

KAPITEL 3

Nichtlineare Approximationsverfahren zur Reduzierung nichtidealer Sensoreigenschaften

3.1 Einführung: Häufige Problemstellungen in der heutigen Sensorsignalverarbeitung

Neben den behandelten Drucksensoren aus dem vorhergehenden Kapitel existiert eine Menge anderer Sensoren, die ebenfalls nicht auf ihre Meßgröße alleine, sondern auf eine Vielzahl anderer Störgrößen empfindlich reagieren. Diese unerwünschten Störgrößen beeinflussen den physikalischen oder chemischen Meßeffect eines Sensors derart, daß das Ergebnis der aufzunehmenden Meßgröße stark verfälscht wird [1]. Um das Ergebnis der Meßaufgabe zu verbessern, muß die Empfindlichkeit gegenüber den zu erwartenden Störgrößen verringert werden. Zu den Störgrößen werden alle physikalischen oder chemischen Größen gezählt, die nicht Gegenstand der eigentlichen Meßaufgabe sind. Die am häufigsten vorkommende Störgröße in der Sensorsignalverarbeitung ist zweifellos die Temperatur T , sofern sie nicht selbst die aufzunehmende Meßgröße darstellt. Diese Störgröße beeinflußt nicht nur den physikalischen Meßeffect, sondern wirkt sich auch negativ auf die Bauelemente der verwendeten Sensorelektronik aus. Speziell bei der Messung von mechanischen Meßgrößen (z.B. Beschleunigung, Druck, Drehrate, Kraft u.v.a.m.) ist die Temperatur die dominierende Störgröße. Für eine Erhöhung der Selektivität des Sensors ist die Kompensation dieser Störgrößen unabdingbar. Ein weiteres Problem ist, daß die Kenndaten des Meßwertaufnehmers aufgrund von Material- und Prozeßfluktuationen während der Herstellung von ihren typischen Werten abweichen können. Um den Einfluß dieser Fertigungsstreuungen auszuschalten, ist eine Kalibration der Kenndaten einfach unerläßlich. Die Nichtlinearität gegenüber der Meßgröße ist ein weiterer Schwachpunkt vieler Sensoren [28]. Somit werden zusätzlich Linearisierungstechniken benötigt. Um Langzeiteinflüsse wie beispielsweise Alterungserscheinungen auszuschalten, ist eine dynamische Adaption des Sensorsystems bzgl. seiner Übertragungsfunktion erforderlich. Zusammenfassend liegen die Hauptaufgaben in der heutigen Entwicklung von Sensorsystemen in:

- der Kompensation von Querempfindlichkeiten,
- einer Linearisierung von Meßgrößen,
- einer Kalibration exemplarbedingter Fertigungsstreuungen sowie
- der Eliminierung von Langzeiteffekten.

Steht beispielsweise ein Sensor mit einem nichtlinearen Übertragungsverhalten $f_{S,I}(\mu^*)$ bzgl. seiner Meßgröße μ^* zur Verfügung, und können die Auswirkungen vorhandener Störgrößen auf das Sensorsignal toleriert werden, so muß lediglich eine Linearisierung der Sensorkennlinie erfolgen. Als Beispiele können die in Kapitel 2 behandelten kapazitiven Drucksensoren aufgeführt werden, die im Gegensatz zu den piezoresistiven Drucksensoren eine starke Nichtlinearität bzgl. der Meßgröße aufweisen. Die Indizierung der Meßgröße μ und im nachfolgenden auch der Störgröße λ mit jeweils einem Stern beinhaltet bereits eine Bewertung des dynamischen Verhaltens, das durch das konstruktiv-technologische Ansprechverhalten des Sensors sowie durch eine endlich, schnelle Veränderung der Meß- und Störgröße in der natürlichen Umgebung hervorgerufen wird [12]. Im allgemeinen kann dieses Verhalten durch einen Tiefpaßcharakter beschrieben werden. Damit das Ausgangssignal y_A die gewünschte Form:

$$y_A = k_{NP} + k_{GV} \cdot \mu^* \quad (3.1)$$

annimmt, muß nach der Linearisierung der Sensorkennlinie mit einer geeigneten Linearisierungsfunktion g_L , eine Einstellung der Grundverstärkung und eine anschließende Nullpunktkorrektur gemäß **Bild 3.1** stattfinden. Der additive Anteil k_{NP} dient zur Verschiebung des Nullpunkts bei nicht vorhandener Meßgröße, während der multiplikative Grundverstärkungsanteil k_{GV} zur Einstellung des Signalhubs am Ausgang bei maximal anliegender Meßgröße benötigt wird.

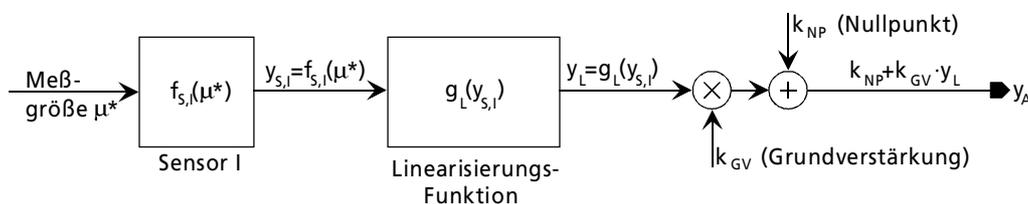


Bild 3.1 Linearisierung einer Sensorkennlinie

Wird das Ausgangssignal y_A nach Bild 3.1 berechnet:

$$\begin{aligned} y_A &= k_{NP} + k_{GV} \cdot y_L \\ &= k_{NP} + k_{GV} \cdot g_L(y_{S,I}) \\ &= k_{NP} + k_{GV} \cdot g_L(f_{S,I}(\mu^*)), \end{aligned} \quad (3.2)$$

so kann durch einen trivialen Vergleich mit Gleichung (3.1) erkannt werden, daß zur erfolgreichen Linearisierung eine Funktion g_L der Form:

$$g_L = f_{S,I}^{-1}, \quad (3.3)$$

mit einem reziproken Übertragungsverhalten der nichtlinearen Sensorkennlinie $f_{S,I}(\mu^*)$ benötigt wird.

Ein zweites Beispiel behandelt die Kompensation von Querempfindlichkeiten, das im nachfolgenden **Bild 3.2** dargestellt ist. Im vorliegenden Beispiel steht ein Sensor zur Verfügung, dessen Übertragungsverhalten:

$$f_{S,I}(\mu^*, \lambda^*) = f_A(\lambda^*) \cdot f_B(\mu^*) = f_{AE}(\lambda^*) \cdot f_B(\mu^*) + f_{AO}(\lambda^*) \quad (3.4)$$

sowohl von einer Meßgröße μ^* als auch von einer Störgröße λ^* beeinflusst wird. Meß- und Störgröße sind in diesem Fall voneinander separierbar, da das zweidimensionale Übertragungsverhalten $f_{S,I}(\mu^*, \lambda^*)$ des Sensors durch mehrere funktionale Zusammenhänge mit jeweils nur einer Variablen beschrieben werden kann. Hierbei gibt $f_B(\mu^*)$ das Übertragungsverhalten bzgl. der Meßgröße, $f_{AO}(\lambda^*)$ und $f_{AE}(\lambda^*)$ die durch die Störgröße hervorgerufene Drift des Offsets und der Empfindlichkeit an. Als Beispiel hierfür kann der piezoresistive Drucksensor aus Kapitel 2 aufgeführt werden, der das zuvor beschriebene Übertragungsverhalten besitzt. Der Druck p übernimmt dabei die Rolle der Meßgröße, während die Temperatur T als Störgröße auftritt. Im Gegensatz zur einfachen Linearisierung wird ein zusätzlicher, zweiter Sensor benötigt, der im Idealfall nur auf die zu eliminierende Störgröße reagiert. Im Fall der Störgröße Temperatur existieren ausgezeichnete Sensoren, die nur auf diese Störgröße reagieren, eine ausgezeichnete Linearität aufweisen und zudem noch für eine monolithische Integration geeignet sind.

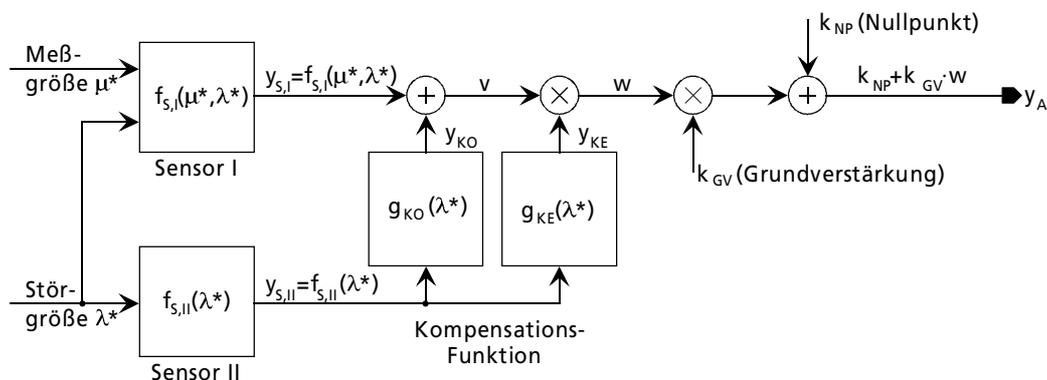


Bild 3.2 Kompensation von Querempfindlichkeiten

Das Ausgangssignal $y_{S,II}$ des zweiten Sensors wird als Argument für die Kompensationsfunktionen des Offsets und der Empfindlichkeit verwendet. Die durch die Störgröße hervorgerufene Drift des Offset und der Empfindlichkeit wird durch eine Addition und eine anschließende Multiplikation mit dem eigentlichen Sensorsignal $y_{S,I}$ korrigiert. Die Werte, die zur Korrektur verwendet werden, hängen dabei von den Funktionen g_{KO} und g_{KE} sowie der aktuell anliegenden Störgrößeninformation λ^* ab. Damit die Korrekturfunktionen getrennt, d. h. unabhängig voneinander eingestellt werden können, muß die Korrektur der störgrößenabhängigen Offsetdrift vor der Korrektur der Empfindlichkeitsdrift erfolgen.

Zusätzlich zur Kompensation der Störgrößeneinflüsse kann wie bereits bei der Linearisierung eine Grundverstärkung eingestellt und der Nullpunkt verschoben werden. Das Ausgangssignal y_A gemäß Bild 3.2 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 y_A &= k_{NP} + k_{GV} \cdot w \\
 &= k_{NP} + k_{GV} \cdot y_{KE} \cdot v \\
 &= k_{NP} + k_{GV} \cdot y_{KE} \cdot [y_{KO} + y_{S,I}] \\
 &= k_{NP} + k_{GV} \cdot g_{KE}(\lambda^*) \cdot [g_{KO}(\lambda^*) + f_{S,I}(\mu^*, \lambda^*)] \\
 &= k_{NP} + k_{GV} \cdot g_{KE}(\lambda^*) \cdot [g_{KO}(\lambda^*) + (f_{AE}(\lambda^*) \cdot f_B(\mu^*) + f_{AO}(\lambda^*))].
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wird das Übertragungsverhalten bzgl. der Meßgröße als linear angenommen, so stellt sich ebenso wie bei der Linearisierung durch einen Vergleich mit Gleichung (3.1) heraus, daß für die Kompensation von Offset und Empfindlichkeit zwei eindimensionale Funktionen g_{KO} und g_{KE} der Form:

$$g_{KO} = -f_{AO} \wedge g_{KE} = f_{AE}^{-1} \tag{3.6}$$

benötigt werden. Ist im Gegensatz dazu das Meßsignal nicht linear mit dem Sensorsignal $y_{S,I}$ verknüpft, so kann eine Kombination der Linearisierung aus Bild 3.1 und der zuvor beschriebenen Kompensation einer Querempfindlichkeit aus Bild 3.2 erfolgen. Das nachfolgende **Bild 3.3** zeigt den systematischen Aufbau, mit dem sowohl die Linearisierung als auch die Kompensation von Querempfindlichkeiten realisiert werden kann.

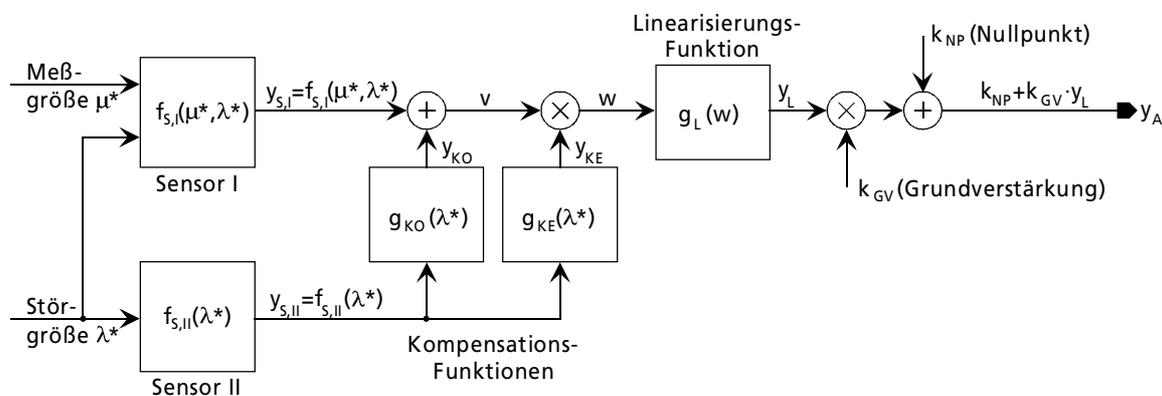


Bild 3.3 Linearisierung und Kompensation

Zur Korrektur der Querempfindlichkeiten werden die zwei Funktionen aus der obigen Gleichung (3.6) benötigt. Zur Linearisierung wird zudem eine Korrekturfunktion der Form:

$$g_L = f_B^{-1} \tag{3.7}$$

benötigt. Für die zuvor beschriebenen Verfahren muß das Sensorsystem nach der Herstellung mit Meß- und Störgrößen in geeigneter Reihenfolge beaufschlagt werden, um während einer sog. Kalibration die benötigten Korrekturinformationen zu bestimmen. Eine Kalibration mit einer geeichten Meßgröße ist und wird auch immer erforderlich bleiben; die Eliminierung uner-

wünschter Störgrößen dagegen könnte jedoch auch "On-Line" während des Betriebs oder beim Serientest ohne die Vorgabe von Referenzstörgrößen erfolgen. **Bild 3.4** zeigt ein System, das selbständig sein Übertragungsverhalten ändert, um gegenüber äußeren Störgrößen unempfindlich zu reagieren, wodurch eine größtmögliche Selektivität des Sensors ohne eine zeitaufwendige Kalibration erzielt werden kann.

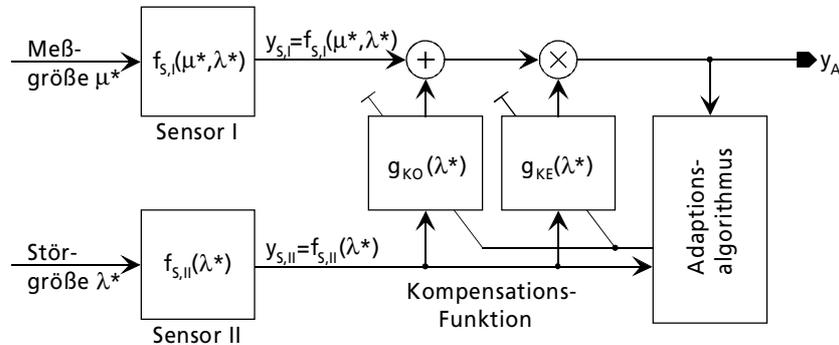


Bild 3.4 dynamische Adaption des Systemverhaltens

Eine Vorgehensweise zur Realisierung einer solchen Adaptation ist die Auswertung und Minimierung der während des Betriebs berechneten Korrelation zwischen dem Sensorsignal $y_{S,II}$, das die Störgröße aufnimmt, und dem zu kompensierenden Ausgangssignal y_A des Sensorsystems. Besteht beispielsweise eine Korrelation zwischen dem Ausgangssignal und der aufgenommenen Störgröße, so werden die Korrekturfunktionen g_{KO} und g_{KE} solange verändert, bis die Korrelation zwischen den beiden Größen minimal wird.

Es gibt noch eine Reihe weiterer Probleme, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht alle angesprochen werden können, da sie den Umfang bei weitem sprengen würden. Allen Lösungen gemein ist jedoch, daß die nichtidealen Sensoreigenschaften im Allgemeinen durch funktionale Zusammenhänge zu beseitigen sind. Die Argumente der Funktion werden je nach Anwendungsfall aus Meß- oder Störgrößeninformationen gewonnen. Die Funktionen selber weisen dabei häufig einen reziproken oder inversen Zusammenhang der jeweils nichtidealen Sensoreigenschaft auf, die beseitigt werden soll. Da jedoch diese funktionalen Zusammenhänge im vorhinein unbekannt sind und für jeden Sensor aufgrund von Prozeß- und Materialfluktuationen variieren können, muß für die Generierung der Funktionen ein hohes Maß an Flexibilität gefordert werden. Der wohl flexibelste Ansatz ist die Definition der zur Korrektur benötigten Funktion über eine endliche Anzahl an ausgewählten Meßpunkten. Die Funktionswerte werden an den ausgewählten Meßpunkten bei definiert vorgegebenen Eingangsgrößen derart ermittelt, daß sich die gewünschte Ausgangsgröße y_A einstellt. Unbekannte Funktionswerte zwischen den Meßpunkten müssen über entsprechend geeignete Approximationsmethoden der numerischen Mathematik berechnet werden. Die Genauigkeit der Approximation hängt dabei von der Bandbreite der nachzubildenden Funktion, der Anzahl und Verteilung der Meßpunkte sowie dem verwendeten Approximationsverfahren ab.

3.2 Geeignete Approximationsverfahren aus der numerischen Mathematik

Zu paarweise verschiedenen Argumenten x_0, x_1, \dots, x_{n-1} seien die Werte y_0, y_1, \dots, y_{n-1} gegeben. Eine solche Situation tritt z. B. bei Messungen auf, in denen y_i die zu x_i gehörigen Meßwerte sind. Hierbei spricht man von einer durch einen Datensatz $(x_0, y_0), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ gegebenen empirischen Funktion. Diese Funktion ist natürlich nicht eindeutig durch den Datensatz bestimmt, nehmen jedoch an, daß es eine solche Funktion gibt, die den gemessenen Daten genügt [29]. Die durch Meßdaten empirisch vorgegebene Funktion soll durch eine sog. Approximationsfunktion möglichst gut angenähert werden, damit zwischen den Meßpunkten liegende Funktionswerte berechnet werden können. Hierfür sind sowohl Regressions- als auch Interpolationsverfahren geeignet. Bei den *Regressionsverfahren* wird zumeist ein Polynom $P_m(x)$ m.ter Ordnung gewählt, das den Fehler zwischen n Meßwerten und dem approximierenden Ausgleichspolynom nach einer speziellen Norm minimiert. Zu den bekanntesten Normen gehört die sog. L_2 -Norm, die auch unter dem Begriff „Methode der kleinsten Fehlerquadrate“ geläufiger ist. Bei den elementaren *Interpolationsverfahren* wird ebenfalls ein Polynom $P_m(x)$ m.ter Ordnung bestimmt, das jedoch im Gegensatz zur Regression exakt durch die n vorgegebenen Meßpunkte verlaufen muß. **Bild 3.5** verdeutlicht den Unterschied zwischen der Interpolation und der Regression.

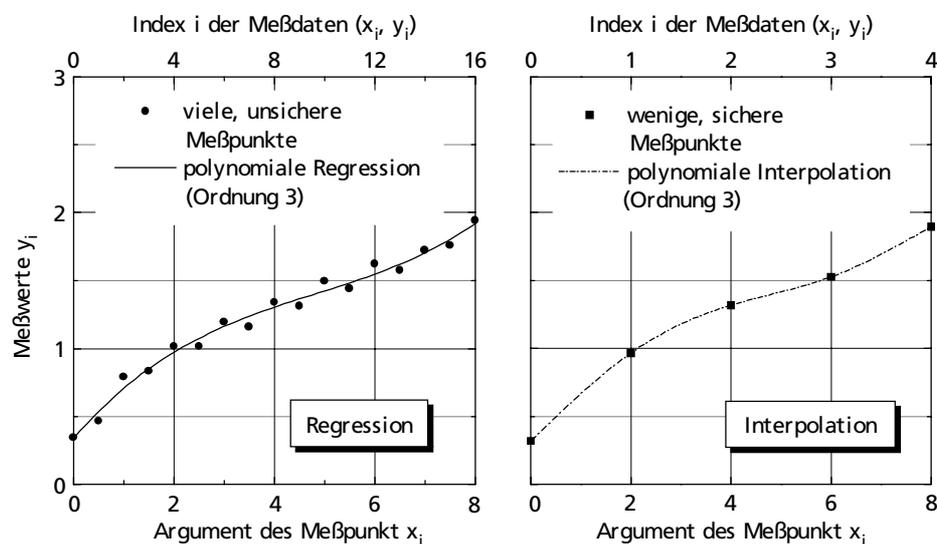


Bild 3.5 Vergleich von Regression und Interpolation

Während die Interpolation die Aufgabe besitzt, wenige, aber jedoch sichere Meßpunkte über eine möglichst „glatte“ Funktion, d.h. im Sinne einer minimalen Gesamtkrümmung zu verbinden, verfolgt die Regression das Ziel, viele störungsbehaftete Meßdaten durch eine „glatte“ Ausgleichsfunktion zu beschreiben [30]. Wird die so gefundene Funktion außerhalb des zugrunde liegenden Meßintervalls ausgewertet, so spricht man von der sogenannten *Extrapolation*.

3.2.1 Regressionsverfahren

Betrachtet sei das Problem, Funktionswerte einer empirisch gegebenen Funktion $f(x)$ an einer beliebigen Stelle x innerhalb eines Approximationsintervalls $I=[a,b]$ möglichst gut abzuschätzen, dessen Verlauf lediglich auf vielen, unsicheren Meßpunkten (x_i, y_i) basiert. Zunächst wird die Form der Approximationsfunktion gewählt. Hier finden häufig algebraische Polynome $P_m(x)$ vom Grad m gemäß der folgenden Gleichung:

$$P_m(x, c_0, \dots, c_m) = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x^j \quad (3.8)$$

als Approximationsfunktion Verwendung, wobei die Anzahl n der zur Verfügung stehenden Meßpunkte größer als der Grad m des gewählten Approximationspolynoms ist. Da auch andere Funktionszusammenhänge¹ für die Approximation genutzt werden, soll die Approximationsfunktion im nachfolgenden allgemein mit $\tilde{f}(x, c_0, \dots, c_m)$ bezeichnet werden. Die Aufgabe besteht nun darin, innerhalb des Approximationsintervalles eine Funktion $\tilde{f}(x, c_0, \dots, c_m)$ zu finden, die sich anhand eines noch zu definierenden Fehlerkriteriums an die gemessenen Funktionswerte y_i der realen Funktion $f(x)$ möglichst gut annähert. Die Koeffizienten c_0 bis c_m der Approximationsfunktion werden dabei gewöhnlich durch die Minimierung des zuvor erwähnten Fehlerkriteriums gewonnen. Die Lösung der erhaltenen Approximationsfunktion $\tilde{f}(x, c_0, \dots, c_m)$ verläuft daher im allgemeinen nicht exakt durch die vorgegebenen Meßpunkte. In dem nachfolgendem Abschnitt werden drei häufig verwendete Fehlerkriterien behandelt.

3.2.1.1 Fehlerkriterien für Regressionsverfahren

Sollen auftretende Meßfehler ε_i in den n zur Verfügung stehenden Meßwerten $y_i=f(x_i)+\varepsilon_i$ erkannt werden und nicht stark in die Approximation einfließen, so kann für die Bestimmung der Koeffizienten c_0 bis c_m eine mit den Faktoren p_i gewichtete Summe der absoluten Fehlerbeträge $|y_i - \tilde{f}(x_i, c_0, \dots, c_m)|$ als Fehlerkriterium laut der nachfolgenden Gleichung:

$$E_1(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot |y_i - \tilde{f}(x_i, c_0, \dots, c_m)| \stackrel{!}{=} \text{Min.} \quad (3.9)$$

verwendet werden. Die Gewichtungsfaktoren p_i können dabei im einfachsten Fall zu eins gesetzt werden. Bei Minimierung des Fehlerkriteriums geht die Lösung des Problems in die sogenannte L_1 -Approximation über.

¹ im Zusammenhang mit einer einfachen Lösungsmethode werden bevorzugt orthogonale Funktionen verwendet, die ein lineares Gleichungssystem mit $m+1$ Gleichungen und jeweils $m+1$ Unbekannten in ein Gleichungssystem überführen, in der jede der $m+1$ -Gleichungen nur noch eine Unbekannte enthält.

Zur Bestimmung der $m+1$ freien Koeffizienten c_0 bis c_m müssen die partiellen Ableitungen des Fehlerkriteriums zu Null gesetzt und das daraus resultierende Gleichungssystem gelöst werden. Im Fall der absoluten Fehlerbeträge besteht jedoch die Schwierigkeit, daß die Betragsfunktion an der Stelle Null nicht stetig differenzierbar ist.

Wird im Gegensatz zur Methode der absoluten Fehlerbeträge eine gewichtete Summe der quadratischen Abweichungen $(y_i - f(x_i, c_0, \dots, c_m))$ gemäß des nachfolgenden Fehlerkriteriums minimiert:

$$E_2(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i \cdot (y_i - \tilde{f}(x_i, c_0, \dots, c_m))^2 \stackrel{!}{=} \text{Min.}, \quad (3.10)$$

so werden Ausreißer in den vorhandenen Meßwerten stärker in der Approximation berücksichtigt. Diese Methode wird in der Literatur der Ingenieurwissenschaften häufig als diskrete Approximation nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bezeichnet. Die Lösung dieses Problems wird L_2 -Approximation genannt.

Zum Abschluß soll noch auf die sogenannte Minimax Methode eingegangen werden. Bei dieser Methode wird die größte vorkommende Abweichung mit dem Faktor p_i gewichtet und gemäß dem nachfolgendem Fehlerkriterium:

$$E_\infty(c_0, \dots, c_m) = \max_i \{p_i \cdot |y_i - \tilde{f}(x_i, c_0, \dots, c_m)|\} \stackrel{!}{=} \text{Min.} \quad \forall i \in 0..n-1 \quad (3.11)$$

minimiert. Der Minimax Ansatz legt zuviel Gewicht auf einige wenige Punkte, die stark abweichen, wohingegen die Methode der absoluten Fehlerbeträge einfach den Fehler an den unterschiedlichen Meßpunkten mittelt und nicht hinreichend Gewicht auf einen Meßpunkt legt, der schlecht paßt. Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate legt wesentlich mehr Gewicht auf einen solchen Ausreißer, verhindert aber, daß dieser Punkt die Approximation vollständig beherrschen kann [1].

3.2.1.2 Diskrete Approximation nach der Methode kleinster Fehlerquadrate

Für die diskrete Approximation eines empirisch gegebenen Zusammenhangs aus einem Satz vorhandener Meßpunkte (x_i, y_i) , der beispielsweise für die Beseitigung nichtidealer Sensoreigenschaften verwendet wird, eignet sich bei den Regressionsverfahren - aufgrund der Erkenntnisse des vorhergehenden Abschnitts - die Methode der kleinsten Fehlerquadrate am besten. Wird als Approximationsfunktion $\tilde{f}(x, c_0, \dots, c_m)$ die Klasse der algebraischen Polynome $P_m(x)$:

$$P_m(x_i) = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x_i^j, \quad (3.12)$$

vom Grad m verwendet, so ergibt sich unter Anwendung des Fehlerkriteriums aus Gleichung (3.10) mit $p_i=1$ ein Ausdruck für den resultierenden Gesamtfehler der Approximation:

$$E_2(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - P_m(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_i - \sum_{j=0}^m c_j \cdot x_i^j \right)^2 \stackrel{!}{=} \text{Min.}, \quad (3.13)$$

den es durch die frei wählbaren Koeffizienten c_0 bis c_m zu minimieren gilt [31]. Die Anzahl n der Meßwerte y_i ist wie bereits zuvor erwähnt größer als der Grad m des verwendeten Approximationspolynoms $P_m(x)$. Die notwendige Bedingung für die Minimierung des Gesamtfehlers bzw. für die Bestimmung der dafür notwendigen Koeffizienten lautet:

$$\frac{\partial E_2}{\partial c_k} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall k=0,1,\dots,m. \quad (3.14)$$

Die Auswertung der notwendigen Bedingung ergibt ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^{n-1} c_j \cdot x_i^{j+k} = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot x_i^k \quad \forall k=0,1,\dots,m \quad (3.15)$$

mit $m+1$ Gleichungen, die jeweils $m+1$ freie Koeffizienten c_0 bis c_m des Approximationspolynoms $P_m(x)$ vom Grad m enthalten. Speziell bei Approximationspolynomen höherer Ordnung handelt es sich bei der Gleichung (3.15) um ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem. Aus diesem Grund werden als Approximationsfunktionen häufig orthogonale Funktionen verwendet, mit deren Hilfe die $m+1$ Gleichungen mit $m+1$ freien Koeffizienten auf $m+1$ Gleichungen verringert werden können, die nur noch jeweils einen freien Koeffizienten enthalten [31,32].

3.2.2 Interpolationsverfahren

Bei der Approximation einer empirisch gegebenen Funktion aus einem vorgegebenen Satz von n Meßpunkten sind neben den behandelten Regressionsverfahren auch die sogenannten Interpolationsverfahren geeignet. Ein wesentlicher Unterschied zu den zuvor behandelten Regressionsverfahren ist, daß hier die Approximationslösung exakt durch ihre Meßpunkte verläuft. Aus diesem Grund können speziell bei der klassischen Polynominterpolation und der Verwendung von Polynomen der Ordnung $m \geq 4$ Oszillationen auftreten, die die Güte der Approximation drastisch verschlechtern [33]. Für die Beseitigung der auftretenden Approximationsprobleme werden im nachfolgenden geeignete Gegenmaßnahmen bzw. alternative Interpolationsmethoden vorgestellt, die aufgrund ihrer hervorragenden Approximationseigenschaften in der Praxis häufig Verwendung finden.

3.2.2.1 Klassische Polynominterpolation

Eine Methode für die Berechnung von Funktionswerten einer empirisch gegebenen Funktion über eine vorgegebene Anzahl von n Meßpunkten (x_i, y_i) ist die klassische Polynominterpolation [33]. Betrachtet sei das Interpolationsintervall $I=[a,b]$, über das zunächst n Meßpunkte x_0, x_1, \dots, x_{n-1} äquidistant verteilt sind. An den Meßpunkten $x_i \forall i=0,1,\dots,n-1$ sind die Funktionswerte $y_i=f(x_i)$ der zu rekonstruierenden Funktion $f(x)$ vorgegeben. Da aufgrund des Weierstraß'schen Approximationssatzes [31] jede stetige Funktion durch ein Polynom beliebig genau approximiert werden kann, wird als Approximationsfunktion ein Interpolationspolynom:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \cdot x^i \quad (3.16)$$

vom Grad $m=n-1$ verwendet, welches die nachfolgende Interpolationsbedingung:

$$P_m(x_i) = y_i \quad \forall i=0,1,\dots,n-1. \quad (3.17)$$

erfüllen muß. Aufgrund der Interpolationsbedingung läuft das Polynom $P_m(x)$ durch die n vorgegebenen Meßpunkte, so daß jetzt für beliebige Argumente $x \in [a, b]$ Funktionswerte berechnet werden können. Eine weit verbreitete Darstellung für das gesuchte Polynom $P_m(x)$ vom Grad m ist die Lagrange'sche Interpolationsformel [33-35]:

$$P_m(x) = \sum_{i=0}^{m=n-1} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m=n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^{m=n-1} y_i \cdot L_i(x), \quad (3.18)$$

die die Meßwerte y_0 bis y_{n-1} explizit enthält, wobei die Produktterme $L_i(x)$ als sog. Lagrange-Faktoren bezeichnet werden. Sie stellen die Koeffizienten c_0 bis c_m des gesuchten Polynoms $P_m(x)$ dar, die wiederum Polynome in x vom Grad m sind.

3.2.2.2 Abschätzungen des Interpolationsfehlers

Dieser Abschnitt wendet sich der Frage zu, wie genau ein Interpolationspolynom $P_m(x)$ gemäß der Gleichung (3.18) die Funktionswerte bzw. die Funktion $f(x)$ aus n vorgegebenen Meßwerten approximiert. Diese Frage läßt sich jedoch nur eindeutig bestimmen, wenn der Verlauf der Funktion $f(x)$ bekannt und zudem mindestens noch $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Eine allgemeingültige Formel für den Interpolationsfehler [33,36,37], dessen Herleitung im Anhang B dieser Arbeit zu finden ist, lautet:

$$|f(x) - P_m(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} |f^{(m+1)}(\xi)|}{(m+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^{m=n-1} (x - x_i) \right|. \quad (3.19)$$

Diese Formel kann für einige Spezialfälle ($m=1..3$ und äquidistanten Meßpunkten) konkretisiert werden. Für die lineare Interpolation ($m=1$) gilt:

$$|f(x) - P_m(x)| \leq \frac{1}{8} \cdot M_2 \cdot \Delta x^2 \quad (3.20)$$

mit:
$$M_{m+1} = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(m+1)}(\xi)| \quad (3.21)$$

Für die Abschätzungen der Interpolationsfehler, die bei der quadratischen ($m=2$) und kubischen ($m=3$) Interpolation auftreten, sei auf entsprechend geeignete Literatur verwiesen [33].

Die allgemeingültige Formel für den Interpolationsfehler aus Gleichung (3.19) zeigt, daß neben der vorgegebenen Funktion $f(x)$, die Verteilung der Meßpunkte x_0 bis x_{n-1} über das Interpolationsintervall $[a,b]$ einen wesentlichen Einfluß auf die Güte der Approximation besitzt. Die Ungenauigkeit, die durch die Verteilung der Meßpunkte herrührt, wird weitgehend durch das nachfolgende Fehlerglied:

$$w(x) = \prod_{j=0}^{m=n-1} (x - x_j) \quad (3.22)$$

bestimmt. Bei äquidistanter Verteilung der Meßpunkte und Interpolationspolynomen großer Ordnung m ($m \geq 4$) zeigt das Fehlerglied $w(x)$, insbesondere an den Enden des vorgegebenen Intervalles, unter Umständen eine starke Oszillation, so daß der betragsmäßige Fehler viel größer als in der Mitte des betrachteten Interpolationsintervalles $[a,b]$ ist [33]. Wird die Lage x_i der Meßpunkte optimiert, d.h. werden die Meßpunkte x_i zu den Enden des Interpolationsintervalls dichter gewählt, kann das zuvor erwähnte Problem beseitigt werden. Der Betrag des Fehlerglieds $w(x)$ der Ordnung $m+1$ wird am kleinsten, wenn die Nullstellen eines Tschebyscheff-Polynoms $T_{m+1}(x)$ mit den optimierten Meßpunkten x_i^* :

$$x_i^* = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot i + 1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall i=0,1,\dots, n-1 \quad (3.23)$$

im Interpolationsintervall $[a,b]$ übereinstimmen [34,38]. Das Fehlerglied $w(x)$ wird bei der Verwendung von Meßpunkten x_i mit optimierter Lage aufgrund der Minimaleigenschaft der Tschebyscheff-Polynome minimal, wodurch der resultierende Interpolationsfehler ebenfalls ein Minimum annimmt:

$$|f(x) - P_m(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} |f^{(m+1)}(\xi)|}{2^m \cdot (m+1)!} \quad (3.24)$$

Eine andere und weitaus elegantere Maßnahme zur Reduzierung des Approximationsfehlers besteht darin die Ordnung m des Interpolationspolynoms $P_m(x)$ zu erniedrigen, zumal es bei einer größeren Anzahl n von Meßpunkten nicht sinnvoll ist, das Interpolationspolynom der Ordnung $m=n-1$ als Lösung zu betrachten.

Häufig erscheint es zweckmäßig, das gesamte Interpolationsintervall $[a,b]$ in kleine Teilintervalle zu zerlegen und die Interpolation stückweise, d.h. lokal mit Polynomen niedrigen Grades für jedes Teilintervall, durchzuführen [31]. Da eine Funktion mit einer geringen Welligkeit bzw. mit einer hohen Glattheit gefordert wird, müssen die Polynome an den Enden der jeweils benachbarten Teilintervalle zumindest stetig ineinander übergehen. Es zeigt sich, daß diese Art der Approximation sehr gute Konvergenzeigenschaften besitzt und für praktische Anwendungen außerordentlich nützlich ist.

3.2.2.3 Stückweise Interpolation mit Polynomen - Spline-Interpolation

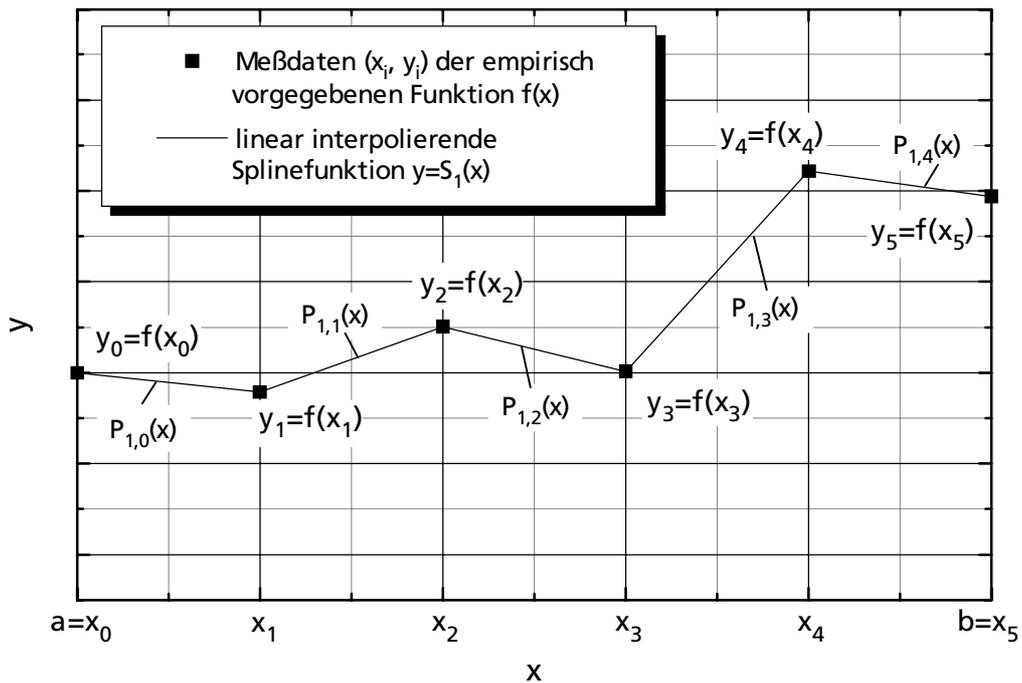
Der zuvor vorgeschlagene Ansatz, das gesamte Interpolationsintervall $[a,b]$ in kleine Teilintervalle zu zerlegen und die Interpolation nur stückweise mit Polynomen niedrigen Grades m durchzuführen, führt auf die sogenannte Spline-Interpolation. Ist eine Zerlegung des Interpolationsintervalls $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ durch $Z_n := \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}=b\}$ gegeben, so heißt eine reelle Funktion $S_m(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ polynomiale Splinefunktion vom Grad m ($m \in \mathbb{N}$) zur Zerlegung Z_n wenn [39,40]:

- (i) $S_m(x) \in C^{m-1}[a, b]$, d.h. $S_m(x)$ auf $[a, b]$ $(m-1)$ -mal stetig differenzierbar, und
- (ii) $S_m(x)$ auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ für alle $i=0, 1, \dots, n-2$ mit einem Polynom $P_{m,i}(x)$ m -ten Grades übereinstimmt.

Man bezeichnet $S_m(x)$ als eine interpolierende Splinefunktion, wenn sie zusätzlich der Bedingung $S_m(x_i)=y_i=f(x_i) \forall i=0, 1, \dots, n-1$ genügt. Die stückweisen Polynome $P_{m,i}(x)$ bilden bzgl. der Zerlegung Z_n einen reellen Vektorraum $S_{Z_n,m}$. Das Polynom $P_{m,0}(x)$ im ersten Teilintervall $[x_0, x_1]$ ist durch seine $m+1$ Koeffizienten eindeutig bestimmt. Für die nachfolgenden Polynome $P_{m,i}(x)$ für alle $i=1,2,\dots,n-2$ sind die ersten $m-1$ Ableitungen in x_i bestimmt, so daß nur noch 1 Freiheitsgrad für die restlichen $n-2$ Polynome $P_{m,i}(x)$ verbleibt. Somit ergibt sich die Dimension des Vektorraums zu $\dim S_{Z_n,m} = k+1+(n-2) \cdot 1 = m+n-1$. Ist wie in **Bild 3.6** gezeigt, die Funktion $f(x)$ beispielsweise eine durch Messungen vorgegebene empirische Funktion, so sind $y_i=f(x_i)$ die Meßwerte an den entsprechenden Meßpunkten x_i , die äquidistant über dem betrachteten Intervall $[a,b]$ verteilt sind. Bei der Verwendung von Polynomen mit dem Grad $m=1$ kann die Funktion $f(x)$ durch eine stückweise lineare Splinefunktion approximiert werden. Dabei ersetzt man $f(x)$ in $[x_i, x_{i+1}]$ für alle $i=0, 1, \dots, n-2$ durch die lineare Spline-Interpolierende $S_1(x)$:

$$S_1(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i) + y_i = P_{1,i}(x) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (3.25)$$

In jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ stimmt $S_1(x)$ mit einem linearen Polynom $P_{1,i}(x)$ überein. Da somit benachbarte Meßpunkte x_i einfach durch Geraden miteinander verbunden sind, handelt es sich bei $S_1(x)$ um eine stetige Splinefunktion, die jedoch im allgemeinen an den Stellen x_i für alle $i=0, 1, \dots, n-1$ nicht mehr stetig differenzierbar ist.

Bild 3.6 linear interpolierende Splinefunktion $S_1(x)$

Neben dem sehr einfachen Fall der linearen Splineinterpolation spielt der Fall der kubischen Splines in den Anwendungen eine weitaus wichtigere Rolle. Im Fall der kubischen Splineinterpolation werden stückweise kubische Polynome $P_{m,i}(x)$ mit $m=3$ auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ für alle $i=0, 1, \dots, n-2$, wie sie im nachfolgenden **Bild 3.7** zu sehen sind, verwendet. Allein durch den vorgegebenen Satz von n Meßdaten $(x_i, y_i), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ mit $i=0, 1, \dots, n-1$ ist die interpolierende kubische Splinefunktion $S_3(x)$ jedoch noch nicht eindeutig bestimmt, da die Dimension des Vektorraumes $\dim S_{n,3} = n+2$ beträgt. Um die Eindeutigkeit der kubischen Splinefunktion $S_3(x)$ zu erzwingen, wird der Verlauf an der links- und rechtsseitigen Intervallgrenze a und b durch jeweils eine der nachfolgenden drei Randbedingungen vorgegeben [36,39,41]:

$$(a) \quad S_3''(a)=S_3''(b)=0 \quad (\text{natürliche Randbedingungen}) \quad (3.26)$$

$$(b) \quad S_3^{(i)}(a)=S_3^{(i)}(b) \quad \forall i=0, 1, 2 \quad (\text{periodische Randbedingungen}) \quad (3.27)$$

$$(c) \quad f'(a)=S_3'(a), f'(b)=S_3'(b) \quad (\text{vollständige Randbedingungen}) \quad (3.28)$$

Wird eine der drei Randbedingungen (a), (b) oder (c) verwendet, so spricht man von der natürlichen, periodischen oder vollständigen Splineinterpolation. Bei Verwendung der vollständigen Randbedingung approximiert die kubische Splinefunktion $S_3(x)$ die vorgegebene Funktion $f(x)$ am besten, da zwei weitere Informationen über die Steigung an den Randpunkten des Interpolationsintervalls $[a,b]$ vorgegeben sind. Liegt die Funktion $f(x)$ jedoch in Form einer empirischen Beschreibung vor, so kann die Steigung in diesen Randpunkten jeweils durch einen weiteren Meßpunkt außerhalb des eigentlichen Intervallrandes durch den zentralen Differenzquotienten [33] näherungsweise ermittelt werden.

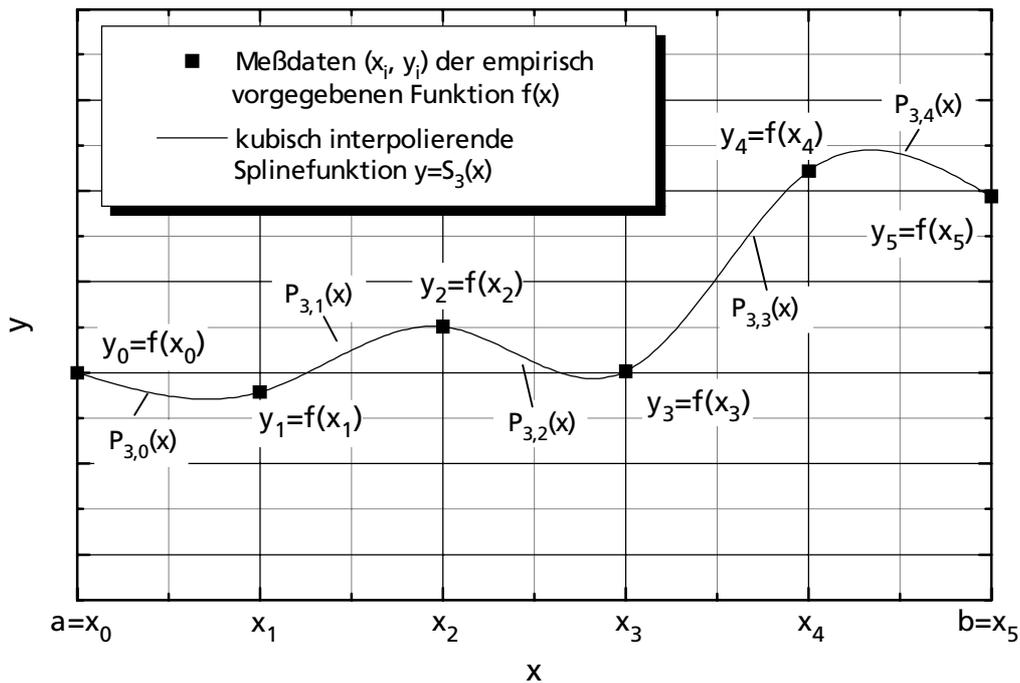


Bild 3.7 kubisch interpolierende Splinefunktion $S_3(x)$

In Bild 3.7 ist eine kubisch interpolierende Spline-Funktion $S_3(x)$ gezeigt. Wir nehmen wiederum an, daß $f(x)$ eine durch Messungen vorgegebene empirische Funktion ist. An den äquidistant verteilten Meßpunkten x_i wurden für einen optischen Vergleich dieselben Meßwerte $y_i=f(x_i)$ wie im vorhergehenden Bild 3.6 verwendet. Dabei wird die über Meßwerte vorgegebene Funktion $f(x)$ durch eine kubische Spline-Interpolierende $S_3(x)$ approximiert [33,36,39], und zwar gilt für $i=0, 1, \dots, n-2$:

$$S_3(x) = a_i \cdot (x - x_i)^3 + b_i \cdot (x - x_i)^2 + c_i \cdot (x - x_i) + d_i = P_{3,i}(x) \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]. \quad (3.29)$$

In jedem der $n-1$ Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ stimmt $S_3(x)$ mit einem kubischen Polynom $P_{3,i}(x)$ überein. Um die Interpolations- und Stetigkeitsbedingungen an den Meßpunkten x_i zu erfüllen, ist es zweckmäßig, die Koeffizienten a_i , b_i , c_i und d_i durch die vorgegebenen Meßwerte y_i und y_{i+1} sowie den unbekannt zweiten Ableitungen y_i'' und y_{i+1}'' an den Enden des betreffenden Teilintervalls $[x_i, x_{i+1}]$ auszudrücken. Zur Berechnung der unbekannt zweiten Ableitungen y_i'' bzw. y_{i+1}'' wird die Stetigkeit der ersten Ableitung an den inneren Meßpunkten x_i für $i=1, 2, \dots, n-2$ ausgenutzt. Hieraus erhält man ein lineares System mit $n-2$ Gleichungen und n Unbekannten [39]. Um die Eindeutigkeit der kubischen Spline-Interpolierenden $S_3(x)$ zu erzielen, werden die restlichen zwei Gleichungen aus einer der drei Randbedingungen gemäß den Gleichungen (3.26) - (3.28) abgeleitet. Die Herleitung zur Berechnung der kubischen Spline-Interpolierenden kann in weiterführender Literatur nachgeschlagen werden [33,39]. Da das Auge Unstetigkeiten in der zweiten Ableitung noch zu erkennen vermag, die kubische Spline-Interpolierende aber eine zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, wird die Verbindung der vorgegebenen Meßpunkte aus Bild 3.7 im Gegensatz zu der aus Bild 3.6 als glatt empfunden.

Die zuvor beschriebenen Splinefunktionen $S_m(x)$ vom Grad m lassen sich ebenfalls über eine Linearkombination gewichteter, polynomialer Basisfunktionen $B^{m+1}(x)$:

$$\begin{aligned}
 S_m(x) &= \sum_i c_i \cdot B_i^{m+1}(x) \\
 &= \sum_i c_i \cdot B^{m+1}(x - x_i) \quad \text{mit } x_i = \left(i - \frac{m}{2}\right) \cdot \Delta x + a
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

darstellen [39,42]. Die Ordnung der Basisfunktionen ist durch $r=m+1$ festgelegt. Die dafür verwendeten Basisfunktionen sind alle in ihrem Verlauf identisch und lediglich in ihrer Lage um den Betrag x_i verschoben. Die Basisfunktionen $B^r(x)$ sind wiederum stückweise aus Polynomen vom Grad m zusammengesetzt, die nichtnegativ und nur auf endlich vielen Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ von Null verschieden sind. Die Koeffizienten c_i fungieren dabei als Gewichtungsfaktoren der um x_i verschobenen Basisfunktion $B_i^r(x)=B^r(x-x_i)$.

$$\Delta x = \frac{b - a}{n - 1} \tag{3.31}$$

gibt den Stützstellenabstand an, der sich aus den Randwerten a und b des Interpolationsintervalls $I=[a,b]$ sowie der Anzahl n der darüber verteilten Meßpunkten x_i für alle $i=0, 1, \dots, n-1$ ergibt. Vorteil dieser Darstellung gegenüber der konventionellen Splineinterpolation ist eine vereinfachte Berechnung der benötigten Koeffizienten. Da die Glattheitseigenschaften bereits durch die Stetigkeitsbedingungen in den Basisfunktionen festgelegt sind, müssen für die Lösung der Splinefunktion lediglich noch die Interpolationsbedingungen und gegebenenfalls zwei zusätzliche Bedingungen am Rand des Interpolationsintervalls vorgegeben werden. Zudem besitzen die Koeffizienten c_i eine geometrische Bedeutung, wodurch die Splineinterpolation eine gewisse Transparenz bzw. Anschaulichkeit erhält.

Für polynomiale Basisfunktionen $B^r(x)$ der Ordnung r gelten die drei nachfolgenden Bildungsgesetze [43]:

$$B^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq \Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{3.32}$$

$$B^r(x) = \frac{x}{r-1} \cdot B^{r-1}(x) + \frac{r-x}{r-1} \cdot B^{r-1}(x - \Delta x), \tag{3.33}$$

und:
$$\frac{\partial}{\partial x} B^r(x) = B^{r-1}(x) - B^{r-1}(x - \Delta x). \tag{3.34}$$

Gleichung (3.32) entspricht einer polynomialen Basisfunktion der Ordnung eins mit deren Hilfe eine Interpolation 0.ter Ordnung beschrieben werden kann. Mit den beiden zusätzlichen Gleichungen (3.33) und (3.34) können insbesondere die Basisfunktionen für die lineare, quadratische und kubische Interpolation abgeleitet werden, die häufig Anwendung finden.

Die Basisfunktionen werden in der Fachliteratur für numerische Mathematik häufig auch als B-Splines bezeichnet. In der nachfolgenden **Tabelle 3.1** sind polynomiale Basisfunktionen für die gerade, lineare, quadratische und kubische Interpolation angegeben. Diese Basisfunktionen basieren auf den Bildungsgesetzen aus den Gleichungen (3.32) bis (3.34).

Tabelle 3.1 polynomiale Basisfunktionen für die Interpolation

Ordnung r	Definition der polynomialen Basisfunktionen $B^r(x)$
r=1	$B^1(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \leq x \leq \Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
r=2	$B^2(x) = \begin{cases} \frac{x}{\Delta x} & \text{falls } 0 \leq x \leq \Delta x \\ 2 - \frac{x}{\Delta x} & \text{falls } \Delta x \leq x \leq 2\Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
r=3	$B^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 & \text{falls } 0 \leq x \leq \Delta x \\ -\left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right) - \frac{3}{2} & \text{falls } \Delta x \leq x \leq 2\Delta x \\ \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{x}{\Delta x}\right)^2 & \text{falls } 2\Delta x \leq x \leq 3\Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
r=4	$B^4(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 & \text{falls } 0 \leq x \leq \Delta x \\ \frac{1}{6} \cdot \left(-3 \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 + 12 \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 - 12 \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right) + 4\right) & \text{falls } \Delta x \leq x \leq 2\Delta x \\ \frac{1}{6} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^3 - 24 \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right)^2 + 60 \cdot \left(\frac{x}{\Delta x}\right) - 44\right) & \text{falls } 2\Delta x \leq x \leq 3\Delta x \\ \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x}{\Delta x} - 4\right)^3 & \text{falls } 3\Delta x \leq x \leq 4\Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

In dem nachfolgenden **Bild 3.8** sind die sich aus der Tabelle 3.1 ergebenden Basisfunktionen der Ordnung r=1..4 graphisch dargestellt. Aus dieser Abbildung können einige wichtige und charakteristische Eigenschaften der polynomialen Basisfunktionen (B-Splines) erkannt werden. Beispielsweise verläuft die Basisfunktion $B^2(x-x_i)$ der Ordnung r=2 innerhalb $[x_i, x_{i+2}]$ stückweise

linear, ist positiv und außerhalb dieses Intervalles gleich null. Die Funktion ist stetig, jedoch nicht stetig differenzierbar.

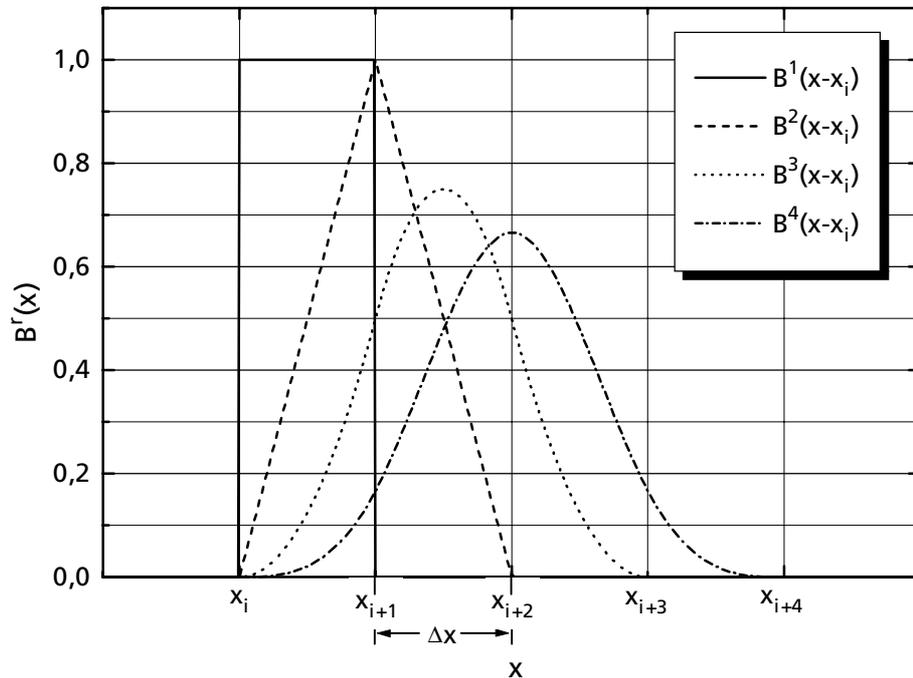


Bild 3.8 polynomiale Basisfunktionen für die stückweise Interpolation

Diese Eigenschaften lassen sich für alle polynomialen Basisfunktionen beliebiger Ordnung r verallgemeinern [36,39]. Eine Basisfunktion der Ordnung r ist:

- (i) positiv $\forall x \in [x_i, x_{i+r}]$,
- (ii) gleich null $\forall x \notin [x_i, x_{i+r}]$,
- (iii) stetig $\forall x \in [x_i, x_{i+r}]$ falls $r > 1$,
- (iv) $(r-2)$ mal stetig differenzierbar $\forall x \in [x_i, x_{i+r}]$ falls $r > 2$.

Insbesondere gilt:

$$1 = \sum_i B^r(x - x_i) \text{ für alle } x \in [a, b], \quad (3.35)$$

d.h. die polynomialen Basisfunktionen der Ordnung r (B-Splines) bilden eine Zerlegung der Eins [39,41] auf dem Interpolationsintervall $I=[a, b]$. Diese Eigenschaft ist häufig erwünscht, da somit auch konstante Funktionen wie beispielsweise $f(x)=1$ darstellbar sind.

Für die Berechnung der Splinefunktionen müssen nur noch die Gewichtungskoeffizienten c_i berechnet werden. Hieraus ergibt sich bei der Verwendung von Basisfunktionen mit der Ordnung $r \leq 2$ ein monodiagonales Gleichungssystem [39], d.h. die Gewichtungskoeffizienten c_i der verschobenen Basisfunktionen entsprechen den Funktionswerten $y_i=f(x_i)$ an den Punkten x_i :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \mu_1 & & & \\ & & \mu_1 & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & \mu_1 & \\ 0 & \cdot & & 0 & \mu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Für Basisfunktionen der Ordnung $4 \geq r > 2$ ergeben sich tridiagonale Gleichungssysteme [39], in denen zwei zusätzliche Vorgaben über den Verlauf der Funktion an den Interpolationsgrenzen a und b eingebaut sind:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & & & \\ & \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdot & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & \cdot & & \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ & & & \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_a \\ y_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \\ \rho_b \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

In der nachfolgenden **Tabelle 3.2** sind die für die Berechnung der Splinefunktionen notwendigen Angaben aufgelistet. Zu den Angaben gehört der Laufindex i der Summenformel aus Gleichung (3.30), die Anzahl der Randbedingungen, das benötigte Gleichungssystem sowie die Matrixelemente μ_0 bis μ_2 und λ_0 bis λ_2 der zu lösenden Gleichungssysteme.

Tabelle 3.2 Parameter für allg. Berechnungsformel der Interpolationsfunktion $S_m(x)$

Grad r	r=1	r=2	r=3	r=4
Laufindex i	0..n-1	0..n-1	-1..n	-1..n
Anzahl der Randbedingungen	keine ¹⁾	keine ¹⁾	2	2
mögliche Randbedingungen	keine ¹⁾	keine ¹⁾	$\rho_a = S_m'(a) = f'(a)$ ²⁾ \cap $\rho_b = S_m'(b) = f'(b)$ ²⁾	$\rho_a = S_m'(a) = f'(a)$ ²⁾ \cap $\rho_b = S_m'(b) = f'(b)$ ²⁾ \cup $\rho_a = S_m''(a) = \rho_b = S_m''(b) = 0$ ³⁾
Gleichungssystem	(3.36)	(3.36)	(3.37)	(3.37)
Koeffizienten der Gleichungssysteme	$\mu_1 = 1$	$\mu_1 = 1$	$\mu_0 = 1/8; \mu_1 = 3/4; \mu_2 = 1/8$ $\lambda_0 = -1/2; \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 1/2$	$\mu_0 = 1/2; \mu_1 = 2/3; \mu_2 = 1/2$ $\lambda_0 = 1; \lambda_1 = -2; \lambda_2 = 1$

¹⁾ da $B^r(x) \notin C^1[a,b] \forall r \leq 2$; ²⁾ vollständige Randbedingung; ³⁾ natürliche Randbedingung;

Um die Interpolation mit polynomialen Basisfunktionen abzuschließen, soll ein Beispiel mit kubischen Basisfunktionen der Ordnung 4 betrachtet werden. Die verwendeten Basisfunktionen setzen sich somit aus kubischen Polynomen zusammen. Für eine bessere Vergleichbarkeit wird wieder der gleiche Meßdatensatz wie in den Bildern 3.6 und 3.7 verwendet. In **Bild 3.9** sind die mit c_i gewichteten und um x_i verschobenen Basisfunktionen der Ordnung $r=4$ zu sehen. Die Koeffizienten c_i werden gemäß dem Gleichungssystem (3.37) und den Angaben der Tabelle 3.2 berechnet. An den Interpolationsgrenzen a und b wird gefordert, daß dort die zweite Ableitung der kubischen Splinefunktion $S_3(x)$ verschwindet (natürliche Randbedingung). Letztendlich ergibt die Summation der gewichteten Basisfunktionen die resultierende kubische Spline-Interpolierende $S_3(x)$.

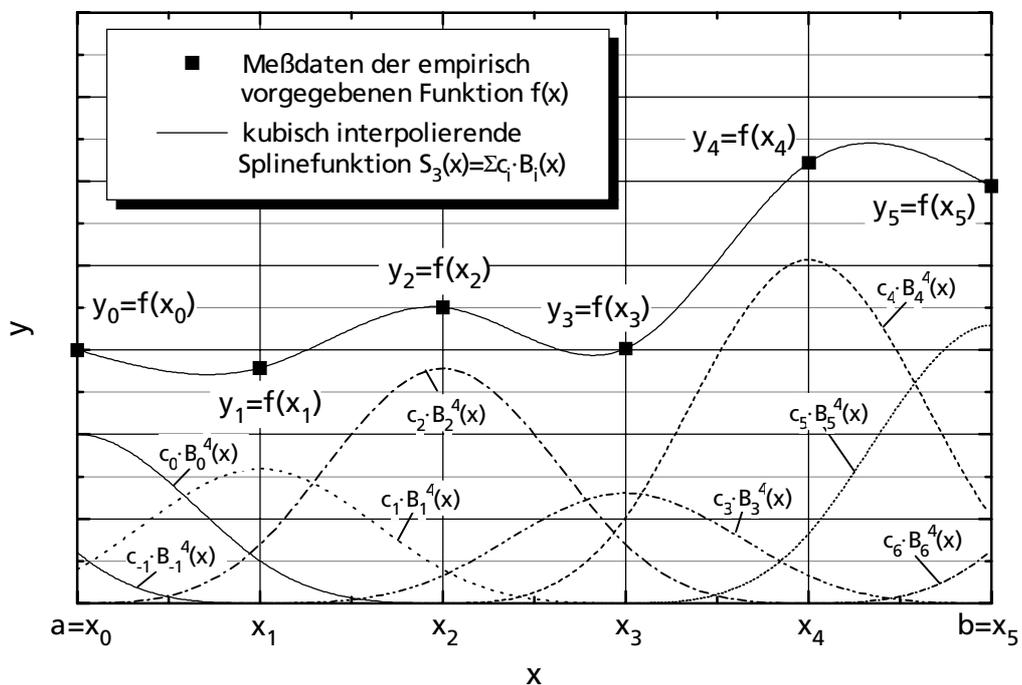


Bild 3.9 kubisch interpolierende Splinefunktion $S_3(x)$ mit Hilfe von B-Splines

Neben diesen polynomialen Basisfunktionen (B-Splines) wurden 1987 von Powell [44] radiale Basisfunktionen vorgestellt. Diese radialen Basisfunktionen sind ebenso für die Interpolation geeignet. Zu der Gruppe der radialen Basisfunktionen gehören unter anderen Gauß'sche Basisfunktionen [45-47]:

$$B_g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot \sigma^2}\right) \quad (3.38)$$

sowie multiquadratische [45]:

$$B_m(x) = \sqrt{x^2 + \sigma^2} \quad (3.39)$$

und reziproke, multiquadratische Basisfunktionen [45,48]:

$$B_{r,m}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \sigma^2}} \quad (3.40)$$

3.3 Hardwarekonzepte für Approximationsverfahren

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die mathematischen Grundlagen geeigneter Approximationsverfahren zur Nachbildung von funktionalen, zumeist empirischen Zusammenhängen erörtert wurden, konzentriert sich dieser Abschnitt auf Hardwarekonzepte, mit denen die zuvor behandelten Approximationsverfahren umgesetzt werden können. Das Hauptaugenmerk dieses Abschnitts liegt somit neben der Umsetzung der Approximationsverfahren auch gezielt darauf, sensorspezifische Konzepte vorzustellen, mit denen die nichtidealen Eigenschaften vieler auf dem Markt erhältlicher Sensoren beseitigt werden können. Wie bereits zu Anfang des Kapitels erwähnt, gehören zu den wichtigsten, nichtidealen Eigenschaften vieler Sensoren eine unzureichende Selektivität gegenüber der aufzunehmenden Meßgröße und ein stark nichtlineares Verhalten. Drei konzeptionelle Lösungsvorschläge werden in den nächsten Abschnitten vorgestellt. Hierzu gehören unter anderem ein einfaches Tabellenverfahren [49], ein rechnergestütztes Verfahren [50, 51] und ein abgewandeltes, neuartiges Verfahren mit Hilfe von überabgetasteten $\Sigma\Delta$ -Modulatoren [52-58]. Diese drei Konzepte werden abschließend vergleichend gegenübergestellt. Dafür werden nachfolgend Anforderungen an die Hardware definiert, mit deren Hilfe die Beurteilung der vorgestellten Konzepte erfolgen soll.

3.3.1 Anforderungen an die Hardwarekonzepte

Wie der einleitende Abschnitt des dritten Kapitels „Probleme in der heutigen Sensorsignalverarbeitung“ zeigte, werden allgemein Verfahren zur Reduzierung nichtidealer Sensoreigenschaften benötigt, um die Qualität der Sensorsysteme zu verbessern. Aber die Verfahren können sich nur durchsetzen, wenn der dafür benötigte Aufwand gering ist, um die entstehenden Kosten für das komplette Sensorsystem niedrig zu halten. Hierzu gehört zum einen der unmittelbar mit dem Konzept verknüpfte Hardwareaufwand unter dem Gesichtspunkt einer platzsparenden und kostengünstigen Herstellung. Zum anderen wird ein geringer Aufwand bei der Ermittlung der zunächst unbekanntesten Funktionszusammenhänge zur Reduzierung der nichtidealen Sensoreigenschaften benötigt, um die zusätzlich zu den Herstellungskosten entstehenden Fertigungskosten bei der Kalibration zu minimieren. Die dafür notwendigen Messungen werden während der Kalibrationsphase unter einer zumeist zeitintensiven Vorgabe benötigter Referenzgrößen durchgeführt. Die Anzahl der benötigten Messungen sollte somit minimal sein, um den Durchsatz einer Massenproduktion zu erhöhen. Zudem sollten die Lösungen derart flexibel gestaltet sein, daß ohne konzeptionelle Änderungen, nur durch Hinzufügen zusätzlich benötigter Hardwarekomponenten, das System für eine Vielzahl von auftretenden Problemstellungen angepaßt bzw. erweitert werden kann.

3.3.2 Herkömmliche Hardwarekonzepte für die Implementierung geeigneter Approximationsverfahren

Einfaches Tabellenverfahren:

Bei dem einfachen Tabellenverfahren [49] nach **Bild 3.10** wird das analoge und mit f_B bandbegrenzte Sensorsignal $y_{S,I} = x \in I[a, b]$ über einen N-bit A/D-Wandler mit der Nyquistfrequenz $2 \cdot f_B$ und einer Meßauflösung $n_{M,AD}$ von N bit digitalisiert. Die digitalen Ausgangsworte des A/D-Wandlers dienen zur unmittelbaren Adressierung des nachfolgenden Kennlinien-Speichers ($y_{AD} = x_{KS}$). Über diesen Speicher ist zu jedem möglichen Ausgangswert y_{AD} des A/D-Wandlers tabellarisch ein korrespondierender Ausgangswert y_{KS} mit einer entsprechenden Darstellungswortbreite von $n_{D,KS}$ bit abgespeichert, der im hier vorliegenden Fall gleichzeitig das Ausgangswort y_A darstellt. Besitzt der Sensor I eine nichtlineare Übertragungscharakteristik $f_{S,I}$, so enthält der Kennlinien-Speicher zur Linearisierung eine entsprechende Korrekturfunktion g_L , die ein reziprokes Verhalten $f_{S,I}^{-1}$ besitzt, so daß der Ausgang y_A ein von der Meßgröße μ^* lineares Verhalten aufweist.

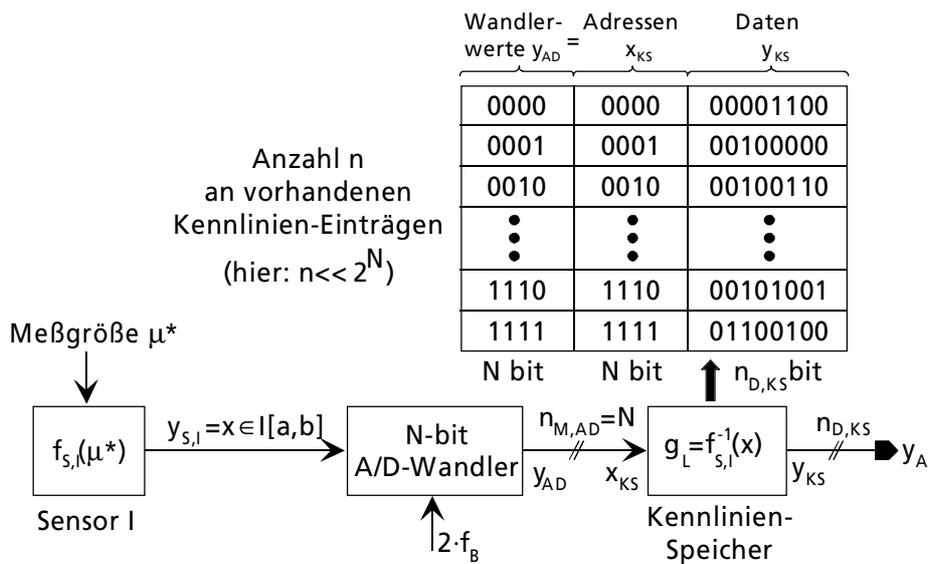


Bild 3.10 einfaches Tabellenverfahren

Die erzielbare Auflösung am Ausgang y_A wird beim einfachen Tabellenverfahren zum einen durch den durch die Digitalisierung entstehenden Quantisierungsfehler ϵ_Q und zum anderen durch den Rundungsfehler ϵ_T , der durch die endliche Darstellungswortbreite $n_{D,KS}$ des Kennlinien-Speichers verursacht wird, nach oben hin begrenzt. Zur Berechnung der minimal erzielbaren Auflösung muß letztendlich nur die Signalleistung P_{sig} am Ausgang y_A zur maximal auftretenden Rauschleistung $P_{\epsilon,ges}$ ins Verhältnis gesetzt werden:

$$SNR_{min} = 10 \cdot \log \left(\frac{P_{sig}}{P_{\epsilon,ges}} \right). \tag{3.41}$$

Da der auftretende Quantisierungsfehler nicht mit dem Rundungsfehler korreliert ist, kann die gesamte Rauschleistung:

$$P_{\varepsilon, \text{ges}} = P_{Q, \text{max}} + P_{T, \text{max}} \quad (3.42)$$

durch eine einfache Summation der einzelnen maximalen Rauschleistungsbeiträge $P_{Q, \text{max}}$ und $P_{T, \text{max}}$ berechnet werden, die durch die eben zuvor genannten Fehlerquellen verursacht werden. Um für eine vorgegebene Auflösung am Ausgang y_A eine Designvorschrift für die Auflösung N des A/D-Wandlers und der Darstellungswortbreite $n_{D, \text{KS}}$ zu erhalten, müssen die maximal auftretenden Rauschleistungsbeiträge $P_{Q, \text{max}}$ und $P_{T, \text{max}}$ berechnet werden. Die Rauschleistung P_Q vom Quantisierungsfehler des A/D-Wandlers bestimmt sich zu:

$$P_Q = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^N - 1)^2} \cdot \left(\frac{\partial f_{S, I}^{-1}(x)}{\partial x} \right)^2, \quad (3.43)$$

und hängt sowohl von der Auflösung N des verwendeten A/D-Wandlers als auch der Steigung $m(x) = \partial f_{S, I}^{-1}(x) / \partial x$ der zur Linearisierung benötigten Kennlinie $f_{S, I}^{-1}(x)$ ab. Der maximal auftretende Rauschleistungsbeitrag $P_{Q, \text{max}}$ des Quantisierungsfehlers tritt demzufolge bei maximaler Steigung m_{max} der Linearisierungskennlinie $f_{S, I}^{-1}(x)$ auf:

$$P_{Q, \text{max}} = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^N - 1)^2} \cdot \left(\max_{\xi \in [a, b]} \frac{\partial f_{S, I}^{-1}(x)}{\partial x} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^N - 1)^2} \cdot m_{\text{max}}^2. \quad (3.44)$$

Der noch zur gesamten Rauschleistung $P_{\varepsilon, \text{ges}}$ fehlende maximale Rauschleistungsbeitrag $P_{T, \text{max}}$, der durch die endliche Darstellungswortbreite $n_{D, \text{KS}}$ bzw. durch die Quantisierung der Tabelle verursacht wird, berechnet sich zu:

$$P_{T, \text{max}} = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^{n_{D, \text{KS}}} - 1)^2}. \quad (3.45)$$

und hängt lediglich von der endlichen Darstellungswortbreite $n_{D, \text{KS}}$ des Kennlinien-Speichers ab. Die benötigte Auflösung N des A/D-Wandlers und die Darstellungswortbreite $n_{D, \text{KS}}$ des Kennlinien-Speichers kann am einfachsten bei maximal auftretender Steigung m_{max} der Linearisierungskennlinie $f_{S, I}^{-1}(x)$ und minimal geforderter Auflösung am Ausgang y_A bestimmt werden, indem die maximal auftretenden Rauschleistungsbeiträge $P_{Q, \text{max}}$ und $P_{T, \text{max}}$ jeweils die Hälfte von der gesamten, zulässigen Rauschleistung $P_{\varepsilon, \text{ges}}$ betragen:

$$P_{Q, \text{max}} \approx P_{T, \text{max}} \approx \frac{P_{\varepsilon, \text{ges}}}{2}. \quad (3.46)$$

Der für das einfache Tabellenverfahren benötigte Speicherbedarf S_{eTV} ist mit:

$$S_{eTV} = 2^N \cdot n_{D, \text{KS}} \text{ bit} = n \cdot n_{D, \text{KS}} \text{ bit} \quad (3.47)$$

recht hoch, da die Anzahl n der Einträge im Kennlinien-Speicher mit der Meßauflösung 2^N des A/D-Wandlers korrespondiert.

Die Notwendigkeit, 2^N Kennlinien-Einträge über eine Kalibration zu bestimmen, macht dieses Verfahren aus Zeit- und Kostengründen für die Praxis nahezu unbrauchbar. Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, nur einige ausgewählte Einträge im Kennlinien-Speicher über eine Kalibration zu bestimmen, während die restlichen Einträge mit Hilfe eines externen Meßwertrechners über entsprechende Approximationsverfahren ermittelt werden können. Somit kann zwar der zur Kalibration benötigte Zeitaufwand reduziert werden, dennoch bleibt das Problem des hohen Speicherbedarfs S_{eTV} bestehen. Vom Rechenaufwand her ist das einfache Tabellenverfahren optimal, da für die Bestimmung des Ausgangswertes y_A nur ein Speicherzugriff notwendig ist und keine zusätzlichen Berechnungen von Funktionswerten erfolgen müssen. Für die analoge Darstellung des Ausgangswertes y_A ist zusätzlich ein D/A-Wandler notwendig, der mindestens die minimal erzielte Auflösung SNR_{min} am Ausgang y_A des Kennlinien-Speicher aufweisen muß.

Der hohe Speicherbedarf provoziert jedoch die Suche nach anderen Architekturen, die die Anforderungen bzgl. der benötigten Speichertiefe für den Kennlinien-Speicher drastisch reduzieren. Hierzu muß einfach die Anzahl n der Einträge im Kennlinien-Speicher reduziert werden, indem nicht mehr zu jedem möglichen Ausgangswert y_{AD} des N -bit A/D-Wandlers ein korrespondierender Eintrag in Kennlinien-Speicher abgelegt wird ($y_{AD} \neq x_{KS}$). Die dann fehlenden Einträge müssen anhand der noch vorhandenen Einträge über die zuvor vorgestellten Approximationsverfahren aus Kapitel 3.2 berechnet werden.

Rechnergestützte Verfahren:

Eine unmittelbar auf der Hand liegende Lösungsmöglichkeit ist dabei das rechnergestützte Verfahren [50,51]. Bei dem in **Bild 3.11** gezeigten Verfahren wird wie bereits beim einfachen Tabellenverfahren ein N -bit A/D-Wandler zur Digitalisierung des Sensorsignals $y_{S,1} = x \in [a, b]$ benötigt.

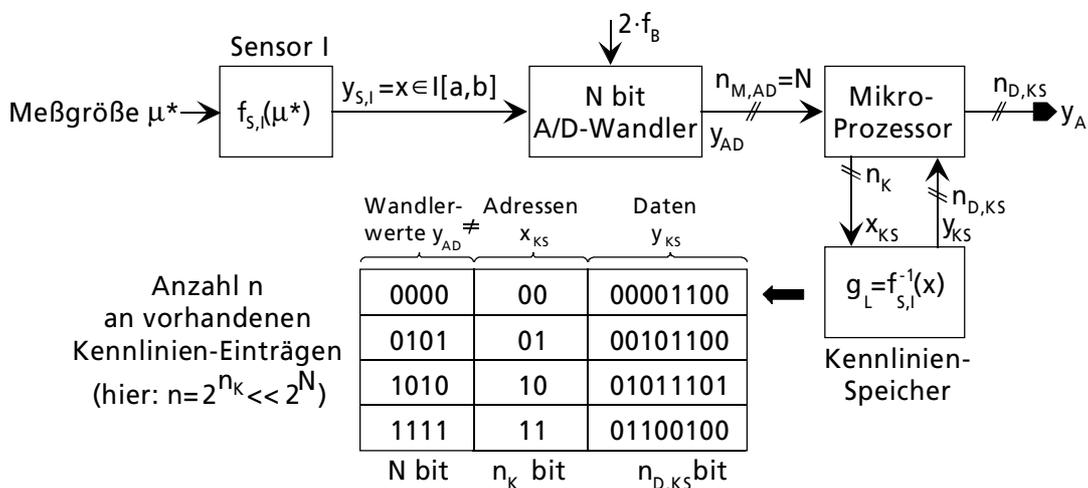


Bild 3.11 Realisierung mit Mikroprozessor oder Recheneinheit (ALU)

Die digitalisierte Information des Sensorsignals y_{AD} am Ausgang des A/D-Wandlers wird einem Mikroprozessor oder einer arithmetisch logischen Recheneinheit (ALU) zugeführt. Der Kennlinien-Speicher enthält im Gegensatz zum einfachen Tabellenverfahren eine stark reduzierte Anzahl n an Einträgen mit $n=2^{n_K} \ll 2^N$. Die fehlenden Ausgangswerte, die zwischen den noch vorhandenen Einträgen liegen, werden jetzt mit Hilfe der vorhandene Rechenleistung des Mikroprozessors über entsprechend geeignete Approximationsverfahren berechnet.

Bei dem rechnergestützten Verfahren tritt ähnlich wie beim einfachen Tabellenverfahren ein Quantisierungsfehler ε_Q auf, der durch die Digitalisierung des Sensorsignals hervorgerufen wird. Ebenso resultiert aus der endlichen Darstellungswortbreite $n_{D,KS}$ des Kennlinien-Speichers der zuvor behandelte Rundungsfehler ε_T . Da hier die fehlenden Einträge im Kennlinien-Speicher durch ein geeignetes Approximationsverfahren berechnet werden, tritt zusätzlich zum Quantisierungs- und Rundungsfehler auch ein sog. Approximationsfehler ε_I in Erscheinung. Geht man wieder von der Unkorreliertheit der einzelnen Fehlerquellen aus, so resultiert die gesamte auftretende Rauschleistung $P_{\varepsilon,ges}$:

$$P_{\varepsilon,ges} = P_{Q,max} + P_{T,max} + P_{I,max} \quad (3.48)$$

durch eine einfache Addition der maximal auftretenden Rauschleistungsbeiträge $P_{Q,max}$, $P_{T,max}$ und $P_{I,max}$, wobei Gleichung (3.41) als Grundlage zur Berechnung des minimalen SNR_{min} am Ausgang y_A dient. Die maximalen Rauschleistungsbeiträge des Quantisierungs- und Rundungsfehlers ergeben sich wie zuvor beim einfachen Tabellenverfahren zu:

$$P_{Q,max} = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^N - 1)^2} \cdot \left(\max_{\xi \in [a, b]} \frac{\partial f_{S,I}^{-1}(x)}{\partial x} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^N - 1)^2} \cdot m_{max}^2 \quad (3.49)$$

und:

$$P_{T,max} = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^{n_{D,KS}} - 1)^2} \quad (3.50)$$

Von den einzelnen Rauschleistungsbeiträgen her ist derjenige, der durch den Interpolationsfehler verursacht wird, am schwierigsten zu bestimmen, da zur Berechnung eine Reihe von Vorkenntnissen erforderlich sind. Um den Interpolationsfehler $\varepsilon_I(x)$ theoretisch exakt zu bestimmen, muß der Verlauf der benötigten Linearisierungskennlinie, das verwendete Verfahren und der Grad der Interpolationspolynome bekannt sein. Der maximale Rauschleistungsanteil $P_{I,max}$, der vom Interpolationsfehler $\varepsilon_I(x)$ herrührt, berechnet sich gemäß der nachfolgenden Gleichung zu:

$$P_{I,max} = \frac{1}{b-a} \int_{a-b/2}^{b-a/2} \varepsilon_I(x)^2 dx \quad (3.51)$$

und ist je nach Verlauf der Linearisierungsfunktion $f_{S,I}^{-1}(x)$ nicht immer durch einen einfachen Ausdruck darstellbar. Die Interpolationsfehler $\varepsilon_I(x)$, die sich für die gebräuchlichsten Interpolationsverfahren ergeben, sind der Tabelle B.1 aus Anhang B zu entnehmen.

Wird beispielsweise die Linearisierungsfunktion über eine stückweise lineare Polynominterpolation nachgebildet, so gilt für den Interpolationsfehler $\varepsilon_I(x)$:

$$|\varepsilon_I(x)| \leq \frac{1}{8} \cdot M_2 \cdot \left(\frac{b-a}{2^{n_K} - 1} \right)^2 \quad \text{mit: } M_2 = \max_{\xi \in [a, b]} \left| f_{S,I}^{-1}(\xi) \right|. \quad (3.52)$$

Bei einer bekannten Linearisierungsfunktion der Form $f_{S,I}^{-1}(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$ berechnet sich der Interpolationsfehler $\varepsilon_I(x)$ mit Hilfe von Gleichung (3.52) zu:

$$|\varepsilon_I(x)| \leq \frac{c_2 \cdot (b-a)^2}{4 \cdot (2^{n_K} - 1)^2}. \quad (3.53)$$

Der Interpolationsfehler wird im vorliegenden Beispiel mit zunehmender Adresswortbreite n_K des Kennlinien-Speichers, d.h. mit einer steigenden Anzahl n an Kennlinien-Einträgen kleiner und steigt mit zunehmender Größe des quadratischen Anteils c_2 der Linearisierungsfunktion an. Soll der Interpolationsfehler klein gehalten werden, ohne die Anzahl an Kennlinien-Einträgen zu erhöhen, so muß die Ordnung der Interpolationsfunktion erhöht werden. Der Rauschleistungsbeitrag $P_{I,\max}$, der durch den Interpolationsfehler maximal verursacht werden kann, beläuft sich bei einer stückweisen, linearen Interpolation und einer quadratischen Linearisierungsfunktion gemäß der Gleichung (3.51) und (3.53) auf:

$$P_{I,\max} = \frac{c_2^2 \cdot (b-a)^4}{16 \cdot (2^{n_K} - 1)^4}. \quad (3.54)$$

Beim rechnergestützten Verfahren können ebenso wie beim einfachen Tabellenverfahren die einzelnen maximalen Rauschleistungsbeiträge $P_{Q,\max}$, $P_{T,\max}$ und $P_{I,\max}$ über unterschiedliche Parameter unabhängig voneinander eingestellt werden. $P_{Q,\max}$ wird von der Meßauflösung N des verwendeten A/D-Wandlers und der ersten Ableitung der Linearisierungsfunktion $f_{S,I}^{-1}(x)$ beeinflusst, während $P_{T,\max}$ von der endlichen Darstellungswortbreite n_{D,K_S} des Kennlinien-Speichers abhängt. In $P_{I,\max}$ geht immer die Adresswortbreite n_K bzw. die Anzahl $n = 2^{n_K}$ an Kennlinien-Einträgen, sowie das Interpolationsverfahren und der Verlauf der Linearisierungskennlinie ein. Die Parameter N , n_{D,K_S} und n_K können einfach bestimmt werden, indem die einzelnen Rauschleistungsbeiträge $P_{Q,\max}$, $P_{T,\max}$ und $P_{I,\max}$ vom Betrag her ungefähr gleich groß dimensioniert werden, und jeweils ein Drittel der gesamten zulässigen Rauschleistung $P_{\varepsilon,\text{ges}}$ bei minimal vorgegebener Auflösung betragen:

$$P_{Q,\max} \approx P_{T,\max} \approx P_{I,\max} \approx \frac{P_{\varepsilon,\text{ges}}}{3}. \quad (3.55)$$

Die maximale Darstellungswortbreite $n_{D,\mu P}$ am Ausgang y_A des rechnergestützten Verfahrens ergibt sich aus der minimal vorgegebenen Auflösung SNR_{\min} :

$$n_{D,\mu P} = \frac{\text{SNR}_{\min}}{20 \cdot \log(2)}. \quad (3.56)$$

Der Speicherbedarf beim rechnergestützten Verfahren $S_{\mu P}$ kann jedoch im Gegensatz zu einfachen Tabellenverfahren drastisch reduziert werden, da jetzt aufgrund verfügbarer Rechenleistung die zur Korrektur fehlenden Einträge über entsprechend geeignete Approximationsverfahren aus der stark reduzierten Anzahl $n=2^{n_k} \ll 2^N$ an Einträgen im Kennlinien-Speicher berechnet werden können:

$$S_{\mu P} = 2^{n_k} \cdot n_{D,KS} \text{ bit} = n \cdot n_{D,KS} \text{ bit} \ll S_{eTV} \quad (3.57)$$

Hierin ist jedoch nicht der notwendige Speicherbedarf für das Abspeichern des Mikroprogramms berücksichtigt, in dem die Vorschriften für die Berechnung der fehlenden Einträge im Kennlinien-Speicher festgelegt sind. Da der Speicherbedarf für das Mikroprogramm je nach implementierten Approximationsverfahren unterschiedlich groß ausfällt, kann dieser nicht formelmäßig beschrieben werden.

Besitzt der Sensor neben einer Nichtlinearität bzgl. der Meßgröße μ^* eine sog. Querempfindlichkeit gegenüber einer zusätzlichen Störgröße λ^* , die nicht Gegenstand der eigentlichen Meßaufgabe ist, so kann diese häufig in der Sensorik auftretende, mehrdimensionale Problemstellung ebenfalls mit dem rechnergestützten Verfahren aus **Bild 3.12** gelöst werden.

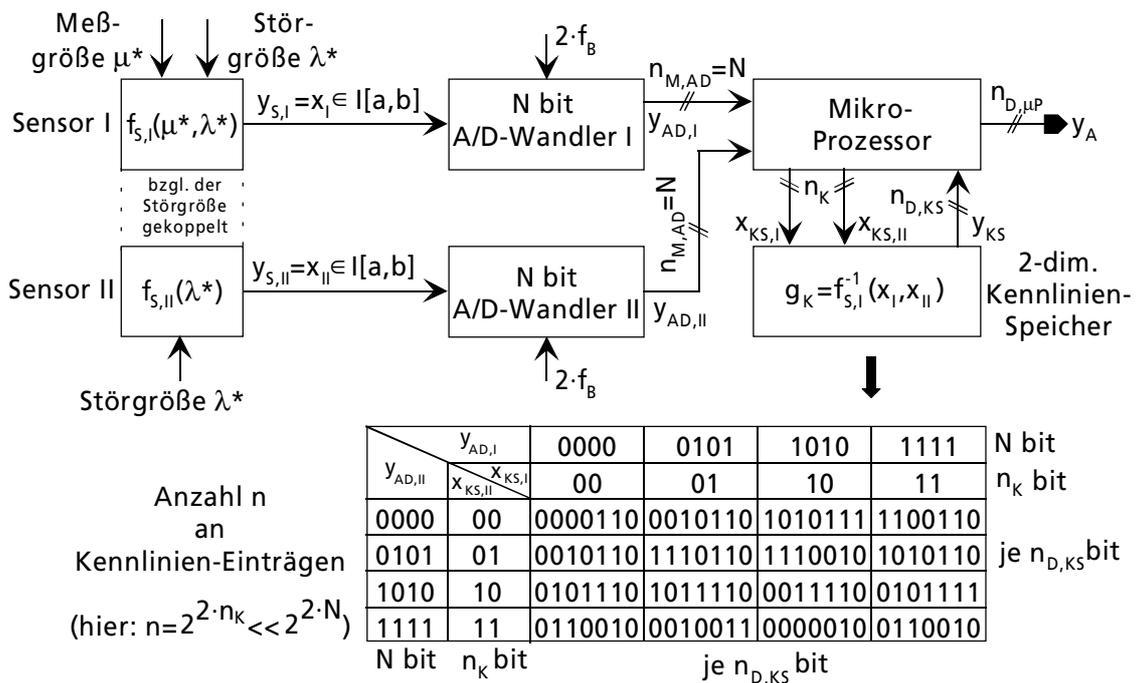


Bild 3.12 Erweiterung des rechnergestützten Verfahrens auf mehrdimensionale Problemstellungen

Hierzu wird die auftretende Störgröße mit Hilfe eines zweiten Sensors aufgenommen und über einen zusätzlichen, zweiten N-bit A/D-Wandler mit einer Meßauflösung $n_{M,AD}$ von N bit digitalisiert. Somit erhält der Mikroprozessor neben dem digitalisierten Meßsignal $y_{S,I}$ auch Informationen über das digitalisierte Störsignal $y_{S,II}$. Die notwendigen Daten zur Linearisierung

und zur Kompensation der Störgröße werden in einem 2-dimensionalen Kennlinien-Speicher abgelegt. Ähnlich wie bei der Linearisierung wird nicht zu jedem möglichen Meßwertepaar $(y_{AD,I}, y_{AD,II})$ ein digitaler Korrekturwert in den Speicher abgelegt, sondern wiederum eine stark reduzierte Anzahl $n=2^{2^{n_k}}$. Nicht vorhandene, jedoch benötigte Korrekturdaten werden über ein geeignetes Approximationsverfahren bereitgestellt. Sollen die korrigierten Meßwerte am Ausgang y_A analog dargestellt werden, so kann ein eventuell im Mikroprozessor enthaltener D/A-Wandler verwendet werden. Die Auflösung des analogen Ausganges entspricht dann maximal der Auflösung des im Mikroprozessors integrierten D/A-Wandlers.

Prinzipiell können mit dem rechnergestützten Verfahren alle im Kapitel 3.2 angesprochenen Approximationsverfahren umgesetzt werden. Nachteilig sind jedoch die zusätzlichen Kosten und der hohe Platzbedarf für den benötigten Mikroprozessor, dessen Leistungsfähigkeit für einfache Approximationsaufgaben nur zu einem geringen Teil ausgenutzt wird. Bei komplizierteren Approximationsaufgaben kann der Rechenaufwand so groß werden, daß die Berechnung des korrigierten Meßwertes innerhalb eines zur Verfügung stehenden Zeitintervalls nicht mehr erfolgen kann, wodurch die Bandbreite des Sensors begrenzt wird [59, 60].

Sollen die Vorteile des rechnergestützten Verfahrens auf Mikroprozessor-Basis erhalten bleiben, die dadurch entstehenden Nachteile jedoch vermieden werden, so kommt das nachfolgend vorgestellte Verfahren in Betracht. Dieses neuartige Verfahren nutzt die interpolativen Eigenschaften von überabgetasteten A/D-Wandlern aus, die in der Fachliteratur häufig als $\Sigma\Delta$ -Modulatoren bezeichnet werden. Zur grundlegenden Funktionsweise und den charakteristischen Eigenschaften sowie den allgemein notwendigen Begriffsdefinitionen eines $\Sigma\Delta$ -Modulators sei auf Anhang C dieser Arbeit verwiesen.

3.3.3 Modifiziertes Tabellenverfahren unter Verwendung von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren

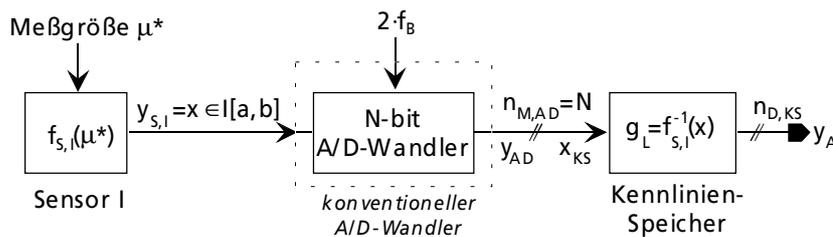
Da Sensorsignale im allgemeinen langsam veränderlich und bandbegrenzt sind, können diese schneller als nach dem Nyquistkriterium gefordert abgetastet werden. Diese Geschwindigkeitsreserve kann zum einen dazu verwendet werden, um eine Interpolation durchzuführen und zum anderen, um die Auflösung bzw. die Meßgenauigkeit des Sensorsignals zu erhöhen. Beim modifizierten Tabellenverfahren [52,55] handelt es sich um eine Abwandlung des einfachen Tabellenverfahren. Der Weg vom einfachen zum modifizierten Tabellenverfahren ist in dem nachfolgenden **Bild 3.13** anschaulich dargestellt. In einem ersten Schritt wird der konventionelle A/D-Wandler aus dem einfachen Tabellenverfahren durch einen überabgetasteten A/D-Wandler ausgetauscht. Dieser setzt sich aus einem $\Sigma\Delta$ -Modulator M-ter Ordnung und einem digitalen Dezimator zusammen. Der $\Sigma\Delta$ -Modulator tastet dabei das bandbegrenzte Sensorsignal $y_{S,1}$ mit einer sog. **Oversampling-Rate** $OSR = f_c/2 \cdot f_B$ ab. Hierbei bedeutet f_c die Abtastfrequenz des $\Sigma\Delta$ -Modulators und f_B die Bandbegrenzung des Sensorsignals.

Da die Wortbreite am Ausgang des Dezimators jedoch mit der hohen Meßauflösung $n_{M,\Sigma\Delta}$ des überabgetasteten A/D-Wandlers korrespondiert [61]:

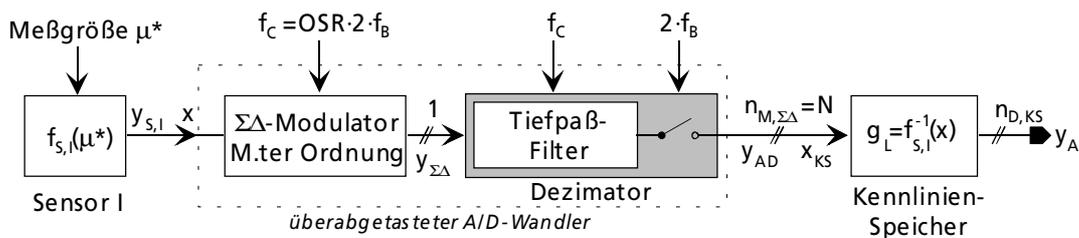
$$n_{M,\Sigma\Delta} = \frac{10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{sig}}}{(b-a)^2/12}\right) + 10 \cdot (2 \cdot M + 1) \cdot \log(\text{OSR}) - 10 \cdot \log\left(\frac{\pi^{2M}}{2 \cdot M + 1}\right)}{20 \cdot \log(2)}, \quad (3.58)$$

besteht zunächst noch kein Vorteil gegenüber dem einfachen Tabellenverfahren.

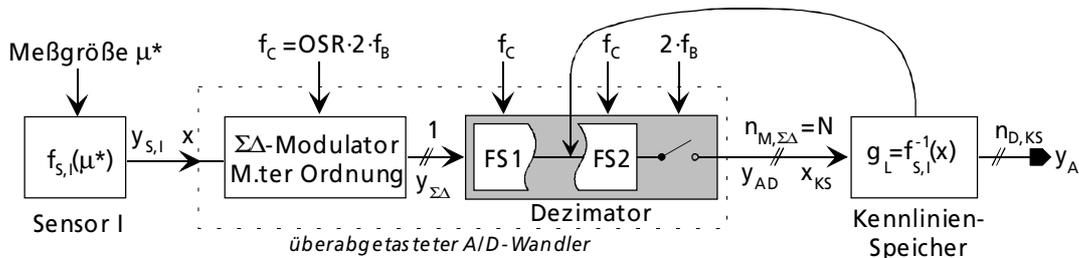
Ausgangspunkt: einfaches Tabellenverfahren



1. Schritt: Austausch des konventionellen A/D-Wandlers durch einen überabgetasteten A/D-Wandler



2. Schritt: Auftrennen des Tiefpaßfilters und Hineinziehen des Kennlinien-Speichers



Endpunkt: modifiziertes Tabellenverfahren

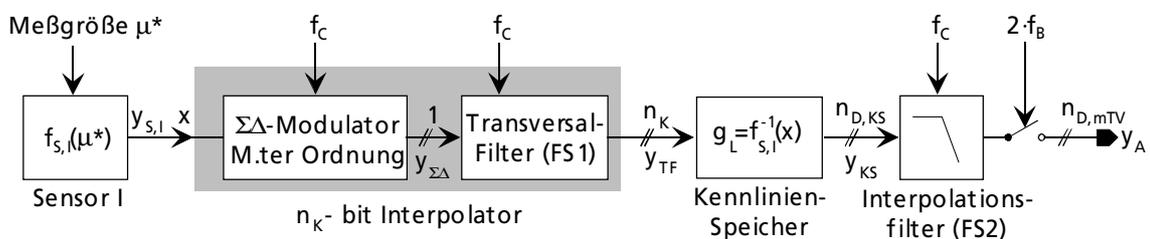


Bild 3.13 Vom einfachen zum modifizierten Tabellenverfahren

Wird in einem zweiten Schritt das im Dezimator enthaltene Tiefpaßfilter in zwei Filterstufen FS1 und FS2 aufgetrennt, und der Kennlinien-Speicher zwischen die beiden entstandenen Filterstufen des Tiefpaßfilters gezogen, so kann je nach Architektur der ersten Filterstufe FS1 die

Adressierung des Kennlinien-Speichers mit einer geringen Wortbreite n_K , dafür aber mit der vollen Abtastfrequenz f_c erfolgen, ohne die ursprünglich hohe Meßauflösung $n_{M,\Sigma\Delta}$ des überabgetasteten A/D-Wandlers zu zerstören. Für die erste Filterstufe FS1 wird ein Transversalfilter auf FIR-Basis, für die Filterstufe FS2 ein sog. Interpolationsfilter mit Tiefpaßcharakter verwendet, das eine Eckfrequenz besitzt, die mit der Bandbreite f_B des Sensorsignals korrespondiert. Der Begriff Interpolationsfilter rührt dabei von der Betrachtungsweise im Amplitudenbereich her, da aus n_K Werten des Kennlinien-Speichers $n_{D,mTV}$ Werte mit $n_K \ll n_{D,mTV}$ erzeugt werden. Für die klassische Betrachtungsweise im Zeitbereich würde dagegen dieses Filter als Dezimationsfilter bezeichnet werden. Da wir jedoch lediglich an einer Interpolation im Amplitudenbereich interessiert sind, kann der noch vorhandene Abtaster, der zur Reduzierung bzw. Dezimation der hohen Taktfrequenz f_c dient, für diese Anwendung entfallen.

Da der Kennlinien-Speicher nun mit einem n_K bit breiten Wort adressiert wird, kann der Speicherbedarf S_{mTV} - ähnlich wie beim rechnergestützten Verfahren - im Vergleich zum einfachen Tabellenverfahren drastisch reduziert werden:

$$S_{mTV} = 2^{n_K} \cdot n_{D,Ks} \text{ bit} = n \cdot n_{D,Ks} \text{ bit} = \ll S_{eTV} \cdot \quad (3.59)$$

Die genaue Funktionsweise des modifizierten Tabellenverfahrens soll anhand **Bild 3.14** erläutert werden. Das mit f_B bandbegrenzte Sensorsignal $y_{S,l}$ wird dabei, wie bereits angesprochen, mit einem überabgetasteten $\Sigma\Delta$ -Modulator M-ter Ordnung digitalisiert. Die Ordnung M des $\Sigma\Delta$ -Modulators ist durch die Ordnung des darin enthaltenen Schleifenfilters festgelegt (siehe dazu Anhang C). Wird als Quantisierer ein Komparator verwendet, so ergibt sich am Ausgang $y_{\Sigma\Delta}$ des $\Sigma\Delta$ -Modulators ein binärer, pulshäufigkeitsmodulierter Bitstrom, der im Durchlaßbereich des implementierten Schleifenfilters eine hochaufgelöste(!), digitale Kopie des bandbegrenzten Sensorsignals $y_{S,l}$ darstellt. Grund dafür ist, daß das durch die Digitalisierung des Sensorsignals verursachte Quantisierungsrauschen aufgrund der Rauschübertragungsfunktion des im $\Sigma\Delta$ -Modulators implementierten Schleifenfilters mit $M \cdot 20\text{dB/Dekade}$ zur halben Taktfrequenz $f_c/2$ hin verschoben wird. Dieses Verhalten kann deutlich am zugehörigen Spektrum des betrachteten Bildes erkannt werden. Da der Kennlinien-Speicher nicht unmittelbar mit dem binären und pulshäufigkeitsmodulierten Datenstrom des Ausgangssignals $y_{\Sigma\Delta}$ vom $\Sigma\Delta$ -Modulator angesteuert werden kann, wird über ein nachfolgendes Transversal-Filter ein n_K bit breites Wort erzeugt, das zur Adressierung des nachfolgenden Kennlinien-Speichers dient. Die Wortbreite n_K des Transversalfilters kann dabei über die verwendete Anzahl $n=2^{n_K}-1$ an Verzögerungsgliedern eingestellt werden. Beim Transversalfilter handelt es sich um ein FIR-Filter, dessen Amplitudengang eine $\sin(x)/x$ - bzw. sinc-Charakteristik aufweist. Die unzureichende Filtereigenschaft der ersten Filterstufe FS1, die an dieser Stelle für die Unterdrückung des Quantisierungsrauschens im Sperrbereich des verwendeten Schleifenfilters gewollt ist, bewirkt am Ausgang y_{TF} des Transversalfilters eine sich ständig mit der Abtastfrequenz f_c des $\Sigma\Delta$ -Modulators ändernde Adresse. Diese Adresse repräsentiert im Durchlaßbereich aufgrund der

Überabtastung innerhalb eines gleitenden Zeitfensters ebenfalls eine hochgenaue Darstellung des Sensorsignals $y_{S,I}$. Das sich ständig ändernde Adresswort greift nun schließlich auf die im Kennlinien-Speicher abgelegten Daten mit einer endlichen Darstellungswortbreite $n_{D,KS}$ zu, die die sog. Stützstellen der benötigten Linearisierungsfunktion (hier: $g_L=f_{S,I}^{-1}$) darstellen. Diese Operation hat eine Veränderung der spektralen Anteile im ursprünglichen Eingangsspektrum zur Folge. Die Veränderung wird im Frequenzspektrum durch einen „gezackten“ Verlauf im Durchlaßbereich angedeutet und stellt die Korrektur der nichtidealen Sensoreigenschaft - hier die der nichtlinearen Sensorkennlinie - dar.

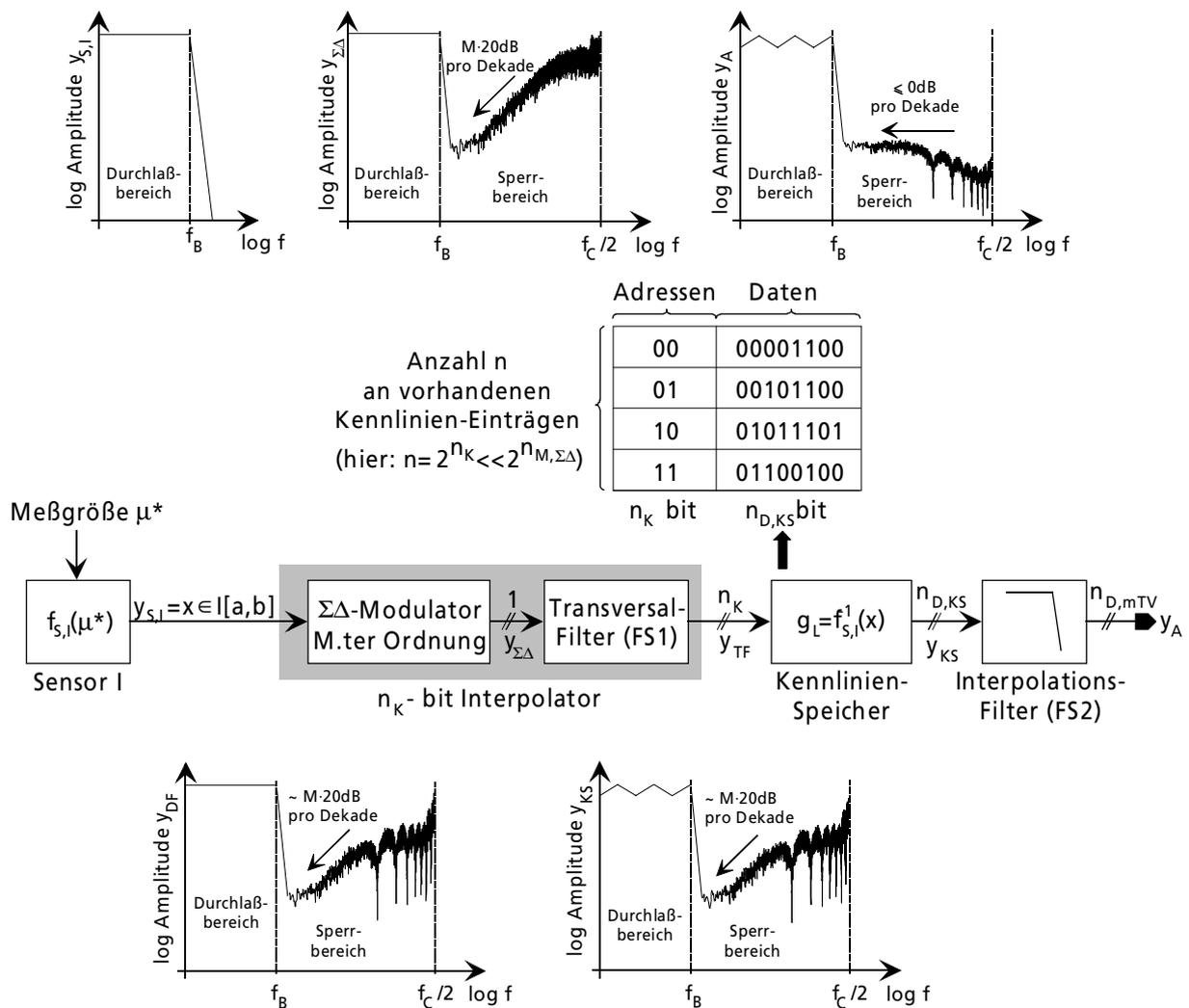


Bild 3.14 modifiziertes Tabellenverfahren für die Approximation von Kennlinien

Damit sich letztendlich ein mittlerer Durchschnitt innerhalb einer der Bandbreite f_B entsprechenden Zeit einstellt, müssen die mit der hohen Abtastfrequenz f_C aus dem Kennlinien-Speicher anfallenden Werte einer ausreichenden Tiefpaßfilterung unterzogen werden. Ausreichend heißt, daß das im Sperrbereich mit $M \cdot 20\text{dB/Dekade}$ zur halben Taktfrequenz $f_C/2$ hin ansteigende Quantisierungsrauschen im Spektrum des Ausgangssignals y_A nicht mehr ansteigt. Die Aufgabe der Tiefpaßfilterung übernimmt dabei die zuvor angesprochene zweite Filterstufe

FS2, die als Interpolationsfilter fungiert. Dadurch wird gleichzeitig beim Abtasten mit einer niedrigeren Taktfrequenz verhindert, daß das zuvor in den Sperrbereich verschobene Quantisierungsrauschen wieder in den Durchlaßbereich zurückgefalten wird und sich dadurch die Auflösung am Ausgang y_A drastisch verschlechtert. Da nun Funktions- bzw. Korrekturwerte zwischen den vorhandenen Einträgen des Kennlinien-Speichers ermittelt werden können, entspricht das resultierende Systemverhalten einer Interpolation.

Bevor wir auf das interpolative Verhalten von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren M .ter Ordnung intensiver eingehen soll, wie bei den beiden zuvor behandelten Verfahren, eine Vorschrift für die Dimensionierung der freien Systemparameter angegeben werden. Hierzu gehen wir wieder von einer minimal vorgegebenen Auflösung SNR_{\min} aus, die sich am Ausgang y_A des modifizierten Tabellenverfahrens über den kompletten Eingangsbereich $x \in [a, b]$ einstellen soll. Die minimal, erzielbare Auflösung SNR_{\min} , die sich gemäß der Gleichung (3.41) am Ausgang y_A des modifizierten Tabellenverfahrens ergibt, wird ähnlich wie beim rechnergestützten Verfahren vom Quantisierungs-, Rundungs-, und Interpolationsfehler beeinflusst. Die gesamte, auftretende Rauschleistung:

$$P_{\epsilon, \text{ges}} = P_{Q, \text{max}} + P_{T, \text{max}} + P_{I, \text{max}} \quad (3.60)$$

setzt sich unter der Voraussetzung, daß die Fehlerquellen nicht miteinander korreliert sind, aus einer einfachen Addition der maximal auftretenden Rauschleistungsbeiträge $P_{Q, \text{max}}$, $P_{T, \text{max}}$ und $P_{I, \text{max}}$ zusammen. Wird im überabgetasteten $\Sigma\Delta$ -Modulator als Quantisierer ein Komparator verwendet, und besitzt das im $\Sigma\Delta$ -Modulator M .ter Ordnung verwendete Schleifenfilter eine Rauschübertragungsfunktion der Form $(1-z^{-1})^M$, so kann der maximale Rauschleistungsbeitrag $P_{Q, \text{max}}$, der durch den Quantisierungsfehler ϵ_Q am Ausgang y_A verursacht wird, angegeben werden zu:

$$\begin{aligned} P_{Q, \text{max}} &= \frac{(b-a)^2}{12} \cdot \frac{\pi^{2M} \cdot (n-1)^2}{2 \cdot (M+1)} \cdot \left(\frac{2 \cdot f_B}{f_c} \right)^{2(M+1)} \cdot \left(\max_{\xi \in [a, b]} \frac{\partial f_{S,1}^{-1}(x)}{\partial x} \right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \cdot \frac{\pi^{2M}}{2 \cdot (M+1)} \cdot \frac{(2^{n_K} - 1)^2}{\text{OSR}^{2(M+1)}} \cdot m_{\text{max}}^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die Größe des Quantisierungsrauschens wird von der **O**versampling-**R**ate OSR, der Ordnung M des $\Sigma\Delta$ -Modulators, der Wortbreite n_K des Transversalfilters und zuletzt von der Steigung m_{max} der zur Linearisierung benötigten Korrekturfunktion $f_{S,1}^{-1}(x)$ beeinflusst. Weiter tritt wie auch schon beim einfachen Tabellenverfahren und rechnergestützten Verfahren ein Fehler auf, der durch die endliche Darstellungswortbreite $n_{D,KS}$ im Kennlinien-Speicher hervorgerufen wird. Der dadurch maximal verursachte Rauschleistungsbeitrag $P_{T, \text{max}}$ bestimmt sich wie bei den beiden zuvor behandelten Verfahren zu:

$$P_{T, \text{max}} = \frac{(b-a)^2}{12 \cdot (2^{n_{D,KS}} - 1)^2} \quad (3.62)$$

Gemäß Gleichung (3.60) fehlt zur gesamten und zugleich auflösungsbegrenzenden Rauschleistung $P_{\varepsilon, \text{ges}}$ nur noch der maximal auftretende Rauschleistungsbeitrag $P_{I, \text{max}}$:

$$P_{I, \text{max}} = \frac{1}{b-a} \int_{a-b/2}^{b-a/2} \varepsilon_I(x)^2 dx, \quad (3.63)$$

der aufgrund der stark reduzierten Anzahl n an Kennlinien-Einträgen und der unmittelbar daraus resultierenden Notwendigkeit einer Interpolation hervorgerufen wird. Eine genaue Abschätzung des Interpolationsfehlers $\varepsilon_I(x)$ kann nur dann gefunden werden, wenn das angewandte Interpolationsverfahren, der Grad der verwendeten Interpolationspolynome sowie der Verlauf der benötigten Linearisierungsfunktion $f_{s, l}^{-1}(x)$ oder genauer die Ableitungen der Linearisierungsfunktion bekannt sind. Fehlerabschätzungen zu den unterschiedlichsten aber gebräuchlichsten Interpolationsverfahren können aus der Tabelle B.1 des Anhang B entnommen werden. Die Vorgehensweise zur Berechnung der freien Systemparameter (M , OSR , n_K , $n_{D, KS}$) des modifizierten Tabellenverfahrens erfolgt analog zum rechnergestützten Verfahren. Hierbei werden die maximal auftretenden Rauschbeiträge $P_{Q, \text{max}}$, $P_{T, \text{max}}$ und $P_{I, \text{max}}$, die durch den Quantisierungs-, Rundungs-, und Interpolationsfehler verursacht werden, vom Betrag her ungefähr gleich groß und jeweils auf ein Drittel der gesamten zulässigen Rauschleistung bei minimal vorgegebener Auflösung SNR_{min} dimensioniert:

$$P_{Q, \text{max}} \approx P_{T, \text{max}} \approx P_{I, \text{max}} \approx \frac{P_{\varepsilon, \text{ges}}}{3}. \quad (3.64)$$

Die Darstellungswortbreite $n_{D, mTv}$ am Ausgang y_A des modifizierten Tabellenverfahrens hängt von der minimal vorgegebenen Auflösung SNR_{min} ab:

$$n_{D, mTv} = \frac{SNR_{\text{min}}}{20 \cdot \log(2)}. \quad (3.65)$$

Gegenstand des nachfolgenden Abschnitts ist die Untersuchung des Interpolationsverhaltens von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren M .ter Ordnung. Im Rahmen der Untersuchungen werden dabei $\Sigma\Delta$ -Modulatoren erster bis dritter Ordnung betrachtet. Aus dem resultierenden Interpolationsverhalten soll eine eindeutige Zuordnung zu einem der in Kapitel 3.2.2 vorgestellten Interpolationsverfahren erfolgen. Zur Untersuchung des Interpolationsverhaltens wird die im **Bild 3.15** dargestellte Anordnung verwendet. Zum Untersuchungsobjekt der Anordnung gehört der $\Sigma\Delta$ -Modulator M .ter Ordnung sowie die erste Filterstufe FS1 in Form eines Transversalfilters, die zusammen für die Adressierung der im Kennlinien-Speicher abgelegten Daten verantwortlich sind.

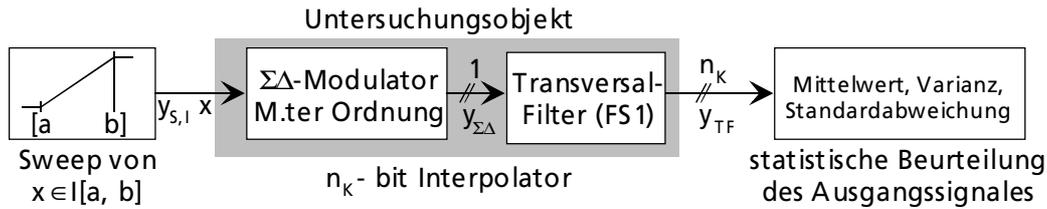


Bild 3.15 Anordnung zur Untersuchung des Interpolationsverhaltens von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren M.ter Ordnung

Soll der Kennlinien-Speicher $n=2^{n_k}$ Einträge besitzen, so müssen aus dem binären, pulshäufigkeitsmodulierten Ausgangssignal des $\Sigma\Delta$ -Modulators M.ter Ordnung n Adressworte von 0 bis $n-1$ erzeugt werden. Hierfür wird das im **Bild 3.16** gezeigte Transversalfilter mit $n-1$ Verzögerungsgliedern verwendet, das eine große Ähnlichkeit mit dem aus der Meßtechnik bekannten Mittelwertfilter besitzt [64].

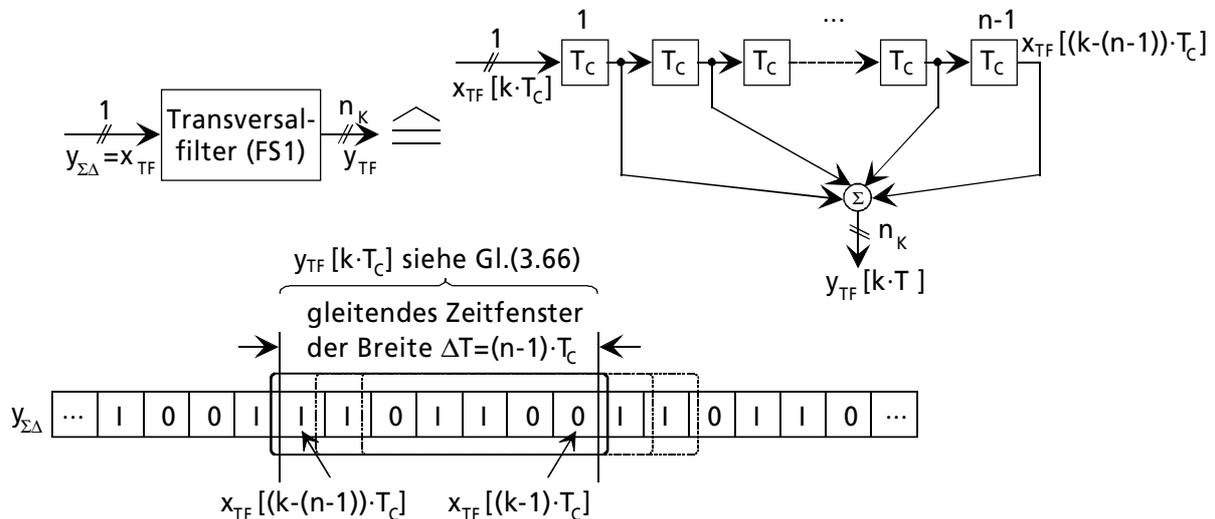


Bild 3.16 Struktur der ersten Filterstufe FS1 in Form eines Transversalfilters

Die gezeigte Filterstufe FS1 registriert dabei zu jedem Abtastzeitpunkt des $\Sigma\Delta$ -Modulators innerhalb eines gleitenden Zeitfensters die Anzahl der auftretenden Einsen. Die Breite $\Delta T=(n-1) \cdot T_C$ des gleitenden Zeitfensters wird dabei über die Anzahl $n-1$ an Verzögerungsgliedern festgelegt. Zum Abtastzeitpunkt $t=k \cdot T_C$ ergibt sich somit das Ausgangssignal des Transversalfilters zu:

$$y_{TF}[k \cdot T_C] = \sum_{i=1}^{n-1} x_{TF}[(k-i) \cdot T_C] \tag{3.66}$$

Zum Zeitpunkt $t=k \cdot T_C$ kann gemäß Gleichung (3.66) nur dann die untere Adresse Null auftreten, wenn alle $n-1$ verzögerten Modulatorausgangswerte $y_{\Sigma\Delta}$ Null gewesen waren. Analog dazu kann zu diesem Zeitpunkt die obere Adresse $n-1$ nur dann auftreten, wenn der binäre Ausgang $y_{\Sigma\Delta}$ des Modulators mindestens $(n-1)$ -mal hintereinander eine Eins geliefert hatte.

Wird nun für jedes Sensorsignal $y_{S,i}$ bzw. für jeden Eingangswert x des $\Sigma\Delta$ -Modulators M -ter Ordnung innerhalb des maximal erlaubten Eingangsbereiches $x \in [a, b]$ die Häufigkeit aller vorkommenden Adressworte y_{TF} am Ausgang des Transversalfilters protokolliert, so ergibt sich für jede Adresse eine sogenannte Verteilungsfunktion, die die Auftrittswahrscheinlichkeit der im Kennlinien-Speicher abgelegten Daten beschreibt. Über die Form der resultierenden Verteilungsfunktionen kann letztendlich auf das Interpolationsverhalten geschlossen werden.

Beginnen wir nun mit der Untersuchung eines $\Sigma\Delta$ -Modulator erster Ordnung gemäß **Bild 3.17**. Beim Entwurf des Schleifenfilters existieren aufgrund der niedrigen Modulator-Ordnung keine großartigen Freiheitsgrade. Für das Schleifenfilter kommen lediglich „Forward-Euler“ und „Backward-Euler“-Integratoren gemäß Anhang C in Betracht [66].

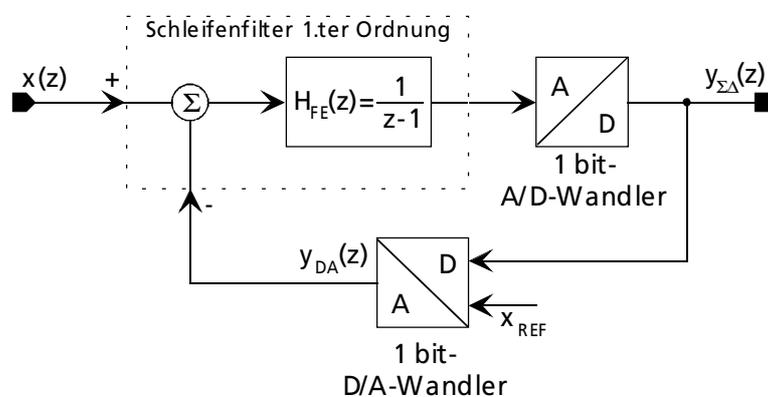


Bild 3.17 $\Sigma\Delta$ -Modulator 1.ter Ordnung

Bei diesem System handelt es sich, wie auch bei den zwei nachfolgenden, um einen nicht-linearen, abgetasteten Regelkreis. Die Nichtlinearitäten der Systeme werden jeweils durch die Verwendung des 1bit-A/D-Wandlers (Komparators) hervorgerufen. Eine exakte deterministische Analyse ist dementsprechend schwierig und derzeitig nur bis maximal zur Ordnung $M=2$ möglich. Interessierte Leser werden auf entsprechend geeignete Literatur verwiesen [65, 66]. Für eine exakte Analyse des Interpolationsverhaltens wird das System aus diesem Grund über einen Satz von entsprechenden Differenzgleichungen beschrieben, die über numerische Methoden gelöst werden und letztendlich Rückschlüsse auf das transiente Verhalten und den daraus resultierenden Langzeiteigenschaften zulassen.

Wird für jeden Eingangswert x innerhalb des Eingangsintervalles $[a, b]$ des $\Sigma\Delta$ -Modulators die Häufigkeit der vorkommenden Adressworte y_{TF} aufgenommen, so ergeben sich die in **Bild 3.18** dargestellten Verteilungsfunktionen für die Zugriffshäufigkeit auf die im Kennlinien-Speicher abgelegten Daten bzw. die Auftrittswahrscheinlichkeit der Kennlinien-Adressen y_{TF} . Das gezeigte Interpolationsverhalten ist äußerst interessant, da alle inneren Verteilungsfunktionen des $\Sigma\Delta$ -Modulators erster Ordnung gleich geartet sind und lediglich gegeneinander um den Abstand Δx verschoben sind.

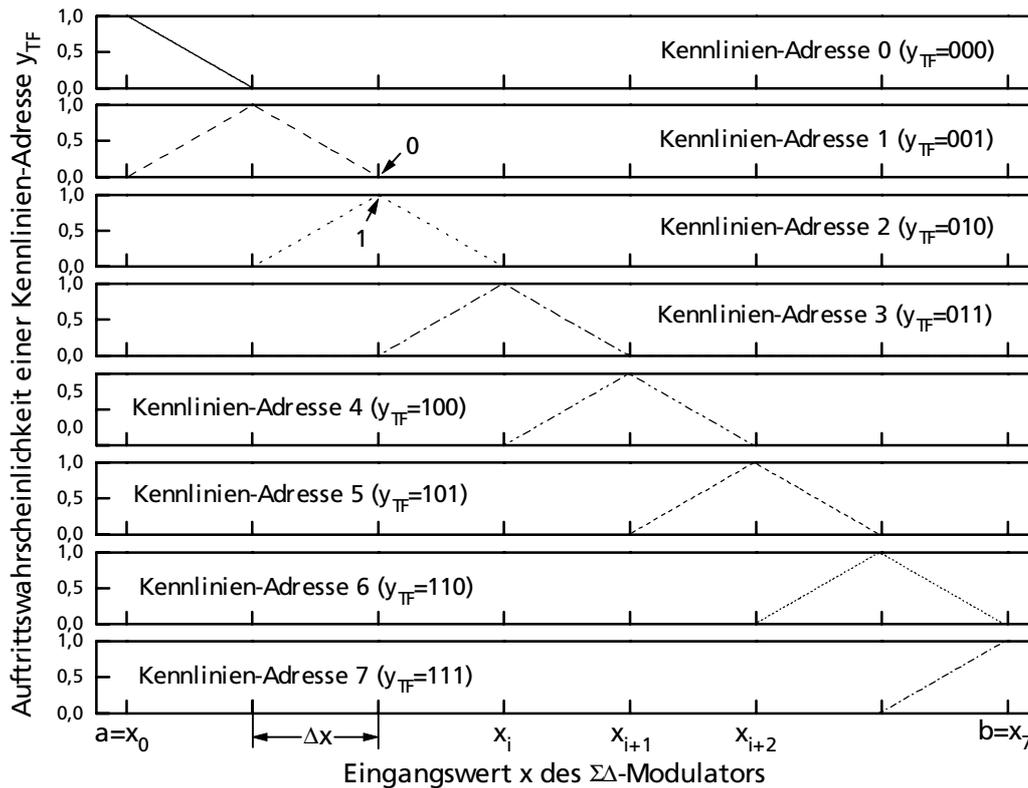


Bild 3.18 Verteilungsfunktionen für die Auftrittswahrscheinlichkeit einer Kennlinien-Adresse y_{TF} bei der Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 1.ter Ordnung ($n=8$)

Es bilden sich genau $n=8$ Verteilungsfunktionen aus, da hier im vorliegenden Beispiel $n-1=7$ Verzögerungsglieder in dem Transversalfilter verwendet wurden. Sollen beispielsweise 16 Einträge im Kennlinien-Speicher angesprochen werden, so muß einfach die Anzahl der Verzögerungsglieder von 7 auf 15 erhöht werden. Die einzelnen Verteilungsfunktionen sind nur innerhalb von lokal begrenzten Teilintervallen ungleich null, stückweise linear und positiv. Treten Werte am Eingang des $\Sigma\Delta$ -Modulators auf, die außerhalb des Approximationsintervalls $[a,b]$ liegen, so werden alle auftretenden Adressworte, die unterhalb sowie oberhalb des gültigen Adressraums des Kennlinien-Speichers liegen, durch eine eingebaute Begrenzung im Transversalfilter auf die unterste bzw. oberste Adresse abgebildet. Hierdurch wird verhindert, daß jemals Adressen auftreten können, die außerhalb des gültigen Adressraums des Kennlinien-Speichers liegen. Die Verteilungsfunktionen sind stetig, jedoch nicht stetig differenzierbar. Aufgrund dieser Feststellungen wird bei der Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators erster Ordnung ein stückweises, lineares Interpolationsverhalten erzielt. Dieses Interpolationsverhalten läßt sich somit über lineare Basisfunktion $B^2(x)$ nachbilden (siehe dazu Kapitel 3.2.2).

Erhöhen wir nun die Ordnung M des Schleifenfilters auf zwei, so ergibt sich der in **Bild 3.19** gezeigte $\Sigma\Delta$ -Modulator 2.ter Ordnung. Im Gegensatz zum Modulator 1.ter Ordnung ist schon etwas mehr Freiheit beim Design des Schleifenfilters gegeben. Es können sowohl „Forward-Euler“ als auch „Backward-Euler“ Integratoren gemischt sowie ausschließlich eingesetzt werden. Der Faktor γ dient dabei zur Einstellung der Stabilität des $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.ter Ord-

nung. Mit diesem Faktor können die Polstellen der Rauschübertragungsfunktion $H_{NTF}(z)$ (allg. Definition ist im Anhang C dieser Arbeit nachzuschlagen) innerhalb des Einheitskreises gezielt plaziert werden.

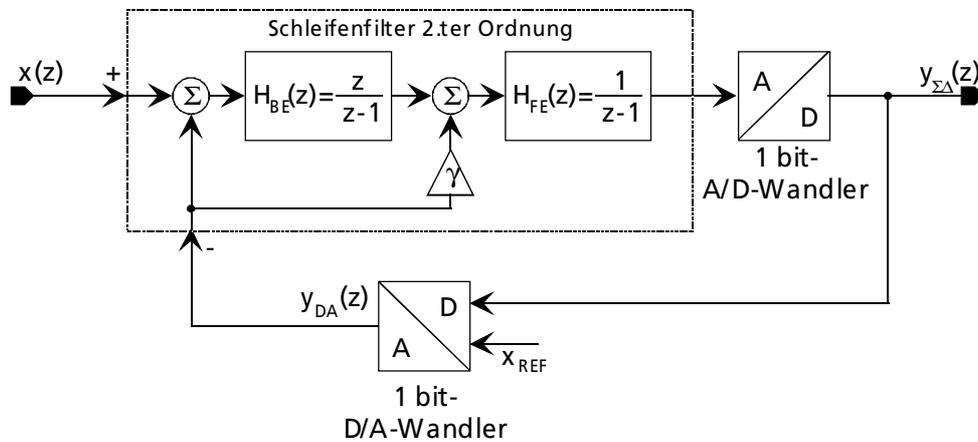


Bild 3.19 $\Sigma\Delta$ -Modulator 2.ter Ordnung

Wird nun wieder für jeden Eingangswert x des $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.ter Ordnung die Häufigkeit der vorkommenden Adressworte y_{TF} aufgenommen, so ergeben sich die in **Bild 3.20** dargestellten Verteilungsfunktionen für die Zugriffshäufigkeit auf die im Kennlinien-Speicher abgelegten Daten bzw. die Auftretswahrscheinlichkeit der Kennlinien-Adressen y_{TF} .

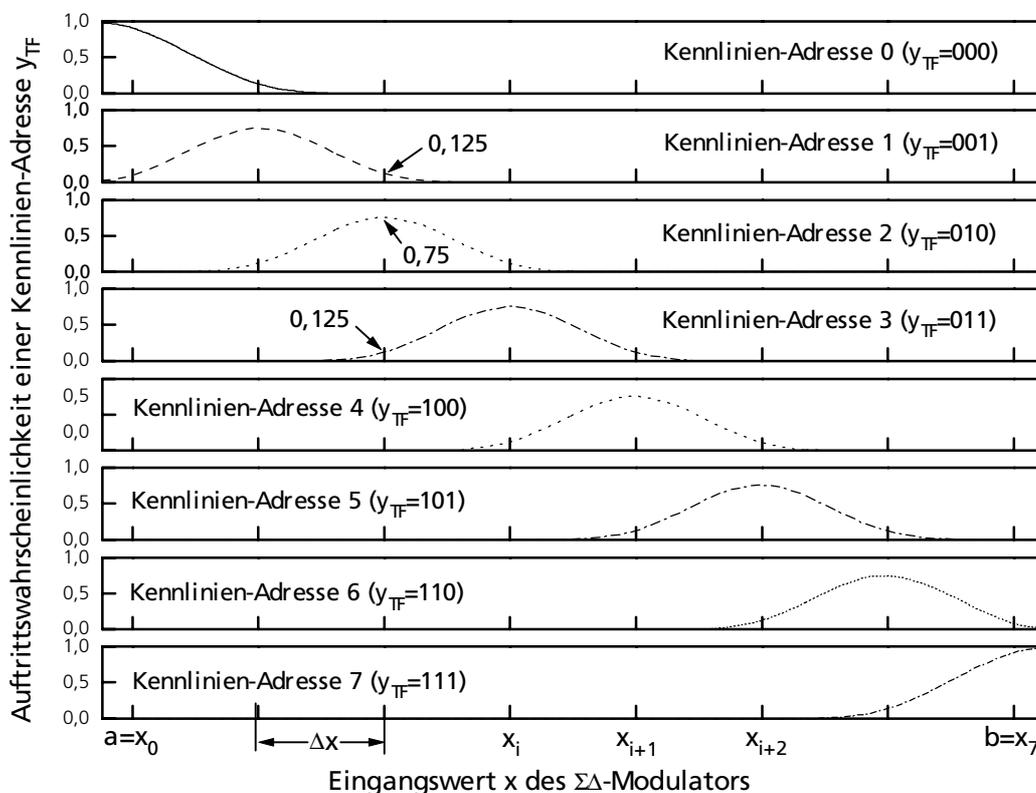


Bild 3.20 Verteilungsfunktionen für die Auftretswahrscheinlichkeit einer Kennlinien-Adresse y_{TF} bei der Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.ter Ordnung ($\gamma=0,75$ und $n=8$)

Ähnlich wie beim $\Sigma\Delta$ -Modulator 1.ter Ordnung bilden sich acht um Δx gegeneinander verschobene Verteilungsfunktionen aus, da die erste Dezimationsstufe mit sieben Verzögerungsgliedern unverändert geblieben ist. Auch hier erkennt man, daß die Verteilungsfunktionen an den äußeren Approximationsgrenzen a und b anders verlaufen als im Inneren des Approximationsintervalls. Dies liegt an der bereits zuvor erwähnten Begrenzung innerhalb der 1.ten Dezimationsstufe. Der Verlauf dieser Verteilungsfunktionen bzw. die Auftrittswahrscheinlichkeit der größten und kleinsten Kennlinien-Adresse setzt sich aus einer Summation von weiter über die Approximationsgrenzen hinaus fortgesetzten inneren Verteilungsfunktionen zusammen. Sehr interessant ist jedoch die Tatsache, daß sich im Gegensatz zum $\Sigma\Delta$ -Modulator erster Ordnung die Form der Verteilungsfunktionen für das Auftreten einer Kennlinien-Adresse verändert hat. Die inneren Verteilungsfunktionen sind innerhalb von lokal begrenzten Teilintervallen ungleich null, positiv und bei entsprechender Wahl des Koeffizienten γ stückweise quadratisch. Die Verteilungsfunktionen sind dadurch zweimal stetig und einmal stetig differenzierbar. Aufgrund dieser Feststellungen wird bei der Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.ter Ordnung ein stückweises, quadratisches Interpolationsverhalten erzielt. Dieses Interpolationsverhalten läßt sich dementsprechend über quadratische Basisfunktion $B^3(x)$ nachbilden (siehe dazu Kapitel 3.2.2).

Intensive Untersuchungen am $\Sigma\Delta$ -Modulator zweiter Ordnung ergeben, daß bei einer Veränderung des Koeffizienten γ die Form der Verteilungsfunktionen beeinflusst werden kann. Diese Ergebnisse sind im nachfolgenden **Bild 3.21** gezeigt. Hierzu werden die resultierenden Verteilungsfunktionen sowie die Signal- und Rauschübertragungsfunktionen $H_{STF}(z)$ und $H_{NTF}(z)$ vergleichend gegenübergestellt, deren allg. Definitionen im Anhang C zu finden sind.

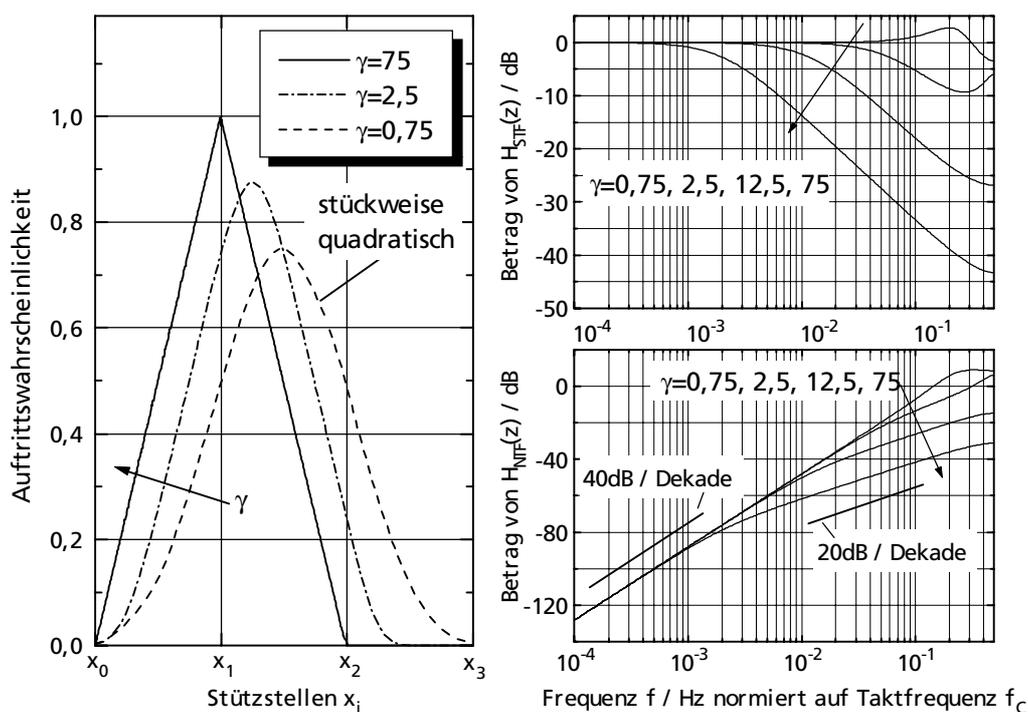


Bild 3.21 Interpolationsverhalten eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 2.ter Ordnung in Abhängigkeit vom Faktor γ

Erhöht man den Koeffizienten γ , so wird verständlicherweise der Einfluß der ersten Integratorstufe zunehmend abgeschwächt und die Verteilungsfunktionen nehmen die Form an, wie sie bei einem $\Sigma\Delta$ -Modulators erster Ordnung auftreten. Schaut man sich parallel dazu die Rauschübertragungsfunktionen H_{NTF} 's an, so erkennt man ebenfalls, daß im Bereich der halben Abtastfrequenz das zweifach differenzierende Verhalten zunehmend in ein einfach differenzierendes Verhalten übergeht. Inwieweit das geänderte Rauschübertragungsverhalten ausgehend von der halben Abtastfrequenz $f_c/2$ zu niedrigeren Frequenzen hin eine Veränderung der Verteilungsfunktionen bewirkt, ist abhängig von der Filtertiefe bzw. Fensterbreite der verwendeten ersten Dezimationsstufe. Es stellt sich nun die Frage, ob sich durch Erniedrigung von γ nicht auch Verteilungsfunktionen erzielen lassen, die stückweise kubisch sind. Prinzipiell kann man durch die Erniedrigung des Faktors γ die Rauschleistung nahe der halben Abtastfrequenz weiter erhöhen, jedoch wird dadurch der $\Sigma\Delta$ -Modulator 2.ter Ordnung zunehmend instabil.

Untersuchungen des Interpolationsverhaltens und entsprechende Stabilitätsbetrachtungen mittels Wurzelortskurven (WOK) ergeben, daß kein stabiler $\Sigma\Delta$ -Modulator 2.ter Ordnung entworfen werden kann, der Verteilungsfunktionen mit einem stückweise kubischen Verlauf besitzt. Um die Rauschleistung im Sperrbereich nahe der halben Abtastfrequenz $f_c/2$ weiter zu erhöhen ohne an Stabilität zu verlieren, liegt es nahe die Ordnung M des Schleifenfilters weiter zu erhöhen. Daraus resultiert ein $\Sigma\Delta$ -Modulator 3.ter Ordnung, dessen Blockdiagramm in dem nachfolgenden **Bild 3.22** gezeigt ist.

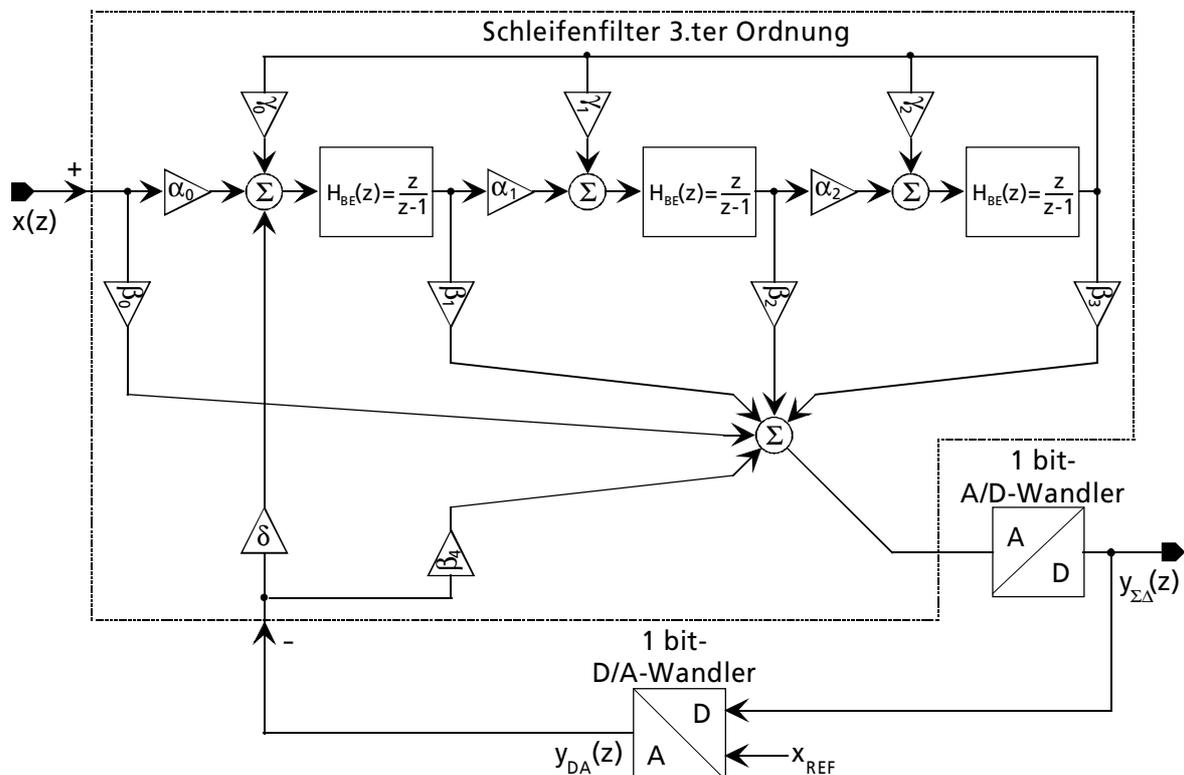


Bild 3.22 $\Sigma\Delta$ -Modulator 3.ter Ordnung

Das in dem $\Sigma\Delta$ -Modulator verwendete Schleifenfilter besteht aus drei in Reihe kaskadierten „Backward-Euler“-Integratoren. Das Eingangssignal x und die drei Ausgänge der „Backward-Euler“-Integratoren werden mit den Koeffizienten β_0 - β_3 gewichtet und anschließend auf einen 1bit-A/D-Wandler (Komparator) geführt. Der Ausgang des letzten Integrators wird über die Koeffizienten γ_0 - γ_2 auf die Eingänge der Integratoren zurückgekoppelt. Hiermit können die Nullstellen der Rauschübertragungsfunktion $H_{\text{NTF}}(z)$ derart verteilt werden, daß die Maxima der Rauschübertragungsfunktion im Durchlaßbereich des Schleifenfilters gleich hoch sind. Der Koeffizient β_4 koppelt den Komparatorausgang nochmals gewichtet auf seinen eigenen Eingang zurück. Mit der Einführung dieses Koeffizienten wird ein zusätzlicher Freiheitsgrad im Nennerpolynom der Signal- und Rauschübertragungsfunktion erhalten, wodurch sich die Pole beliebig innerhalb des Einheitskreises der komplexen z -Ebene plazieren lassen. Dieser Faktor dient zur Stabilitätskontrolle und kann wie der Faktor γ beim $\Sigma\Delta$ -Modulator 2.ter Ordnung zur Einstellung des Interpolationsverhaltens verwendet werden. Der Koeffizient α_0 skaliert das Eingangssignal bzw. den Eingang der ersten Integratorstufe, während die Koeffizienten α_1 und α_2 die Eingänge der nachfolgenden letzten beiden Integratoren gewichten. Hierdurch kann ebenfalls in gewissem Maße die Stabilität des Modulators beeinflusst werden, da durch die Skalierung verhindert werden kann, daß die Integratoreingänge in die Begrenzung laufen. Die Koeffizienten des $\Sigma\Delta$ -Modulators sind nach einer Dimensionierungsvorschrift von Hammerschmidt [101] so gewählt worden, daß sich ein stabiles Verhalten des Modulators einstellt. Durch die Veränderung des Koeffizienten β_4 kann letztendlich in gewissen Grenzen das gewünschte Interpolationsverhalten eingestellt werden. Für die Dimensionierung des Schleifenfilters bzw. der Bestimmung der freien Koeffizienten müssen wir eine obere Eckfrequenz für den Durchlaßbereich, sowie die Abtastfrequenz f_C vorgeben. Bei einer angenommenen oberen Eckfrequenz f_B von 1kHz und einer Abtastfrequenz f_C von 100kHz ergeben sich die Koeffizienten des $\Sigma\Delta$ -Modulators 3.ter Ordnung zu:

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0,5, \beta_0=0, \beta_1=2,4, \beta_2=2,1, \beta_3=0,8, \beta_4=-0,5, \gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=0, \text{ und } \delta=1,$$

wobei das Eingangs- sowie Rückkopplungssignal x und y_{DA} jeweils auf ± 1 normiert sind. Verändert man den Koeffizienten β_4 von $-0,5$ auf -1 , so kann das Verhalten der Rauschübertragungsfunktion nahe der halben Abtastfrequenz $f_C/2$ derart verändert werden, daß die Verteilungsfunktionen des Modulators ein stückweise kubisches Verhalten aufweisen.

Mit diesem Koeffizientensatz ergeben sich die in **Bild 3.23** gezeigten Verteilungsfunktionen. Da im Vergleich zu den vorhergehenden Untersuchungen zum Interpolationsverhalten von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren erster und zweiter Ordnung keinerlei Änderungen an der ersten Dezimationsstufe vorgenommen worden sind, bilden sich auch hier wieder $n=8$ Verteilungsfunktionen aus, die um den Abstand Δx gegeneinander verschoben sind. Die Verteilungsfunktionen sind lokal definiert, innerhalb gewisser Teilintervalle von null verschieden, positiv und bei entsprechender Wahl des Koeffizientensatzes stückweise kubisch. Aus diesem Grund sind diese Verteilungsfunktionen dreimal stetig und demzufolge zweimal stetig differenzierbar.

Aufgrund dieser Feststellungen wird bei der Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 3.ter Ordnung ein stückweises, kubisches Interpolationsverhalten erzielt. Dieses Interpolationsverhalten läßt sich über kubische Basisfunktionen $B^4(x)$ nachbilden. Von allen zuvor untersuchten Modulatoren nimmt somit der $\Sigma\Delta$ -Modulator dritter Ordnung in dem modifizierten Tabellenverfahren gemäß **Bild 3.14** wie auch die kubische Interpolation in der numerischen Approximationstheorie aufgrund seiner hervorragenden Interpolationseigenschaften eine überaus wichtige Rolle ein.

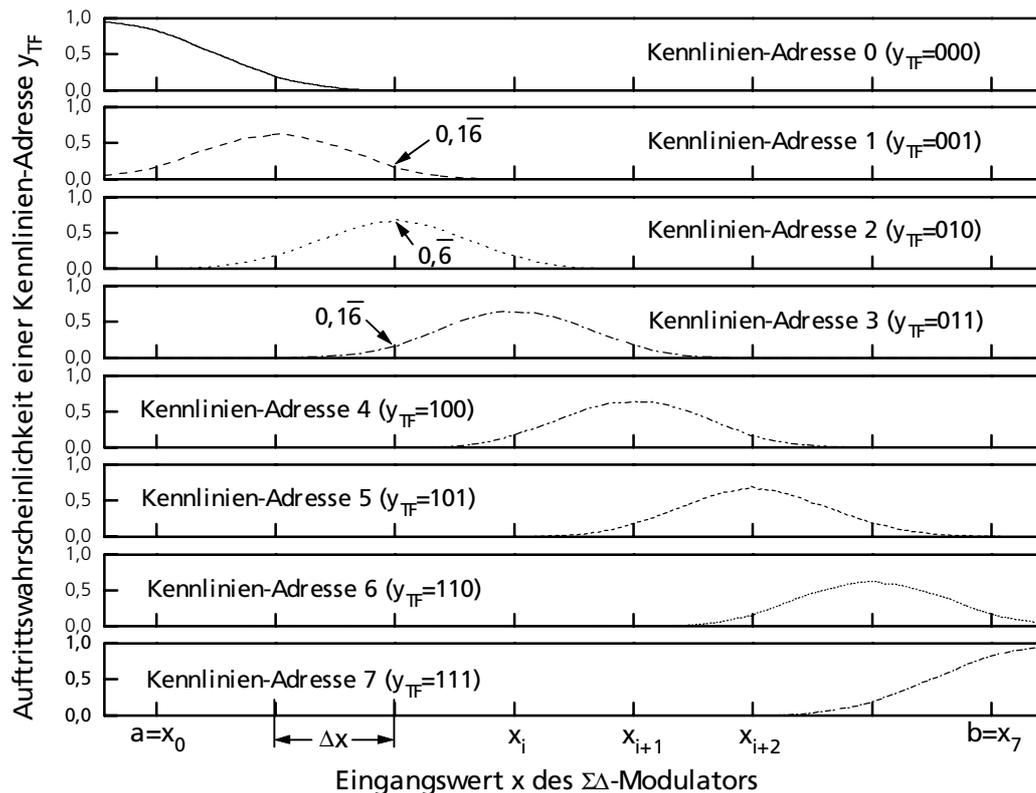


Bild 3.23 Verteilungsfunktionen für die Auftretswahrscheinlichkeit einer Kennlinien-Adresse y_{TF} bei der Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 3.ter Ordnung ($n=8$)

Um die ausführlichen Untersuchungen zum Interpolationsverhalten von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren unterschiedlicher Ordnung M abzuschließen, sind die resultierenden inneren Verteilungsfunktionen der Übersichtlichkeit halber in dem nachfolgenden **Bild 3.24** zusammengefaßt. Der unmittelbare Vergleich zeigt sehr deutlich, wie sich der Verlauf der Verteilungsfunktionen ändert, wenn man die Ordnung M des $\Sigma\Delta$ -Modulators, sprich die des verwendeten Schleifenfilters, erhöht. Ein zusätzlicher Vergleich mit den polynomialen Basisfunktionen $B^r(x)$ zeigt, daß der Grad r der Basisfunktionen mit der Ordnung M der $\Sigma\Delta$ -Modulatoren korrespondiert. Demzufolge kann beim modifizierten Tabellenverfahren durch die Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators erster bis dritter Ordnung das Spektrum der stückweise linearen, quadratischen und kubischen Interpolation abgedeckt werden.

Die zunehmend stetige Differenzierbarkeit der Basis- bzw. Verteilungsfunktionen schlägt sich in einem zunehmend glatteren Verlauf der approximierten Kennlinie nieder. So werden beispielsweise bei der kubischen Interpolation die Funktionswerte mit minimaler Gesamtkrümmung untereinander verbunden.

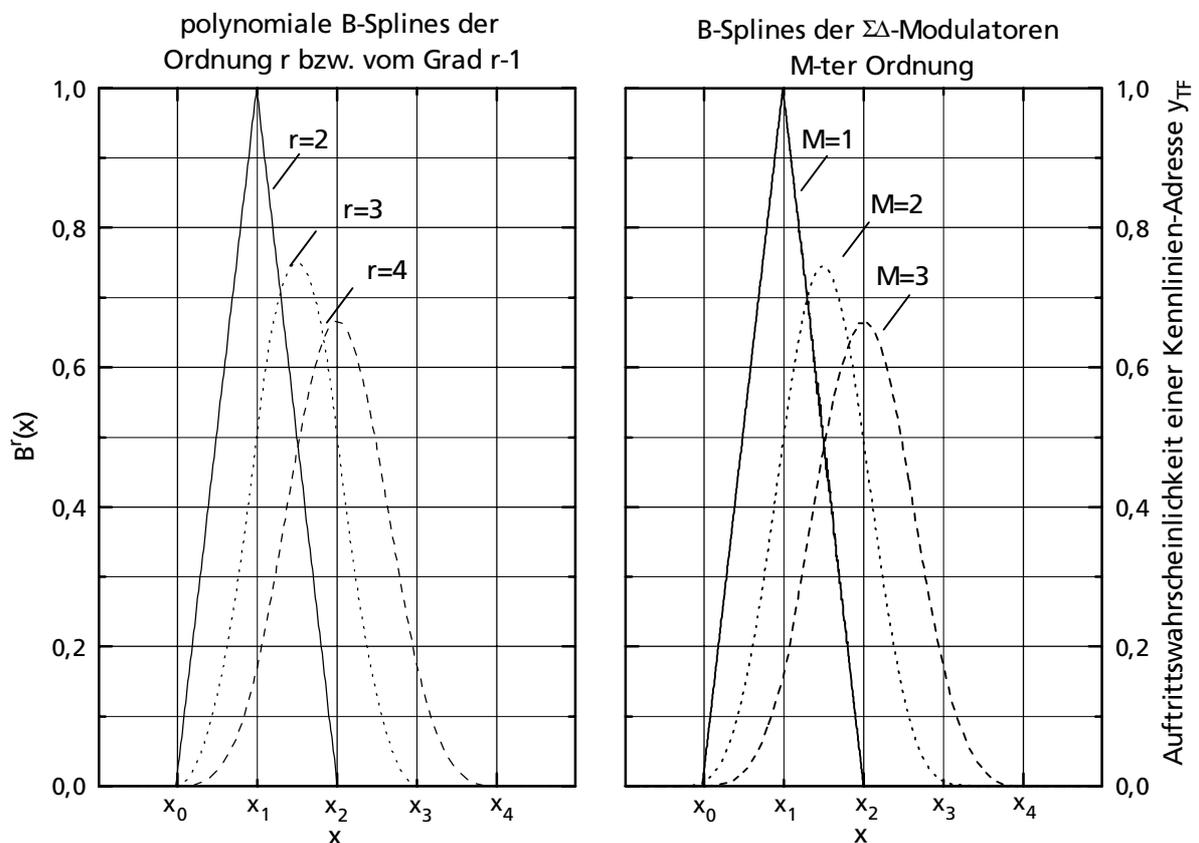


Bild 3.24 Vergleich: Basisfunktionen des $\Sigma\Delta$ -Modulators M -ter Ordnung und polynomiale Basisfunktionen $B^f(x)$ der Ordnung r

Mit den zuvor gewonnenen Erkenntnissen über das Interpolationsverhalten von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren unterschiedlicher Ordnung M soll der eigentliche Interpolationsmechanismus anhand eines Beispiels aus dem nachfolgenden **Bild 3.25** nochmals kurz verdeutlicht werden [62]. Dafür soll die Ordnung M des $\Sigma\Delta$ -Modulators zunächst eins betragen. Beträgt das Eingangssignal x des Modulators beispielsweise $-4/7$, (d.h. liegt es genau zwischen zwei Einträgen im Kennlinien-Speicher), so springt das mit der Abtastfrequenz f_c des $\Sigma\Delta$ -Modulators wechselnde Adresssignal y_{TF} des Transversalfilters mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 50% zwischen den Adressen eins und zwei hin und her. Diese Folge von Adresswerten wird in unserem Beispiel über die im Kennlinien-Speicher abgelegte Funktionalität in eine Zahlenfolge von Vierzigen und Fünfzigen umgewandelt, die am Ausgang y_{KS} des Kennlinien-Speichers erscheint. Für das gewollte Hin- und Herspringen der Adressen ist die noch vorhandene Rauschleistung am Ausgang des Transversalfilters verantwortlich. Da immer nur zwischen maximal zwei Adressen hin- und hergesprungen wird, handelt es sich hier eindeutig um eine stückweise lineare Interpolation.

Der resultierende Korrekturwert von 45, der genau in der Mitte auf der linearen Verbindung zwischen den zwei angesprungenen Einträgen im Kennlinien-Speicher liegt, wird durch die zweite Filterstufe FS2, einem Interpolationsfilter mit Tiefpaßcharakter, erzwungen.

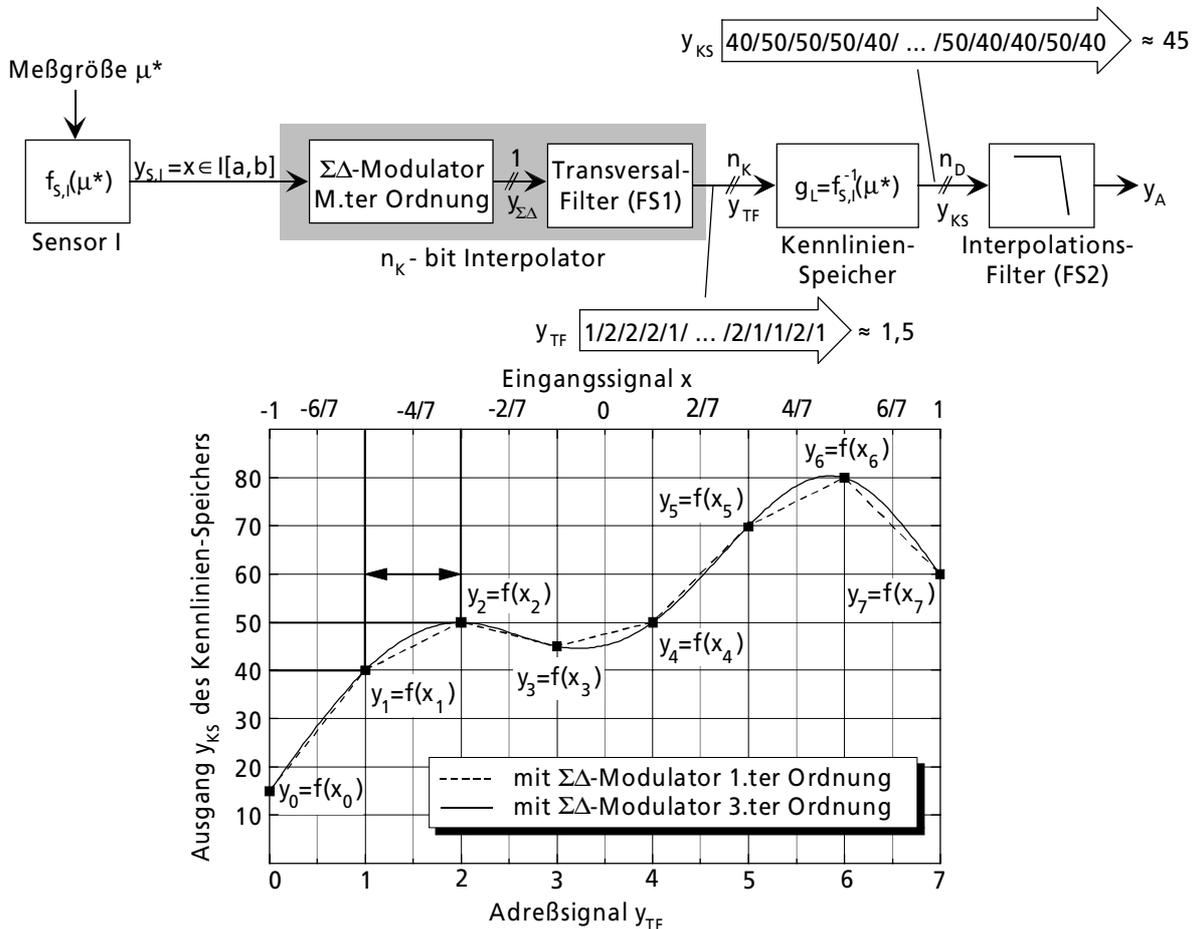


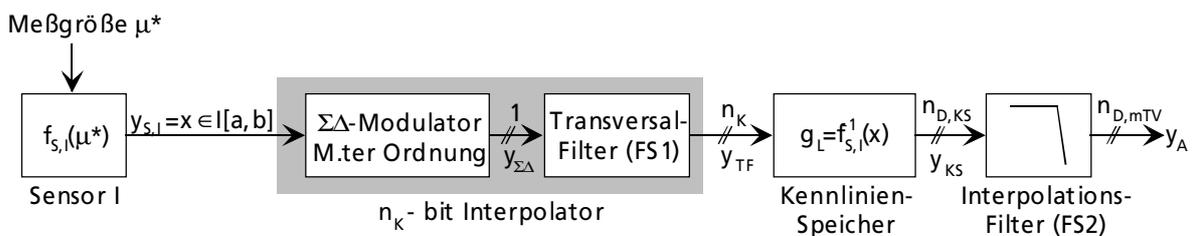
Bild 3.25 Interpolationsmechanismus

Untersuchungen nach Candy [63] zeigen, daß für eine erfolgreiche Unterdrückung des Quantisierungsrauschens die Ordnung des Transversal- und Interpolationsfilters in Summe mindestens $M+1$ betragen sollte. Da es sich beim Transversalfilter um ein Filter erster Ordnung mit Tiefpaßcharakter handelt, muß die Ordnung des Interpolationsfilters folglich mit der Ordnung M des verwendeten $\Sigma\Delta$ -Modulators übereinstimmen. Bei erfolgreicher Unterdrückung steigt die Leistung des Quantisierungsrauschens im Sperrbereich nicht mehr über der Frequenz f an, so daß am Ausgang des Interpolationsfilters das interpolierte Signal vorliegt, das nicht ständig mit der Taktfrequenz f_c zwischen den Einträgen des Kennlinien-Speichers hin und herspringt. Dieses Signal kann zudem mit einer niedrigeren Taktfrequenz f_B weiterverarbeitet werden, die der maximalen Bandbreite f_B des Sensorsignals $y_{S,I}$ entspricht, ohne die Auflösung am Ausgang y_A durch die Unterabtastung zu zerstören. Soll die interpolierte Linearisierungsfunktion $f_{S,I}^{-1}(x)$ stetig differenzierbar sein, so können die Einträge im Kennlinien-Speicher nicht mehr linear untereinander verbunden werden.

Verwendet man einen $\Sigma\Delta$ -Modulator 3.ter Ordnung mit kubischen Interpolationsverhalten, so können die Einträge im Kennlinien-Speicher über eine Kurve mit minimaler Gesamtkrümmung untereinander verbunden werden. Außerdem kann im Gegensatz zur Verwendung eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 1.ter Ordnung die Anzahl n der Einträge im Kennlinien-Speicher weiter reduziert werden, ohne den resultierenden Interpolationsfehler $\varepsilon_i(x)$ signifikant zu erhöhen.

Wie beim rechnergestützten Verfahren kann mit dem modifizierten Tabellenverfahren neben der Linearisierung auch eine nichtlineare Kompensation von unerwünschten Störgrößen oder eine Kombination aus beiden erfolgen. Das nachfolgende **Bild 3.26** zeigt die Realisierung der zwei verschiedenen Anwendungsfälle. Fall a), der bereits zuvor in Bild 3.14 gezeigt und ausführlich behandelt wurde, kann für die Linearisierung eines Sensors verwendet werden, dessen Ausgangssignal $y_{S,I}$ sich aufgrund des ausgenutzten Meßprinzips nichtlinear verhält. Soll der Systemausgang y_A analog dargestellt werden, so kann der digitale Tiefpaßfilter FS2 durch einen D/A-Wandler und einer anschließend analogen Tiefpaßfilterung ersetzt werden.

a) Linearisierung:



b) Korrektur einer Querempfindlichkeit:

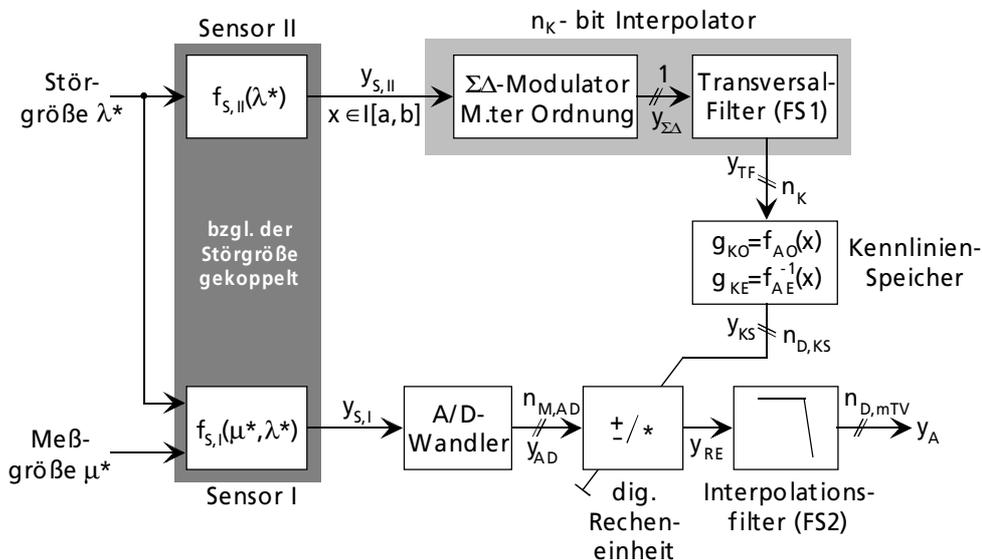


Bild 3.26 Linearisierung und Korrektur einer Querempfindlichkeit mit Hilfe des modifizierten Tabellenverfahrens auf der Basis von $\Sigma\Delta$ -Modulatoren

Fall b) zeigt dagegen ein Konzept zur Korrektur einer vorhandenen Querempfindlichkeit gegenüber einer auftretenden Störgröße λ^* . Hierzu wird lediglich zwischen dem Kennlinien-Speicher

und dem zur Interpolation notwendigen Tiefpaßfilter FS2 aus Fall a) eine einfache digitale Recheneinheit zur Addition und Multiplikation geschaltet, die das auf die Meß- und Störgröße empfindlich reagierende Signal $y_{S,I}$ verarbeitet. Da die Recheneinheit nur digitale Signale verarbeiten kann, muß das Sensorsignal $y_{S,I}$ mit einem zusätzlichen A/D-Wandler digitalisiert werden. Hierfür kann sowohl ein konventioneller A/D-Wandler oder ein überabgetasteter A/D-Wandler Verwendung finden. Dabei wird die vorhandene Querempfindlichkeit gegenüber der Störgröße über die im Kennlinien-Speicher befindlichen Einträge korrigiert. Der benötigte Speicherplatz im Kennlinien-Speicher für die Korrekturfunktionen g_L zur Linearisierung bzw. g_{KO} und g_{KE} zur Kompensation einer störgrößenabhängigen Offset- und Empfindlichkeitsdrift liegen in der gleichen Größenordnung wie beim zuvor behandelten rechnergestützten Verfahren. Allerdings wird hier, im Gegensatz zum rechnergestützten Verfahren, kein zusätzlicher Programmspeicher für das Ablegen von notwendigen Approximationsroutinen benötigt, so daß sich der Speicherbedarf mit dem modifizierten Tabellenverfahren weiter reduzieren läßt. Im Allgemeinen reicht je nach Nichtlinearität der notwendigen Korrekturfunktionen eine Anzahl n von 2-16 Kennlinien-Einträgen mit jeweils einer Darstellungswortbreite $n_{D,KS}$ zwischen 6 und 12 bit aus, um die auftretenden, nichtidealen Eigenschaften vieler auf dem Markt erhältlicher Sensoren zu korrigieren.

Soll im vorliegenden Fall der Ausgang y_A analog dargestellt werden, so kann hinter dem digitalen Tiefpaßfilter FS2 ein D/A-Wandler mit einer entsprechenden Auflösung $n_{D,mTv}$ verwendet werden. Diese Methode ist nicht besonders auflösungsfördernd, da das ursprünglich analoge Sensorsignal $y_{S,I}$ zur Korrektur digitalisiert werden muß, bevor es wieder in eine Analogdarstellung umgewandelt wird. Eine viel elegantere Methode besteht jedoch darin den A/D-Wandler und die digitale Recheneinheit durch einen analogen Signalpfad zu ersetzen, der über eine digitale Nullpunkts- und Verstärkungseinstellung programmierbar bleibt. Die Realisierung eines solchen Systems ist Gegenstand des nachfolgenden Kapitel 4.

3.3.4 Gegenüberstellung der vorgestellten Approximationsverfahren

Zum Abschluß dieses Kapitels sind der Übersichtlichkeit halber die zuvor vorgestellten Hardwarekonzepte zur Approximation einer Kennlinie in der nachfolgenden **Tabelle 3.3** anhand einiger wichtiger Beurteilungskriterien vergleichend gegenübergestellt. Erinnern wir uns an den Anfang des Kapitels 3.3 zurück, so kristallisierte sich schon frühzeitig bei der Darstellung des einfachen Tabellenverfahrens heraus, daß die benötigte Anzahl n an Tabellen-Einträgen bzw. der unmittelbar damit verbundene Speicherbedarf für die Nachbildung einer Kennlinie unakzeptabel hoch war. Da zudem die Notwendigkeit bestand, die hohe Anzahl an Tabellen-Einträgen über eine Kalibration zu bestimmen, war dieses Verfahren aus Zeit- und Kostengründen für die Praxis nahezu ungeeignet.

Diese unbefriedigende Sachlage provozierte die Suche nach alternativen Konzepten, mit denen der Speicherbedarf und der Kalibrationsaufwand drastisch reduziert werden konnte. Eine unmittelbar auf der Hand liegende, zweite Lösung war ein rechnergestütztes Verfahren unter der Verwendung eines Mikroprozessors. Es mußte nicht mehr zu jedem Eingangswert ein korrespondierender Ausgangswert in einer Tabelle abgelegt werden, sondern nur noch eine stark reduzierte Anzahl. Werte zwischen den vorhandenen Tabellen-Einträgen konnten jetzt mit Hilfe der vorhandenen Rechenleistung des Mikroprozessors über unterschiedliche Methoden der numerischen Approximationstheorie berechnet werden.

Tabelle 3.3 Gegenüberstellung der verschiedenen Hardwarekonzepte

Verfahren Beurteilungskriterium	einfaches Tabellenverfahren		rechnergestütztes Verfahren		modifiziertes Tabellenverfahren mit $\Sigma\Delta$ -Modulatoren	
Speicherbedarf S	hoch $S = 2^{n_{M,AD}} \cdot n_{D,KS}$ bit ²⁾	--	mittel ¹⁾ $S = 2^{n_K} \cdot n_{D,KS}$ bit ²⁾	+/-	niedrig $S = 2^{n_K} \cdot n_{D,KS}$ bit ²⁾	++
Kalibrationsaufwand	hoch	--	niedrig	++	niedrig	++
Realisierbare Methoden:	Linearisierung und / oder Störgrößenkompensation	++	Linearisierung und / oder Störgrößenkompensation	++	Linearisierung und / oder Störgrößenkompensation	++
Software & Rechenaufwand	niedrig	++	mittel bis hoch ³⁾	--	niedrig	++
Hardwareaufwand	niedrig	++	hoch	--	niedrig	++
Geschwindigkeit	hoch	++	niedrig	--	mittel	+/-
Implementierung möglicher Interpolationsverfahren	nicht möglich	--	gerade, lineare, quadratische und kubische Interpolation	++	lineare, quadratische und kubische Interpolation	++
Änderung des Interpolationsverfahren	nicht möglich	--	durch Software	++	durch Hardware (Veränderung der Modulator-Ordnung M)	+/-

1) Bedarf für Programmspeicher mit berücksichtigt; 2) $n_K \ll n_{M,AD}$; 3) je nach Approximationsverfahren

Dieses Verfahren stellte schon eine recht deutliche Verbesserung zum einfachen Tabellenverfahren dar, dennoch durften die noch vorhandenen Nachteile nicht übersehen werden. Hierzu gehörten zum einen der überdurchschnittlich große Hardwareaufwand und zum anderen die geringe Geschwindigkeit mit der die Zwischenwerte aus den vorhandenen Tabelleneinträgen berechnet werden konnten. Ebenso reduzierte sich der Speicherbedarf nicht in dem gewünschten Maße, da für die implementierten Approximationsroutinen zur Berechnung der Zwischenwerte ebenfalls Speicher belegt wurde.

Letztendlich wurde ein modifiziertes Tabellenverfahren auf der Basis von überabgetasteten $\Sigma\Delta$ -Modulatoren vorgestellt, mit dem die Vorteile der beiden zuvor vorgestellten Verfahren erhalten blieben, die dadurch entstehenden Nachteile jedoch weitgehend vermieden werden konnten. Dieses modifizierte Tabellenverfahren wurde vom einfachen Tabellenverfahren abgeleitet. Hierzu wurde einfach der konventionelle A/D-Wandler durch einen $\Sigma\Delta$ -Modulator mit nachfolgendem Dezimator ersetzt. Um die interpolative Eigenschaft des Wandlers auszunutzen, mußte das Tiefpaßfilter des Dezimators in zwei Teile aufgetrennt und die Tabelle bzw. der Kennlinien-Speicher zwischen die beiden entstandenen Filterstufen FS1 und FS2 gezogen werden. Ein Blick auf Tabelle 3.3 zeigt deutlich, daß dieses Konzept die zuvor angesprochenen Schwächen des rechnergestützten Verfahrens beseitigt. Mit diesem modifizierten Tabellenverfahren kann wie beim rechnergestützten Verfahren das Spektrum der linearen, quadratischen und kubischen Interpolation abgedeckt werden. Ein kleiner aber zu verschmerzender Nachteil ist, daß im Gegensatz zum rechnergestützten Verfahren das Interpolationsverhalten nicht über Software- sondern nur über Hardwaremodifikationen - genauer durch die Veränderung der Ordnung M des $\Sigma\Delta$ -Modulators - verändert werden kann.