)$ am Beispiel des Leschhornschen Automatenmodells in der Nähe des depinning-Übergangs für unterschiedliche Zeiten $t_1 < t_2 < t_3$. Die Korrelationslängen $\xi_{||}$ und ξ_{\perp} werden jeweils durch die Wellenlänge und Amplitude der größten Mode der Grenzflächenfluktuationen definiert.

der Gl. 2.3 in Gl. 2.4 und für $\xi_{||} \rightarrow L$ das Skalengesetz

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.6)$$

Da die Korrelationslängen $\xi_{||}$ und ξ_{\perp} das Wachstum der größten Wellenlänge und der größten Amplitude der Grenzflächenfluktuationen beschreiben, spiegelt sich das Skalenverhalten der Korrelationslängen auch in dem Skalenverhalten der Grenzfläche wider:

$$h(\mathbf{x}, t) \simeq a^{-\alpha} h(a\mathbf{x}, a^z t). \quad (2.7)$$

Dieser Ausdruck besagt, daß die Morphologie der Grenzfläche auf Längenskalen \mathbf{x} zur Zeit t der Morphologie zu einem späteren Zeitpunkt $a^z t$ auf größeren Längenskalen $a\mathbf{x}$ ähnelt. Im stationären Zustand geht Gl. 2.7 in

$$h(\mathbf{x}) \simeq a^{-\alpha} h(a\mathbf{x}) \quad (2.8)$$

über. Für Objekte, die sich durch Gl. 2.8 beschreiben lassen, hat Mandelbrot die Bezeichnung *selbstaffine Fraktale* geprägt [15]. Anschaulich lassen sich selbstaffine

Fraktale somit dadurch charakterisieren, daß parallel und normal zur Hauptbewegungsrichtung die Objekte mit unterschiedlichen Faktoren reskaliert werden müssen, um sie auf sich selbst abzubilden. Für den Fall, daß die Objekte zur Abbildung auf sich selbst in allen Raumrichtungen mit den gleichen Faktoren reskaliert werden müssen, spricht man von selbstähnlichen Fraktalen. Die Abbildung des Objektes auf sich selbst ist hier immer nur im statistischen Sinne gültig, d. h., nur die typischen morphologischen Eigenschaften sind invariant gegenüber der Transformation.

Wie oben schon erwähnt, setzt sich die Bewegung der Grenzfläche in der Nähe des Schwellwertes aus lokalen *depinning*-Prozessen zusammen. Geschieht dieser *depinning*-Prozeß auf einer Längenskala $\xi \leq \xi_{||}$, so wird sich die Grenzfläche in der Zeit ξ^z um ξ^α Einheiten vorwärts bewegen. Somit folgt für die Geschwindigkeit der Grenzfläche [45]

$$v \sim \frac{\xi^\alpha}{\xi^z} \sim (F - F_C)^{\nu(z-\alpha)} . \quad (2.9)$$

Der Vergleich von Gl. 2.9 und Gl. 2.1 ergibt somit

$$\theta = \nu(z - \alpha) , \quad (2.10)$$

d. h. die Zahl der unabhängigen Exponenten zur Beschreibung der Grenzfläche reduziert sich auf drei. Die lokalen Bewegungen von einem *pinning*-Zustand in den nächsten kann man in Analogie zu den Modellen der selbstorganisierten Kritikalität [53] Lawinen nennen, wobei innerhalb dieser Lawinen die Grenzflächenelemente korreliert sind. Aufgrund der statistischen Verteilung von starken und schwachen *pinning*-Zentren sind die erzeugten Lawinen unterschiedlich groß, wobei der Maximalwert des Arguments in der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lawinenbreite durch $\xi_{||}$ limitiert ist. Da $\xi_{||}$ am *depinning*-Übergang divergiert, ist zu erwarten, daß am *depinning*-Übergang die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen skaleninvariant sind [74], so daß hier ein Zusammenhang mit einem selbstorganisiert kritischen Verhalten der Grenzfläche hergestellt werden kann.

2.2 Quantitative Analyse der Grenzflächendynamik

Zur quantitativen Beschreibung der Grenzflächenfluktuationen und zur Bestimmung der Exponenten α und z lassen sich unterschiedliche charakteristische Größen definieren, siehe z.B. [71]. Aufgrund ihrer anschaulichen Bedeutung ist hier als erstes die Höhenkorrelationsfunktion

$$C(r, t) = \langle [\mathbf{h}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)]^2 \rangle \quad (2.11)$$

zu nennen [26], wobei $\langle \dots \rangle$ sowohl eine Mittelung über alle Grenzflächenelemente \mathbf{x} der \mathcal{D} -dimensionalen Grenzfläche als auch über unterschiedliche Realisierungen der Unordnung beschreibt. Wie im vorherigen Abschnitt dargelegt, kann die Grenzfläche als wachsendes selbstaffines Fraktal verstanden werden. Somit ist die Grenzfläche auf Längenskalen $r \ll \xi_{\parallel}(t)$ skaleninvariant und die Höhenkorrelationsfunktion gehorcht einem Potenzgesetz

$$C(r \ll \xi_{\parallel}(t), t) \sim r^{2\alpha}. \quad (2.12)$$

Auf Längenskalen, die viel größer als die parallele Korrelationslänge sind, sind die Grenzflächenfluktuationen räumlich unkorreliert, wachsen jedoch mit der Zeit an (Gl. 2.4)

$$C(r \gg \xi_{\parallel}(t), t) \sim t^{2\beta}. \quad (2.13)$$

Diese beiden Grenzfälle können in einer Skalenform

$$C(r, t) = (\xi_{\parallel}(t))^{2\alpha} g\left(\frac{r}{\xi_{\parallel}(t)}\right) \quad (2.14)$$

zusammengefaßt werden. Da diese Gleichung die Gln. 2.12 und 2.13 als Grenzfälle beinhaltet, muß die Skalenfunktion $g(y)$ die Eigenschaften

$$g(y) \sim \begin{cases} \text{const} & : y \gg 1 \\ r^{2\alpha} & : y \ll 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

haben. Zu einem Zeitpunkt $t_S \sim L^z$ gelangt die Korrelationslänge in die Größenordnung der Systemlänge. Somit geht im stationären Zustand ($t \gg t_S$) Gl. 2.14 in die *finite-size*-Skalenform

$$C_L(r) = L^{2\alpha} g\left(\frac{r}{L}\right) \quad (2.16)$$

der Höhenkorrelationsfunktion über, und man erhält für $r = L/2$

$$C_L(L/2) \propto L^{2\alpha}, \quad (2.17)$$

so daß die Messung der Systemlängenabhängigkeit dieser Größe eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des Rauigkeitsexponenten α bietet.

Eine weitere charakteristische Größe ist der Strukturfaktor. Dieser geht mittels Fouriertransformation aus der Höhenkorrelationsfunktion hervor (siehe z.B. [72])

$$S(k, t) = \langle \hat{h}(\mathbf{k}, t) \hat{h}(-\mathbf{k}, t) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} (\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{0}} - e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) C(r, t), \quad (2.18)$$

mit $\hat{h}(\mathbf{k}, t) = L^{-\mathcal{D}/2} \sum_{\mathbf{x}} [\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) - \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \rangle] e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$. Das Skalenverhalten des Strukturfaktors für kleine k ist gegeben durch

$$S(k, t) = k^{-\gamma} s(k^z t), \quad (2.19)$$

mit $\gamma = 2\alpha + \mathcal{D}$. Die Skalenfunktion $s(y)$ wird hier durch das asymptotische Verhalten $s(y) \approx \text{const}$ für $y \gg 1$ und $s(y) \propto y^{\gamma/z}$ für $y \ll 1$ und $\gamma > z$ beschrieben.

Neben den zuvor beschriebenen Meßgrößen wird zur Beschreibung der morphologischen und dynamischen Eigenschaften der Grenzflächen häufig die Rauigkeit [16]

$$w(L, t) = \langle (\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) - \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \rangle)^2 \rangle^{1/2} \quad (2.20)$$

herangezogen, welche die Längenabhängigkeit der Standardabweichung der mittleren Grenzflächenposition beschreibt. Die Rauigkeit geht bei periodischen Randbedingungen aus der Höhenkorrelationsfunktion gemäß

$$w(L, t)^2 = \frac{1}{2L^{\mathcal{D}}} \sum_{\mathbf{r}} C(r, t) = \frac{1}{L^{\mathcal{D}}} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} S(k, t) \quad (2.21)$$

hervor [72], so daß für das Skalenverhalten der Rauigkeit

$$w(L, t) = L^{\alpha} f\left(\frac{t}{L^z}\right) \quad (2.22)$$

gilt. Hierbei hat die Skalenfunktion $f(y)$ die Eigenschaften $f(y) \approx \text{const}$ für $y \gg 1$ und $f(y) \propto y^{\beta}$ für $y \ll 1$. Aus der Definition der Rauigkeit folgt, daß zur Bestimmung des Rauigkeitsexponenten α die Systemlängenabhängigkeit der Rauigkeit bestimmt werden muß. Dies führt in der Nähe des *depinning*-Übergangs jedoch zu Schwierigkeiten, da hier der Wert der Rauigkeit von der Größe der treibenden Kraft abhängt [23, 40]. Weiterhin kann für kleine Systeme die Systemlängenabhängigkeit der kritischen treibenden Kraft F_C nicht außer acht gelassen werden (siehe z.B. [38]), so daß bei konstanter treibender Kraft F unterschiedlich große Systeme unterschiedlich weit weg vom *depinning*-Übergang sind. Bei der Bestimmung des Rauigkeitsexponenten mit Hilfe der Systemlängenabhängigkeit der Rauigkeit wird der Wert dieses Exponenten durch die Kraftabhängigkeit der Rauigkeit somit verfälscht, so daß diese Meßmethode für die hier gegebene Problemstellung weniger geeignet ist.

Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion für $\alpha \geq 1$

Bei der numerischen Bestimmung des Exponenten ist zu beachten, daß das zuvor beschriebene Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion $C(r) = br^{2\alpha}$ nur für $\alpha < 1$ gültig ist [48, 50, 39, 73]. Für $\alpha \geq 1$ ist der Proportionalitätsfaktor b eine Funktion der Zeit bzw. im stationären Zustand eine Funktion der Systemgröße. Dies konnte am Beispiel der linearen Diffusionsgleichung vierter Ordnung

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = -\nu_4 \nabla^4 \mathbf{h} + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (2.23)$$

mit einer exakten Berechnung des Strukturfaktors gezeigt werden, welche für den Rauigkeitsexponenten $\alpha = (4 - \mathcal{D})/2$ ergibt [48]. Mit der Kenntnis des Strukturfaktors dieser Bewegungsgleichung

$$S(k, t) = \frac{D}{2\nu_4} \left(\frac{1 - e^{-2\nu_4 k^4 t}}{k^4} \right) \quad (2.24)$$

läßt sich die Höhenkorrelationsfunktion durch die Fouriertransformation

$$C(r, t) = \int_{2\pi/L}^{\pi/a} dk (1 - \cos(\mathbf{kr})) S(k, t) \quad (2.25)$$

berechnen, wobei mit L wieder die Systemgröße bezeichnet wird und a bezeichnet die Gitterkonstante. In $\mathcal{D} = 1$ und $\mathcal{D} = 2$ divergiert dieses Integral im Limes $L \rightarrow \infty$, so daß der Grenzübergang nicht durchgeführt werden kann und der Wert des Integrals eine Funktion der unteren Grenze $2\pi/L$ ist und somit das Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion von Gl. 2.14 abweicht. Ist die genaue funktionale Gestalt des Strukturfaktors nicht bekannt, so kann das unterschiedliche Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion für $\alpha < 1$ und $\alpha \geq 1$ nur durch eine Betrachtung des asymptotischen Skalenverhaltens des Strukturfaktors hergeleitet werden, was im folgenden geschehen soll.

Hierzu betrachtet man wieder die Fouriertransformation Gl. 2.25, wobei man für den Strukturfaktor das Skalenverhalten $S(k, t) = k^{-\gamma} s(k^z t)$ (Gl. 2.19) annimmt. Zur Bestimmung des *finite-size*-Verhaltens der Höhenkorrelationsfunktion führt man in Gl. 2.25 die Substitution $x = kr$ durch, so daß man mit $\gamma = 2\alpha + 1$

$$C(r, t) = r^{2\alpha} \int_{2\pi r/L}^{\pi r/a} dx (1 - \cos(x)) \frac{s\left(\frac{x^z t}{r^z}\right)}{x^\gamma} \quad (2.26)$$

erhält. Im Grenzfall $t^{1/z} \gg L$ gilt auch $(2\pi r/L)^z t/r^z \gg 1$, so daß die Skalenfunktion $s(y)$ durch das asymptotische Verhalten der Skalenfunktion für Argumente $y \gg 1$

ersetzt werden kann:

$$C(r, t) \sim r^{2\alpha} \int_{2\pi r/L}^{\pi r/a} dx \frac{1 - \cos(x)}{x^\gamma}. \quad (2.27)$$

Für $\alpha < 1$ kompensiert der Faktor $1 - \cos(x) \approx x^2/2$ die Divergenz des Strukturfaktors bei $x = 0$, so daß der Grenzübergang $a \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ durchgeführt werden kann und der Wert des Integrals unabhängig von der Systemgröße L ist. Man erhält somit das Skalenverhalten Gl. 2.16. Der Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ kann für $\alpha \geq 1$ nicht vollzogen werden, da in diesem Fall das Integral in Gl. 2.27 divergiert. Die r -Abhängigkeit der Höhenkorrelationsfunktion erhält in diesem Fall eine zusätzliche Systemgrößenabhängigkeit. Das *finite-size*-Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion ist somit, bis auf eine L -unabhängige Proportionalitätskonstante, durch den Ausdruck

$$C_L(r) \sim \begin{cases} r^{2\alpha} & : \alpha < 1 \\ r^2 \log(L) & : \alpha = 1 \\ r^2 L^{2(\alpha-1)} & : \alpha > 1 \end{cases} \quad (2.28)$$

gegeben. Hierbei wurden Terme höherer Ordnung für $\alpha \geq 1$ außer acht gelassen, da diese Korrekturen zum Skalenverhalten für sehr große Systeme vernachlässigt werden können. Diese Gleichung besagt, daß nur für $\alpha < 1$ der Rauigkeitsexponent aus der r -Abhängigkeit der Höhenkorrelationsfunktion zweifelsfrei bestimmt werden kann.

Die Konvergenz bzw. Divergenz des Integrals Gl. 2.25 im Limes $L \rightarrow \infty$ macht sich auch im Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion für $r \ll t^{1/z}$ bemerkbar. Für $\alpha < 1$ kann im Grenzfall $\lambda = r/t^{1/z} \rightarrow \infty$ die Skalenfunktion $s(y)$ des Strukturfaktors wieder durch das asymptotische Verhalten für große Argumente ersetzt werden, so daß im Limes $a \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ analog zum *finite-size*-Verhalten

$$C(r \ll t^{1/z}, t) \sim r^{2\alpha} \quad (2.29)$$

gilt. Diese Auswertung führt für $\alpha \geq 1$ wieder zu einem divergierenden Ausdruck für den Integralwert. Das Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion läßt sich in diesem Fall am besten in der Form

$$C(r, t) = r^{2\alpha} \lambda^{2\alpha} \int_{2\pi t^{1/z}/L}^{\pi t^{1/z}/a} dx \left(1 - \cos\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right) \frac{s(x^z)}{x^\gamma} \quad (2.30)$$

analysieren, wobei diese Gleichung aus Gl. 2.25 durch die Substitution $x = kt^{1/z}$ hervorgeht. Eine Taylorentwicklung der Kosinusfunktion ergibt dann

$$C(r, t) \sim r^{2\alpha} \lambda^{2\alpha} \int_{2\pi t^{1/z}/L}^{\pi t^{1/z}/a} dx \frac{s(x^z)}{x^{\gamma-2}}. \quad (2.31)$$

Für $\alpha > 1$ ist im Limes $a \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ der Wert des Integrals in Gl. 2.31 endlich, so daß die r -Abhängigkeit der Höhenkorrelationsfunktion durch

$$C(r \ll t^{1/z}, t) \sim r^2 t^{(2\alpha-2)/z} \quad (2.32)$$

gegeben ist. Für $\alpha = 1$ hingegen divergiert der Wert des Integrals in Gl. 2.31 an der oberen Grenze logarithmisch, so daß hier, in Übereinstimmung mit dem *finite-size*-Verhalten, logarithmische Korrekturen zum Skalenverhalten Gl. 2.12 auftreten:

$$C(r \ll t^{1/z}, t) \sim r^2 \log(t). \quad (2.33)$$

Die hier diskutierten Modifikationen des Skalenverhaltens für Rauigkeitsexponenten $\alpha \geq 1$ treten jedoch nicht für $r \gg t^{1/z}$ bzw. $\lambda = t^{1/z}/r \rightarrow 0$ auf. Um dies zu verstehen, betrachtet man wieder Gl. 2.30. Aufgrund der hochfrequenten Oszillationen der Kosinusfunktion für $\lambda \rightarrow 0$ kann der Kosinusanteil des Integrals vernachlässigt werden. Im Limes $a \rightarrow 0$ und $L \rightarrow \infty$ erhält man dann ein Integral, welches einen endlichen Wert hat, so daß für alle α der zeitabhängige Sättigungswert der Höhenkorrelationsfunktion durch Gl. 2.13 gegeben ist.

Zusammenfassend zeigt die hier dargestellte Analyse, daß das Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ Gl. 2.14 nur für $\alpha < 1$ durch die Skalenfunktion Gl. 2.15 gegeben ist, während für $\alpha > 1$ die Skalenfunktion $g(y)$ durch

$$g(y) \sim \begin{cases} const & : y \gg 1 \\ r^2 & : y \ll 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

beschrieben wird. Im Grenzfall $\alpha = 1$ können beide Skalenformen Gl. 2.15 und Gl. 2.34 zur Beschreibung des Skalenverhaltens herangezogen werden, jedoch kommen hier noch logarithmische Korrekturen im Zeitverhalten hinzu.

3 Grenzflächen im Zufallsfeld-Ising-Modell

3.1 Das Ising-Modell mit Zufallsfeldunordnung

Ferromagnete mit Zufallsfeldunordnung können auf mikroskopischer Skala durch das Zufallsfeld-Ising-Modell beschrieben werden, welches durch den Hamiltonian

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle \mathbf{l}, \mathbf{l}' \rangle} s_{\mathbf{l}} s_{\mathbf{l}'} - \sum_{\mathbf{l}} (H + B_{\mathbf{l}}) s_{\mathbf{l}} \quad (3.1)$$

gegeben ist [24]. Die Ising-Spins $s_{\mathbf{l}}$ sind ferromagnetisch gekoppelt ($J > 0$) und können die Werte $s_{\mathbf{l}} = \pm 1$ annehmen. Die erste Summe erstreckt sich über alle nächsten-Nachbarpaare $\langle \mathbf{l}, \mathbf{l}' \rangle$, während die zweite Summe die Wechselwirkung der Spins mit einem äußeren homogenen Magnetfeld H und den Zufallsfeldern $B_{\mathbf{l}}$ beschreibt. Computersimulationen des Ising-Modells zur Betrachtung von Grenzflächeneigenschaften sind jedoch problematisch, da die Dynamik der konventionellen Monte-Carlo-Technik [25], welche für dieses Modell gewöhnlich angewendet wird, bei sehr geringen Temperaturen extrem langsam ist, so daß ein sehr hoher Rechenaufwand betrieben werden muß. Ein weiteres Problem ist, daß es bei endlichen Temperaturen immer eine von null verschiedene Wahrscheinlichkeit gibt, daß ein Spin umklappt, so daß ein ausgeprägter *depinning*-Übergang bei endlichen Temperaturen nicht existiert. Dadurch werden die Feldabhängigkeiten der Grenzflächengeschwindigkeit v und der Korrelationslänge ξ_{\parallel} im Grenzfall kleiner Felder verfälscht. Da der Geschwindigkeitsexponent θ und der Korrelationslängenexponent ν über eine Skalenbeziehung mit den Rauigkeitsexponenten α und den dynamischen Exponenten z besteht (Gl. 2.10), sind somit auch Aussagen über das asymptotische morphologische und dynamische Verhalten für $T = 0$ problematisch. Ein der Monte-Carlo-Methode ähnlicher Algorithmus, welcher auch Simulationen bei der Temperatur $T = 0$ erlaubt, wurde von Ji und Robbins vorgeschlagen [31]. In diesem $T = 0$ -Modell mit *single-spin-flip*-Dynamik wird die Bewegung der Grenzfläche von einem *pinning*-Zustand zum nächsten durch eine diskrete Erhöhung des treibenden Feldes simuliert. Obwohl mit diesem Modell interessante Effekte studiert werden können, ist die physikalische Relevanz dieses Modells zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften von Ferromagneten aufgrund der diskreten Erhöhung des treibenden Feldes fraglich.

Auf mesoskopischer Skala können Ferromagneten durch den Ginzburg-Landau-Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \int d^d \mathbf{r} \left(-\frac{a}{2} \phi(\mathbf{r}, t)^2 + \frac{b}{4} \phi(\mathbf{r}, t)^4 + \frac{J}{2} (\nabla \phi(\mathbf{r}, t))^2 - (H + B(\mathbf{r})) \phi(\mathbf{r}, t) \right) \quad (3.2)$$

mit der Kopplungskonstanten $J > 0$ dargestellt werden [75]. Hierbei beschreibt der skalare Ordnungsparameter $\phi(\mathbf{r}, t)$ die lokale Magnetisierung am Ort \mathbf{r} zur Zeit t ,

H ist ein äußeres homogenes Magnetfeld und $B(\mathbf{r})$ beschreibt die zeitunabhängigen Zufallsfelder. Diese haben den Mittelwert $\langle B(\mathbf{r}) \rangle = 0$ und sind räumlich unkorreliert $\langle B(\mathbf{r})B(\mathbf{r}') \rangle = \Delta\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$, wobei $\sqrt{\Delta}$ die Breite der Verteilungsfunktion der Zufallsfelder angibt. Da bei numerischen Betrachtungen der Ordnungsparameter ϕ nur auf diskreten Gitterpunkten definiert ist, wird der Ordnungsparameter in Analogie zum Zufallsfeld-Ising-Modell als *Soft-Spin* bezeichnet [24]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im folgenden $a = b = u_0$ angenommen, so daß die Länge der Spins im Grundzustand durch das Doppelmuldenpotential $-\frac{a}{2}\phi(\mathbf{r}, t)^2 + \frac{b}{4}\phi(\mathbf{r}, t)^4$ auf $\phi_0 = \pm 1$ fixiert ist.

Die Evolution des Ordnungsparameters ϕ im *Soft-Spin*-Modell ist bei der Temperatur $T = 0$ durch die angenommene Langevin-Dynamik gegeben [75]

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\tau \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi(\mathbf{r}, t)}, \quad (3.3)$$

wobei die Relaxationszeit des Systems proportional zu τ ist. Da dieses Modell somit auch bei $T = 0$ eine nichttriviale Dynamik besitzt, treten die oben beschriebenen Probleme beim Studium der Grenzflächeneigenschaften eines Ferromagneten, welcher durch das Ising-Modell beschrieben wird, nicht auf. Simulationen bei Temperaturen $T > 0$ können realisiert werden, indem auf der rechten Seite von Gl. 3.3 ein Rauschterm $\eta(\mathbf{r}, t)$ addiert wird. Die unkorrelierten Werte von η ($\langle \eta(\mathbf{r}, t)\eta(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t')$) sind hierbei Gauß-verteilt und haben den Mittelwert null. Wie Renormierungsgruppenrechnungen [76] jedoch gezeigt haben, ist der Einfluß der Temperatur in der ferromagnetischen Phase, der Tieftemperaturphase, für die Morphologie der Domänen irrelevant. Ein weiteres Argument für die Irrelevanz der Temperatur wurde von Grinstein und Ma [77] für das Zufallsfeld-Ising-Modell diskutiert. Im Grenzfall $T \rightarrow 0$ skaliert die Grenzflächenrauigkeit w einer Domäne mit der linearen Ausdehnung L wie $w^2 \sim L^{2(4-\mathcal{D})/3}$, wobei mit $\mathcal{D} = d - 1$ die Grenzflächendimension bezeichnet ist. Im Gegensatz dazu skaliert für endliche Temperaturen die Größe w^2 im reinen Ising-Modell, d. h. für $\Delta = 0$, wie $w^2 \sim L^{2-\mathcal{D}}$. Da $2(4 - \mathcal{D})/3$ für alle Werte von \mathcal{D} größer als $2 - \mathcal{D}$ ist, dominieren die feldinduzierten Störungen die thermischen Störungen, und die Temperatur kann somit in der Tieftemperaturphase vernachlässigt werden. Da für $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ und $a/b = 1$ der *Soft-Spin*-Hamiltonian Gl. 3.2 in den Ising-Hamiltonian Gl. 3.1 übergeht [24], kann diese Argumentation auch hier angewendet werden. Aufgrund dieser Verwandtschaft der beiden Hamiltonfunktionen wird im folgenden der Begriff Zufallsfeld-Ising-Modell allgemein für Ferromagnete mit Zufallsfeldunordnung benutzt.

Eine experimentelle Möglichkeit, mikroskopische Zufallsfelder in einen Ferromagneten zu induzieren, ist nicht bekannt. Es gibt jedoch eine Reihe von Systemen, welche

sich auf das Zufallsfeld-Ising-Modell abbilden lassen. Bekanntestes Beispiel ist der verdünnte Antiferromagnet im externen Magnetfeld [78]. Auf großen Längenskalen fluktuiert die Magnetisierung aufgrund der Verdünnung im System, so daß die Ankopplung des externen Feldes an die Magnetisierung zu einem Zufallsfeld-ähnlichen Effekt führt. Experimentell wird die Verdünnung durch die statistische Substitution magnetischer Ionen eines Antiferromagneten durch unmagnetische Ionen realisiert. Typische Vertreter dieser Materialien sind z.B. $\text{FeZn}_{1-x}\text{F}_2$, $\text{Fe}_{1-x}\text{Mg}_x\text{Cl}_2$ und $\text{Mn}_{1-x}\text{Zn}_x\text{F}_2$ [4]. Ein weiteres Beispiel aus dem Bereich des Magnetismus sind polykristalline CoPt-Filme. Hier konnten Nowak et al. [69] zeigen, daß das Ummagnetisierungsverhalten dieser Filme durch ein verallgemeinertes Zufallsfeld-Ising-Modell mit Dipolwechselwirkung und einer zusätzlichen Energiebarriere zur Beschreibung der Ummagnetisierung eines einzelnen Kristalliten beschrieben werden kann. Andere Beispiele für Systeme, welche durch das Zufallsfeld-Ising-Modell beschrieben werden können, sind u. a. Ferroelektrika [79] und binäre Flüssigkeiten in porösen Medien [80]. Weiterhin wird das Zufallsfeld-Ising-Modell auch dazu benutzt, kooperative Effekte in der Proteinfaltung zu untersuchen [81].

Nachdem hier das der Grenzflächenbewegung zugrundeliegende Spinmodell diskutiert wurde, wird im folgenden Abschnitt eine Bewegungsgleichung für die Grenzfläche hergeleitet. Diese wird dann mit skalentheoretischen Betrachtungen analysiert, um so Vorhersagen über die im vorherigen Kapitel eingeführten charakteristischen Exponenten, welche die Grenzflächen beschreiben, machen zu können.

3.2 Kontinuumstheorie zur Grenzflächendynamik

Zum tieferen Verständnis der Grenzflächendynamik im Zufallsfeld-Ising-Modell wird im folgenden eine Bewegungsgleichung für eine \mathcal{D} -dimensionale Grenzfläche hergeleitet. Diese Herleitung beruht auf der Betrachtung einer Grenzfläche in einem System ohne Unordnung [29], welches durch den Ginzburg-Landau-Hamiltonian Gl. 3.2 mit der durch Gl. 3.3 gegebenen Dynamik beschrieben wird. Es wird eine Geometrie angenommen, bei der eine vertikale Grenzfläche eine ferromagnetische Domäne mit positiver Magnetisierung links der Grenzfläche von einer negativ magnetisierten Domäne rechts der Grenzfläche trennt, wobei die Ausdehnung der Domänen so groß sein soll, daß Randeffekte außer acht gelassen werden können. Die aktuelle Position der Grenzfläche $x = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ ist durch den Vorzeichenwechsel der Magnetisierung $\phi(\mathbf{r} = (x, \mathbf{x}), t)$ für festes \mathbf{x} definiert.

Für den Fall ohne Unordnung $B(\mathbf{r})$ und ohne treibendes Feld H existiert ein eindeutiger Grundzustand, der durch das stationäre Problem

$$0 = -u_0 \phi(\mathbf{r}, t) (\phi(\mathbf{r}, t)^2 - 1) + J \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.4)$$

gegeben ist. Aufgrund der fehlenden Unordnung ist das Magnetisierungsprofil $\phi(x, t) = \phi(\mathbf{r}, t)|_{\mathbf{x}=\text{const}}$ senkrecht zur x -Richtung translationsinvariant, so daß die Lösung der Differentialgleichung 3.4 nicht von \mathbf{x} abhängt. Durch Einsetzen bestätigt man, daß der Ansatz

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -\tanh\left(\frac{x}{\Delta x}\right) \quad (3.5)$$

mit der intrinsischen Domänenwandbreite $\Delta x = \sqrt{2J/u_0}$ die Differentialgleichung Gl. 3.4 löst. Die Domänenwandbreite gibt also an, auf welcher Längenskala sich die Magnetisierung des Systems von $+1$ nach -1 ändert.

Durch ein treibendes Feld $H \neq 0$ wird das durch Gl. 3.4 beschriebene Gleichgewicht gestört, und man erhält in diesem Fall die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -u_0 \phi(\mathbf{r}, t) (\phi(\mathbf{r}, t)^2 - 1) + J \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) + H, \quad (3.6)$$

wobei für die Relaxationszeit $\tau = 1$ angenommen wurde. Für $H > 0$ bewegt sich die Grenzfläche mit einer noch zu bestimmenden Geschwindigkeit $v = v(H)$ in x -Richtung, so daß die Lösung der Differentialgleichung Gl. 3.6 von der Form

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \psi(x - vt) \quad (3.7)$$

sein muß. Damit folgt aus Gl. 3.6

$$-v \frac{\partial \psi}{\partial x} = J \nabla^2 \psi - \frac{d}{d\psi} (f(\psi) - H\psi), \quad (3.8)$$

wobei $f(\psi)$ das Doppelmuldenpotential $\frac{u_0}{4} (\psi^2 - 1)^2$ beschreibt. Zur Bestimmung der Grenzflächengeschwindigkeit v multipliziert man Gl. 3.8 mit $\partial\psi/\partial x$ und integriert dann diese Gleichung über x :

$$v \int dx \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \int dx \frac{d}{dx} \left[\frac{J}{2} (\nabla \psi)^2 - (f(\psi) - H\psi) \right]. \quad (3.9)$$

Für kleine treibende Felder $H < u_0$ kann man annehmen, daß das tanh-Profil der Magnetisierung erhalten bleibt. Betrachtet man nun noch in x -Richtung unendlich ausgedehnte Domänen, d. h., die Integrationsgrenzen sind $\pm\infty$, so ist der Wert des Integrals auf der linken Seite von Gl. 3.9 $4/(3\Delta x)$. Die Stammfunktion des Integrals auf der rechten Seite von Gl. 3.9 ist durch den Ausdruck in den eckigen Klammern [...] gegeben. An den Integrationsgrenzen verschwindet der Einfluß der Grenzfläche, so daß hier die Magnetisierung räumlich konstant ist, d. h., die Ortsableitung $\nabla\psi$ verschwindet. Weiterhin sind aufgrund des angenommenen kleinen Feldes $H < u_0$ die Sättigungsmagnetisierungen in diesem Bereich ungefähr gleich den Grundzustandsmagnetisierungen $\phi = \pm 1$ [22], so daß der Beitrag des Doppelmuldenpotentials $f(\psi)$ zum Wert des Integrals gegenüber dem Beitrag $2H$ des letzten Summanden vernachlässigt werden kann. Somit gilt für die Geschwindigkeit

$$v \simeq \frac{3}{2} H \Delta x, \quad (3.10)$$

was den Ergebnissen in [29, 36] entspricht.

Im allgemeinen Fall $B(\mathbf{r}) \neq 0$ ist das Magnetisierungsprofil senkrecht zur x -Richtung nicht mehr translationsinvariant, so daß aufgrund der Unordnung die Grenzfläche rauh wird und sich somit die Orientierung der Grenzfläche ändert. Während für $B(\mathbf{r}) = 0$ der Normalenvektor der Grenzfläche parallel zur x -Richtung liegt, kann er jetzt in jeder beliebigen Richtung liegen. Für nicht allzu große Werte von $B(\mathbf{r})$ und H können Überhänge in der Grenzfläche und die Keimbildung weitab von der Grenzfläche ausgeschlossen werden, so daß die Grenzfläche durch eine einwertige Funktion $h(\mathbf{x}, t)$ beschrieben werden kann. Somit ist der Betrag des Winkels zwischen Normalenvektor und x -Richtung kleiner als $\pi/2$. Parallel zum Normalenvektor kann das Magnetisierungsprofil weiterhin näherungsweise durch eine tanh-artige Funktion mit der intrinsischen Domänenwandbreite Δx beschrieben werden. Stimmen

Normalenrichtung und x -Richtung nicht überein, so ist in x -Richtung das Magnetisierungsprofil um den Faktor $g = \sqrt{1 + (\nabla \mathbf{h})^2}$ verbreitert [82, 83]. Die aktuelle Magnetisierung am Ort \mathbf{r} ist dann durch

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \Psi \left(\frac{x - \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)}{\Omega} \right) \quad (3.11)$$

gegeben, wobei mit $\Omega = \Delta x g$ die lokale Wandbreite in x -Richtung bezeichnet ist.

Mittels Variablensubstitution $\mu = (x - h)/\Omega$ erhält man für die Relaxationsgleichung Gl. 3.3

$$-\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \right) = f(\Psi) + J \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2} \left(\frac{1}{\Omega^2} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \Omega} \right)^2 \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial^2 \mu}{\partial \mathbf{x}^2} \right] + H + B(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Durch Multiplikation mit $\partial \Psi / \partial \mu$ und nachfolgender Integration über μ , erhält man unter Vernachlässigung höherer Ordnungen in $(\nabla \mathbf{h})^{2n}$ und $\nabla^{2n} \mathbf{h}$, $n > 1$, eine KPZ-artige Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \gamma \nabla^2 \mathbf{h} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} (\nabla \mathbf{h})^2 + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)) + F. \quad (3.13)$$

Hierbei bezeichnet $\gamma = \gamma(J)$ die Oberflächenspannung und η als auch F effektive Magnetfelder. Die Korrelationen von η sind wie beim zugrundeliegenden Zufallfeld-Ising-Modell durch

$$\langle \eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_0) \eta(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}) \rangle = D \delta^{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{h}) \quad (3.14)$$

gegeben, wobei die Breite der Deltafunktionen $\delta^{\mathcal{D}}(\mathbf{x})$ und $\delta(\mathbf{h})$ durch die Gitterkonstante gegeben ist.

Zur weiteren Analyse der Bewegungsgleichung wird die Zeitableitung $\partial \mathbf{h} / \partial t$ auf der rechten Seite von Gl. 3.13 durch die mittlere Grenzflächengeschwindigkeit v [36, 84] ersetzt, somit lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \gamma \nabla^2 \mathbf{h} + \frac{\lambda}{2} (\nabla \mathbf{h})^2 + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)) + F, \quad (3.15)$$

mit $\lambda/2 = \Lambda v$. Die Analyse der mittleren quadratischen Stufenhöhe $C(1)$ im *Soft-Spin*-Modell, welche ein Maß für die typischen Gradienten $\langle (\nabla \mathbf{h})^2 \rangle$ ist, zeigt, daß die Vernachlässigung der Gradiententerme höherer Ordnung $(\nabla \mathbf{h})^{2n}$, $n > 1$, gerechtfertigt ist, da sowohl in $\mathcal{D} = 1$ [23] als auch in $\mathcal{D} = 2$ (siehe Abschnitt 4.1) $C(1) \ll 1$.

Eine Vernachlässigung der Terme $\nabla^{2m}\mathbf{h}$ mit $m > 1$ und der auftretenden gemischten Terme $(\nabla\mathbf{h})^{2n}(\nabla^{2m}\mathbf{h})$ ist ebenfalls gerechtfertigt, da diese auf großen Skalen L wie $L^{\alpha(1+2n)-2(m+n)}$ zu Null skalieren, so daß das asymptotische Verhalten der Grenzfläche durch den Oberflächenspannungsterm $\nabla^2\mathbf{h}$ und durch die KPZ-Nichtlinearität $\frac{\lambda}{2}(\nabla\mathbf{h})^2$ beschrieben wird.

Eine andere Möglichkeit, die Bewegungsgleichung 3.15 herzuleiten, beruht darauf, daß eine Grenzfläche im Zufallfeld-Ising-Modell unter Vernachlässigung von Überhängen als elastische Membran beschrieben werden kann [9, 77, 85], wobei deren Energie durch den Hamiltonian [77, 86]

$$\mathcal{H}_M = \int d^D x \left\{ \sigma \sqrt{1 + (\nabla\mathbf{h}(\mathbf{x}, t))^2} - \int_0^{\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)} d\mathbf{h} \eta(x, \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)) + F \right\} \quad (3.16)$$

gegeben ist. Allgemein gilt für die Bewegungsgleichung einer Grenzfläche, daß deren Normalengeschwindigkeit v_n proportional zur treibenden Kraft $\mu(\mathbf{x})$ ist [82]. Die treibende Kraft für die Dynamik ist das chemische Potential $\mu = \delta\mathcal{H}_M/\delta\mathbf{h}$, welches aus der Variation der Energie \mathcal{H}_M berechnet wird [87], so daß für die Normalengeschwindigkeit

$$v_n = \frac{\sigma}{g^3} \nabla^2\mathbf{h} + \eta + F \quad (3.17)$$

gilt. Um die Vertikalgeschwindigkeit $\partial\mathbf{h}/\partial t$ zu erhalten, ist die Normalengeschwindigkeit in die \mathbf{h} -Richtung zu projizieren, was aus einer einfachen geometrischen Überlegung folgt. In einer Zeit ∂t bewegt sich die Grenzfläche in Normalenrichtung um $v_n \partial t$ Einheiten, während sie sich in der vertikalen Richtung um $\partial\mathbf{h}$ Einheiten bewegt. Betrachtet man $v_n \partial t$ und $\partial\mathbf{h}$ als Vektoren, so folgt aus geometrischen Überlegungen, daß diese Vektoren sich unter einem Winkel $\tan\delta = \nabla\mathbf{h}$ bzw. $\cos\delta = v_n \partial t / \partial\mathbf{h}$ schneiden. Eine trigonometrische Umformung gemäß $\tan^2\delta = \sin^2\delta / \cos^2\delta = (1 - \cos^2\delta) / \cos^2\delta$ ergibt dann für die Vertikalgeschwindigkeit

$$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = g v_n. \quad (3.18)$$

Die Bewegungsgleichung 3.15 erhält man nun, indem man eine Gradientenentwicklung durchführt und wiederum nur die relevanten Terme in die Bewegungsgleichung einfließen läßt.

Für Grenzflächen mit hoher Geschwindigkeit, $F \gg F_C$, geht in der Bewegungsgleichung Gl. 3.15 der Term $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{h})$, welcher die ortsfeste Unordnung beschreibt, in ein effektives weißes Rauschen über (*annealed disorder*). In diesem Grenzfall kann die Bewegungsgleichung als die KPZ-Gleichung identifiziert werden, deren charakteristische Exponenten α und z in $\mathcal{D} = 1$ exakt und in höheren Dimensionen durch Simulationen bekannt sind, siehe z.B. [88].

Im entgegengesetzten Grenzfall sehr langsamer Grenzflächen, $F \simeq F_C$, wird der Einfluß der ortsfesten Unordnung auf die Bewegung der Grenzfläche wichtig. Am *depinning*-Übergang, $F = F_C$, verschwindet die KPZ-Nichtlinearität $\lambda(\nabla\mathbf{h})^2$, da der Vorfaktor λ proportional zur mittleren Grenzflächengeschwindigkeit ist [36]. Außerdem hängt im zugrundeliegenden Zufallsfeld-Ising-Modell die mittlere Grenzflächengeschwindigkeit in der Nähe des *depinning*-Übergangs nicht von einer Neigung der Grenzfläche ab [51]. Solch eine Abhängigkeit würde aber durch den KPZ-Term verursacht, so daß diese Invarianz der Geschwindigkeit gegenüber einer Neigung der Grenzfläche als Indiz für ein Verschwinden des KPZ-Terms am *depinning*-Übergang gedeutet werden kann [51]. Am *depinning*-Übergang erhält man somit die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung

$$\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial t} = \gamma\nabla^2\mathbf{h} + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)) + F, \quad (3.19)$$

wobei die Korrelationen der Unordnung durch Gl. 3.14 gegeben sind.

Simulationen des zugrundeliegenden *Soft-Spin*-Modells in $\mathcal{D} = 1$ [23] zeigen, daß im Übergangsbereich zwischen *depinning*-Übergang und dem *annealed disorder*-Regime die Grenzfläche durch ein effektives Skalenverhalten beschrieben werden kann, welches sich aus dem Skalenverhalten der beiden Grenzfälle zusammensetzt, so daß in diesem Bereich effektive, geschwindigkeitsabhängige Exponenten auftreten. Da für $F \gg F_C$ das Skalenverhalten bekannt ist, wird im folgenden Abschnitt nur das Skalenverhalten am *depinning*-Übergang diskutiert.

3.3 Die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung: skalentheoretische Betrachtungen

In diesem Abschnitt wird das Skalenverhalten der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \gamma \nabla^2 \mathbf{h} + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)) + F \quad (3.20)$$

mit skalentheoretischen Argumenten analysiert, wobei die Kovarianz der eingefrorenen, also ortsfesten, Unordnung η durch den Ausdruck

$$\langle \eta(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}_0) \eta(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}, \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}) \rangle = D \delta^{\mathcal{D}}(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{h}) \quad (3.21)$$

gegeben ist.

Die charakteristischen Eigenschaften des Skalenverhaltens sind, wie in Abschnitt 2.1 diskutiert, durch den Rauigkeitsexponenten α , den dynamischen Exponenten z , den Geschwindigkeitsexponenten θ und den Korrelationslängenexponenten ν gegeben, wobei mit der Skalenrelation $\theta = \nu(z - \alpha)$ (Gl. 2.10) die Zahl der unabhängigen Exponenten auf drei reduziert wird.

Narayan und Fisher [12] zeigten für die Edwards-Wilkinson-Gleichung Gl. 3.20, daß mit geometrischen Betrachtungen der Wert des Exponenten ν mit dem Rauigkeitsexponenten α verknüpft ist. Da diese Tatsache für die Berechnung der Exponenten α und z von Bedeutung ist, sollen diese Betrachtungen hier nachvollzogen werden. Dazu betrachtet man eine zusätzliche statische Störung $\epsilon(\mathbf{x})$ mit räumlichem Mittelwert $\langle \epsilon(\mathbf{x}) \rangle = 0$. Aufgrund der Linearität des Laplace-Terms $\nabla^2 \mathbf{h}$ kann die Störung ϵ durch die Transformation $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) - \nabla^{-2} \epsilon(\mathbf{x})$ kompensiert werden. Durch diese Transformation werden auch die aktuellen Fluktuationen $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ geändert. Da hierdurch jedoch die Verteilung dieser Fluktuationen nicht geändert wird, werden die statistischen Eigenschaften durch die Änderung des Arguments in η nicht geändert. Eine Reskalierung der Längenskala $\mathbf{x}, \mathbf{x} \rightarrow a\mathbf{x}$, hat für die Grenzflächenfunktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ die Reskalierung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \rightarrow a^\alpha \mathbf{h}(\mathbf{x})$ zur Folge, was aus dem selbstaffinen Verhalten von \mathbf{h} folgt (siehe Abschnitt 2.1). Aus der Änderung der Längenskala \mathbf{x} folgt, daß die Korrelationslänge $\xi_{||}$ in $a\xi_{||}$ übergeht. Mit $\xi_{||} \sim |F - F_C|^{-\nu}$ gilt dann für die Reskalierung der treibenden Kraft $F \rightarrow a^{-1/\nu} F$. Da die Störung $\epsilon(\mathbf{x})$ ebenfalls als Kraft aufgefaßt werden kann, skaliert diese ebenfalls wie F , $\epsilon \rightarrow a^{-1/\nu} \epsilon$. Fordert man nun die Skaleninvarianz der statischen Suszeptibilität

$$\chi_s = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{q})}{\partial \epsilon(\mathbf{q})} \sim \frac{1}{q^2}, \quad (3.22)$$

so folgt $\alpha + 1/\nu = 2$, bzw.

$$\nu = \frac{1}{2 - \alpha}, \quad (3.23)$$

was auch von Nattermann et al. [45] im Rahmen von dynamischen Renormierungsgruppenrechnungen gefunden wurde. Die Skalenrelation Gl. 3.23 reduziert somit die Zahl der unabhängigen Exponenten auf zwei.

Die verbleibenden unabhängigen Exponenten, der Rauigkeitsexponent α und der dynamische Exponent z , sollen nun hier unter Ausnutzung der statistischen Skaleninvarianz berechnet werden. Hierzu ist noch ein Ausdruck für die Reskalierung der Zeit t zu finden. Mit der Zeitabhängigkeit der Korrelationslänge $\xi_{\parallel} \sim t^{1/z}$ (Gl. 2.3) folgt für die Reskalierung der Zeit $t \rightarrow a^z t$, so daß sich die Skalentransformation der Grenzflächenfunktion \mathbf{h} zu

$$\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t) = a^{-\alpha} \mathbf{h}(a\mathbf{x}, a^z t) \quad (3.24)$$

zusammenfassen läßt. Weiterhin ist zu fordern, daß unter einer Reskalierung die Kovarianz Gl. 3.21 invariant ist, so daß die Unordnungsfluktuationen gemäß

$$\hat{\eta}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = a^{(\mathcal{D}+\alpha)/2} \eta(a\mathbf{x}, a^\alpha \mathbf{h}) \quad (3.25)$$

skalieren. Setzt man nun Gl. 3.24 und Gl. 3.25 in die Bewegungsgleichung Gl. 3.20 ein und beachtet, daß für die treibende Kraft F die Reskalierung $F \rightarrow a^{-1/\nu} F = a^{\alpha-2} F$ gilt, so erhält man

$$a^{\alpha-z} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \gamma a^{\alpha-2} \nabla^2 \mathbf{h} + a^{-\mathcal{D}/2-\alpha/2} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + a^{\alpha-2} F \quad (3.26)$$

und mit der Multiplikation von Gl. 3.26 mit $a^{z-\alpha}$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \gamma a^{z-2} \nabla^2 \mathbf{h} + a^{z-\mathcal{D}/2-3\alpha/2} \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) + a^{z-2} F. \quad (3.27)$$

Zur Bestimmung der Exponenten α und z fordert man nun die Invarianz der Bewegungsgleichung unter der Skalentransformation. Um dies zu erfüllen, muß jeder Term auf der rechten Seite von Gl. 3.27 unabhängig von a sein, so daß für die Exponenten

$$\alpha = \frac{4 - \mathcal{D}}{3} \quad \text{und} \quad z = 2 \quad (3.28)$$

gilt. Aufgrund des Skalengesetzes Gl. 2.10,

$$\theta = \nu(z - \alpha), \quad (3.29)$$

folgt mit Gl. 3.23 für die restlichen charakteristischen Exponenten

$$\theta = 1 \quad \text{und} \quad \nu = \frac{3}{2 + \mathcal{D}}. \quad (3.30)$$

Diskussion

Aufgrund der Skalengesetze Gl. 3.23 und Gl. 3.29 kann die Diskussion der Ergebnisse auf den Rauigkeitsexponenten α und den dynamischen Exponenten z beschränkt werden. Dynamische Renormierungsgruppenrechnungen in $\mathcal{D} = 4 - \epsilon$ von Nattermann et al. [45] und Narayan und Fisher [12] ergeben in Übereinstimmung mit der Reskalierungsanalyse $\alpha = \epsilon/3$. Im Gegensatz dazu weicht das Ergebnis $z = 2 - 2\epsilon/9$ der Renormierungsgruppenrechnungen von dem hier gefundenen Ergebnis $z = 2$ ab. Einen, von der Grenzflächendimension \mathcal{D} unabhängigen, Wert $z = 2$ erhalten ebenfalls López et al. [46] durch eine Transformation der ortsfesten Unordnung $\eta(x, \mathbf{h})$ auf ein effektives zeitabhängiges Rauschen. Mit diesem Ansatz erhalten López et al. für den Rauigkeitsexponenten $\alpha = (4 - \mathcal{D} - \Omega)/(2 + \gamma)$, wobei die Exponenten Ω und γ die räumlichen und zeitlichen Korrelationen des effektiven Rauschens beschreiben. Durch eine numerische Integration der Bewegungsgleichung erhalten López et al. $\Omega = 1.4$ und $\gamma = 0$, so daß deren Werte für α nicht mit den hier erhaltenen Werten übereinstimmen.

Weitere analytische Arbeiten wurden von Parisi für den Exponenten $\beta = \alpha/z$, welcher das zeitliche Wachstum der Korrelationslänge ξ_{\perp} beschreibt (Gl. 2.4), durchgeführt [47, 33]. Mit Hilfe einer Dimensionsanalyse findet Parisi [47] in Übereinstimmung mit dem hier gefundenen Ergebnis $\beta = (4 - \mathcal{D})/6$. Messungen der Rauigkeit $w(t) \sim t^{\beta}$ in $\mathcal{D} = 1$ ergeben jedoch $\beta_{\text{Parisi}} = 0.75$ [33], so daß Parisi den theoretisch gefundenen Wert bezweifelt. Mit Betrachtungen der Skalenabhängigkeit der Unordnungsdichte erhält Parisi in Übereinstimmung mit seinen Simulationsergebnissen $\beta_{\text{Parisi}} = (4 - \mathcal{D})/4$. Die in Abschnitt 4.3 dargestellten Ergebnisse der numerischen Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung zeigen jedoch, daß für kleine Systemgrößen der Exponent β_{Parisi} , welcher durch das zeitliche Wachstum der Rauigkeit bestimmt wird, nicht dem asymptotischen Wert für $L \rightarrow \infty$ entspricht. Die numerische Integration der Bewegungsgleichung zeigt weiterhin, daß das in der Literatur diskutierte *super-roughening*-Verhalten mit Rauigkeitsexponenten $\alpha > 1$ [36, 38, 39] ebenfalls auf *finite-size*-Effekte zurückgeführt werden, so daß die in der Literatur bekannten numerischen Ergebnisse nicht denen der Reskalierungsanalyse widersprechen.

4 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die zuvor dargestellten Aussagen zum Skalenverhalten von Grenzflächen am *depinning*-Übergang in magnetischen Systemen mit Zufallsfeldunordnung numerisch mit Hilfe von Spin-Modellen und Bewegungsgleichungen, welche zur Beschreibung dieser Grenzflächen in der Literatur diskutiert werden, überprüft.

Das der Arbeit zugrundeliegende *Soft-Spin*-Modell wurde in der Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 1$ schon in meiner Diplomarbeit [22] und einer darauf aufbauenden Arbeit [23] untersucht. Aus diesem Grund werden hier nur die Simulationsergebnisse für $\mathcal{D} = 2$ dargestellt. Während die Ergebnisse in dieser Grenzflächendimension denen des Zufallsfeld-Ising-Modells mit *single-spin-flip*-Dynamik von Ji und Robbins [43] entsprechen, wird die auch in $\mathcal{D} = 1$ beobachtbare Selbstaffinität der Grenzfläche in der Realisierung des Ising-Modells von Ji und Robbins [31] nicht gefunden. Mit einer numerisch exakten Berechnung der Grenzflächenmorphologie des Zufallsfeld-Ising-Modells soll deshalb in Abschnitt 4.2 der Versuch unternommen werden, diese Diskrepanz aufzulösen.

Um den in Abschnitt 3.2 gezeigten Zusammenhang zwischen der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 und der Grenzflächenbewegung in magnetischen Systemen am *depinning*-Übergang numerisch zu verifizieren, wird in Abschnitt 4.3 das Skalenverhalten der Gl. 3.20 in $\mathcal{D} = 1$ untersucht. Diese numerische Integration soll zusätzlich dazu dienen, die skalentheoretischen Vorhersagen zum Skalenverhalten dieser Gleichung zu überprüfen und die zum Teil vorhandenen Diskrepanzen mit den Literaturergebnissen [36, 37, 38, 39] zu verstehen, welche mit Systemen erhalten wurden, die um mindestens eine Größenordnung kleiner sind als das hier untersuchte System.

Leschhorn [42, 36] erhält für das Skalenverhalten eines Automatenmodells, welches zur Edwards-Wilkinson-Universalitätsklasse gehören soll, Ergebnisse, die nicht im Einklang mit den hier für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung dargestellten Ergebnissen sind. Um diese Unterschiede zu verstehen, wird dieses Automatenmodell im Abschnitt 4.4.2 nochmals numerisch in den Grenzflächendimensionen $\mathcal{D} = 1, 2$ und 3 untersucht. Zusätzlich wird im Rahmen dieses Modells in Abschnitt 4.4.3 die lawinenartige Bewegung einer Grenzfläche zwischen zwei *pinning*-Zuständen untersucht. Die Analyse der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen ermöglicht einen alternativen Zugang zur Bestimmung des Skalenverhaltens des Automatenmodells, so daß die in Abschnitt 4.4.2 erzielten Ergebnisse überprüft werden können.

4.1 Simulation des *Soft-Spin*-Modells

In diesem Abschnitt wird die Morphologie und die Dynamik einer $\mathcal{D} = 2$ -dimensionalen Grenzfläche, welche zwei $d = \mathcal{D} + 1$ -dimensionale Domänen mit entgegengesetzt gleicher Magnetisierung trennt, numerisch untersucht. Zur Simulation des *Soft-Spin*-Modells muß sowohl der Hamiltonian Gl. 3.2 als auch die Relaxationsgleichung Gl. 3.3 diskretisiert werden. Die zeitliche Diskretisierung mit dem Euler-Verfahren [89] führt dann auf das zu iterierende Differenzgleichungssystem

$$S_{\mathbf{l}}(\tau + \Delta\tau) = S_{\mathbf{l}}(\tau) + \Delta\tau \left[-u \left(S_{\mathbf{l}}^2(\tau) - 1 \right) S_{\mathbf{l}}(\tau) + \sum_{\mathbf{l}'} S_{\mathbf{l}'}(\tau) - 6S_{\mathbf{l}}(\tau) + h + b_{\mathbf{l}} \right] \quad (4.1)$$

für die Spins $S_{\mathbf{l}}$ an den Gitterpunkten $\mathbf{l} = (x, y, z)$ eines kubischen Gitters der linearen Ausdehnung L , wobei die verfügbare Rechenleistung die maximale Systemgröße auf $L = 128$ beschränkt. Die Zeitkonstante $\Delta\tau$ wurde zu $\Delta\tau = 0.1$ gewählt, da ein kleinerer Wert die Ergebnisse nicht verbessert [22]. Die numerischen Untersuchungen zeigten ebenfalls, daß die Wahl eines genaueren Integrationsverfahrens zu keiner Änderung der relevanten Meßgrößen führt. Die Summation in Gl. 4.1 bezieht sich auf die nächsten Nachbarn $S_{\mathbf{l}'}$ des Spins $S_{\mathbf{l}}$. Das externe Feld h und die ortsfesten Zufallsfelder $b_{\mathbf{l}}$ werden in Einheiten von \tilde{J}/a^2 und die Zeit τ in Einheiten von a^2/\tilde{J} gemessen, und für die Steifigkeitskonstante u folgt somit $u = u_0 a^2/\tilde{J}$. Hierbei bezeichnet a die Gitterkonstante. Die Zufallsfelder $b_{\mathbf{l}}$ werden als gleichverteilt im Intervall $[-p, p]$ angenommen. Zur Realisierung einer Grenzfläche in der $y - z$ -Ebene erhalten die Spins links von der Grenzfläche den Wert $S_{\mathbf{l}} = 1$ und rechts von dieser Grenzfläche den Wert $S_{\mathbf{l}} = -1$, wobei in y - und z -Richtung periodische Randbedingungen realisiert werden. In dieser Geometrie ist die Grenzflächenposition $\mathbf{h}(\mathbf{r}_0, \tau)$ durch den Vorzeichenwechsel der Magnetisierung $S_{\mathbf{l}}(\tau)$ in x -Richtung gegeben.

Grenzflächendynamik am *depinning*-Übergang

Die Simulationen zeigen, daß der Wert des kritischen Feldes h_C , bei dem der *depinning*-Übergang stattfindet, von p und u abhängen, jedoch sind die Werte der charakteristischen Exponenten α und z unabhängig von dieser Wahl [30]. Für $p = 0.6$ und $u = 0.9$ findet man $h_C \simeq 0.0029$.

Zur Analyse der Morphologie der Grenzfläche und deren Dynamik in der Nähe dieses Übergangs wurde das treibende Feld auf $h = 0.003$ gesetzt und die Höhenkorrelationsfunktion $C(r, \tau)$ Gl. 2.11 gemessen. Abb. 4.1 stellt diese Größe auf logarithmischen Skalen für unterschiedliche Zeiten dar. Die Höhenkorrelationsfunktion zeigt

das für selbstaffine Grenzflächen typische Verhalten. Für kleine r wächst $C(r, \tau)$ algebraisch an, während für große r die Werte der Höhenkorrelationsfunktion konstant werden. Der Wert von r , bei dem der Übergang in die Sättigung stattfindet, ist genauso wie auch der Sättigungswert der Höhenkorrelationsfunktion zeitabhängig. Wie in Abschnitt 2.2 diskutiert wurde, kann der Rauigkeitsexponent α über die r -Abhängigkeit der Höhenkorrelationsfunktion und der Wert des Exponenten β über die Zeitabhängigkeit des Sättigungswertes der Höhenkorrelationsfunktion bestimmt werden. Da die Daten für $r < 3$ eine leichte positive Krümmung aufweisen, kann eine Regressionsanalyse zur Bestimmung des Rauigkeitsexponenten nur für den Bereich $r \geq 3$ durchgeführt werden. Diese Krümmung kann auf die intrinsische Breite $\Delta x = \sqrt{2J/u_0}$ der Domänenwand zurückgeführt werden [23]. Der Ausdruck für die intrinsische Breite Δx ist durch die exakte Lösung $S(\mathbf{r}) = \tanh(x/\Delta x)$ der Differentialgleichung Gl. 3.3 für den speziellen Fall $H = B(\mathbf{r}) = 0$ im stationären Zustand gegeben, siehe Abschnitt 3.2. Eine Anpassung der Daten an Kurven der Form $y = ax^b$ durch Minimierung der Fehlerquadrate [89] ergibt für die Werte der Exponenten $\alpha = 0.68 \pm 0.01$ und $\beta = 0.36 \pm 0.02$. Bei dieser Methode ist die Genauigkeit der Zahlenwerte der Exponenten durch die Standardabweichung der Werte gegeben¹. Mit diesen Werten erhält man für den dynamischen Exponenten $z = \alpha/\beta = 1.89 \pm 0.13$.

Die charakteristischen Exponenten α und z können ebenfalls mittels eines Skalenplots gemäß Gl. 2.14 ermittelt werden (siehe Abb. 4.2). Mit dieser Methode erhält man, in Übereinstimmung mit der oben dargestellten Auswertung, $\alpha = 0.68$ und $z = 1.9$.

Da im Grenzfall $u \rightarrow \infty$ das *Soft-Spin-Modell* in das Zufallsfeld-Ising-Modell übergeht, läßt sich der Wert des Rauigkeitsexponenten mit dem des Zufallsfeld-Ising-Modell vergleichen. Sowohl die theoretische Vorhersage von Grinstein und Ma [77] für das Zufallsfeld-Ising-Modell $\alpha = (4 - \mathcal{D})/3$ als auch das numerische Ergebnis von Ji und Robbins $\alpha = 0.67 \pm 0.03$ für das Zufallsfeld-Ising-Modell [43] stimmen mit dem hier erhaltenen Wert überein. Weiterhin stimmt der Wert des dynamischen Exponenten $z = 1.89 \pm 0.13$ mit dem Ergebnis $z = 1.9$ für das Zufallsfeld-Ising-Modell [44] überein. Amaral et al. [51] konnten zeigen, daß im Zufallsfeld-Ising-Modell der Vorfaktor der KPZ-Nichtlinearität am *depinning*-Übergang den Wert Null hat oder gegen null konvergiert, so daß das Zufallsfeld-Ising-Modell am *depinning*-Übergang zur Edwards-Wilkinson-Universalitätsklasse gehört. Eine Reskalierungsanalyse der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung liefert in Übereinstimmung mit dem numerischen Ergebnis für den Rauigkeitsexponenten $\alpha = 2/3$ und

¹Diese Methode der Regressionsanalyse wird auch in der übrigen Arbeit zur Bestimmung von Exponenten benutzt.

für den dynamischen Exponenten $z = 2$, siehe Abschnitt 3.3, so daß die hier erzielten Ergebnisse die skalentheoretische Vorhersage bestätigen.

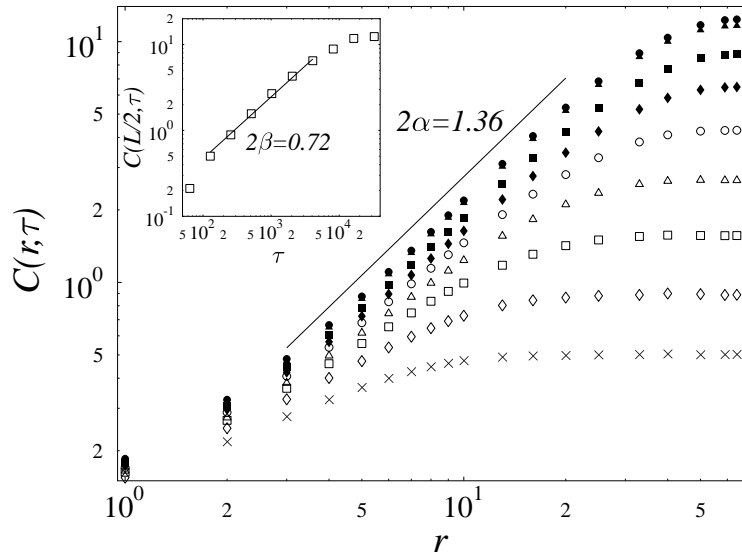


Abbildung 4.1: Die Höhenkorrelationsfunktion $C(r, \tau)$ in Abhängigkeit von r für unterschiedliche Zeiten wie in Abb. 4.2 angegeben bei $h = 0.003$. Das Inset zeigt die Zeitabhängigkeit von $C(L/2, \tau)$.

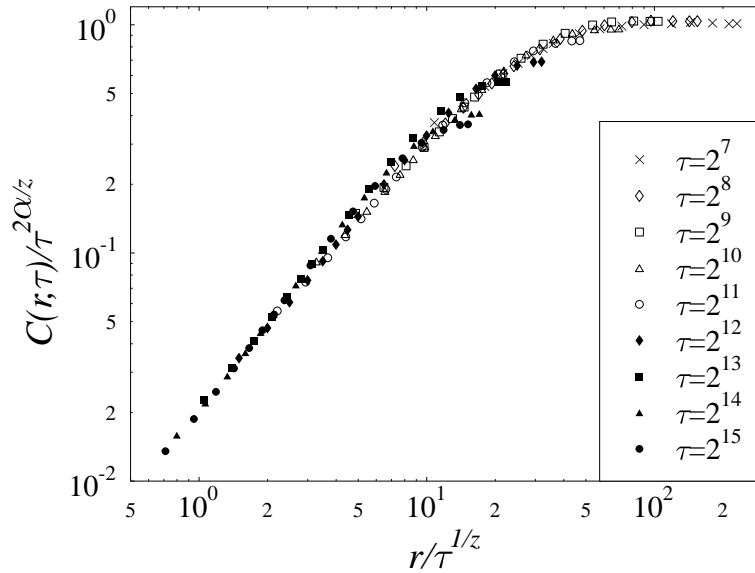


Abbildung 4.2: Skalenplot der Höhenkorrelationsfunktion $C(r, \tau)$ gemäß Gl. 2.14 für $r \geq 3$ und $h = 0.003$.

Grenzflächendynamik weitab vom *depinning*-Übergang

Mit ansteigendem treibendem Feld h steigt auch die Grenzflächengeschwindigkeit [41]. Im Grenzfall $h \gg h_C$ werden die einzelnen Spins nahezu zu jedem Zeitschritt von einem anderen Zufallsfeld beeinflusst. Bezogen auf die Grenzfläche verhalten sich die Zufallsfelder somit wie ein effektives weißes Rauschen. Da der Vorfaktor der KPZ-Nichtlinearität proportional zur mittleren Grenzflächengeschwindigkeit ist, wird die KPZ-Nichtlinearität für die Beschreibung der Grenzflächenbewegung relevant, so daß in diesem Grenzfall die Grenzfläche durch die KPZ-Gleichung mit zeitabhängigem weißem Rauschen beschrieben werden kann [88]. Um das Skalenverhalten der Grenzfläche in diesem Regime zu diskutieren, kann somit auf die bekannten Ergebnisse für die KPZ-Gleichung zurückgegriffen werden.

Im Gegensatz zu dem erwarteten KPZ-Verhalten ergeben die Simulationen, daß das räumliche und zeitliche Verhalten der Grenzfläche durch logarithmische Korrelationen gegeben ist, was von der exakten Lösung der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit zeitabhängiger Unordnung in $\mathcal{D} = 2$ [26] her bekannt ist. Wie Nattermann und Tang [90] und auch Krug [65] mit analytischen Rechnungen zur Rauigkeit im KPZ-Modell zeigen konnten, kann die Diskrepanz zwischen beobachtetem Edwards-Wilkinson-Verhalten und erwartetem KPZ-Verhalten in den Grenzflächendimensionen $\mathcal{D} = 1$ und $\mathcal{D} = 2$ auf zu kleine Systemgrößen zurückgeführt werden. Für Zeiten kleiner als eine von den Systemparametern abhängige Übergangszeit ist die KPZ-Nichtlinearität gegenüber dem Laplace-Term vernachlässigbar klein, d. h., es wird ein Edwards-Wilkinson-artiges Verhalten beobachtet. Das asymptotische KPZ-Verhalten kann somit erst für Zeiten groß gegenüber der Übergangszeit beobachtet werden. Dies setzt aber voraus, daß beim Einsetzen des KPZ-Verhaltens der stationäre Zustand, bei dem die dynamischen Korrelationen sättigen (siehe Abschnitt 2.1), noch nicht erreicht ist. Die Korrelationslänge $\xi_{||}$ muß also noch viel kleiner als ihr Maximalwert sein, welcher proportional zur Systemgröße ist, so daß man auf einer genügend großen Zeitskala das asymptotische KPZ-Verhalten beobachten kann. Somit ist man bei der Simulation auf sehr große Systeme angewiesen, was bei dem hier betrachteten Spin-Modell aufgrund von Rechenzeitbeschränkungen nicht realisiert werden kann.

4.2 RFIM: Exakte Berechnung der Grenzflächenmorphologie

Simulationen zur Grenzflächendynamik im zweidimensionalen *Soft-Spin*-Modell [22, 23] zeigten, daß die Grenzflächen für nicht zu große Zufallsfelder selbstaffin sind und am *depinning*-Übergang durch einen Rauigkeitsexponenten $\alpha \simeq 0.89$ charakterisiert werden können, während die Grenzflächen ohne treibendes Feld durch einen effektiven Rauigkeitsexponenten $\alpha \simeq 0.65 \dots 0.76$ beschrieben werden können, welcher von der Größe der Zufallsfelder abhängt [91]. Im Gegensatz dazu fanden Ji und Robbins [31] in einem $T = 0$ -Modell des Zufallsfeld-Ising-Modells mit *single-spin-flip*-Dynamik keine selbstaffinen Grenzflächen, sondern eine facettierte Struktur, d. h., die Grenzflächen bestehen aus einigen wenigen Terrassen. Aufgrund dieser Diskrepanz soll im folgenden die Grenzflächenmorphologie im zweidimensionalen Zufallsfeld-Ising-Modell Gl. 3.1 mit Hilfe der numerisch exakten Berechnung der Grundzustände dieser Systeme untersucht werden [32].

Numerische Realisierung

Betrachtet wird das Zufallsfeld-Ising-Modell Gl. 3.1 auf einem Quadratgitter der Kantenlänge L , wobei zur Minimierung von *finite-size*-Effekten periodische Randbedingungen in der x -Richtung angenommen werden. Die Zufallsfelder B_1 sind gleichverteilt im Intervall $[-\Delta, \Delta]$, und die Kopplungskonstante J wird zu $J = 1$ gewählt. Zur Realisierung einer Grenzfläche werden die Zufallsfelder der Zeile $y = 1$ auf einen Wert größer als $4J$ gesetzt und die Zufallsfelder der Zeile $y = L$ auf einen Wert kleiner als $-4J$. Somit ist gewährleistet, daß die Magnetisierungen der ersten und der letzten Zeile unabhängig von ihrer jeweiligen lokalen Umgebung $+1$ bzw. -1 sind.

Die Berechnung der exakten Grundzustände erfolgt mit Hilfe eines graphentheoretischen Algorithmus, der für Untersuchungen des statischen kritischen Verhaltens von Zufallsfeldsystemen erstmals in [92] angewandt wurde. Hierbei wird zunächst das Ising-System auf einen äquivalenten Graphen transformiert [93, 94], wobei die Spins den Knoten und die Bindungen den gerichteten Kanten zwischen den Knoten entsprechen. Die Hamiltonfunktion geht hierbei in die Kapazität eines Schnitts im Graphen über. Es kann gezeigt werden, daß die Berechnung des minimalen Schnitts auf die Bestimmung des maximalen Flusses zurückgeführt werden kann [95], hierfür wurde der Algorithmus von Ford und Fulkerson [96] verwendet².

²Für eine detailliertere Beschreibung des Algorithmus zur Berechnung der Grundzustände sei an dieser Stelle auf [97] verwiesen, da die hier dargestellten Ergebnisse mit einem Programm von Esser erzielt wurden [97].

Ergebnisse und Diskussion

Im Fall $H = 0$ ist der Grundzustand des zweidimensionalen Zufallsfeld-Ising-Modells ein Domänenzustand [77] mit einer breiten Verteilung der vorkommenden Domänen-
größen [98]. Eine weitere Eigenschaft der Verteilungsfunktion ist, daß die minimale
Domänengröße mit $\Delta \rightarrow 0$ divergiert [98]. Bei Systemen, die kleiner als die mi-
nimale Domänengröße sind, kann man also erwarten, daß der Grundzustand nur
aus einer Domäne besteht. Aufgrund der realisierten Randbedingungen in der y -
Richtung besteht der Grundzustand hier jedoch aus zwei Domänen entgegengesetz-
ter Magnetisierung. Für $\Delta < \Delta_C = 1$ findet man in Übereinstimmung mit [31],
daß diese Domänen durch eine einwertige Grenzfläche voneinander getrennt sind.
Das Auftreten von nur zwei Domänen, und damit nur einer Grenzfläche, kann auf
die endliche Systemgröße zurückgeführt werden, da für sehr große Systeme und für
homogene Felder kleiner als das kritische Feld H_C , welches den *depinning*-Übergang
charakterisiert, der Grundzustand weiterhin ein Domänenzustand ist.

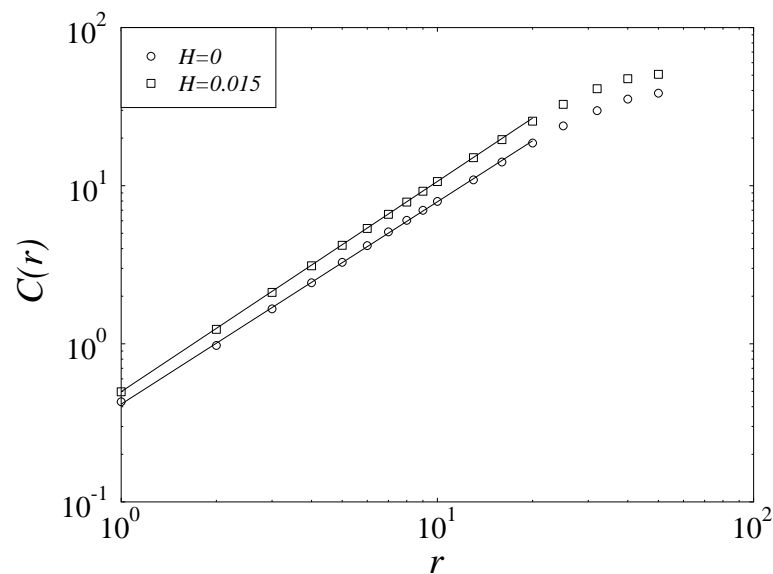


Abbildung 4.3: Die Höhenkorrelationsfunktion $C(r)$ in Abhängigkeit von r für $\Delta = 0.8$ und homogene Felder $H = 0$ und $H = 0.015$.

Zur Analyse der Grenzflächenmorphologie wird wiederum die Höhenkorrelations-
funktion

$$C(r) = \langle [h(x+r) - h(x)]^2 \rangle \quad (4.2)$$

herangezogen. Die Position der Grenzfläche $h(x)$ wird hier durch den Gitterpunkt festgelegt, bei dem die lokale Magnetisierung s_1 für festes x das Vorzeichen wechselt. In Abb. 4.3 ist die Höhenkorrelationsfunktion $C(r)$ als Funktion des Abstands r auf logarithmischen Skalen für $\Delta = 0.8$ und zwei verschiedene homogene Felder, $H = 0$ und $H = 0.015$, dargestellt. Gemittelt wurde jeweils über 100 unterschiedliche Realisierungen der Unordnung. Die Systemgröße beträgt hier $L = 100$, was aufgrund von Rechenzeitbeschränkungen die maximal mögliche Systemgröße ist. Die Beschränkung der Systemgröße ist auch der Grund dafür, daß keine Grundzustände bei größeren homogenen Feldern betrachtet werden, da in diesem Fall keine Zufallsfeldkonfigurationen existieren, welche zwei Domänen entgegengesetzter Magnetisierung stabilisieren, so daß im Grundzustand immer nur die Domäne mit positiver Magnetisierung existiert. Der algebraische Anstieg der Höhenkorrelationsfunktion $C(r)$ für kleine r kann als Indiz dafür gewertet werden, daß die Grenzflächen selbstaffin sind. Eine Analyse ergibt für den Rauigkeitsexponenten $\alpha = 0.64 \pm 0.01$ im Fall $H = 0$ und für $H = 0.015$ den Wert $\alpha = 0.67 \pm 0.01$. Nach Gl. 2.21 ist die Fläche unter der Kurve $C(r)$ ein Maß für die Rauigkeit der Grenzfläche. Da die Kurve für $H = 0.015$ oberhalb der Kurve für $H = 0$ liegt, ist somit die Rauigkeit für $H > 0$ größer als bei $H = 0$.

Die Existenz selbstaffiner Grenzflächen mit dem Rauigkeitsexponenten $\alpha \simeq 0.64$ und das Anwachsen der Rauigkeit mit steigendem homogenen Feld H stimmen mit den Ergebnissen des *Soft-Spin*-Modells [23, 91] überein. Die Simulationen des *Soft-Spin*-Modells ergaben einen effektiven Rauigkeitsexponenten, dessen Wert vom treibenden Feld abhängt. Mit Annäherung an den *depinning*-Übergang ($H \rightarrow H_C$) nähert sich der Wert dieses Exponenten dem theoretischen Ergebnis $\alpha = 1$ (siehe Abschnitt 3.3). In Analogie zum *Soft-Spin*-Modell läßt sich die hier vorliegende Abweichung zum theoretischen Ergebnis darauf zurückführen, daß die Grundzustandsberechnungen nicht für homogene Felder in der Nähe von H_C durchgeführt werden konnten. Wie eingangs schon erwähnt, steht die Beobachtung selbstaffiner Grenzflächen im Widerspruch zu den Ergebnissen von Ji und Robbins [31], welche mit einer *single-spin-flip*-Dynamik für das Zufallsfeld-Ising-Modell eine facettenartige Struktur der Grenzfläche im *pinning*-Zustand erhalten. Weiterhin erhält man mit diesem Lösungsansatz in der *pinning*-Phase Grenzflächen, deren Rauigkeit mit steigendem H abnimmt, was ebenfalls dem hier dargestellten Ergebnis widerspricht. Ihre Ergebnisse begründen Ji und Robbins damit, daß ohne äußeres Feld die Tieftemperaturphase im Zufallsfeld-Ising-Modell keine Fernordnung aufweist [99]. Da es jedoch eine minimale Domänengröße gibt, deren Volumen mit verschwindender Unordnung divergiert, kann man davon ausgehen, daß mindestens auf der Längenskala dieser minimalen Domänengröße die Grenzflächen selbstaffin sind, wie das durch die hier diskutierten Ergebnisse bestätigt wird. Im Gegensatz zu diesen widersprüchlichen

Ergebnissen erhalten Ji und Robbins in Übereinstimmung mit den im vorherigen Abschnitt dargestellten Ergebnissen ebenfalls $\alpha \simeq 2/3$ für eine zweidimensionale Grenzfläche [43]. Eine abschließende Antwort zu der Frage der Äquivalenz des hier dargestellten Lösungsansatzes und dem Lösungsansatz von Ji und Robbins kann somit nicht gegeben werden.

4.3 Die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung

Die in Abschnitt 3.3 mittels Skalenanalyse der Bewegungsgleichung Gl. 3.20 erhaltenen Werte für die charakteristischen Exponenten sollen im folgenden numerisch in $\mathcal{D} = 1$ überprüft und mit Literaturergebnissen verglichen werden. Als Integrationsverfahren wird das Euler-Verfahren gewählt:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t + dt) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + dt \left[\gamma \sum_{NN} [\mathbf{h}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)] + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)) + F \right]. \quad (4.3)$$

Hierbei stellt der erste Term in Gl. 4.3 eine diskretisierte Darstellung des Laplaceoperators dar, bei der sich die Summation über die $2\mathcal{D}$ nächsten Nachbarn von $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ erstreckt. Die Konstante γ wird auf $\gamma = 1$ gesetzt und für den Unordnungsterm $\eta(x, \mathbf{h})$ wird eine Gaußverteilung mit Standardabweichung $\sigma = 0.1$ angenommen. Bei der numerischen Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung, Gl. 3.20, ist aufgrund der ortsabhängigen Unordnung nicht nur die \mathbf{x} -Richtung, sondern auch die Wachstumsrichtung (\mathbf{h} -Richtung) zu diskretisieren. Eine geeignete Wahl für die Zeit- und Ortsdiskretisierung ist $dt = dh = 0.01$. Aufgrund der kontinuierlichen Werte von \mathbf{h} tritt bei der Simulation das Problem auf, daß \mathbf{h} auch nichtganzzahlige Vielfache von dh annimmt, also zwischen zwei Gitterpunkten $n dh$ und $(n + 1) dh$ liegt. In diesem Fall wird dem Unordnungsanteil in Gl. 3.20 der Wert $\eta(x, n dh)$ zugeordnet, siehe auch [37]. Dies widerspricht der Annahme, daß die Korrelationen von η auf Längenskalen kleiner als die Gitterkonstante durch eine monoton fallende Funktion gegeben sind. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, ist, daß für $n dh < \mathbf{h} < (n + 1) dh$ der zu diesem \mathbf{h} gehörende Fluktuationwert η durch lineare Interpolation der Werte von $\eta(x, n dh)$ und $\eta(x, (n + 1) dh)$ gewonnen wird [33]. Ein Vergleich dieser Methode mit der hier angewandten zeigt jedoch, daß zumindest für die dynamischen Korrelationen, charakterisiert durch den Exponenten β , kein Unterschied zwischen den einzelnen Methoden besteht [84].

Feldabhängigkeit der Grenzflächengeschwindigkeit und der Korrelationslänge

Die Analyse der Feldabhängigkeit der Grenzflächengeschwindigkeit v und der Korrelationslänge ξ_{\parallel} liefert neben den Exponenten θ und ν auch zwei unabhängige Methoden zur Bestimmung des kritischen Feldes F_C , bei dem der *depinning*-Übergang stattfindet.

In Abb. 4.4 ist die Grenzflächengeschwindigkeit $v(F)$ gegen $F - F_C$ auf logarithmischen Skalen aufgetragen. Hierbei wurde das kritische Feld $F_C = 0.1705$ so bestimmt, daß für $F \rightarrow F_C$ eine Übereinstimmung mit dem erwarteten Skalenverhalten $v(F) \sim (F - F_C)^\theta$ (Gl. 2.10) erzielt wird. Für $F \gg F_C$ beobachtet man den erwarteten linearen Zusammenhang zwischen der Grenzflächengeschwindigkeit v und dem treibendem Feld F , während für $F \rightarrow F_C$ der Übergang zum kritischen Verhalten Gl. 2.10 stattfindet. In der Nähe des *depinning*-Übergangs erhält man in sehr guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Ergebnis für den Geschwindigkeitsexponenten $\theta = 0.99 \pm 0.03$. Diese zwei asymptotischen Skalenverhalten sind durch einen relativ großen Übergangsbereich getrennt, welcher durch einen effektiven Geschwindigkeitsexponenten $\tilde{\theta} \simeq 0.46$ und ein etwas kleineres kritisches Feld $\tilde{F}_C \simeq 0.17$ charakterisiert werden kann. Der Grund für einen Wert $\tilde{\theta} < 1$ ist der, daß der Proportionalitätsfaktor im Skalenverhalten für $F \rightarrow F_C$ größer ist als derjenige im Skalenverhalten für $F \gg F_C$. Csahok et al. [37] erhalten im Widerspruch zu dem hier erzielten Ergebnis $\theta \simeq 1$ den Wert $\theta \simeq 0.5$. Da dieser ziemlich gut mit dem Wert $\tilde{\theta}$ im nichtasymptotischen Bereich übereinstimmt, liegt die Vermutung nahe, daß die Diskrepanz zu dem hier erzielten Ergebnis darauf zurückzuführen ist, daß ihre Simulationen nicht nahe genug am *depinning*-Übergang durchgeführt wurden.

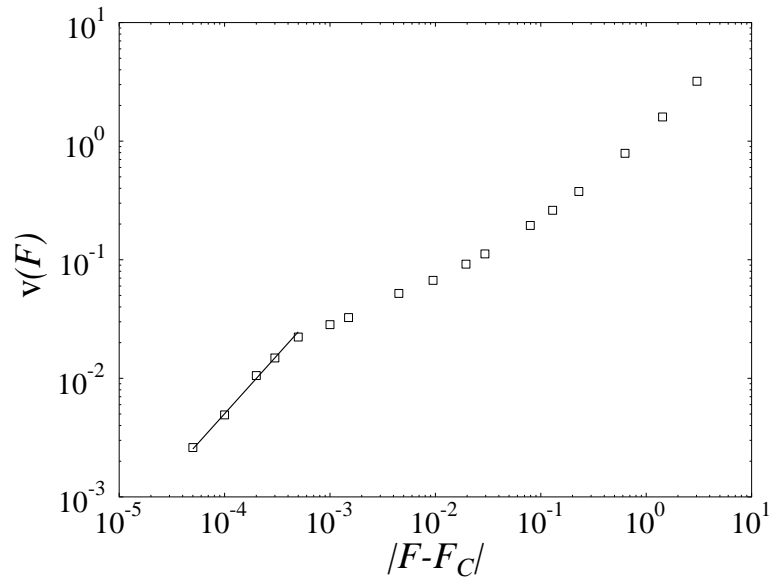


Abbildung 4.4: Die Grenzflächengeschwindigkeit $v(F)$ als Funktion der reduzierten treibenden Kraft $|F - F_C|$. Eine Regressionsanalyse für $|F - F_C| < 10^{-3}$ ergibt für den Geschwindigkeitsexponenten $\theta = 0.99 \pm 0.03$.

Aufgrund des ziemlich großen Übergangsbereichs im Geschwindigkeitsverhalten ist es wünschenswert, eine von der Geschwindigkeitsmessung unabhängige Methode zur Bestimmung von F_C heranzuziehen und somit auch das Ergebnis für den Geschwindigkeitsexponenten indirekt zu verifizieren. Dies soll hier über die Feldabhängigkeit der Korrelationslänge $\xi_{\parallel} \sim |F - F_C|^{-\nu}$ (Gl. 2.2) in der *pinning*-Phase geschehen.

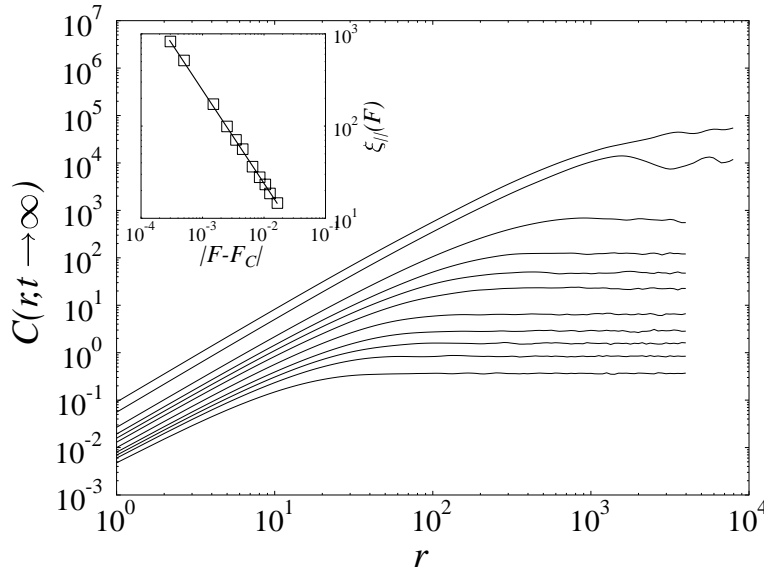


Abbildung 4.5: Die Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t \rightarrow \infty)$ für unterschiedliche treibende Felder $F < F_C \simeq 0.1705$ (von unten nach oben: $F = 0.15, 0.154, 0.158, 0.16, 0.164, 0.166, 0.167, 0.168, 0.169, 0.17$). Das Inset zeigt die Feldabhängigkeit der Korrelationslänge ξ_{\parallel} , wobei die Linie eine Regressionskurve gemäß $\xi_{\parallel} \sim |F - F_C|^{-\nu}$ mit $F_C = 0.1705$ und $\nu = 1.01 \pm 0.01$ darstellt.

In einer logarithmischen Auftragung der Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ ist die Korrelationslänge ξ_{\parallel} durch den Schnittpunkt der horizontalen Geraden, welche durch den Wert $C(r \gg \xi_{\parallel}, t)$ definiert ist, und der Geraden, welche man durch eine Regressionsanalyse der Höhenkorrelationsfunktion für $r \ll \xi_{\parallel}$ erhält, definiert [100]. Abb. 4.5 zeigt die Höhenkorrelationsfunktion der Grenzflächen im *pinning*-Zustand für unterschiedliche treibende Felder $F < F_C$, jeweils gemittelt über 10 unterschiedliche Realisierungen der Unordnung. Als Systemgrößen wurden $L = 8192$ und $L = 16384$ gewählt, so daß $\xi_{\parallel} \ll L$ für alle gewählten F ist. Eine Analyse der Daten gemäß Gl. 2.2 ergibt für den Korrelationslängenexponenten $\nu = 1.01 \pm 0.01$, was sowohl dem skalentheoretischen Ergebnis als auch dem Ergebnis von Dong et al. [34] entspricht, und für das kritische treibende Feld wiederum $F_C = 0.1705$. Dieser Wert

für F_C kann somit als Bestätigung für die Analyse der Geschwindigkeit aufgefaßt werden.

Analyse der räumlichen und dynamischen Korrelationen

Zur Bestätigung der in Abschnitt 3.3 erhaltenen Ergebnisse für den Rauigkeitsexponenten α und den dynamischen Exponenten z am *depinning*-Übergang können zum einen die Skalengesetze Gl. 2.10 und Gl. 3.23 herangezogen werden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, diese Exponenten durch eine Simulation knapp oberhalb des *depinning*-Übergangs, hier $F = 0.17055$, zu bestimmen. Die Systemgröße beträgt bei den hier dargestellten Ergebnissen $L = 16384$.

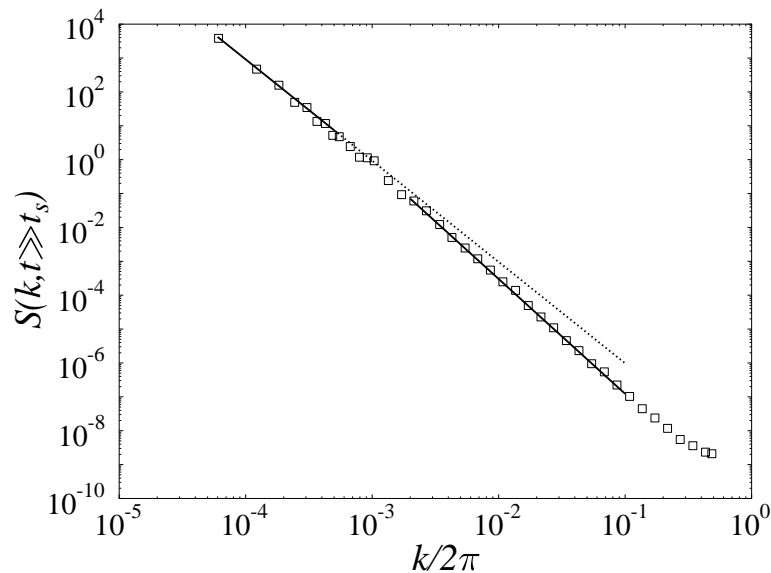


Abbildung 4.6: Der Strukturfaktor $S(k, t \gg t_s)$ im stationären Zustand für $F = 0.17055$. Die durchgezogenen Linien repräsentieren Regressionskurven gemäß $S(k, t \gg t_s) \sim k^{-\gamma}$ mit $\gamma = 2.98 \pm 0.08$ für die kleinsten k -Moden und $\gamma = 3.39 \pm 0.07$ für größere k -Moden. Die punktierte Linie stellt eine Extrapolation der Regressionskurve für kleine k -Moden dar, um den Übergang zum asymptotischen Skalenverhalten zu verdeutlichen.

Aufgrund der theoretischen Vorhersage $\alpha = 1$ für $\mathcal{D} = 1$ kann α nicht über die r -Abhängigkeit der Höhenkorrelationsfunktion bestimmt werden, da mit dieser Methode nur Rauigkeitsexponenten $\alpha \leq 1$ bestimmt werden können (siehe Abschnitt 2.2). Für einen Rauigkeitsexponenten $\alpha > 1$ würde diese Methode somit

zu falschen Ergebnissen führen. Aus diesem Grund soll hier der Strukturfaktor $S(k, t \gg t_S)$ (Gl. 2.19) analysiert werden. Abb. 4.6 zeigt diese Meßgröße im stationären Zustand $t \gg t_S$. Mit einer Regressionsanalyse in einem mittleren k -Bereich $2 * 10^{-3} < k/2\pi < 10^{-1}$ erhält man $\gamma = 3.39 \pm 0.07$, was mit $\gamma = 2\alpha + 1$ zu $\alpha = 1.19 \pm 0.04$ für den Rauigkeitsexponenten führt. Eine genaue Analyse der Daten zeigt jedoch, daß für k -Werte kleiner als $k/2\pi \simeq 10^{-3}$ die Steigung des Strukturfaktors kleiner wird. Die Regressionsanalyse der Daten für $k/2\pi < 5 * 10^{-4}$ ergibt somit einen kleineren Wert für γ , und zwar $\gamma = 2.98 \pm 0.08$, was zu $\alpha = 0.99 \pm 0.04$ führt. Da nur die kleinsten k -Werte das asymptotische Verhalten beschreiben [72], ist somit der asymptotische Wert des Rauigkeitsexponenten in Übereinstimmung mit der skalentheoretischen Vorhersage $\alpha \simeq 1$ und den Ergebnissen von Dong et al. [34] und Kessler et al. [35]. Der in der Literatur erhaltene Wert $\alpha \simeq 1.2$ [38, 39] wurde mit kleineren Systemen $L = 2000$ [38] und $L = 128$ [39] erzielt. Da die zu diesen Systemgrößen gehörenden kleinsten k -Moden $k/2\pi = 1/L$ im Übergangsbereich zum asymptotischen Skalenverhalten bzw. im Bereich der mittleren k -Moden liegen, ist der in der Literatur angegebene Wert nicht der asymptotische. Dies wird zusätzlich dadurch bestätigt, daß dieser Wert mit dem hier ermittelten Wert für die mittleren k -Moden übereinstimmt.

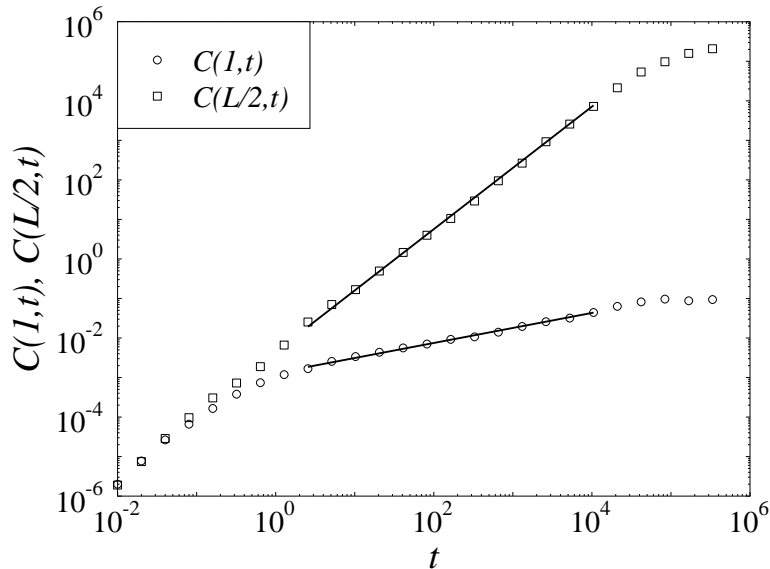


Abbildung 4.7: Zeitabhängigkeit von $C(1, t)$ und $C(L/2, t)$. Die Linien stellen Regressionskurven gemäß $C(1, t) \propto t^{0.38 \pm 0.02}$ und $C(L/2, t) \propto t^{1.41 \pm 0.03}$ dar.

Der Übergang von einem effektiven Rauigkeitsexponenten $\alpha > 1$ für kleine Zeiten zu $\alpha \simeq 1$ für große Zeiten kann ebenfalls mit der Zeitabhängigkeit der mittleren quadratischen Stufenhöhe $C(1, t)$ beobachtet werden. Für kleine Zeiten skaliert aufgrund des modifizierten Skalenverhaltens der Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ für $\alpha > 1$ (siehe Abschnitt 2.2) $C(1, t)$ wie $C(1, t) \sim t^{2\kappa}$, während im asymptotischen Bereich $C(1, t)$ zeitunabhängig ist. Ebenso muß sich der Übergang in einem unterschiedlichen Skalenverhalten von $C(L/2, t) \sim t^{2\beta}$ für kleine und große Zeiten bemerkbar machen, siehe Abb. 4.7. Für kleine Zeiten $t < 10^4$ ergeben Regressionsanalysen $\kappa = 0.19 \pm 0.01$ und $\beta = 0.7 \pm 0.02$, in ziemlich guter Übereinstimmung mit $\beta_{\text{Parisi}} = 0.75$. Aus $\kappa \neq 0$ folgt, daß in dem analysierten Zeitbereich der Rauigkeitsexponent α größer als eins ist, und zwar $\alpha = \beta/(\beta - \kappa) = 1.37 \pm 0.07$, was in etwa mit dem vorherigen Ergebnis übereinstimmt. Jedoch ist dieses *super-roughening*-Verhalten auf eine Zeitskala $t \simeq 5 * 10^4$ beschränkt, da ab diesem Zeitpunkt $C(1, t)$ sättigt, während der Wert von $C(L/2, t)$, und somit die Korrelationslänge $\xi_{\parallel}(t)$, den asymptotischen Wert des stationären Zustands nicht vor $t = 10^6$ erreicht. Somit tritt für sehr große Zeiten ein Übergang zum $\alpha = 1$ -Skalenverhalten auf, d. h., die mittlere quadratische Stufenhöhe ist, bis auf logarithmische Korrekturen, konstant. Da die Differenz zwischen der Zeitskala, ab der $C(1, t)$ sättigt, und der Zeitskala t_S , bei welcher der stationäre Zustand erreicht ist, nicht viel größer als eine Dekade ist, kann eine quantitative Analyse dieses Übergangs zum asymptotischen Skalenverhalten nicht durchgeführt werden. Mit diesen Betrachtungen läßt sich jedoch die Diskrepanz zwischen dem theoretischen Wert für β und dem von Parisi erhaltenen Wert $\beta_{\text{Parisi}} = 0.75$ verstehen. Solange $C(1, t)$ wächst, was für kleine Systeme für alle $t < t_S(L)$ gilt, ist der asymptotische Wert von β um den Wert von κ vergrößert, so daß hier der asymptotische Wert für β durch $\beta \simeq 0.5$ gegeben ist. Man erhält somit für den dynamischen Exponenten $z = \alpha/\beta \simeq 2$ in Übereinstimmung mit der Skalenanalyse der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung. Mit der hier geschilderten Sichtweise lassen sich auch die Ergebnisse $\alpha_{Lh} \simeq 1.25$ und $\beta_{Lh} \simeq 0.88$ von Leschhorn [36] verstehen, welche mit einem Skalenplot der Höhenkorrelationsfunktion erzielt wurden. Aufgrund von Rechenzeitbeschränkungen ist man auch bei dieser Analyse auf einen Zeitbereich beschränkt, bei dem die mittlere Stufenhöhe noch wächst, so daß die asymptotischen Werte der Exponenten nicht beobachtet werden können.

Da $\beta \simeq 0.5$, aufgrund der durch Simulationen zugängigen Systemgrößen, nicht direkt gemessen werden kann, ist es wünschenswert, zur Bestätigung des Wertes $z \simeq 2$, den dynamischen Exponenten direkt zu messen. Da das Wachstum der mittleren Stufenhöhe das Skalenverhalten der Korrelationslänge $\xi_{\parallel}(t)$ nicht beeinflusst, kann z über die Abhängigkeit $\xi_{\parallel} \sim t^{1/z}$ (Gl. 2.3) bestimmt werden. Mit der oben dargestellten Bestimmung der Korrelationslänge aus der Höhenkorrelationsfunktion erhält

man in recht guter Übereinstimmung mit obigem Ergebnis $z = 1.92 \pm 0.04$, siehe Abb. 4.8. Die direkte Messung des dynamischen Exponenten bestätigt somit die asymptotischen Werte $\alpha \simeq 1$ und $\beta \simeq 0.5$, und somit auch indirekt, daß das *super-roughening*-Verhalten nur als Einschwingvorgang der Bewegungsgleichung Gl. 3.20 zu interpretieren ist.

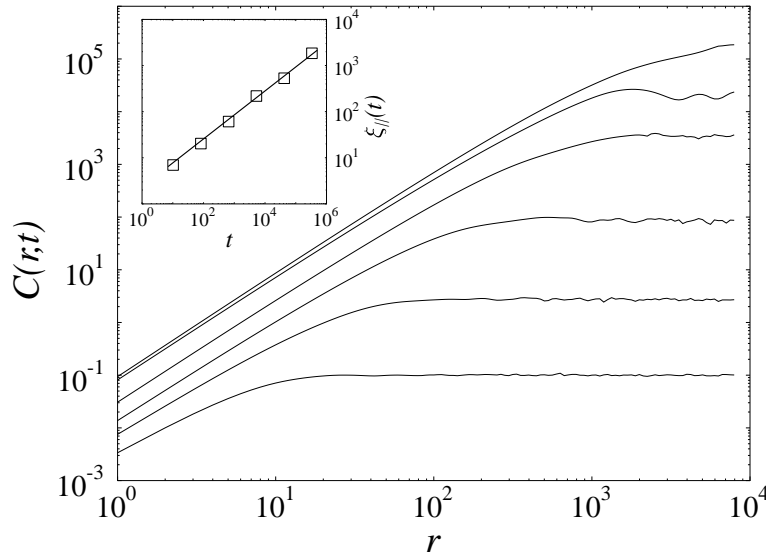


Abbildung 4.8: Die Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ für $F = 0.17055$ zu unterschiedlichen Zeiten $t/dt = 2^{10}, 2^{13}, 2^{16}, 2^{19}, 2^{22}, 2^{25}$ (von unten nach oben). Das Inset zeigt die Zeitabhängigkeit der Korrelationslänge $\xi_{||}$, wobei die Linie eine Regressionskurve gemäß $\xi_{||} \sim t^{1/z}$ mit $z = 1.92 \pm 0.04$ darstellt.

Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurden die Ergebnisse der numerischen Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung am *depinning*-Übergang in $\mathcal{D} = 1$ analysiert. Der Geschwindigkeitsexponent θ , der Korrelationslängeexponent ν , der Rauigkeitsexponent α und der dynamische Exponent z wurden jeweils aus unabhängigen Messungen bestimmt, wobei die erzielten Werte den skalentheoretischen Vorhersagen (Abschnitt 3.3) für diese Exponenten entsprechen. Diese Ergebnisse bestätigen somit auch die Skalengesetze Gl. 2.10 und Gl. 3.23, welche die Zahl der unabhängigen Exponenten auf zwei reduziert. Weiterhin zeigt die Analyse,

daß zum Teil vorhandene Abweichungen mit Literaturwerten auf *finite-size*-Effekte zurückgeführt werden können, da das asymptotische Skalenverhalten erst für sehr große Systeme $L > 10^4$ existiert.

4.4 Das Leschhornsche Automatenmodell

4.4.1 Definition des Automatenmodells

Automatenmodelle zur Beschreibung von Grenzflächen unterscheiden sich von der Beschreibung durch Kontinuumsgleichungen dadurch, daß nicht nur die transversalen Koordinaten \mathbf{x} diskretisiert werden, sondern auch die longitudinale Grenzflächenposition h und die Zeit t . Dies hat den Vorteil, daß bei Simulationen nur ganze Zahlen auftreten, was die Rechengeschwindigkeit erhöht und den Speicherbedarf verringert, so daß insbesondere in höheren Grenzflächendimensionen größere Systeme betrachtet werden können. Speziell in dem hier betrachteten Modell ist in $\mathcal{D} = 1$ die Systemgröße um drei bzw. eine Größenordnung größer als im *Soft-Spin*-Modell und bei der numerischen Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung Gl. 3.20. Weiterhin erlaubt das Automatenmodell in $\mathcal{D} = 2$ Simulationen, die um eine Größenordnung größer sind als im *Soft-Spin*-Modell.

Leschhorn [42] schlug ein Automatenmodell vor, welches zur Edwards-Wilkinson Universalitätsklasse gehören soll und wie folgt definiert ist: Jedem Gitterplatz eines \mathcal{D} -dimensionalen hyperkubischen Gitters mit periodischen Randbedingungen wird eine *pinning*-Kraft $\eta(\mathbf{x}, h)$ zugeordnet, welche sowohl den Unordnungsterm als auch die treibende Kraft in Gl. 3.20 beschreibt. Hierbei nimmt $\eta(\mathbf{x}, h)$ mit Wahrscheinlichkeit p den Wert g und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ den Wert $-g$ an, der Parameter g repräsentiert somit die Stärke der *pinning*-Kräfte. Aufgrund der angenommenen unsymmetrischen Verteilungsfunktion der *pinning*-Kräfte ($p \neq 0.5$) wirkt auf die Grenzfläche eine mittlere treibende Kraft $g(2p - 1)$. Die Grenzfläche ist durch eine ganzzahlige Funktion $h(\mathbf{x}, t)$ definiert, wobei als Anfangsbedingung $h(\mathbf{x}, t = 0) = 0$ für alle \mathbf{x} gewählt wird. Zu jedem Zeitschritt t wird die Summe des diskretisierten Laplaceoperators und der Unordnung

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{NN} [h(\mathbf{x}', t) - h(\mathbf{x}, t)] + \eta(\mathbf{x}, h(\mathbf{x}, t)) \quad (4.4)$$

berechnet, wobei die Summation sich über die $2\mathcal{D}$ nächsten Nachbarn von $h(\mathbf{x}, t)$ erstreckt. Die Grenzflächenposition zum nächsten Zeitschritt ist durch die Wachstumsregel

$$h(\mathbf{x}, t + 1) = \begin{cases} h(\mathbf{x}, t) + 1 & : \text{ falls } v(\mathbf{x}) > 0 \\ h(\mathbf{x}, t) & : \text{ sonst} \end{cases} \quad (4.5)$$

definiert, wobei diese Wachstumsregel für alle Gitterpunkte \mathbf{x} parallel durchgeführt wird. Die formale Ähnlichkeit dieses Modells mit der Edwards-Wilkinson-Gleichung

3.20 ist dadurch gegeben, daß $v(\mathbf{x})$, Gl. 4.4, im wesentlichen der diskretisierten Version Gl. 4.3 von Gl. 3.20 entspricht. Ein Unterschied besteht in der Definition der treibenden Kraft, welche hier nicht durch einen additiven Term beschrieben wird, sondern durch eine unsymmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung der *pinning*-Kräfte. Der Hauptunterschied zur Edwards-Wilkinson-Gleichung ist jedoch durch die Dynamik Gl. 4.5 des Modells gegeben. Zum einen läßt diese Dynamik im Gegensatz zur Edwards-Wilkinson-Gleichung keine Rückwärtsbewegungen in $-h$ -Richtung zu, und zum anderen ist die Vorwärtsbewegung der Grenzfläche nicht kontinuierlich, sondern nur durch einen einzigen Wert gegeben.

4.4.2 Simulationen am *depinning*-Übergang

Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 1$

Zur Analyse des Skalenverhaltens am *depinning*-Übergang wurden Systeme bis zu einer Größe von $L = 262144$ simuliert, wobei für die Stärke der *pinning*-Kräfte $g = 1$ gewählt wurde. Der *depinning*-Übergang findet beim größten System bei $p_C \simeq 0.8007$ statt. Dieser Wert ist etwas größer als der, den Leschhorn in seinen Simulationen erhält [42] ($p_{C,Lh} \simeq 0.8004$). Im Gegensatz zu Leschhorn, welcher nur Systeme bis $L = 1024$ im stationären Zustand untersucht hat, wird auch das größte System in den stationären Zustand getrieben, um die morphologischen Eigenschaften der Grenzfläche zu studieren.

Der Rauigkeitsexponent wird hier, wie schon bei der Diskussion der Kontinuumsgleichung 3.20, mit Hilfe des Strukturfaktors $S(k) \sim k^{-\gamma}$ bestimmt (siehe Abschnitt 2.2), da das Skalenverhalten dieser Meßgröße nicht davon abhängt, ob der Rauigkeitsexponent größer oder kleiner als eins ist, wie dies bei der Höhenkorrelationsfunktion der Fall ist. Abb. 4.9 zeigt den Strukturfaktor im stationären Zustand $t \gg t_S$. Mittels einer Regressionsanalyse im Bereich $3 * 10^{-4} < k/2\pi < 10^{-1}$ erhält man $\gamma = 3.43 \pm 0.01$, was zu $\alpha \simeq 1.22$ für den Rauigkeitsexponenten führt. Eine genauere Analyse des Kurvenverlaufs ergibt jedoch, daß die Kurve für k -Moden kleiner als 10^{-4} flacher verläuft. Eine Regressionsanalyse ergibt für diese k -Moden $\gamma = 2.97 \pm 0.03$, so daß der Rauigkeitsexponent den Wert $\alpha = 0.99 \pm 0.01$ hat. Da nur die kleinsten k -Moden das asymptotische Verhalten wiedergeben [72], ist somit der asymptotische Wert des Rauigkeitsexponenten am *depinning*-Übergang $\alpha \simeq 1$.

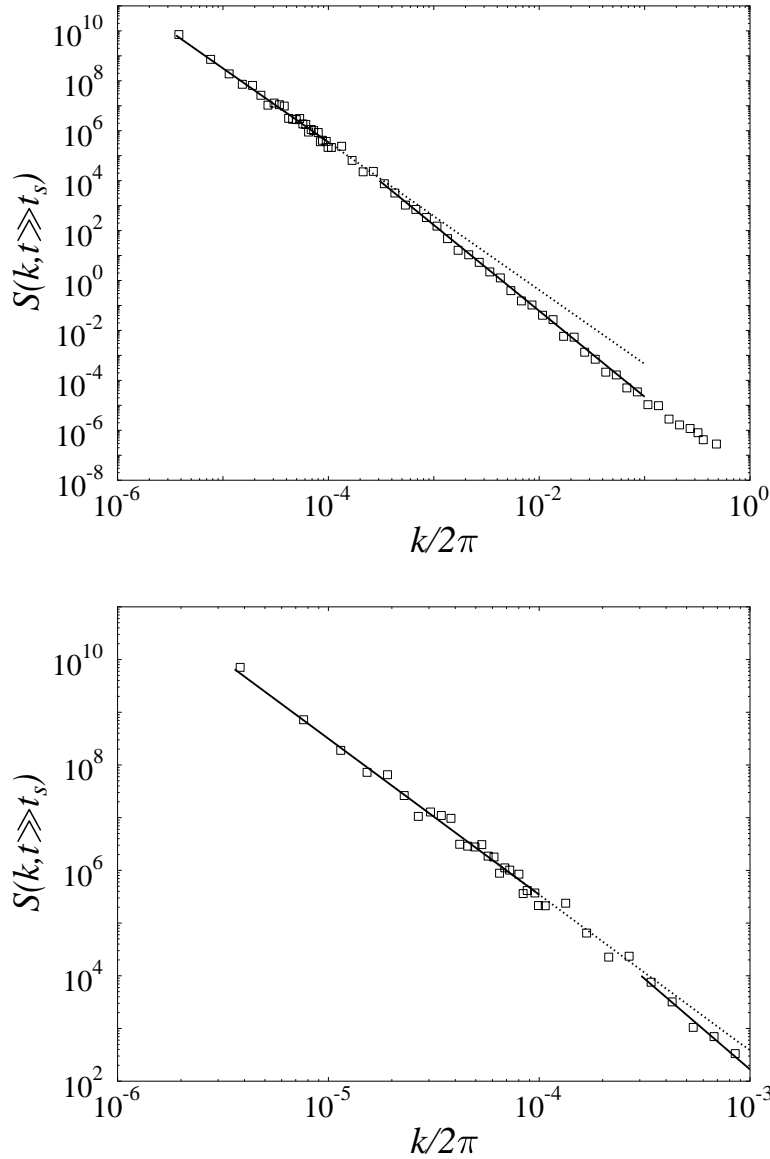


Abbildung 4.9: (a) Der Strukturfaktor $S(k, t \gg t_s)$ im stationären Zustand für $\mathcal{D} = 1$, $p = 0.8007$, $g = 1$ und $L = 262144$, wobei über 2^{22} Zeitschritte gemittelt wurde. Die durchgezogenen Linien stellen Regressionskurven gemäß $S(k) \sim k^{-\gamma}$ dar, was für $k/2\pi < 10^{-4}$ zu $\gamma = 2.96 \pm 0.04$ und für mittlere k -Werte zu $\gamma = 3.43 \pm 0.01$ führt. Die gepunktete Linie stellt eine Extrapolation der Regressionskurve für kleine k -Moden dar, um den Übergang zum asymptotischen Skalenverhalten zu verdeutlichen. (b) Ausschnitt aus (a) für kleine k -Moden.

Der Übergang zum asymptotischen Skalenverhalten bei $k/2\pi \simeq 10^{-4}$ ist für die Diskrepanz zu Leschhorns Wert $\alpha > 1$ verantwortlich, was wie folgt verstanden werden kann: Da der kleinste k -Wert in einem System der Größe L durch $k/2\pi = 1/L$ gegeben ist, kann der asymptotische Bereich des Strukturfaktors nur bei Systemen beobachtet werden, welche viel größer als $L = 10^4$ sind. Leschhorn erhält mit seinen Simulationen $\alpha_{Lh} = 1.25 \pm 0.01$, wobei dieser Wert aus der Systemgrößenabhängigkeit der Rauigkeit

$$w^2(L, t) = \frac{1}{L^D} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{0}} S(k, t) \quad (4.6)$$

im stationären Zustand für Systemgrößen zwischen $L = 8$ und $L = 1024$ ermittelt wurde. Da in der Summe in Gl. 4.6 die k -Moden mit $k/2\pi < 10^{-4}$ für diese Systemgrößen nicht vorkommen, ist der von Leschhorn ermittelte Wert nicht der asymptotische, sondern der des Bereichs für mittlere k -Moden. Die hier dargestellte Sichtweise wird dadurch bestätigt, daß dieser Wert mit dem hier ermittelten Wert für die mittleren k -Moden übereinstimmt.

Da die Höhenkorrelationsfunktion aus der Fouriertransformierten des Strukturfaktors folgt,

$$C(r, t) = \sum_{k=2\pi/L}^{\pi/a} (1 - \cos(\mathbf{kr})) S(k, t), \quad (4.7)$$

wird das unterschiedliche Skalenverhalten für kleine und große Systeme auch im *finite-size*-Skalenverhalten der Höhenkorrelationsfunktion $C_L(r)$ sichtbar (siehe Abschnitt 2.2):

$$C_L(r) \sim \begin{cases} r^{2\alpha} & : \alpha < 1 \\ r^2 \log(L) & : \alpha = 1 \\ r^2 L^{2(\alpha-1)} & : \alpha > 1 \end{cases} . \quad (4.8)$$

Diese Gleichung definiert für $r = 1$ auch das *finite-size*-Verhalten der mittleren quadratischen Stufenhöhe $C_L(1)$, welche in Abb. 4.10 dargestellt ist. Für kleine Systeme $L \leq 8192$ treten nur solche k -Werte in der Fouriertransformation in Gl. 4.7 auf, welche zu dem Skalenverhalten $\alpha > 1$ gehören, so daß $C_L(1)$ algebraisch wächst.

Eine Regressionsanalyse ergibt $\alpha = 1.24 \pm 0.01$ in sehr guter Übereinstimmung mit dem Wert, welcher mit Hilfe des Strukturfaktors für die mittleren k -Moden ermittelt wurde. Dieses algebraische Wachstum geht jedoch bei einer Längenskala von $L_C \sim 10^4$ in ein logarithmisches über, was einem asymptotischen Wert $\alpha = 1$ entspricht. Der Längenbereich, in dem das logarithmische Anwachsen der mittleren quadratischen Stufenhöhe beobachtet werden kann, ist zwar relativ klein, jedoch

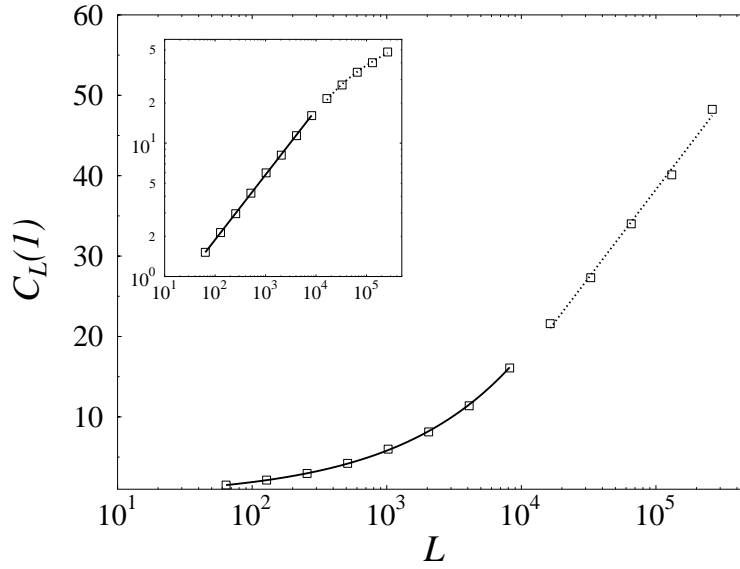


Abbildung 4.10: Die Systemgrößenabhängigkeit der mittleren quadratischen Stufenhöhe $C_L(1)$ auf halblogarithmischen Skalen. Die durchgezogene Linie repräsentiert eine Regressionskurve gemäß $C_L(1) \sim L^{2(\alpha-1)}$ mit dem Exponenten $\alpha = 1.24 \pm 0.01$, während die gepunktete Linie eine Regressionskurve $C_L(1) = a + b \log(L)$ für $L \geq 16384$ darstellt. Das Inset zeigt die gleichen Daten auf logarithmischen Skalen. ($D = 1$, $p = 0.8007$, $g = 1$, $L = 262144$).

stimmt der Wert von L_C ungefähr mit dem k -Wert überein, bei dem im Strukturfaktor der Übergang zum asymptotischen Skalenverhalten sichtbar wird, so daß die hier dargestellte Analyse schlüssig ist.

Aufgrund des unterschiedlichen Verhaltens der Skalenfunktion $g(y)$ der Höhenkorrelationsfunktion (siehe Abschnitt 2.2) für $\alpha > 1$ und $\alpha = 1$ sollte der Übergang von einem effektiven Skalenverhalten mit $\alpha > 1$ zum asymptotischen Skalenverhalten $\alpha \simeq 1$ auch bei der Zeitabhängigkeit der mittleren quadratischen Stufenhöhe $C(1, t)$ sichtbar werden. Für kleine Zeiten bzw. Korrelationslängen $\xi_{||}(t)$ erwartet man somit einen algebraischen Anstieg $C(1, t) \sim t^{2\kappa}$ mit $\kappa = (\alpha - 1)/z$, während für $\xi_{||}(t) > 10^4$ das asymptotische zeitunabhängige Verhalten für $\alpha \simeq 1$ beobachtet werden sollte. Ebenso muß sich dieser Übergang im Verhalten von $C(L/2, t) \sim t^{2\beta}$ widerspiegeln, siehe Abb. 4.11. Regressionsanalysen ergeben für die Exponenten $\kappa = 0.17 \pm 0.01$ und $\beta = 0.86 \pm 0.01$, was zu $z = 1.44 \pm 0.03$ führt und mit Leschorns Wert $z_{Lh} = 1.42 \pm 0.03$ übereinstimmt. Mit $\kappa > 0$ folgt somit, daß im untersuchten Zeitregime der Rauigkeitsexponent größer als eins ist, und zwar $\alpha \simeq 1.25$, was mit obigen Ergebnissen übereinstimmt. Dieses *super-roughening*-Skalenverhalten ist je-

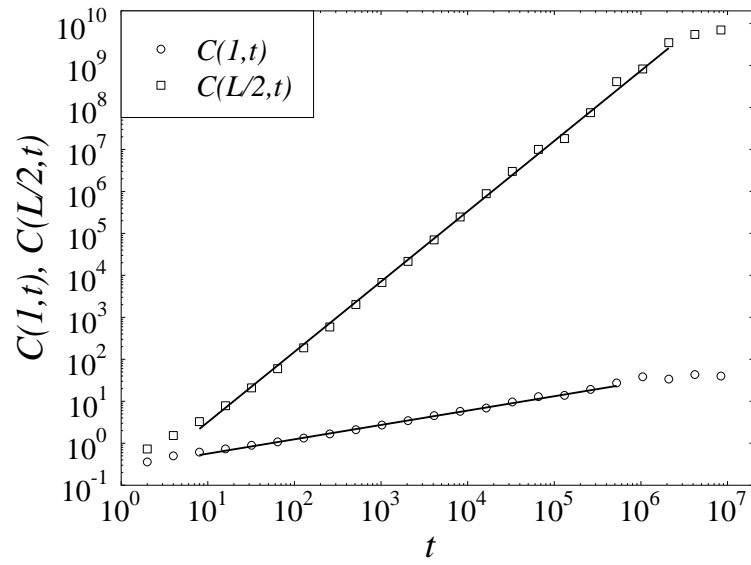


Abbildung 4.11: Zeitabhängigkeit von $C(1,t)$ und $C(L/2,t)$, die Linien repräsentieren Regressionskurven gemäß $C(1,t) \sim t^{0.34 \pm 0.02}$ und $C(L/2,t) \sim t^{1.72 \pm 0.02}$. ($\mathcal{D} = 1$, $p = 0.8007$, $g = 1$, $L = 262144$).

doch nur in einem Übergangsbereich gültig, da nach ca. 10^6 Zeitschritten $C(1,t)$ sättigt, $C(L/2,t)$ jedoch nicht vor dem Zeitpunkt $5 * 10^6$. D.h., daß für sehr große Zeiten ein Übergang zum $\alpha = 1$ -Skalenverhalten stattfindet, so daß die mittlere quadratische Stufenhöhe nicht mehr algebraisch anwächst, sondern, bis auf logarithmische Korrekturen, einen konstanten Wert annimmt. Eine quantitative Analyse dieses Übergangs kann jedoch nicht durchgeführt werden, da die Differenz zwischen der Übergangszeit und dem Zeitpunkt, bei dem das System den stationären Zustand erreicht hat, zu klein ist.

Grenzflächendimensionen $\mathcal{D} = 2$ und $\mathcal{D} = 3$

Für die Simulationen in $\mathcal{D} > 1$ wird, wie in den Arbeiten von Leschhorn [42, 36], für die Stärke der *pinning*-Kräfte $g = 2\mathcal{D}$ gewählt. Für das größte simulierte System in $\mathcal{D} = 2$ findet der *depinning*-Übergang bei $p_C = 0.6418$ statt, was wiederum etwas größer als der Wert von Leschhorn ist. Aus der Messung der Höhenkorrelationsfunktion folgt für den Rauigkeitsexponenten $\alpha_{HCF} = 0.7 \pm 0.01$ (Abb. 4.12), während eine Messung des Strukturfaktors im stationären Zustand im Rahmen der Fehlerbalken einen übereinstimmenden Wert $\alpha_{SF} = 0.68 \pm 0.02$ (Abb. 4.13) ergibt.

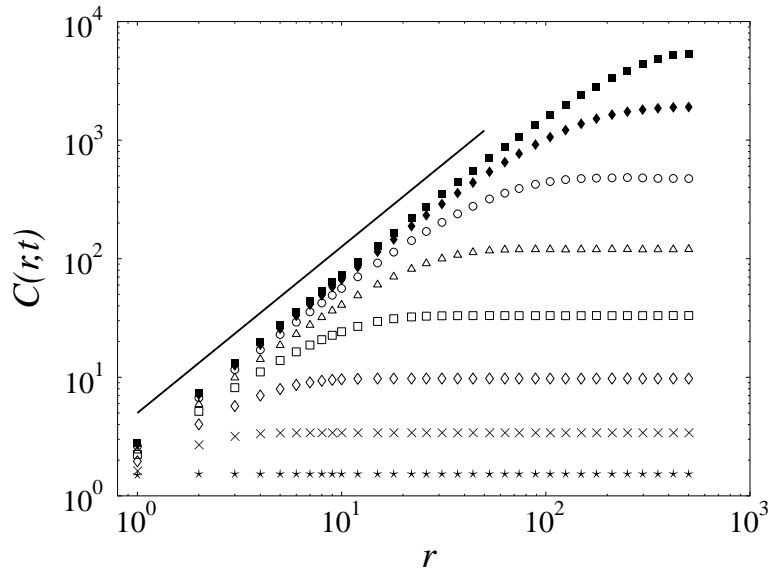


Abbildung 4.12: Die Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ für $\mathcal{D} = 2$, $p = 0.6418$, $g = 4$ und $L = 1024$ zu unterschiedlichen Zeiten, wobei die Zeit von unten nach oben steigt. Die Linie repräsentiert eine Regressionskurve $C(r, t) \sim r^{2\alpha}$ mit $\alpha = 0.7 \pm 0.01$.

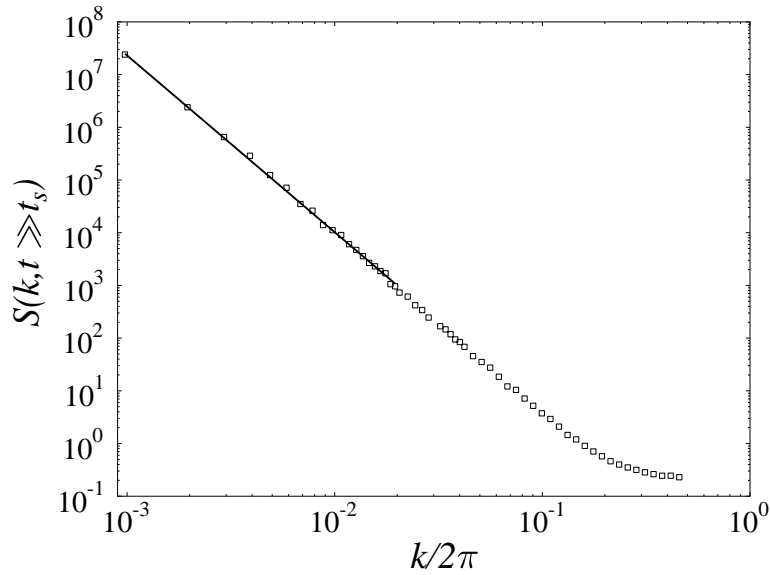


Abbildung 4.13: Der Strukturfaktor $S(k, t \gg t_s)$ im stationären Zustand, wobei über 2^{14} Zeitschritte gemittelt wurde. Die Linie stellt eine Regressionskurve gemäß $S(k, t \gg t_s) \sim k^{-\gamma} = k^{-(2\alpha + \mathcal{D})}$ dar, was zu $\alpha = 0.68 \pm 0.02$ führt. ($\mathcal{D} = 2$, $p = 0.6418$, $g = 4$, $L = 1024$).

Jedoch stimmt der letztere Wert besser mit der theoretischen Annahme [45, 12, 84] überein, daß der Rauigkeitsexponent durch $\alpha = (4 - \mathcal{D})/3$ gegeben ist. Aus der Systemlängenabhängigkeit der Rauigkeit erhält Leschhorn $\alpha_{Lh} = 0.75 \pm 0.02$. Da dieser Wert mit Systemgrößen $4 \leq L \leq 128$ erhalten wurde, ist der Unterschied zu dem hier erhaltenen Wert wahrscheinlich auf *finite-size*-Effekte zurückzuführen. Die Analyse der Zeitabhängigkeit der Größe $C(L/2, t)$ ergibt für den Exponenten $\beta = 0.48 \pm 0.01$ (Abb. 4.14) in Übereinstimmung mit Leschorns Ergebnis $\beta_{Lh} = 0.475 \pm 0.015$. Mit dem Wert des Rauigkeitsexponenten α_{HCF} erhält man für den dynamischen Exponenten $z = 1.46 \pm 0.05$, während man mit α_{SF} den Wert $z = 1.42 \pm 0.07$ erhält.

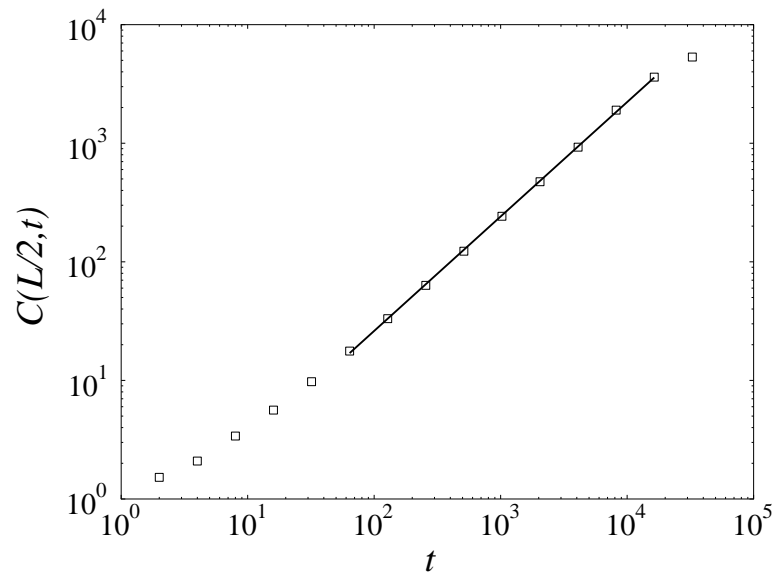


Abbildung 4.14: Die Zeitabhängigkeit von $C(L/2, t) \sim t^{2\beta}$, eine Regressionsanalyse führt zu $\beta = 0.46 \pm 0.01$. ($\mathcal{D} = 2$, $p = 0.6418$, $g = 4$, $L = 1024$).

Um die numerischen Ergebnisse für das Automatenmodell zu vervollständigen, werden hier noch die Ergebnisse für die Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 3$ dargestellt. Abb. 4.15 zeigt für ein System der Größe $L = 256$ die Höhenkorrelationsfunktion als Funktion von r für unterschiedliche Zeiten am *depinning*-Übergang $p_C = 0.534$. Im stationären Zustand erfüllen die räumlichen Korrelationen wieder das erwartete algebraische Verhalten $C(r) \sim r^{2\alpha}$, wobei für den Rauigkeitsexponenten $\alpha = 0.33 \pm 0.01$ gilt. Dieses Ergebnis stimmt sowohl mit dem erwarteten Wert $\alpha = 1/3$ als auch mit dem Wert von Leschhorn, $\alpha_{Lh} = 0.35 \pm 0.01$, überein.

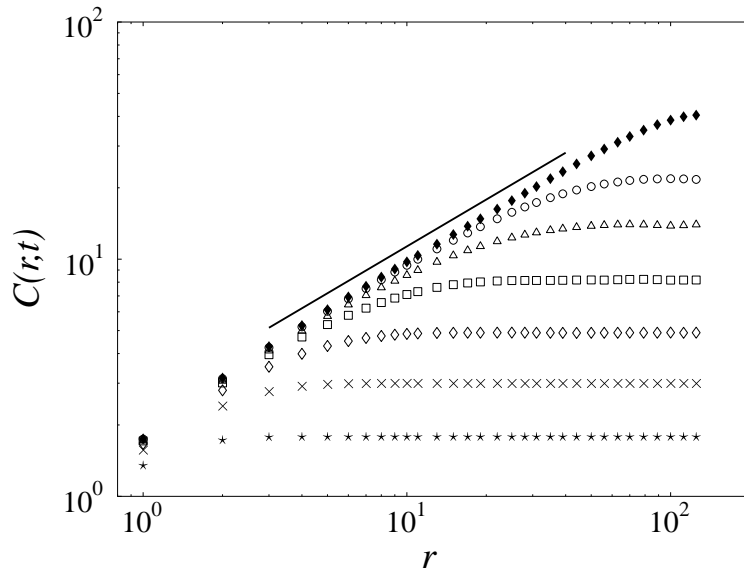


Abbildung 4.15: Die Höhenkorrelationsfunktion $C(r, t)$ für $\mathcal{D} = 3$, $p = 0.534$, $g = 6$ und $L = 256$ zu Zeiten $t = 4, 16, 64, \dots, 16384$ (von unten nach oben). Für $t = 16384$ erhält man den Rauigkeitsexponenten $\alpha = 0.33 \pm 0.01$.

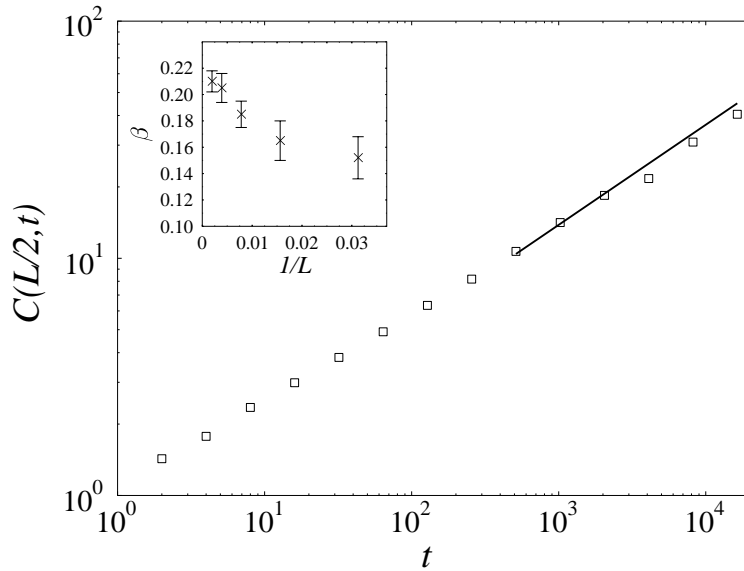


Abbildung 4.16: Die Zeitabhängigkeit von $C(L/2, t)$ für $L = 512$, wobei die Linie eine Regressionsanalyse dieser Größe gemäß $C(L/2, t) \sim t^{2\beta}$ zu $\beta = 0.21 \pm 0.01$ führt. Das Inset zeigt die Systemgrößenabhängigkeit von $C(L/2, t)$. ($\mathcal{D} = 3$, $p = 0.534$, $g = 6$).

Für das größte untersuchte System ($L = 512$) findet man für den Exponenten $\beta = 0.21 \pm 0.01$, was zu $z = 1.57 \pm 0.12$ führt (Abb. 4.16). Der Wert des dynamischen Exponenten im unendlichen System kann mit der Systemlängenabhängigkeit des Exponenten β abgeschätzt werden, siehe Inset in Abb. 4.16. Eine Extrapolation für $1/L \rightarrow 0$ ergibt $\beta \simeq 0.215 \pm 0.01$, so daß der extrapolierte Wert des dynamischen Exponenten $z = 1.53 \pm 0.12$ beträgt. Im Gegensatz dazu erhält Leschhorn für Systemgrößen $L < 110$ $\beta_{Lh} = 0.2 \pm 0.02$ und somit $z_{Lh} = 1.75 \pm 0.15$. Aufgrund der Systemlängenabhängigkeit des Exponenten β kann die Diskrepanz zu dem hier erhaltenen asymptotischen Wert des dynamischen Exponenten wiederum auf *finite-size*-Effekte zurückgeführt werden.

Zusammenfassung und Diskussion

Die numerischen Ergebnisse lassen den Schluß zu, daß die Morphologie einer Grenzfläche, welche durch Gl. 4.4 und Gl. 4.5 beschrieben wird, am *depinning*-Übergang durch den Rauigkeitsexponenten $\alpha = (4 - \mathcal{D})/3$ beschrieben werden kann. Dieser Ausdruck für α stimmt somit mit der theoretischen Vorhersage für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 überein.

Der dynamische Exponent ist in dem hier diskutierten Automatenmodell durch den \mathcal{D} -unabhängigen Wert $z = 3/2$ gegeben. Dieser Wert stimmt weder mit der Vorhersage $z = 2(5 - \mathcal{D})/9$ der Renormierungsgruppenrechnungen [45, 12] noch mit der Vorhersage $z = 2$ der Reskalierungsanalyse (Abschnitt 3.3) überein. Weiterhin wird dieser Wert auch nicht in numerischen Untersuchungen der Gl. 3.20 beobachtet (siehe Abschnitt 4.3), so daß die Zuordnung dieses Modells zur Edwards-Wilkinson-Universalitätsklasse, welche auf der verkippungsunabhängigen Grenzflächengeschwindigkeit beruht [51], fraglich ist.

Aus den mit wachsender Grenzflächendimension geringer werdenden Abweichungen zwischen den von Leschhorn gefundenen Werten für die charakteristischen Exponenten und den theoretischen Werten der Renormierungsgruppenrechnungen schließt Leschhorn auf die Gültigkeit der Vorhersagen der Renormierungsgruppenrechnungen. Im Vergleich mit den hier dargestellten Ergebnissen zeigt sich jedoch, daß Leschhorns Werte nicht den asymptotischen Werten entsprechen. Somit kann aufgrund der numerischen Ergebnisse für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung und den Ergebnissen für äquivalente Modelle diese Gültigkeit angezweifelt werden.

4.4.3 Aspekte von selbstorganisierter Kritikalität

Motivation und Modell

Stört man eine Grenzfläche im *pinning*-Zustand, so wird sie sich in den nächsten *pinning*-Zustand hineinbewegen. Diese Bewegung kann man in Analogie zu den Modellen der selbstorganisierten Kritikalität Lawine nennen. Ziel dieses Abschnitts ist es nun, diese Lawinen im Hinblick auf ihre charakteristischen Eigenschaften zu untersuchen und die Frage zu diskutieren, ob am *depinning*-Übergang die Bewegung der Grenzfläche selbstorganisiert kritisches Verhalten zeigt. Neben der Betrachtung dieser interessanten physikalischen Eigenschaften liefert die Analyse der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen auch eine unabhängige Methode zur Bestimmung der beschreibenden Exponenten der Grenzflächenmorphologie und der Grenzflächendynamik, so daß hiermit die Richtigkeit der im vorherigen Abschnitt durchgeführten Analysen kontrolliert werden kann.

Zur Simulation der Bewegung einer Grenzfläche können unterschiedliche Methoden angewendet werden. Wie bei der numerischen Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung durchgeführt, kann die Grenzfläche dadurch getrieben werden, daß jedes Grenzflächenelement gleichzeitig um eine Strecke bewegt wird, die proportional zur lokalen Kraft ist, welche auf die einzelnen Grenzflächenelemente wirkt. In Anlehnung an diese Methode wurden im vorherigen Abschnitt bei der Simulation des Automatenmodells alle Grenzflächenelemente um eine konstante Strecke bewegt, auf denen eine lokale Kraft, beschrieben durch Gl. 4.4, größer null wirkt. Durch eine geeignete Wahl der äußeren treibenden Kraft erreicht man in diesen Fällen, daß die Grenzflächen sich am *depinning*-Übergang befinden. Eine andere Möglichkeit, Simulationen am *depinning*-Übergang durchzuführen, besteht darin, die äußere treibende Kraft zu jedem Zeitschritt so einzustellen, daß immer nur das Grenzflächenelement mit der größten lokalen Kraft bewegt wird, was Roux et al. [101] für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung realisiert haben. Das quasi-statische Treiben der Grenzfläche legt nahe, daß sich die Grenzfläche in diesem Fall ebenfalls am *depinning*-Übergang befindet, da auch hier die Geschwindigkeit minimal ist [36]. Ein ähnlicher Algorithmus wird im Sneppen-Modell [102, 103] realisiert, bei dem immer nur das Grenzflächenelement mit der kleinsten *pinning*-Kraft bewegt wird.

Um bei den quasi-statisch getriebenen Grenzflächen einen Zusammenhang mit der selbstorganisierten Kritikalität herzustellen, werden in diesen Modellen Lawinen durch sog. kausale Wachstumsereignisse definiert [104, 105, 106], was am Beispiel des Sneppen-Modells erläutert werden soll. In diesem Modell wird jedem Grenzflächen-

punkt $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ eine Gauß-verteilte *pinning*-Kraft $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{h}) > 0$ zugeordnet. Dann wird die Grenzflächenposition, auf welche die kleinste *pinning*-Kraft wirkt, um eine Einheit erhöht ($\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{h} + 1$). Die Wahl der kleinsten *pinning*-Kraft entspricht der Wahl der größten lokalen Kraft im Modell von Roux, da bildlich gesprochen, in beiden Modellen das am schwächsten gebundene Grenzflächenelement bewegt wird. Ebenfalls werden alle Nachbarplätze solange um eine Einheit erhöht, bis alle lokalen Steigungen $|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x} + 1)|$ die Kim-Kosterlitz-Bedingung $|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{x} + 1)| \leq 1$ erfüllen. Da diese Bedingung die KPZ-Nichtlinearität nachbildet, gehören Grenzflächen, die der Kim-Kosterlitz-Bedingung unterworfen sind, zu der KPZ-Universalitätsklasse [107]. Eine Lawine ist in diesem Modell als eine Folge von Wachstumsereignissen definiert, welche zur Zeit t_0 durch die aktuelle minimale *pinning*-Kraft η_{min}^0 ausgelöst wird und stoppt, wenn zum ersten Mal $\eta_{min}(t) > \eta_{min}^0$. Dabei wird zu jedem Zeitschritt eine neue Lawine ausgelöst, ohne daß dabei eine alte beendet werden muß. Somit weisen die Lawinen in diesem Modell, im Gegensatz zu den Sandhaufenmodellen, eine zusätzliche hierarchische Struktur der Lawinengrößen auf. Diese Abfolge von kleinen Lawinen innerhalb einer größeren Lawine werden nach Leschhorn und Tang [105] kausale Ereignisse genannt, da die Lawinen aus einer Folge von Wachstumsprozessen aufgrund der Kim-Kosterlitz-Bedingung bestehen, d. h., alle Wachstumsereignisse einer Lawine beruhen auf einem η_{min} , was frühestens seit dem Zeitpunkt $t_0 + 1$ der Grenzfläche zugeordnet ist. Für die hier beschriebene Modellklasse der quasi-statisch getriebenen Grenzflächen konnte selbstorganisiert kritisches Verhalten nachgewiesen werden [104, 105, 106], d. h., daß die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Lawinengrößen skaleninvariant sind [53].

Aufgrund der Definition des Automatenmodells von Leschhorn bietet es sich an, hier nicht den zuvor beschriebenen Ideen zur Definition und Erzeugung von Lawinen zu folgen, sondern ein Verfahren zu wählen, welches auf den Sandhaufenmodellen beruht. Bei diesen Modellen wird an einer beliebigen Stelle des Systems durch eine äußere Störung eines stabilen Zustands eine Lawine ausgelöst. Im Automatenmodell, definiert durch die Gln. 4.4 und 4.5, ist ein *pinning*-Zustand dadurch definiert, daß für alle lokalen Geschwindigkeiten $v(\mathbf{x}) = 0$ gilt. Falls diese Bedingung erfüllt ist, was nur für $p < p_C$ realisiert werden kann, wird zufällig eine Position \mathbf{x} gewählt, $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ um eine Einheit erhöht und ein neuer Wert für die *pinning*-Kraft $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{h})$ gewählt. Durch die äußere Störung des *pinning*-Zustands wird eine Lawine ausgelöst, wobei die Dynamik dieser Lawine durch die *update*-Regeln Gl. 4.4 und Gl. 4.5 des Automatenmodells gegeben ist. Demnach stoppt die Lawine, wenn wieder für alle lokalen Geschwindigkeiten die Bedingung $v(\mathbf{x}) = 0$ erfüllt ist. Dieses statistische Stören der gestoppten Grenzflächen zur Erzeugung von lawinenartigen Bewegungen zwischen zwei *pinning*-Zuständen wurde ebenfalls von Barabási et al. in einem Grenzflächenmodell zur Beschreibung von Flüssigkeiten in porösen Medien

verwendet [56], welches zur Universalitätsklasse der gerichteten Perkolation gehört.

Abb. 4.17 zeigt die Grenzlinien einer Serie aufeinanderfolgender Lawinen in der Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 1$ bei $p = 0.799$ und $g = 1$, also sehr nahe am *depinning*-Übergang ($p_C \simeq 0.8007$). Die Lawinen können durch folgende Größen charakterisiert werden: Als erstes ist hier die Fläche der Lawine

$$a = \sum_{x=1}^L h(\mathbf{x}, t_f) - h(\mathbf{x}, t_i) \quad (4.9)$$

zu nennen, wobei mit $h(\mathbf{x}, t_i)$ und $h(\mathbf{x}, t_f)$ die jeweiligen Anfangs- und Endzustände der Grenzfläche zu Beginn und am Ende einer Lawine bezeichnet sind. Eine weitere Größe ist die Dauer der Lawine $\tau = t_f - t_i$, welche die Zeit bestimmt, die die Grenzfläche zur Relaxation von einem *pinning*-Zustand zum nächsten benötigt. Zusätzlich werden die Höhe $h = \max_{x=1..L} \{h(\mathbf{x}, t_f) - h(\mathbf{x}, t_i)\}$ und die Breite der Lawine w gemessen, wobei w die Längenskala ist, auf der $h(\mathbf{x}, t_f) - h(\mathbf{x}, t_i) > 0$. Neben der hier verwendeten Maximumsnorm zur Charakterisierung der Höhe und der Breite einer Lawine kann ebenfalls der Gyrationradius zur Bestimmung dieser Meßgrößen herangezogen werden. Voruntersuchungen ergaben jedoch, daß die Messung des Gyrationradius kein anderes Skalenverhalten liefert. Aufgrund des geringeren numerischen Aufwands wird im folgenden nur die Maximumsnorm der Meßgrößen h und w betrachtet.

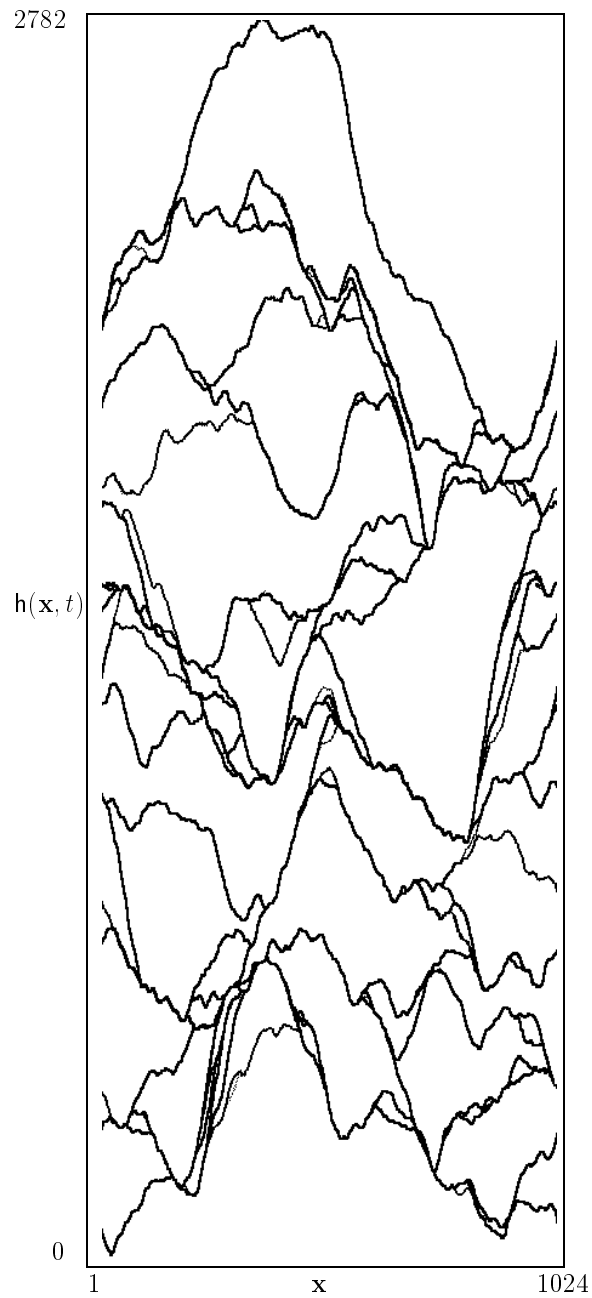


Abbildung 4.17: *Aufeinanderfolgende Serie von Grenzflächen im pinning-Zustand, welche die Grenzen der Lawinen darstellen ($L = 1024, p = 0.799$).*

Ergebnisse

Die typischen Fluktuationen der Grenzfläche in der *pinning*-Phase, charakterisiert durch die Korrelationslänge $\xi_{||}$, divergieren bei der Annäherung am *depinning*-Übergang gemäß Gl. 2.2, so daß nur am *depinning*-Übergang die Grenzfläche skaleninvariant ist. Da die Lawinen die Bewegung der Grenzfläche zwischen zwei *pinning*-Zuständen beschreiben, kann man erwarten, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen auch nur skaleninvariant sind, falls das System sich am oder knapp unterhalb des *depinning*-Übergangs befindet, was durch die Analyse der Feldabhängigkeit der Korrelationslänge bestätigt wird (s. u.).

Zur Untersuchung eines möglichen SOC-Verhaltens des Modells am *depinning*-Übergang werden im folgenden die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(X)$ für die Systemgrößen $L = 128, 256, \dots, 8192$ untersucht, wobei das Symbol X für die vier Meßgrößen a, τ, h und w steht. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen dieser Größen folgen im stationären Zustand einem Potenzgesetz,

$$P_x(X) \propto X^{-\gamma_x}, \quad (4.10)$$

bis zu einer ausgeprägten systemlängenabhängigen Abschneidelänge (siehe Abb. 4.18). Zur Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilungen wurden $N \approx 10^9/L$ aufeinanderfolgende Lawinen herangezogen. Auf logarithmischen Skalen zeigen die Kurven für die großen Systeme alle eine leichte positive Krümmung. Eine von Gl. 4.10 unabhängige Bestimmung der Exponenten γ_x , welche durch den Korrelationslängenexponenten ν , den Rauigkeitsexponenten α und den dynamischen Exponenten z dargestellt werden können, führt zu den gleichen Ergebnissen (s.u.). Die Krümmung der Kurven deutet somit nicht auf ein anderes Skalenverhalten für große Argumente der Wahrscheinlichkeitsverteilungen hin, sondern kann auf eine unzureichende Mittelung aufgrund von Rechenzeitbeschränkungen zurückgeführt werden.

Die Skaleninvarianz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist dadurch charakterisiert, daß der Maximalwert des Arguments der Verteilungsfunktionen algebraisch mit der Systemgröße anwächst. Um dieses Charakteristikum zu studieren, kann eine *finite-size*-Analyse [108] mit dem Ansatz

$$P_x(X, L) = L^{-\kappa_x} f_x(L^{-\nu_x} X) \quad (4.11)$$

durchgeführt werden (siehe Insets in der Abb. 4.18). Da dieser Ansatz das algebraische Verhalten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für $X \ll L^{\nu_x}$ beschreiben soll, muß die Skalenfunktion $f(y)$ für $y \ll 1$ wie $f(y) \sim y^{-\gamma_x}$ skalieren.

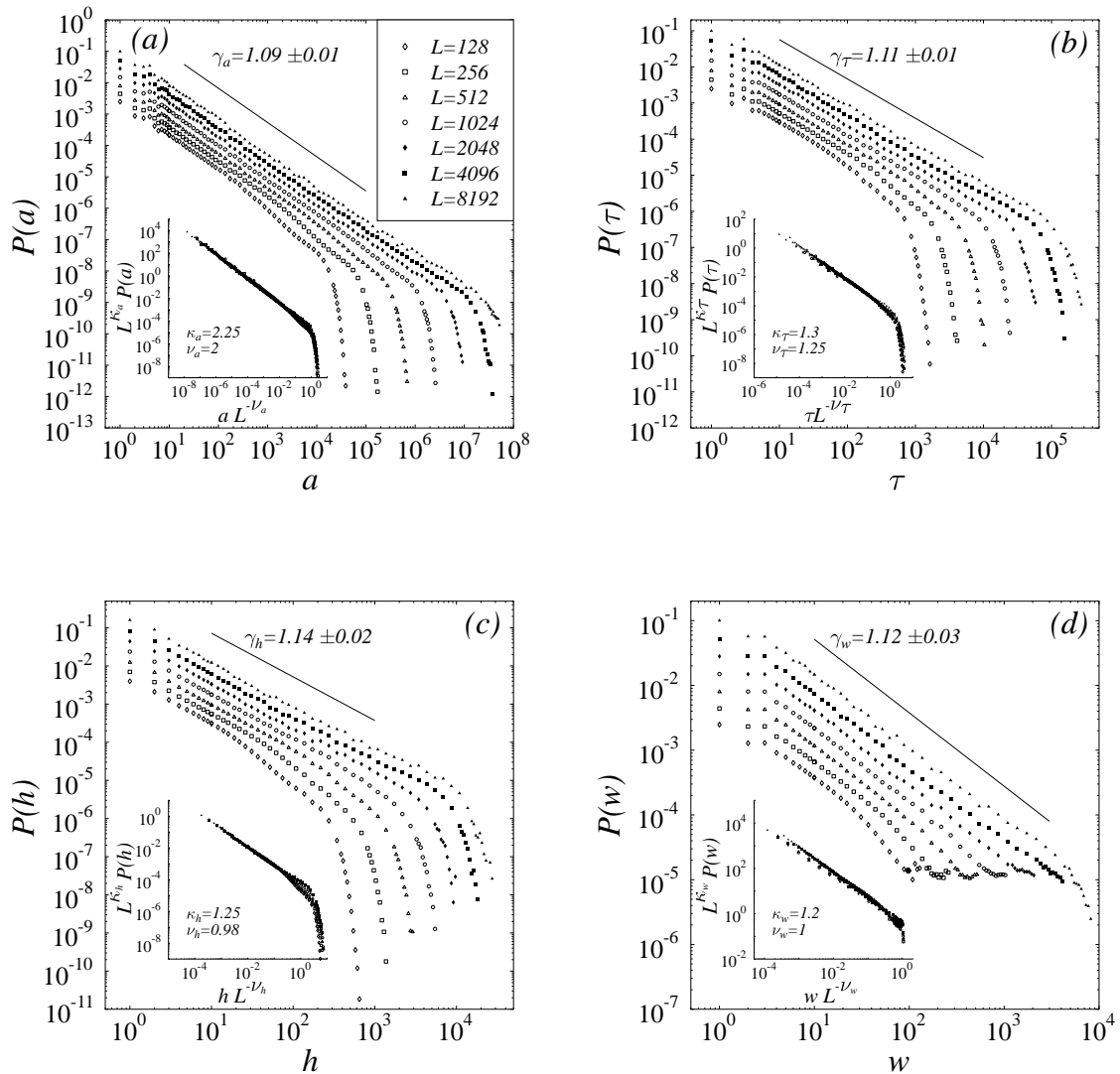


Abbildung 4.18: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der (a) Lawinengröße $P(a)$, (b) Lawinendauer $P(\tau)$, (c) Lawinenhöhe $P(h)$ und (d) der Lawinenbreite $P(w)$, für die Systemgrößen $L = 128, 256, \dots, 8192$, Symbole siehe (a). Die Kurven für $L < 8192$ sind zur besseren Übersichtlichkeit nach unten verschoben. Die Linien repräsentieren jeweils Regressionskurven gemäß Gl. 4.10 mit den dargestellten Exponenten. Die Insets in den Bildern (a)-(d) zeigen die zugehörigen finite-size-scaling-Analysen gemäß Gl. 4.11.

Weiterhin erfüllen die drei Exponenten κ_X , ν_X und γ_X das Skalengesetz [108]

$$\kappa_X = \nu_X \gamma_X. \quad (4.12)$$

Mit Gl. 4.10 und dem *finite-size*-Skalenansatz Gl. 4.11 erhält man für die durch diese Gleichungen definierten Exponenten die in Tabelle 4.1 aufgeführten Werte, wobei die Exponenten γ_X durch eine Regressionsanalyse bestimmt wurden und die κ_X und ν_X aus den jeweiligen einen Skalenplots folgen. Bei einer Änderung der Werte der Exponenten κ_X und ν_X von ca. $\pm 5\%$ ändert sich die Qualität der Skalenplots nicht, so daß die Fehler dieser Exponenten mit $\pm 5\%$ angegeben werden können. Im Rahmen dieser Fehlergrenzen sind die entsprechenden Skalengesetze Gl. 4.12 erfüllt, so daß damit die Skaleninvarianz der Wahrscheinlichkeitsverteilungen gezeigt ist.

X	γ_X	κ_X	ν_X
a	1.09 ± 0.01	2.4 ± 0.12	2.0 ± 0.1
τ	1.11 ± 0.01	1.6 ± 0.08	1.25 ± 0.06
h	1.14 ± 0.02	1.3 ± 0.07	0.98 ± 0.05
w	1.12 ± 0.03	1.2 ± 0.06	1.0 ± 0.05

Tabelle 4.1: Die Exponenten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen $P(X)$, wobei X für die Fläche a , die Dauer τ , die Höhe h und die Breite w steht. Die Fehler der Exponenten γ_X sind durch die Regressionsanalysen der Gl. 4.10 gegeben, während die Fehler der Exponenten κ_X und ν_X aus Skalenplots bestimmt wurden.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Exponenten ν_X , welche die Systemlängenabhängigkeit der Maximalwerte der charakteristischen Lawinengrößen beschreiben, durch den dynamischen Exponenten z und den Rauigkeitsexponenten α beschrieben werden können, welche über das Wachstum der Korrelationslängen $\xi_{\parallel} \sim t^{1/z}$ und $\xi_{\perp} \sim \xi_{\parallel}^{\alpha}$ definiert sind, siehe Abschnitt 2.1. Bezogen auf einen Referenzzustand charakterisieren die Korrelationslängen ξ_{\parallel} und ξ_{\perp} die Breite und die Höhe der typischen Grenzflächenfluktuationen, sie geben also an, auf welchen Längenskalen eine lokale Störung die Grenzfläche beeinflusst. Die Definition von w und h legt somit die Identifikation der Lawinenbreite w mit ξ_{\parallel} und der Lawinenhöhe h mit ξ_{\perp} nahe. Da die charakteristischen Lawinengrößen skaleninvariant sind, folgt mit $\xi_{\parallel} \sim L$ aus der dynamischen Skalenhypothese [28] $\nu_w = 1$, und wegen $\xi_{\perp} \sim \xi_{\parallel}^{\alpha}$ gilt weiterhin $\nu_h = \alpha$. Der Rauigkeitsexponent hat somit in Übereinstimmung mit der Analyse in Abschnitt 4.4.2 den Wert $\alpha \simeq 1$. Der funktionale Zusammenhang zwischen den Korrelationslängen ξ_{\parallel} und ξ_{\perp} bzw. zwischen der Lawinenbreite w und der Lawinenhöhe h wird auch durch die direkte Messung $h(w)$ bestätigt, siehe Abb. 4.19.

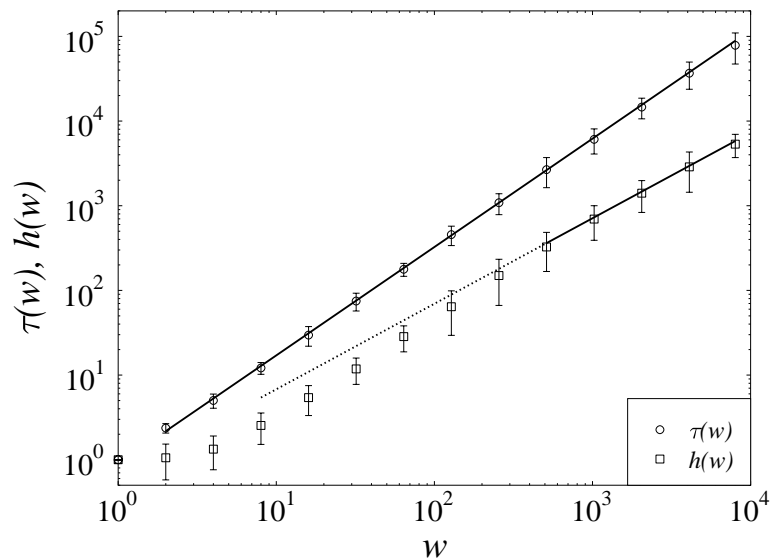


Abbildung 4.19: Die Lawinendauer $\tau(w)$ und die Lawinenhöhe $h(w)$ als Funktion der Lawinenbreite w für $L = 8192$. Die Fehlerbalken der Funktionswerte τ bzw. h sind durch die Breite der Verteilungsfunktionen von τ und h bei festem w gegeben. Die Linien stellen Regressionskurven gemäß $\tau(w) \sim w^z$ und $h(w) \sim w^\alpha$ mit $z = 1.28 \pm 0.03$ und $\alpha = 1.01 \pm 0.02$ dar. Die gepunktete Linie stellt eine Extrapolation der Regressionskurve von $h(w)$ dar, um die Abweichung des asymptotischen Skalenverhaltens für $w < 512$ zu verdeutlichen.

Für $w < 512$ erhält man einen Rauigkeitsexponenten $\alpha \simeq 1.17$, während man für größere w in sehr guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis des Skalenplots $\alpha = 1.01 \pm 0.02$ erhält. Dieses asymptotische Skalenverhalten wird durch eine Regressionsanalyse des Strukturfaktors für $k/2\pi < 10^{-3}$, welche $\alpha \simeq 0.99$ ergibt, bestätigt (siehe Abb. 4.20). Die Analyse des Strukturfaktors zeigt weiterhin, daß im mittleren k -Bereich der Rauigkeitsexponent den Wert $\alpha = 1.22 \pm 0.01$ hat, so daß dies das nichtasymptotische Skalenverhalten von h für kleine w erklärt. Die Lawinen sind aufgrund der Modelldefinition kompakt, somit kann angenommen werden, daß die Fläche der Lawine wie $a \sim \xi_{\parallel} \xi_{\perp}$ skaliert [109], so daß $\nu_a = \nu_w + \nu_h = 1 + \alpha$ gilt. Nach der dynamischen Skalenhypothese entsteht in der Zeit t eine Fluktuation der Wellenlänge ξ_{\parallel}^z . Der Exponent ν_{τ} , welcher die Systemlängenabhängigkeit der maximalen Lawinendauer beschreibt, kann somit mit dem dynamischen Exponenten z identifiziert werden, was durch die Messung der Lawinendauer als Funktion der Lawinenbreite $\tau(w) \sim w^z$ mit $z = 1.28 \pm 0.03$ bestätigt wird (Abb. 4.19). Der Wert des dynamischen Exponenten ist im Gegensatz zu der Übereinstimmung der

Rauhigkeitsexponenten kleiner als der Wert $z \simeq 1.5$, der für das Automatenmodell knapp oberhalb des *depinning*-Übergangs gefunden wird, siehe Abschnitt 4.4.2. Die zusätzliche äußere Störung ändert somit das dynamische Verhalten, was auch schon für andere extern getriebene Modelle beobachtet wurde [36].

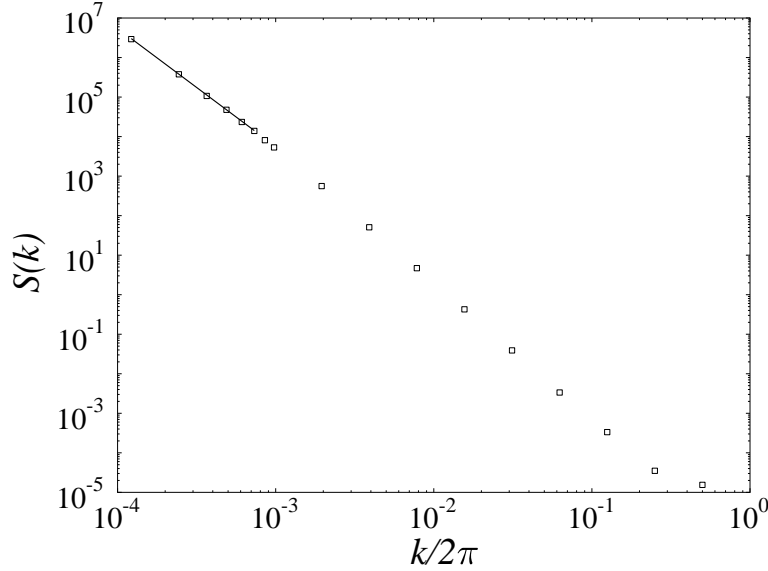


Abbildung 4.20: Der Strukturfaktor $S(k)$ der Grenzfläche $h(\mathbf{x}, t_f)$ als Funktion von k für $L = 8192$. Die Linie stellt eine Regressionskurve der sechs kleinsten k -Moden gemäß $S(k) \sim k^{-\tilde{\gamma}}$ mit $\tilde{\gamma} = 2.99 \pm 0.02$ dar.

Zwischen den charakteristischen Lawinengrößen besteht, im statistischen Sinn, ein funktionaler Zusammenhang, was am Beispiel der Abhängigkeit der Lawinendauer und der Lawinenhöhe von der Lawinenbreite in Abb. 4.19 gezeigt wurde. Somit können mit dem Transformationsgesetz für Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$P_X(X)dX = P_Y(Y)dY \quad (4.13)$$

die Exponenten ν_X und somit der Rauhigkeitsexponent α und der dynamische Exponent z durch die Exponenten γ_X und γ_Y ausgedrückt werden. So folgt z.B. aus $h \sim w^\alpha$

$$h^{-\gamma_h} dh = w^{-\gamma_h \alpha} \frac{dh}{dw} dw = w^{-\gamma_w} dw, \quad (4.14)$$

so daß die Exponenten γ_h und γ_w über die Skalenrelation $-\gamma_h \alpha + \alpha - 1 = -\gamma_w$ bzw. $\alpha = (\gamma_w - 1)/(\gamma_h - 1)$ miteinander verknüpft sind. Zusammen mit dem Skalengesetz Gl. 4.12 ist es deshalb möglich, alle Exponenten, welche das *finite-size*-Verhalten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen beschreiben, mit dem Rauhigkeitsexponenten,

dem dynamischen Exponenten und einem der Exponenten γ_x oder κ_x zu bestimmen. Unter der Annahme, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lawinenbreite in der Nähe des *depinning*-Übergangs die Skalenform

$$P(w) \simeq w^{-\gamma} \rho\left(\frac{w}{\xi_{\parallel}}\right) \quad (4.15)$$

mit $\xi_{\parallel} \sim (p_C - p)^{-\nu}$ erfüllt, konnten Narayan und Fisher [12] für die lawinenartige Bewegung einer Grenzfläche mit Skalenargumenten zeigen, daß für den Exponenten γ der Ausdruck $\gamma = \mathcal{D} + 1 - 1/\nu$ gilt. Weiterhin erhalten sie für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung für den Korrelationslängenexponenten das Skalengesetz $\nu = 1/(2 - \alpha)$ (Gl. 3.23), siehe Abschnitt 3.3. Da die Systemlänge L am *depinning*-Übergang die einzige charakteristische Längenskala ist, kann ξ_{\parallel} in Gl. 4.15 durch L ersetzt werden, und der Exponent γ entspricht somit γ_w . Mit $\alpha \simeq 1$ folgt $\gamma_w \simeq 1$ und somit auch für die anderen Exponenten $\gamma_x \simeq 1$, was jedoch im Widerspruch zu den numerischen Ergebnissen steht, welche auch im Rahmen der Fehlergrenzen Werte größer als eins ergeben (siehe Tab. 4.1).

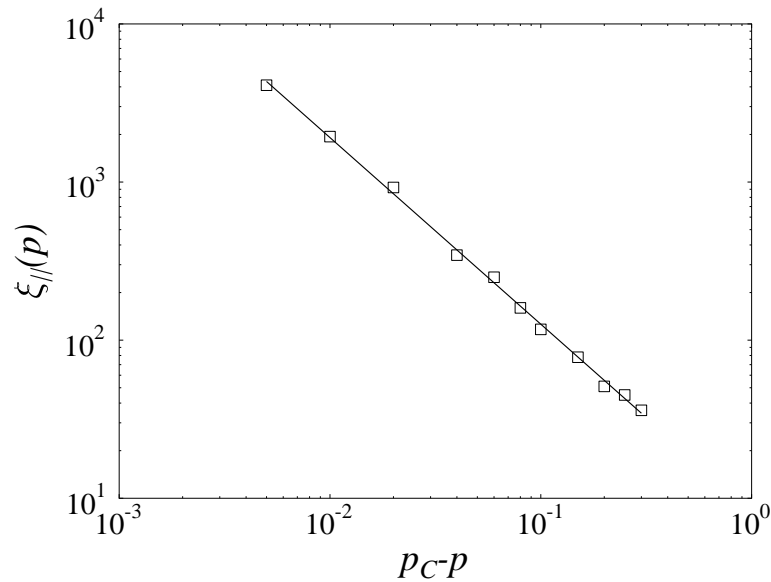


Abbildung 4.21: Die p -Abhängigkeit der Korrelationslänge $\xi_{\parallel}(p)$, wobei die Linie eine Regressionskurve gemäß $\xi_{\parallel}(p) \sim |p_C - p|^{-\nu}$ mit $\nu = 1.17 \pm 0.02$ darstellt.

Die Bestimmung der Abhängigkeit der Korrelationslänge von der treibenden Kraft $\xi_{\parallel} \sim (p_C - p)^{-\nu}$ aus der Messung des Maximalwerts der Lawinenbreite für verschiedene p ergibt im Gegensatz zum erwarteten Ergebnis $\nu \simeq 1$ den Wert $\nu = 1.17 \pm 0.02$

(siehe Abb. 4.21). Die Diskrepanz zwischen der skalentheoretischen Betrachtung und den numerischen Ergebnissen $\gamma_x \simeq 1.1$ kann somit darauf zurückgeführt werden, daß das Skalengesetz Gl. 3.23 für das hier betrachtete Modell nicht gilt. Wie zuvor diskutiert, sind der Korrelationslängenexponent ν und der Exponent γ_w über ein Skalengesetz miteinander verknüpft, $\gamma_w = 2 - 1/\nu = 1.15 \pm 0.02$. Weiterhin erhält man durch Anwendung von Gl. 4.13 die Werte $\gamma_h = 1 + (\gamma_w - 1)/\alpha = 1.15 \pm 0.03$, $\gamma_\tau = 1 + (\gamma_w - 1)/z = 1.12 \pm 0.04$ und $\gamma_a = 1 + (\gamma_w - 1)/(\alpha + 1) = 1.08 \pm 0.01$. Die berechneten Werte der Exponenten γ_x stimmen somit mit den aus der direkten Messung (Gl. 4.10) bestimmten Werten überein. Da die Exponenten ν_x ebenfalls durch α und z gegeben sind, wird das *finite-size*-Verhalten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen durch die Exponenten α , z und ν vollständig bestimmt, so daß zur Beschreibung der Lawinen keine neuen Exponenten eingeführt werden müssen. Aufgrund der Äquivalenz der Korrelationslänge $\xi_{||}$ und der Lawinenbreite w zeigt die Analyse der Kraftabhängigkeit der Korrelationslänge weiterhin, daß skaleninvariante Verteilungsfunktionen der charakteristischen Lawinengrößen nur am *depinning*-Übergang existieren.

Zusammenfassung und Diskussion

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt haben gezeigt, daß eine lokale Störung der Grenzfläche im *pinning*-Zustand, welche durch das Automatenmodell von Leschhorn beschrieben wird, am *depinning*-Übergang Lawinen auslöst, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Meßgrößen skaleninvariant sind. Eine genauere Betrachtung zeigt, daß diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch den Rauigkeitsexponenten α , den dynamischen Exponenten z und den Korrelationslängenexponenten ν vollständig bestimmt sind. Eine Analyse der Abhängigkeit der Korrelationslänge von der treibenden Kraft zeigt, daß der Korrelationslängenexponent ν nicht durch das Skalengesetz Gl. 3.23, welches exakt für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 gilt, gegeben ist. Diese Verletzung des Skalengesetzes bestätigt die Aussage des vorherigen Abschnitts, daß das Leschhornsche Automatenmodell nicht zu der Edwards-Wilkinson-Universalitätsklasse gehört. Weiterhin wird mit der Analyse der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Lawinenhöhe und der Messung der Lawinenhöhe in Abhängigkeit der Lawinenbreite $h \sim w^\alpha$ unabhängig von den im vorherigen Abschnitt diskutierten Methoden bestätigt, daß der Rauigkeitsexponent den Wert $\alpha \simeq 1$ hat.

Durch lokale Störungen des stationären Zustands erzeugte skaleninvariante Lawinen sind nach [110] die charakteristische Eigenschaft selbstorganisierter kritischer Systeme. Versteht man unter Selbstorganisation den Mechanismus, daß ein System nach

einer äußeren Störung wieder in einen stabilen Zustand zurückkehrt, so zeigt das hier diskutierte Modell aufgrund der skaleninvarianten Wahrscheinlichkeitsverteilungen selbstorganisiert kritisches Verhalten. Eine strengere Formulierung von SOC [54] fordert jedoch eine Skaleninvarianz der Meßgrößen, die nicht durch die Einstellung eines relevanten Parameters erreicht wird, sondern nur durch die generischen Modellspezifikationen. In dem hier betrachteten Modell tritt ein skaleninvariantes Verhalten nur am *depinning*-Übergang auf, welcher durch die Wahl der kritischen Konzentration der *pinning*-Zentren p_C erreicht wird. Somit ist die Bedingung für selbstorganisiert kritisches Verhalten nur im schwächeren Sinne gegeben.

5 Vergleich mit Experimenten: Rauigkeit von Domänenwänden in CoPt-Filmen

Die magnetischen Eigenschaften dünner polykristalliner CoPt-Filme können durch ein Zufallsfeld-Ising-Modell mit zusätzlicher Dipolwechselwirkung und einer Energiebarriere beschrieben werden [69]. Aufgrund der hohen magnetischen Anisotropie des Materials können die einzelnen Kristallite durch Ising-Spins beschrieben werden, wobei die unterschiedliche Größe der Kristallite (Durchmesser 10 – 25nm) zu einem Zufallsfeld-ähnlichen Energiebeitrag bei der Ankopplung an ein äußeres Magnetfeld führt. In diesem Modell dient die Dipolwechselwirkung zur Beschreibung der experimentell gefundenen Schichtdickenabhängigkeit des Ummagnetisierungsverhaltens [66] und die Energiebarriere zur Beschreibung der Ummagnetisierung eines einzelnen Kristalliten. Während für dickere Filme $d \simeq 30\text{nm}$ Nukleationsprozesse für die Ummagnetisierung verantwortlich sind, geschieht die Ummagnetisierung bei dünneren Filmen $d \simeq 10\text{nm}$ durch Domänenwandverschiebungen. Während die Energiebeiträge der Austauschwechselwirkung und des Magnetfelds linear mit der Schichtdicke d skalieren, liefert die Dipolwechselwirkung einen Energiebeitrag, welcher quadratisch mit der Schichtdicke skaliert [68]. D. h., der Einfluß der Dipolwechselwirkung ist für $d \rightarrow 0$ vernachlässigbar, so daß in den dünneren Filmen die Wechselwirkung der einzelnen Kristallite untereinander Ising-artig ist. Aufgrund der in Abschnitt 3.2 dargestellten Herleitung der Bewegungsgleichung 3.20 für eine Grenzfläche in einem Ferromagneten mit Ising-artiger Spin-Spin-Wechselwirkung kann man somit vermuten, daß Domänenwände in diesem Material als Kandidaten für eine experimentelle Realisierung von Grenzflächen gesehen werden können, welche in der Nähe des *depinning*-Übergangs durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 beschreibbar sind. Ziel dieses Abschnitts ist es deshalb, die Morphologie und die Dynamik dieser Domänenwände zu untersuchen und einen Vergleich mit entsprechenden Computersimulationen durchzuführen.

Experimentelle Realisierung

Die untersuchten $\text{Co}_{28}\text{Pt}_{72}$ Legierungsfilme wurden im Ultrahochvakuum (UHV) bei 500K mittels Deposition auf eine gereinigte Si(100)-Oberfläche erzeugt. Diese relativ hohe Substrattemperatur wird hierbei benötigt, um die Entstehung qualitativ hochwertiger Proben mit dominanter senkrechter Anisotropie zu garantieren.

Die so erzeugten Proben werden durch Anlegen eines negativen homogenen Magnetfeldes $H \simeq -30\text{kA/m}$ auf ihre negative Sättigungsmagnetisierung $-M_S$ magnetisiert. Im Anschluß daran wird die Feldrichtung umgekehrt und mittels Kerr-Mikroskopie das Domänenwachstum einer Domäne mit positiver Magnetisierung

beobachtet. Das Kerr-Mikroskop wird in polarer Geometrie betrieben, d. h., die Einfallsebene des Lichts als auch die Magnetisierungsrichtung der Probe liegen parallel bzw. antiparallel zur Probenormalen. Beim magnetooptischen Kerr-Effekt (MOKE) macht man sich zunutze, daß linear polarisiertes Licht eine Drehung der Polarisationssebene erfährt, wenn es an einer ferromagnetischen Metalloberfläche reflektiert wird [111]. Der Winkel, um welche die Polarisationssebene gedreht wird, wird sowohl durch den Betrag als auch durch die Richtung der Magnetisierung beeinflusst. Die Daten wurden in Echtzeit mit einer CCD-Kamera mit 288x384 Bildpunkten computergestützt aufgenommen, wobei jeder Bildpunkt einer Fläche von $0.86\mu\text{m}^2$ der untersuchten Filme entsprach. Man erhält mit diesem Verfahren Graustufenbilder, so daß die Normalkomponente der Magnetisierung mit einer Graustufenanalyse ausgewertet werden kann¹.

Ergebnisse

Zur Charakterisierung der Phasengrenzen, also der Domänenwände, werden die Graustufenbilder in Schwarz-Weiß-Bilder umgewandelt, indem einem Bildpunkt mit einem Grauwert größer als ein bestimmter Schwellwert die Magnetisierung $+M_S$ zugewiesen wird. Entsprechend wird einem Bildpunkt die Magnetisierung $-M_S$ zugewiesen, falls der Grauwert unterhalb des Schwellwertes liegt. Abb. 5.1 zeigt das Wachstum einer Domäne zu unterschiedlichen Zeiten $\tau = 88, \dots, 135\text{s}$ nach dem Einschalten eines äußeren Feldes von $H = 14.9\text{kA/m}$ bei der Temperatur $T = 364\text{K}$.

Die Morphologie dieser Domäne zu den unterschiedlichen Zeitpunkten und deren Wachstumsdynamik soll nun im folgenden untersucht werden.

Zur Verdeutlichung des Wachstumsprozesses sind in Abb. 5.2 nur die Grenzflächen der Domäne zu den unterschiedlichen Zeitpunkten dargestellt. Als Grenzflächenpositionen $\mathbf{r}_n(t)$ werden die schwarzen Bildpunkte definiert, welche weniger als vier schwarze Nachbarbildpunkte haben. Hierbei ist die Anzahl der Nachbarbildpunkte durch die CCD-Kamera gegeben, welche die Filmoberfläche auf ein Quadratgitter abbildet. Zur quantitativen Analyse der Grenzflächendynamik werden die Ortsvektoren auf eine einwertige Funktion $h(s, t) = |\mathbf{r}_n(t)|$ abgebildet. Da die Grenzfläche Überhänge besitzt, kann zur Parametrisierung der Grenzflächenfunktion h nicht der Polarwinkel dienen, da durch diese Parametrisierung die Einwertigkeit der Funktion

¹Da die Experimente von Heimel im Labor von Dr. Kleinfeld durchgeführt wurden, soll hier zur ausführlichen Darstellung der experimentellen Grundlagen auf die entsprechende Literatur [67] verwiesen werden.

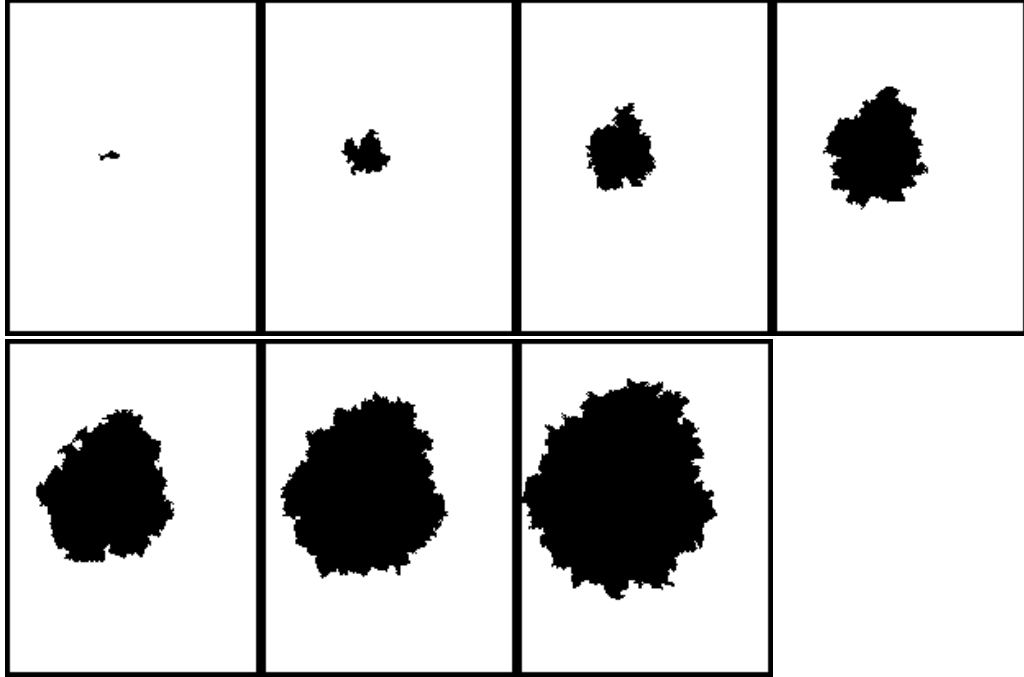


Abbildung 5.1: *Typisches Domänenwachstum eines $d = 10\text{nm}$ dicken $\text{Co}_{28}\text{Pt}_{72}$ -Films bei $T = 364\text{K}$ nach Einschalten eines äußeren Feldes von $H = 14.9\text{kA/m}$ für unterschiedliche Zeiten (von links nach rechts und von oben nach unten: $\tau/s = 88, 95, 103, 111, 119, 127, 135$). Der mittlere Radius der Domäne zur Zeit $\tau = 135\text{s}$ beträgt $r \simeq 58\mu\text{m}$.*

$h(s, t)$ nicht gegeben ist. Ein geeignetes Abstandsmaß ist jedoch die Bogenlänge [112]

$$s = \sum_{i=0}^n |\mathbf{r}_{i+1}(t) - \mathbf{r}_i(t)|, \quad (5.1)$$

wobei das Summationszeichen den Umlauf entlang der Grenzfläche bezeichnet. Für den Fall, daß keine Überhänge vorhanden sind, ist aufgrund des selbstaffinen Charakters der Grenzfläche diese Definition des Abstands zwischen zwei Punkten der Grenzfläche äquivalent zu der Abstandsdefinition mittels der Differenz der Polarwinkel zweier Grenzflächenpositionen $h(s, t)$.

Eine Grundannahme der dynamischen Skalenanalyse ist, daß zur Zeit $t = 0$ der mittlere zurückgelegte Weg der Grenzfläche bzw. hier der mittlere Radius der Domäne null ist. Aus diesem Grund muß für die weitere Analyse die Zeit reskaliert werden.

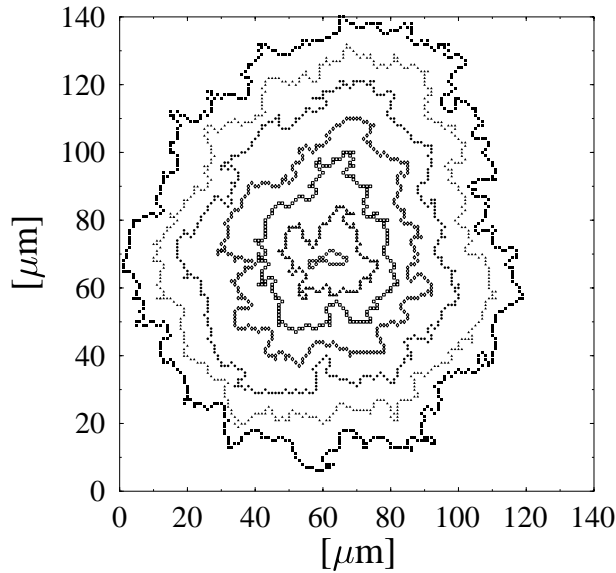


Abbildung 5.2: Konturplot derselben Domänen wie in Abb. 5.1. ($T = 364K$, $H = 14.9kA/m$)

Dies kann durch die Definition $t = \tau - \tau_0$ geschehen, wobei τ_0 der Zeitpunkt ist, bei der die Nukleation der Domäne stattfindet und deren Wachstum beginnt. Aufgrund von Fluktuationseffekten bei der Ummagnetisierung kann dieser Zeitpunkt nicht genau genug bestimmt werden. Da jedoch der mittlere Domänenradius $\langle r(\tau) \rangle$ proportional zu $\tau - \tau_0$ ist (Abb. 5.3), wird dieser zur Definition der Zeit benutzt, $t = \langle r(\tau) \rangle$.

Aufgrund der sphärischen Geometrie der Domänen kann der Rauigkeitsexponent α nicht mit der Systemlängenabhängigkeit der Rauigkeit Gl. 2.21 berechnet werden, was wie folgt verstanden werden kann: Die Systemlänge L , welche gleichbedeutend mit dem Umfang der Domäne ist, ist proportional zum mittleren Radius und somit proportional zur Zeit t . Somit gilt für das Skalenverhalten der Rauigkeit (Gl. 2.22)

$$\begin{aligned} w(L, t) &\sim t^\alpha f\left(\frac{t}{t^z}\right) \\ &\sim t^\alpha f\left(\frac{1}{t^{z-1}}\right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Da der dynamische Exponent z größer als eins ist, geht das Argument der Skalenfunktion $f(y)$ gegen null, so daß $f(y) \sim y^\beta$ und somit $w(L, t) \sim t^\beta$. D. h., mit der Analyse der Rauigkeit kann in diesem Fall nur der Exponent β bestimmt werden, so daß zur Bestimmung des Rauigkeitsexponenten Korrelationsfunktionen wie die

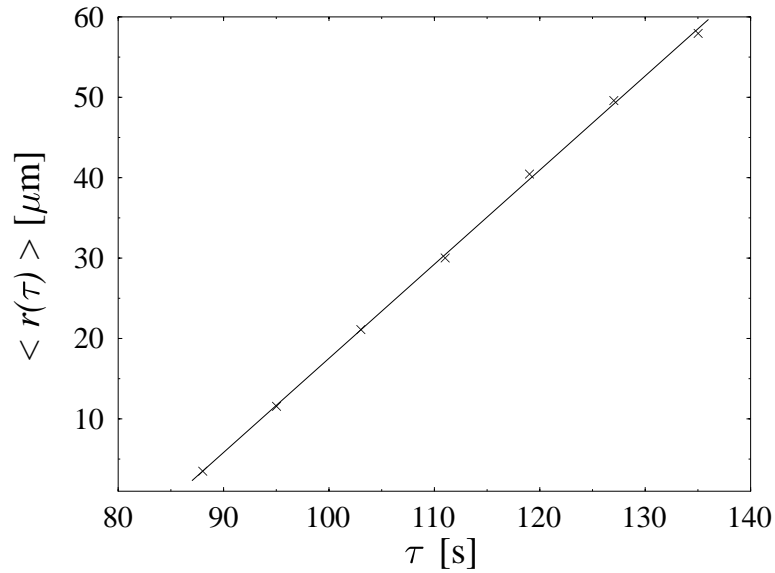


Abbildung 5.3: Zeitabhängigkeit des mittleren Domänenradius $\langle r(\tau) \rangle$. ($T = 364\text{K}$, $H = 14.9\text{kA/m}$)

Höhenkorrelationsfunktion Gl. 2.11 analysiert werden müssen. Abb. 5.4 zeigt diese Meßgröße als Funktion des Abstands s für verschiedene Zeiten t auf logarithmischen Skalen. Für kleine s steigt die Höhenkorrelationsfunktion algebraisch an, woraus man mit Gl. 2.12 den Rauigkeitsexponenten zu $\alpha = 0.77 \pm 0.01$ bestimmen kann. Für größere s -Werte erhält man einen kleineren Rauigkeitsexponenten $\alpha \simeq 0.34 \dots 0.39$. Solch ein Übergang von einem Skalenverhalten auf kleinen Längenskalen zu einem anderen Skalenverhalten auf großen Längenskalen konnte auch in Experimenten zur Dynamik von fluiden Grenzflächen in porösen Medien beobachtet werden [62]. Wie auch die Fluktuationen der Sättigungswerte der Höhenkorrelationsfunktion für große s , ist dieser Effekt hier jedoch darauf zurückzuführen, daß eine Mittelung über mehrere Domänenkonfigurationen gleicher Größe nicht durchgeführt werden konnte, wie dies gewöhnlich bei Computersimulationen geschieht.

Aufgrund der Fluktuationen des Sättigungswertes der Höhenkorrelationsfunktion kann der Exponent β hier nicht aus diesen Sättigungswerten bestimmt werden. Da die Rauigkeit proportional zur Fläche unter der Kurve $C(s, t)$ ist, fallen bei der Messung der Zeitabhängigkeit der Rauigkeit diese Fluktuationen jedoch nicht so stark ins Gewicht. Mit Gl. 2.22 folgt dann $\beta = 0.42 \pm 0.02$ (siehe Abb. 5.5) und somit für den dynamischen Exponenten $z = \alpha/\beta = 1.86 \pm 0.11$. Vergleichbare Werte für die Exponenten findet man im gesamten gewählten Temperaturbereich $299\text{K} \leq T \leq 394\text{K}$ und bei Magnetfeldern zwischen $H = 10.5\text{kA/m}$ und $H = 18.8\text{kA/m}$.

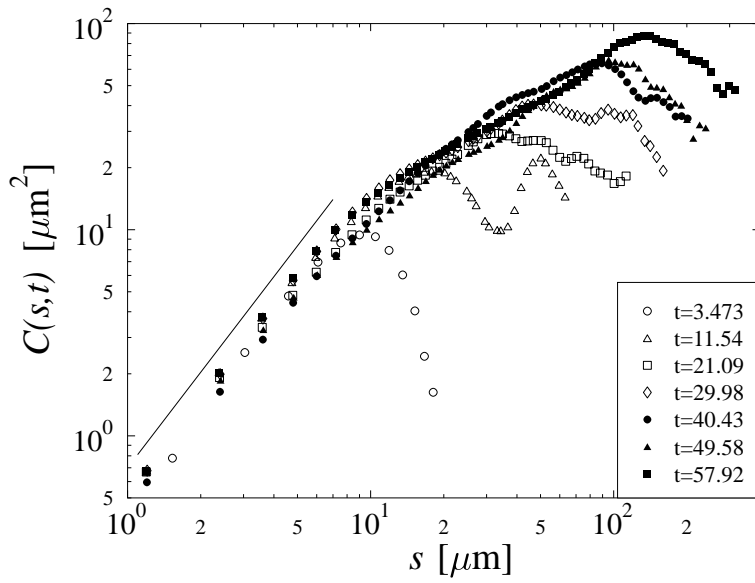


Abbildung 5.4: Die Höhenkorrelationsfunktion $C(s, t)$ zu verschiedenen reskalierten Zeiten. Die Linie stellt eine Regressionskurve gemäß $C(s, t) \propto s^{2\alpha}$ mit $\alpha = 0.77 \pm 0.01$ dar. ($T = 364K$, $H = 14.9kA/m$)

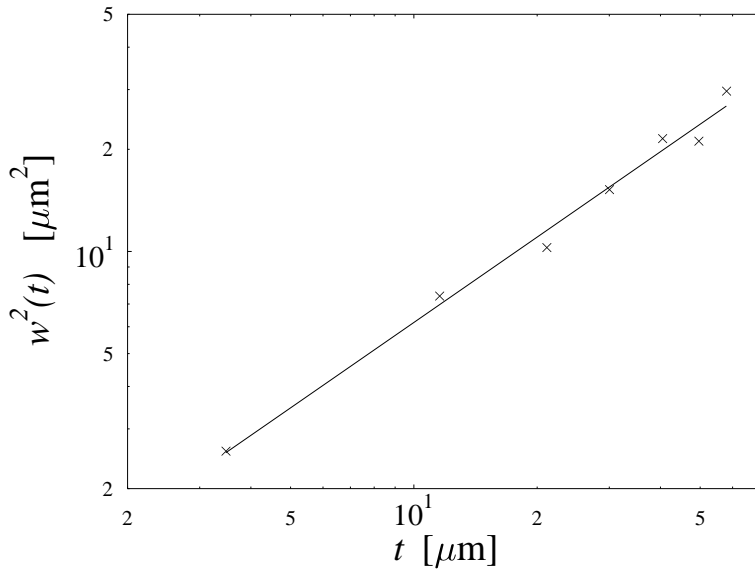


Abbildung 5.5: Die Rauigkeit $w^2(t)$ als Funktion der reskalierten Zeit t , wobei die Linie eine Regressionskurve gemäß $w^2(t) \propto t^{2\beta}$ mit $\beta = 0.42 \pm 0.02$ darstellt. ($T = 364K$, $H = 14.9kA/m$)

Diskussion

Für eine Diskussion der Ergebnisse sollen hier die am Anfang des Abschnitts beschriebenen Modifikationen des Zufallsfeld-Ising-Modells zur Beschreibung des Ummagnetisierungsverhaltens außer acht gelassen werden. Da die Curie-Temperatur $T_C \simeq 600\text{K}$ deutlich größer ist als die Temperatur, bei der die Experimente durchgeführt wurden, kann der Einfluß der thermischen Effekte auf die Morphologie im Vergleich mit den Zufallsfeldeffekten vernachlässigt werden (siehe Abschnitt 3.1). Weiterhin ist bei den Experimenten das äußere homogene Magnetfeld deutlich kleiner als das kritische Feld $H_C \simeq 40\text{kA/m}$, bei dem der *depinning*-Übergang im Grenzfall $T \rightarrow 0\text{K}$ stattfindet [68]. Experimente bei höheren Magnetfeldern sind nicht möglich, da in diesem Fall neue Domänen spontan gebildet werden, welche dann überlappen, und somit das Wachstum einer einzelnen Domäne nicht mehr beobachtet werden kann. Die Experimente fanden somit in einem Parameterbereich statt, der es erlaubt, die hier erzielten Ergebnisse mit Ergebnissen für das Zufallsfeld-Ising-Modell bei $T = 0\text{K}$ in der *pinning*-Phase zu vergleichen. In diesem Fall ergeben Computersimulationen des *Soft-Spin*-Modells in $\mathcal{D} = 1$ [23] einen effektiven Rauigkeitsexponenten $\alpha \simeq 0.78 \dots 0.88$ in Abhängigkeit der Stärke des homogenen Magnetfeldes. Mit den Werten des Exponenten $\beta \simeq 0.41 \dots 0.44$ erhält man in diesem Modell für den dynamischen Exponenten $z \simeq 1.85 \dots 2.07$. Die experimentell gefundenen Werte sind somit in recht guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Computersimulationen, so daß die zur Beschreibung des Ummagnetisierungsverhaltens notwendigen Modifikationen des Zufallsfeld-Ising-Modells im Rahmen der hier erzielten Genauigkeit keinen Einfluß auf die Universalitätsklasse haben.

Da Grenzflächen im Zufallsfeld-Ising-Modell in der Nähe des *depinning*-Übergangs durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 beschrieben werden können, ist ebenfalls ein Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit dieser Gleichung möglich. Die große Abweichung zu dem erwarteten Ergebnis $\alpha = 1$ für den Rauigkeitsexponenten kann darauf zurückgeführt werden, daß die Experimente aus dem oben genannten Grund nicht nahe genug am *depinning*-Übergang durchgeführt werden konnten, so daß wie in den Simulationen des *Soft-Spin*-Modells der Rauigkeitsexponent kleiner als eins ist. Dieses Ergebnis steht somit nicht im Widerspruch zu dem theoretischen und durch Simulationen der Gl. 3.20 bestätigten Ergebnis, daß der Rauigkeitsexponent am *depinning*-Übergang den Wert $\alpha = 1$ hat. Einen Wert $\alpha \simeq 0.75$ für den Rauigkeitsexponenten erhalten ebenfalls Kessler et al. [35] bei der numerischen Integration von Gl. 3.20 in der *depinning*-Phase. In diesem Fall kann der Wert $\alpha \simeq 0.75$ mit einem Übergang vom Wert $\alpha = 1$ für den Grenzfall sehr kleiner Geschwindigkeiten am *depinning*-Übergang zum Wert $\alpha = 1/2$ für sehr große Geschwindigkeiten erklärt werden. Die recht gute Übereins-

timung des experimentell gefundenen Wertes des dynamischen Exponenten mit dem skalentheoretischen Ergebnis $z = 2$ (siehe Abschnitt 3.3), welcher durch eine numerische Integration der Bewegungsgleichung bestätigt wird (Abschnitt 4.3), läßt abschließend den Schluß zu, daß die Domänenwanddynamik in den untersuchten CoPt-Filmen durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 beschrieben werden kann.

6 Zusammenfassung der Ergebnisse und Vergleich mit der Literatur

In dieser Arbeit wurden die physikalischen Eigenschaften einer Grenzfläche in einem Ferromagneten mit Zufallsfeldunordnung am *depinning*-Übergang untersucht. Der *depinning*-Übergang, bei dem die Unordnung die Bewegung der Grenzfläche gerade noch stoppen kann, wird durch eine verschwindende mittlere Grenzflächengeschwindigkeit $v \sim (F - F_C)^\theta$ und eine divergierende Korrelationslänge $\xi_{\parallel} \sim (F - F_C)^{-\nu}$ beschrieben. Zusätzlich dienen der dynamische Exponent z und der Rauigkeitsexponent α zur Beschreibung der dynamischen und räumlichen Korrelationen der Grenzfläche, so daß mit diesen vier Exponenten das Skalenverhalten der Grenzfläche vollständig bestimmt ist.

Die durchgeführten skalentheoretischen Betrachtungen der in dieser Arbeit aus dem *Soft-Spin*-Hamiltonian Gl. 3.2 hergeleiteten Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 ergeben für den dynamischen Exponenten $z = 2$, unabhängig von der Grenzflächendimension \mathcal{D} , und für den Rauigkeitsexponenten $\alpha = (4 - \mathcal{D})/3$. Für den häufig anstatt des dynamischen Exponenten z gemessenen Exponenten $\beta = \alpha/z$, welcher das zeitliche Wachstum der Rauigkeit beschreibt, gilt damit $\beta = (4 - \mathcal{D})/6$. Mit den Skalengesetzen $\nu = 1/(2 - \alpha)$ (Gl. 3.23) und $\theta = \nu(z - \alpha)$ (Gl. 3.29) folgt weiterhin $\nu = 3/(2 + \mathcal{D})$ und $\theta = 1$. Diese Werte für die Exponenten sollen nun im folgenden mit den in dieser Arbeit vorgestellten und in der Literatur bekannten Modellen und Experimenten, die im Zusammenhang mit der Gl. 3.20 stehen, verglichen werden (Tabelle 6.1). Da die Beziehung der in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse mit den Literaturdaten ausführlich in den entsprechenden Abschnitten diskutiert wurde, soll dieser Vergleich hier nur zusammenfassend durchgeführt werden, um einen vollständigen Überblick zu geben. Zusätzlich wird nochmals ein Vergleich mit den Renormierungsgruppenrechnungen von Nattermann et al. [45] und Narayan und Fisher [12] durchgeführt.

Die Simulationen des *Soft-Spin*-Modells in der Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 1$ [22, 23] und die in dieser Arbeit dargestellten Simulationsergebnisse dieses Modells in $\mathcal{D} = 2$ bestätigen die Vorhersagen der Reskalierungsanalyse für die charakteristischen Exponenten. Weiterhin wird durch eine numerisch exakte Berechnung der Grenzflächenmorphologie im Zufallsfeld-Ising-Modell die Selbstaffinität der Grenzfläche in $\mathcal{D} = 1$ bestätigt.

Modell	\mathcal{D}	α	β	z	ν	θ	Referenz
Theorie	1	1	1/2	2	1	1	Abschnitt 3.3
EW	1	0.99	0.51	1.92	1.01	0.99	Abschnitt 4.3
AM 1	1	0.99	0.86	1.44	1.17	–	Abschnitte 4.4.2 und 4.4.3
CoPt	1	0.77	0.42	1.86	–	–	Abschnitt 5
EW	1	–	0.75	–	–	–	Parisi [33]
EW	1	0.97	–	–	1.05	0.25	Dong et al. [34]
EW	1	1	–	–	–	–	Kessler et al. [35]
EW	1	1.25	0.88	–	–	–	Leschhorn [36]
EW	1	0.72	0.61	1.16	–	0.50	Csahok et al. [37]
EW	1	1.20	–	–	–	–	Galluccio et al. [38]
EW	1	1.25	–	1.67	–	–	López et al. [39]
SSM	1	0.89	0.44	2.01	–	1	Jost et al. [23], Usadel et al. [41]
AM 1	1	1.25	0.88	1.42	1.33	0.25	Leschhorn [42, 36]
AM 2	1	1.23	0.85	1.45	1.35	0.25	Ameral et al. [40]
Theorie	2	2/3	1/3	2	3/4	1	Abschnitt 3.3
SSM	2	0.68	0.36	1.89	–	–	Abschnitt 4.1
AM 1	2	0.68	0.48	1.46	–	–	Abschnitt 4.4.2
RFIM	2	0.67	–	1.9	0.75	–	Ji et al.[43], Robbins et al. [44]
SSM	2	–	–	–	–	1	Usadel et al. [41]
AM 1	2	0.75	0.47	1.46	0.8	0.65	Leschhorn [42, 36]
Theorie	3	1/3	1/6	2	3/5	1	Abschnitt 3.3
AM 1	3	0.33	0.22	1.53	–	–	Abschnitt 4.4.2
AM 1	3	0.35	0.2	1.53	0.61	0.84	Leschhorn [42, 36]

Tabelle 6.1: *Numerische Ergebnisse und die theoretischen Vorhersagen für die charakteristischen Exponenten der in dieser Arbeit diskutierten Modelle und Experimente. Zur besseren Übersichtlichkeit wird hier auf die Angabe der Fehler der Exponenten verzichtet und auf die entsprechenden Abschnitte verwiesen. Weiterhin sind die Literaturwerte für die numerisch bestimmten charakteristischen Exponenten der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 und von Modellen, die mit dieser Gleichung im Zusammenhang stehen, in dieser Tabelle eingetragen. Die Abkürzung EW bezeichnet die numerische Integration der Gl. 3.20, SSM das Soft-Spin-Modell und AM 1 das Leschhornsche Automatenmodell. Mit CoPt ist die experimentelle Realisierung einer Domänenwand in dünnen CoPt-Filmen bezeichnet. Die Abkürzung AM 2 bezeichnet das zu AM 1 äquivalente Automatenmodell von Ameral und RFIM steht für das Zufallsfeld-Ising-Modell Gl. 3.1.*

Neben den theoretischen und numerischen Betrachtungen von Grenzflächen in magnetischen Systemen mit Zufallsfeldunordnung wurden in Kapitel 5 auch experimentelle Daten [67] zum Domänenwachstum in CoPt-Filmen analysiert. Die experimentellen Werte der Exponenten stimmen recht gut mit den Ergebnissen der Computersimulationen des *Soft-Spin*-Modells [22, 23] in $\mathcal{D} = 1$ und denen der skalentheoretischen Vorhersage, hier insbesondere der Wert des dynamischen Exponenten, überein. Die relativ große Abweichung des Rauigkeitsexponenten vom theoretischen Wert kann, wie schon in Kapitel 5 erörtert, darauf zurückgeführt werden, daß die Experimente nicht in der Nähe des *depinning*-Übergangs durchgeführt werden konnten.

Da das Skalenverhalten der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung Gl. 3.20 insbesondere in $\mathcal{D} = 1$ kontrovers in der Literatur diskutiert wird, wurde die Bewegungsgleichung 3.20 numerisch integriert, wobei die Analyse der numerischen Ergebnisse die skalentheoretischen Vorhersagen bestätigt. Diese Untersuchung zeigt auch, daß das Ergebnis $z = 2 - 2\epsilon/9$, welches Nattermann et al. [45] und Narayan und Fisher [12] mit dynamischen Renormierungsgruppenrechnungen in $\mathcal{D} = 4 - \epsilon$ für die Gl. 3.20 erhalten, nur für $\epsilon \rightarrow 0$ richtig ist, während deren Ergebnis $\alpha = \epsilon/3$ durch die numerische Integration bestätigt wird.

In Übereinstimmung mit den hier erzielten Ergebnissen erhalten Kessler et al. [35] und Dong et al. [34] ebenfalls $\alpha \simeq 1$. Das Ergebnis von Dong et al. wurde jedoch von Leschhorn und Tang [113] angezweifelt, da der Rauigkeitsexponent über die r -Abhängigkeit der Höhenkorrelationsfunktion bestimmt wurde und man mit dieser Methode auch den Wert $\alpha = 1$ erhält, falls der wahre Wert größer als eins ist, siehe Abschnitt 2.2. Dong et al. erhalten jedoch für den Korrelationslängenexponenten $\nu \simeq 1.05$, was mit dem Skalengesetz $\nu = 1/(2 - \alpha)$ (Gl. 3.23) deren Ergebnis für den Rauigkeitsexponenten bestätigt, so daß der von Leschhorn und Tang vorgebrachte Zweifel zur Richtigkeit des Wertes für den Rauigkeitsexponenten widerlegt ist.

Wie durch den Vergleich mit den in dieser Arbeit erzielten Ergebnissen in Abschnitt 4.3 diskutiert wurde, können die Ergebnisse von Parisi [33], Leschhorn [36], Galluccio und Zhang [38] und López et al. [39] für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung darauf zurückgeführt werden, daß die Simulationen für zu kleine Systemgrößen durchgeführt wurden. Die Analyse des Strukturfaktors zeigt, daß das asymptotische Verhalten erst für Systemgrößen bzw. Korrelationslängen auftritt, welche viel größer als 10^4 Gitterkonstanten sind, da nur in diesem Fall im Strukturfaktor diejenigen k -Moden auftreten, welche das asymptotische Skalenverhalten bestimmen. Dies hat zur Folge, daß mit kleineren Systemen weder das asymptotische dynamische Verhalten noch die asymptotische Morphologie beobachtet werden kann. Diese Sichtweise wird dadurch bestätigt, daß die Werte der charakteristischen Expo-

menten in [33, 36, 38, 39] konsistent sind mit denen, die hier im nichtasymptotischen Skalenbereich gefundenen wurden.

Weitab vom *depinning*-Übergang, d. h. für sehr große Geschwindigkeiten, kann die ortsfeste Unordnung durch ein effektives weißes Rauschen beschrieben werden, so daß die Morphologie der Grenzfläche in $\mathcal{D} = 1$ durch $\alpha = 0.5$ beschrieben wird [26]. Wie die numerische Integration der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung von Kessler et al. [35] zeigte, ändert sich der Wert des Rauigkeitsexponenten kontinuierlich zwischen den asymptotischen Werten $\alpha \simeq 1$ am *depinning*-Übergang und $\alpha \simeq 0.5$ weitab vom *depinning*-Übergang mit Erhöhung der treibenden Kraft. Somit kann der zu kleine Wert für den Rauigkeitsexponenten bei der Simulation der Bewegungsgleichung von Csahok et al. [37] dadurch erklärt werden, daß die Simulationen nicht nahe genug am *depinning*-Übergang stattgefunden haben. Diese Tatsache mag auch der Grund dafür sein, daß Csahok et al. für den Geschwindigkeitsexponenten $\theta \simeq 0.5$ erhalten, da ein ähnlicher Wert auch hier im nichtasymptotischen Bereich gefunden wird.

Einen im Vergleich mit der skalentheoretischen Vorhersage zu kleinen Wert für den Rauigkeitsexponenten erhält man auch bei der Simulation des *Soft-Spin*-Modells in der Grenzflächendimension $\mathcal{D} = 1$ [22, 23]. Für den Fall sehr großer Systeme werden Grenzflächen in diesem Modell in der *depinning*-Phase durch die KPZ-Gleichung beschrieben, während die Grenzflächen für kleine Systemgrößen durch die Edwards-Wilkinson-Gleichung beschrieben werden, so daß das Simulationsergebnis mit der Arbeit von Kessler et al. verglichen werden kann, was den Schluß zuläßt, daß die Simulationen nicht nahe genug am *depinning*-Übergang durchgeführt wurden.

In dieser Arbeit wurde weiterhin das Automatenmodell von Leschhorn [36, 42] untersucht, das zu der Edwards-Wilkinson-Universalitätsklasse gehören soll [51], wobei die Werte der charakteristischen Exponenten [36, 42] jedoch nicht mit den hier gemachten skalentheoretischen Vorhersagen übereinstimmen, so daß dieses Modell hier nochmals in $\mathcal{D} = 1, 2, 3$ untersucht wurde. Hierbei wurden Systeme in den stationären Zustand getrieben, welche viel größer waren als die in [36, 42] untersuchten. Für diese großen Systeme zeigt sich, daß der Rauigkeitsexponent ebenfalls durch den theoretischen Wert $\alpha = (4 - \mathcal{D})/3$ beschrieben wird. Jedoch weicht sowohl der Wert des dynamischen Exponenten mit $z \simeq 1.5$ für $\mathcal{D} = 1, 2, 3$ als auch der Wert $\nu = 1.17$ für den Korrelationslängenexponenten in $\mathcal{D} = 1$ von den in dieser Arbeit erhaltenen Werten für die Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung ab. Dies macht die Aussage [51, 42, 36], daß dieses Automatenmodell zu der Edwards-Wilkinson-Universalitätsklasse gehört, fraglich. Die Abweichungen zu den numerischen Ergebnissen von Leschhorn, als auch zu den von Amaral et al. für ein äquivalentes Automatenmodell gefundenen Werten [40] können in Analo-

gie zur Analyse der numerischen Integration von Gl. 3.20 auf zu kleine untersuchte Systemgrößen in [42, 36, 40] zurückgeführt werden.

Im Rahmen des Automatenmodells wurde weiterhin in $\mathcal{D} = 1$ die lawinenartige Bewegung der Grenzfläche zwischen zwei *pinning*-Zuständen untersucht, um einen Zusammenhang zwischen der Grenzflächendynamik am *depinning*-Übergang und der selbstorganisierten Kritikalität von getriebenen Systemen herzustellen. Nach [110] können die lawinenartigen Bewegungen am *depinning*-Übergang als selbstorganisiert kritisch angesehen werden, da die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der charakteristischen Lawinengrößen hier skaleninvariant sind. Zusätzlich erlaubt die Analyse der Wahrscheinlichkeitsverteilungen u. a. eine nochmalige Bestimmung des Rauigkeitsexponenten, welche den Wert $\alpha \simeq 1$ bestätigt.

Zusammenfassend zeigt die hier mit der Literatur durchgeführte vergleichende Diskussion der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse für Grenzflächen in magnetischen Systemen mit Zufallsfeldunordnung und der Edwards-Wilkinson-Gleichung mit eingefrorener Unordnung, daß am *depinning*-Übergang die Grenzflächen durch diese Gleichung beschrieben werden können. Weiterhin bestätigen die numerischen Ergebnisse die skalentheoretischen Vorhersagen für die Werte der die Grenzflächenbewegung beschreibenden charakteristischen Exponenten.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Nattermann und P. Rujan, *Int. J. Mod. Phys. B* **3**, 1597 (1989).
- [2] A. J. Bray und K. Humayun, *J. Phys. A* **23**, 5897 (1990). T. J. Newman und A. J. Bray, *J. Phys. A* **23**, 4491 (1990).
- [3] S. Puri, D. Chowdhury und N. Parekh, *J. Phys. A* **24**, L1087 (1991). S. Puri und N. Parekh, *J. Phys. A* **25**, 4127 (1992).
- [4] W. Kleemann; *J. Mod. Phys. B* **7**, 2469 (1993).
- [5] T. Nattermann und J. Villain, *Phase Transitions* **11**, 5 (1988).
- [6] J. Koplik und H. Levine, *Phys. Rev. B* **32**, 280 (1985).
- [7] S. Komura und H. Furukawa, *Dynamics of Ordering Processes in Condensed Matter*, (Plenum Press, New York, 1988).
- [8] R. Bruinsma und G. Aeppli, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1547 (1984).
- [9] M. V. Feigelman, *Sov. Phys-JETP* **58**, 1076 (1983).
- [10] A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow in Porous Media*, (University of Toronto Press, Toronto, 1984).
- [11] G. Grüner, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 1129 (1988).
- [12] O. Narayan und D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **48**, 7030 (1993).
- [13] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin und V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **67**, 1125 (1994).
- [14] D. E. Wolf, in *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics*, Herausgeber A. McKane, M. Droz, J. Vannimenus und D. Wolf, NATO ASI Series B: Physics Vol. 344, (Plenum Press, New York, 1995).
- [15] B.B. Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, (Birkhäuser Verlag, Basel), 1987.
- [16] F. Family und T. Vicsek, *J. Phys. A* **18**, L75 (1985).

- [17] S. Havlin, S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger, R. N. Mantegna, C.-K. Peng, M. Simons und H. E. Stanley, in *Fractals in the Natural and Applied Sciences*, edited by M. M. Novak (Chapman & Hall, London, 1995); S. V. Buldyrev, A. L. Goldberger, S. Havlin, R. N. Mantegna, M. E. Matsu, C.-L. Peng, M. Simons und H. E. Stanley, Phys. Rev. E. **51**, 5084 (1995).
- [18] C.-K. Peng, J. M. Hausdorff, J. E. Mietus, S. Havlin, H. E. Stanley und A. L. Goldberger, in *International Conference on Lévy Flights*, Herausgeber M. F. Shlesinger, G. Zaslavsky und U. Frisch, (Springer, Berlin), 1995.
- [19] R. Cont, in *Scale invariance and beyond*, Proceedings of the CNRS School on Scale Invariance, Les Houches, France, (1997); R. Cont, M. Potters und J.-P. Bouchaud, *ibid.*
- [20] Y. Liu, P. Cizeau, M. Meyer, C.-K. Peng und H. E. Stanley, cond-mat/9706021 at <http://xxx.lanl.gov> (1997).
- [21] D. Sornette, A. Hohansen und J.-P. Bouchaud, J. Phys. France I **6**, 167 (1996). J. A. Feigenbaum und P. G. O. Freund, Int. J. Mod. Phys. **10**, N27, 2737 (1996).
- [22] M. Jost, *Rauhigkeit von Domänenwänden in ungeordneten magnetischen Systemen*, Diplomarbeit am Fachbereich Physik-Technologie der Universität GH Duisburg, (1993).
- [23] M. Jost und K. D. Usadel, Phys. Rev. B **54**, 9314 (1996).
- [24] K. Binder und A. P. Young, Rev. Mod. Phys. **58**, 801 (1986).
- [25] K. Binder und D. W. Herrmann. *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, Springer Series in Solid-State Sciences, Vol. 80, (Springer Verlag, Heidelberg), 1988.
- [26] S. F. Edwards und D. R. Wilkinson, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **381**, 17 (1982).
- [27] M. Kardar, G. Parisi und Y.-C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889 (1986).
- [28] A.-L. Barabási und H.E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [29] J. S. Langer, in *Solids far from Equilibrium: Growth, Morphology and Defects*, Herausgeber C. Godrèche, (Cambridge University Press, Cambridge), 1992.

- [30] M. Jost und K. D. Usadel, *Physica A* **239**, 486 (1997).
- [31] H. Ji und M. O. Robbins, *Phys. Rev. A* **44**, 2538 (1991).
- [32] M. Jost, J. Esser und K. D. Usadel, *physica status solidi (b)* **202/2**, R11 (1997).
- [33] G. Parisi, *Europhys. Lett.* **17**, 673 (1992).
- [34] M. Dong, M.C. Marchetti und A.A. Middleton, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3539 (1993).
- [35] D. Kessler, H. Levine und Y. Tu, *Phys. Rev. A* **43**, 4551 (1992).
- [36] H. Leschhorn, Dissertation Universität Bochum, 1994.
- [37] Z. Csahók, K. Honda, E. Somfai, M. Vicsek und T. Vicsek, *Physica A* **200**, 136 (1993).
- [38] S. Galluccio und Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. E* **51**, 1686 (1995).
- [39] J. M. López und M. A. Rodríguez, Vorabdruck, eingereicht nach *Phys. Rev. E* (1997).
- [40] L. A. Nunes Amaral, A.-L. Barabási, H. A. Makse und H. E. Stanley, *Phys. Rev. E* **52**, 4087 (1995).
- [41] K. D. Usadel und M. Jost, *J. Phys. A* **26**, 1783 (1993).
- [42] H. Leschhorn, *Physica A* **195**, 324 (1993).
- [43] H. Ji und M. O. Robbins, *Phys. Rev. B* **46**, 14519 (1992).
- [44] M. O. Robbins, M. Cieplak, H. Ji, B. Koiller und N. Martys, in *Growth Patterns in Physical Sciences and Biology*, Herausgeber J. M. Garcia-Ruiz, E. Louis, L. Sander und P. Meakin, NATO ASI Series B: Physics Vol. 304, (Plenum Press, New York), 1993.
- [45] T. Nattermann, S. Stepanow, L.-H. Tang und H. Leschhorn, *J. Phys. France II* **2**, 1483 (1992).
- [46] J. M. López, M. A. Rodríguez, A. Hernández-Machado und A. Díaz-Guilera, *Europhys. Lett* **29**, 197 (1995).

- [47] G. Parisi in *Surface Disordering: Growth, Roughening and Phase Transitions*, Herausgeber R. Jullien, J. Kertész, P. Meakin und D.E. Wolf, (Nova Science, New York, 1992).
- [48] S. Das Sarma, S. V. Ghaisas und J. M. Kim, Phys. Rev. E **49**, 122 (1994).
- [49] D. E. Wolf und J. Villain, Europhys. Lett. **13**, 389 (1990).
- [50] M. Schroeder, M. Siegert, D. E. Wolf, J. D. Shore und M. Plischke, Europhys. Lett. **24**, 563 (1993).
- [51] L. A. N. Amaral, A. L. Barabási and H. E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **73**, 62 (1994).
- [52] M. Jost und K. D. Usadel, Physica A, zur Veröffentlichung akzeptiert.
- [53] P. Bak, C. Tang und K. Wiesenfeld, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987); Phys. Rev. A **38**, 364 (1988).
- [54] G. Grinstein, in *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics*, Herausgeber A. McKane, M. Droz, J. Vannimenus und D. Wolf, NATO ASI Series B: Physics Vol. 344, (Plenum Press, New York, 1995).
- [55] M. Jost, Phys. Rev. E, zur Veröffentlichung akzeptiert, erscheint voraussichtlich März 1998.
- [56] A.-L. Barabási, S. V. Buldyrev, S. Havlin, G. Huber, H. E. Stanley und T. Vicsek, in *Surface Disordering: Growth, Roughening and Phase Transitions*, Herausgeber R. Jullien, J. Kertész, P. Meakin und D. E. Wolf (Nova Science, New York, 1992).
- [57] L. A. N. Amaral, A.-L. Barabási, S. V. Buldyrev, S. Havlin, S. T. Harrington, R. Sadr and H. E. Stanley, Phys. Rev. E **51**, 4655 (1995).
- [58] S. V. Buldyrev, A.-L. Barabási, F. Caserta, S. Havlin, H. E. Stanley und T. Vicsek, Phys. Rev. A **45**, R8313 (1992).
- [59] L.-H. Tang und H. Leschhorn, Phys. Rev. Lett. **70**, 3832 (1993).
- [60] M. A. Rubio, C. A. Edwards, A. Dougherty und J. B. Gollub, Phys. Rev. Lett. **63**, 1685 (1989); *ibid.* **65**, 1389 (1990).
- [61] S.-j. He, G. Kahenda und P.-z. Wong, Phys. Rev. Lett. **69**, 3731 (1992).

- [62] V. K. Horváth, F. Family und T. Vicsek, Phys. Rev. Lett. **67**, 3207 (1991); J. Phys. A **24**, L25 (1991).
- [63] J. G. Amar und F. Family, J. Phys. A **24**, L79 (1991).
- [64] Y.-C. Zhang, Physica A **170**, 315 (1990); J. Krug, J. Phys. I **1**, 9 (1991).
- [65] J. Krug, in *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics*, Herausgeber A. McKane, M. Droz, J. Vannimenus und D. Wolf, NATO ASI Series B: Physics Vol. 344, (Plenum Press, New York), 1995.
- [66] J. Valentin, T. Kleinefeld und D. Weller, J. Phys. D **29**, 1111 (1996).
- [67] J. Heibel, *Struktur und Dynamik von Domänen in magnetooptischen Speicherschichten*, Diplomarbeit am Fachbereich Physik-Technologie der Gerhardt-Mercator-Universität GH Duisburg (1996).
- [68] U. Nowak, J. Heibel, T. Kleinefeld und D. Weller, Phys. Rev. B (1997).
- [69] U. Nowak, U. Rüdiger, P. Fumagalli und G. Güntherodt, Phys. Rev. B **54**, 13017 (1996). U. Nowak, J. Appl. Phys. **81**, 5579 (1997).
- [70] M. Jost, J. Heibel und T. Kleinefeld, Phys. Rev. B, zur Veröffentlichung akzeptiert, erscheint voraussichtlich März 1998.
- [71] F. Family und T. Vicsek, *Dynamics of Fractal Surfaces*, (World Scientific, Singapore, 1991).
- [72] M. Siegert, Phys. Rev. E **53**, 3209 (1996).
- [73] J. G. Amar, P.-M. Lam und F. Family, Phys. Rev. E **47**, 3242 (1993).
- [74] M. Kardar und D. Ertas, in *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics*, Herausgeber A. McKane, M. Droz, J. Vannimenus und D. Wolf, NATO ASI Series B: Physics Vol. 344, (Plenum Press, New York, 1995).
- [75] S.-k. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, (W. A. Benjamin, Reading), 1976.
- [76] G.F. Mazenko, O.T. Valls und F. Zhang, Phys. Rev. B **31**, 4453 (1985); A.J. Bray, Phys. Rev. Lett. **62**, 2841 (1989).
- [77] G. Grinstein und S.-k. Ma, Phys. Rev. B **28**, 2588 (1983).

- [78] S. Fishman und A. Aharony, *J. Phys. C* **12**, L729 (1979).
- [79] C. Bostoen und K. H. Michel, *Z. Phys. B* **71**, 369 (1988).
- [80] P. G. de Gennes, *J. Phys. Chem.* **88**, 6469 (1984).
- [81] A. M. Gutin, V. I. Abkevich und E. I. Shakhnovich, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5433 (1996).
- [82] I. M. Lifshitz, *Sov. Phys-JETP* **15**, 939 (1962). S. A. Allen und J. W. Cahn, *Acta Metall.* **27**, 1085 (1979).
- [83] R. K. P. Zia, *Nucl. Phys. B* **251**, 676 (1985).
- [84] M. Jost und K. D. Usadel, in *Chaos and Fractals in Chemical Engineering*, Herausgeber G. Biardi, M. Giona und A. R. Giona, (World Scientific, Singapore, 1997).
- [85] F. P. Buff, R. A. Lovett und F. H. Stillinger, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 621 (1965).
- [86] H. W. Diehl, D. M. Kroll und H. Wagner, *Z. Phys. B* **36**, 329 (1980).
- [87] R. Bausch, V. Dohm, H. K. Jansen und R. K. P. Zia, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1837 (1981); *Z. Phys. B* **82**, 121 (1991).
- [88] J. Krug und H. Spohn, in *Solids far from Equilibrium: Growth, Morphology and Defects*, Herausgeber C. Godrèche, (Cambridge University Press, Cambridge), 1992.
- [89] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, (Cambridge University Press, Cambridge), 1992.
- [90] T. Nattermann und L.-H. Tang, *Phys. Rev. A* **45**, 7156 (1992).
- [91] M. Jost und K. D. Usadel, in *Fractals in the Natural and Applied Sciences*, edited by M. M. Novak (Chapman & Hall, London, 1995).
- [92] A. T. Ogielski, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1251 (1986).
- [93] J. P. Picard und H. D. Ratliff, *Networks* **5**, 357 (1975).
- [94] A. Hartmann und K. D. Usadel, *Physica A* **214**, 141 (1995).
- [95] M. N. S. Swamy und K. Thulasiraman, *Graphs, Networks and Algorithms*, (John Willey and Sons, New York, 1981).

- [96] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Canadian J. Math.* **8**, 399 (1956).
- [97] J. Esser, *Exakte Grundzustandseigenschaften ungeordneter Ising-Systeme*, Diplomarbeit am Fachbereich Physik-Technologie der Universität GH Duisburg, (1996).
- [98] J. Esser, U. Nowak und K. D. Usadel, *Phys. Rev. B* **55**, 5866 (1997).
- [99] J. Z. Imbrie, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1747 (1984).
- [100] M. Jost und K. D. Usadel, *physica status solidi (b)* **202/2**, R3 (1997).
- [101] S. Roux und A. Hansen, *J. Phys. I France* **4**, 515 (1994).
- [102] K. Sneppen, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3539 (1992).
- [103] K. Sneppen und M. H. Jensen, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3833 (1993); *ibid.* **71**, 101 (1993).
- [104] Z. Olami, I. Procaccia und R. Zeitak, *Phys. Rev. E* **49**, 1232 (1994).
- [105] H. Leschhorn und L.-H. Tang, *Phys. Rev. E* **49**, 1238 (1994).
- [106] M. Paczuski, S. Maslov und P. Bak, *Phys. Rev. E* **53**, 614 (1996).
- [107] J. M. Kim und J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2289 (1989).
- [108] L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu und S. M. Zhou, *Phys. Rev. A* **39**, 6524 (1989).
- [109] S. Maslov, M. Paczuski und P. Bak, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2162 (1994).
- [110] H. Flyvbjerg, in *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics*, Herausgeber A. McKane, M. Droz, J. Vannimenus und D. Wolf, NATO ASI Series B: Physics Vol. 344, (Plenum Press, New York, 1995).
- [111] *Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band IV*, Herausgeber H. Gobrecht, (Springer Verlag, Berlin, 1980).
- [112] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik, Bd 1*, (Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen), 1989.
- [113] H. Leschhorn und L.-H. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2973 (1993).

Ich danke Herrn Prof. Dr. K. D. Usadel für die Ermöglichung dieser Arbeit und die hervorragende Betreuung. Er hat durch ständige Diskussionsbereitschaft sehr viel zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen.

Uli Nowak danke ich für die kritische Durchsicht der Arbeit und, wie auch Sven Lübeck, für viele hilfreiche Diskussionen.

Ferner danke ich allen Mitarbeitern der Theoretischen Tieftemperaturphysik für die freundliche Arbeitsatmosphäre.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die teilweise Förderung der Untersuchungen im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 166 und des Graduiertenkollegs *Struktur und Dynamik heterogener Systeme*.

Abschließend möchte ich mich besonders bei all denen bedanken, die das Zustandekommen dieser Arbeit von nicht-wissenschaftlicher Seite her gefördert haben. Hier sind insbesondere meine Eltern zu nennen.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Michael Jost
Rahmstraße 64a
46562 Voerde
geb. 08.03.1968 in Duisburg
ledig

Schulbildung

08/1974 - 06/1978

Grundschule Duisburg

08/1978 - 06/1984

Fridtjof-Nansen-Realschule Duisburg; Abschluß: Mittlere Reife

08/1984 - 06/1987

Kopernikus-Gymnasium Duisburg; Abschluß: allgemeine Hochschulreife

Wehrdienst

10/1987 - 12/1988

1./Fernmeldebataillon 11 in Oldenburg i.O.; letzter Dienstgrad: Obergefreiter

Studium

10/1988 - 09/1993

Physikstudium an der Universität-Gesamthochschule Duisburg; Abschluß: Diplom.-Physiker

Promotion

seit 10/1993

Institution: Gerhard-Mercator-Universität Gesamthochschule Duisburg