

Anhang

A Modifizierte MOS Level1-Modellgleichungen

Die Schwellenspannung U_T eines MOS-Transistors:

$$U_T = U_{FB} + \Phi_S + \gamma \cdot sarg \quad (\text{A.1})$$

berechnet sich aus der Flachbandspannung U_{FB} , dem Oberflächenpotential Φ_S , der Substrat-effektkonstanten γ und einem sog. Sagrationskoeffizienten $sarg$ [95]. Die im Schwellenspannungsterm enthaltene Flachbandspannung U_{FB} :

$$U_{FB} = \Phi_{MS} - \frac{q \cdot N_{SS}}{C'_g} \quad (\text{A.2})$$

setzt sich aus der Austrittsarbeit Φ_{MS} zwischen dem Gatematerial und dem Silizium-Substrat, der Oberflächenladungsdichte N_{SS} und der flächenbezogenen Gatekapazität C'_g zusammen. Mit dem Typ des Gatematerials tpg ^{A1} (**type of gate**), der zugehörigen Dotierstoffkonzentration N_{GATE} sowie der Angabe der Substratdotierung N_{SUB} kann die Austrittsarbeit Φ_{MS} gemäß der nachfolgenden Formel [20]:

$$\Phi_{MS} = U_{temp} \cdot \left(\ln\left(\frac{N_{SUB}}{n_i}\right) - tpg \cdot \ln\left(\frac{N_{GATE}}{n_i}\right) \right) \quad (\text{A.3})$$

berechnet werden. Die in der Austrittsarbeit enthaltene Temperaturspannung:

$$U_{temp} = \frac{k \cdot T}{q} \quad (\text{A.4})$$

setzt sich bekannterweise aus der Boltzmannkonstanten k , der Temperatur T und der Ladung q zusammen und beträgt ca. 26mV bei Raumtemperatur. Letztendlich beeinflusst die flächenbezogene Gatekapazität C'_g :

$$C'_g = \frac{\epsilon}{d} \quad (\text{A.5})$$

^{A1} Typ des Gatematerials tpg :

- 1) $tpg=+1$: Vorzeichen der Gatedotierung entgegengesetzt zur Substratdotierung
- 2) $tpg=-1$: Vorzeichen der Gatedotierung gleich dem der Substratdotierung
- 3) $tpg=0$: Gatematerial aus Aluminium

den Ausdruck zur Berechnung der Flachbandspannung. Soll sowohl der Bereich der starken als auch schwachen Inversion berücksichtigt werden, so muß bei dem ebenfalls im Schwellenspannungsterm enthaltenen Oberflächenpotential Φ_S eine Unterscheidung getroffen werden:

$$\Phi_S = \begin{cases} 2 \cdot \Phi_F & \text{für starke Inversion} \\ 1,5 \cdot \Phi_F & \text{für schwache Inversion} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Im Bereich der starken Inversion setzt sich das Oberflächenpotential Φ_S aus dem Zweifachen des Fermipotentials Φ_F zusammen. Dagegen ist im Bereich der schwachen Inversion das Oberflächenpotential um eine Hälfte des Fermipotentials reduziert. Das Fermipotential:

$$\Phi_F = U_{\text{temp}} \cdot \ln\left(\frac{N_{\text{SUB}}}{n_i}\right) \quad (\text{A.7})$$

hängt von der Temperaturspannung U_{temp} sowie dem logarithmischen Verhältnis zwischen der Substratdotierung N_{SUB} und der intrinsischen Eigenleitendichte n_i ab. Der letzte Term in der Schwellenspannung U_T wird durch die Multiplikation der Substrateffektkonstanten:

$$\gamma = \frac{\sqrt{2 \cdot q \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_{\text{Si}} \cdot N_{\text{SUB}}}}{C'_g} \quad (\text{A.8})$$

mit dem Sagrationskoeffizienten [95]:

$$\text{sarg} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\Phi_S - U_{\text{BS}}}}{\sqrt{\Phi_S}} & \text{falls } U_{\text{BS}} \leq 0 \\ 1 + 0,5 \cdot \frac{U_{\text{BS}}}{\Phi_S} + 0,375 \cdot \frac{U_{\text{BS}}}{\Phi_S} & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

gebildet. Je nach Vorzeichen der Substratvorspannung U_{BS} werden unterschiedliche Ausdrücke für den Sagrationskoeffizienten sarg gemäß der obigen Gleichung (A.8) verwendet. Die Schwellenspannung U_{T0} ohne Substratvorspannung ($U_{\text{BS}} = 0$) ergibt sich somit zu:

$$U_{T0} = \Phi_{\text{MS}} - \frac{q \cdot N_{\text{SS}}}{C'_g} + \Phi_S + \gamma \cdot \sqrt{\Phi_S} \quad (\text{A.10})$$

Über eine am MOS-Transistor angelegte Gate-Source-Spannung U_{GS} kann somit der Zustand der Kanalregion beeinflusst werden. Bis knapp unterhalb der Schwellenspannung U_T ist der Kanal an Ladungsträgern verarmt, mit zunehmender Spannung durchläuft er Zustände einer schwachen und starken Anreicherung, bzw. Inversion von Ladungsträgern. Die Spannung, bei welcher der Transistor den Übergang von der schwachen zur starken Inversion vollzieht, kann über eine sog. Einschaltspannung U_{ON} definiert werden, die sich aus der Schwellenspannung U_T , der Temperaturspannung U_{temp} und einem sog. Slope-Faktor n_s zusammensetzt:

$$U_{\text{ON}} = U_T + n_s \cdot U_{\text{temp}} \quad (\text{A.11})$$

Der sog. Slope-Faktor n_s :

$$n_s = 1 + \frac{q \cdot N_{FS} + \frac{\gamma \cdot C'_g}{2 \cdot \sqrt{\Phi_S - U_{BS}}}}{C'_g} \quad (\text{A.12})$$

stellt eine technologieabhängige Größe dar, die in der Regel zwischen 1.3 und 2 variiert und zudem noch über die Substratvorspannung U_{BS} einflußbar ist. Für Gate-Source-Spannungen oberhalb der Einschaltspannung U_{ON} (starke Inversion) kann für den Drainstrom I_{DS} im sog. Anlaufgebiet, das auch häufig als **Triodengebiet** bezeichnet wird, folgender Zusammenhang:

$$I_{DS} = \frac{B_0 \cdot \frac{W}{L} \cdot \left((U_{GS} - U_T) - \frac{U_{DS}}{2} \right) \cdot U_{DS} \cdot (1 + \lambda \cdot U_{DS})}{(1 + \Theta \cdot (U_{GS} - U_T)) \cdot \left(1 + \frac{U_{DS}}{E_C \cdot L_{eff}} \right)} \quad (\text{A.13})$$

angegeben werden, wobei B_0 die Leitfähigkeitskonstante angibt:

$$B_0 = \mu_0 \cdot C'_g, \quad (\text{A.14})$$

die sich wiederum aus der Beweglichkeit μ_0 der Ladungsträger und der flächenbezogenen Gatekapazität C'_g zusammensetzt. Der Term $(1 + \lambda \cdot U_{DS})$ berücksichtigt dabei den Effekt der Kanallängenmodulation und stellt eine empirische Korrektur des Ausgangsleitwertes $g_{ds} = \partial I_{DS} / \partial U_{DS}$ dar. Für die Genauigkeit der Stromberechnung ist zudem die Berücksichtigung der sog. Geschwindigkeitssättigung von enormer Wichtigkeit, da eine Vernachlässigung dieses Effekts bereits zu einer Abweichung des Absolutwertes im zweistelligen Prozentbereich führen kann. Da die Geschwindigkeit der beweglichen Ladungsträger im Kanal einem elektrischen Feld sowohl in longitudinaler als auch transversaler Richtung unterworfen sind, kann der Effekt der Geschwindigkeitssättigung durch die Reduktion einer Längsfeldbeweglichkeit μ_L :

$$\mu_L = \frac{\mu_0}{1 + \frac{U_{DS}}{E_C \cdot L_{eff}}} \quad (\text{A.15})$$

und einer Quersfeldbeweglichkeit μ_Q :

$$\mu_Q = \frac{\mu_0}{1 + \Theta \cdot (U_{GS} - U_T)} \quad (\text{A.16})$$

beschrieben werden [95]. Dabei entspricht Θ dem Quersfeldbeweglichkeitsreduktionsfaktor und E_C der kritischen Feldstärke:

$$E_C = \frac{V_{max}}{\mu_0}, \quad (\text{A.17})$$

die sich aus der maximalen Geschwindigkeit v_{\max} und der Beweglichkeit μ_0 der Ladungsträger berechnet.

Für kleine Drain-Source-Spannungen verhält sich der Transistor wie ein spannungsgesteuerter Widerstand. Erreicht die Drain-Source-Spannung im Kanal die sogenannte Sättigungsspannung U_{DSAT} , wird der Kanal abgeschnürt, so daß der Drainstrom I_{DS} bei Vernachlässigung der Kanallängenmodulation nahezu konstant bleibt. Mit der Abschnürbedingung:

$$\frac{\partial I_{\text{DS}}}{\partial U_{\text{DS}}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.18})$$

ergibt sich die Sättigungsspannung zu [20]:

$$U_{\text{DSAT}} = \frac{U_{\text{GS}} - U_{\text{T}}}{\sqrt{K}} \quad (\text{A.19})$$

mit:
$$K = \frac{1 + V_{\text{C}} + \sqrt{1 + 2 \cdot V_{\text{C}}}}{2} \quad \text{und:} \quad V_{\text{C}} = \frac{(U_{\text{GS}} - U_{\text{T}}) \cdot \mu_0}{v_{\max} \cdot L_{\text{eff}}} \quad (\text{A.20})$$

Die Sättigungsspannung U_{DSAT} , die häufig auch als effektive Gate-Source-Spannung U_{geff} bezeichnet wird, definiert die Grenze zwischen dem zuvor erwähnten Triodengebiet und dem sich anschließendem **Sättigungsgebiet**. Für den Strom oberhalb der Sättigungsspannung U_{DSAT} gilt:

$$I_{\text{DS}} = \frac{B_0 \cdot \frac{W}{L} \cdot \left((U_{\text{GS}} - U_{\text{T}}) - \frac{U_{\text{DSAT}}}{2} \right) \cdot U_{\text{DSAT}} \cdot (1 + \lambda \cdot U_{\text{DS}})}{(1 + \Theta \cdot (U_{\text{GS}} - U_{\text{T}})) \cdot \left(1 + \frac{U_{\text{DSAT}}}{E_{\text{C}} \cdot L_{\text{eff}}} \right)} \quad (\text{A.21})$$

In diesem Gebiet verhält sich der Transistor wie eine spannungsgesteuerte Stromquelle mit einem endlichen Ausgangsleitwert g_{d} .

Für Gate-Source-Spannungen unterhalb der zuvor angegebenen Einschaltspannung U_{ON} gemäß Gleichung (A.10) berechnet sich der Drainstrom [96]:

$$I_{\text{DS}} = I_{\text{DSON}} \cdot \exp\left(\frac{U_{\text{GS}} - U_{\text{ON}}}{n_{\text{s}} \cdot U_{\text{temp}}}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{U_{\text{DS}}}{U_{\text{temp}}}\right)\right) \quad (\text{A.22})$$

gemäß einer exponentiellen Charakteristik, die dem eines Bipolartransistors stark ähnelt. I_{DSON} ist dabei der Drainstrom in starker Inversion bei $U_{\text{GS}} = U_{\text{ON}}$. Bei Drain-Source-Spannungen U_{DS} im Bereich vom drei- bis vierfachen der Temperaturspannung U_{temp} geht der Drainstrom I_{DS} in Sättigung, da der Ausdruck $\exp(-U_{\text{DS}}/U_{\text{temp}})$ gegenüber eins vernachlässigbar klein wird.

B Konvergenzbetrachtungen unterschiedlicher Interpolationsverfahren

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Konvergenzbetrachtungen unterschiedlicher Interpolationsverfahren. Betrachtet wird dabei sowohl das klassische Interpolationsverfahren nach Lagrange als auch ein moderneres Interpolationsverfahren mit stückweise definierten Polynomfunktionen, das für den Einsatz in der Praxis weitaus praktikabler ist.

Bevor wir uns jedoch mit den Fehlerabschätzungen der moderneren Interpolationsverfahren auseinander setzen, sei zunächst die klassische Interpolationsmethode nach Lagrange betrachtet. Hierbei interessiert uns, wie genau ein Lagrange'sches Interpolationspolynom $P_m(x)$ vom Grad m eine Funktion $f(x)$ aus einer vorgegebenen Anzahl von n Meßpunkten approximiert [33,36,37]. Der Grad m des Interpolationspolynoms $P_m(x)$ ist dabei $m=n+1$. Die Größe des Interpolationsfehlers läßt sich jedoch nur angeben, wenn die Funktion $f(x)$ bekannt und $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Dazu betrachten wir den resultierenden Interpolationsfehler:

$$\varepsilon_I(x) = f(x) - P_m(x) \quad (\text{B.1})$$

im gesamten Interpolationsintervall $[a,b]$. Nachfolgend definieren wir uns eine Hilfsfunktion $F(x)$:

$$F(x) = \varepsilon_I(x) - c \cdot w(x), \quad (\text{B.2})$$

mit dem Knotenpolynom:

$$w(x) = \prod_{i=0}^{m=n-1} (x - x_i). \quad (\text{B.3})$$

Für festes x_f ergibt sich c zu einer konstanten Zahl:

$$c = \frac{\varepsilon_I(x_f)}{w(x_f)}. \quad (\text{B.4})$$

Da die Interpolationsbedingung an den Stellen $x=x_i$ erfüllt ist, gilt:

$$F(x_i) = \varepsilon_I(x_i) - c \cdot w(x_i) = 0 \quad \forall \quad i=0,1,\dots,n-1 \quad (\text{B.5})$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung (B.4) an einer festen Stelle x_f :

$$F(x_f) = \varepsilon_I(x_f) - c \cdot w(x_f) = \varepsilon_I(x_f) - \frac{\varepsilon_I(x_f)}{L(x_f)} \cdot w(x_f) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Die Hilfsfunktion $F(x)$ besitzt deshalb in $[a,b]$ mindestens $(m+2)$ verschiedene Nullstellen. Mit der Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ mindestens $(m+1)$ -mal stetig differenzierbar ist, existiert nach dem Satz von Rolle eine Stelle $\xi \in [a,b]$, für die $F^{(m+1)}(\xi) = 0$ gilt.

Da $P_m(x)$ ein Polynom m .ter Ordnung sowie das Knotenpolynom $w(x)$ ein Polynom $(m+1)$.ter Ordnung ist, folgt für die $(m+1)$.te Ableitung der Hilfsfunktion $F(x)$:

$$F^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x) - c \cdot (m+1)! \quad (\text{B.7})$$

Mit $F^{(m+1)}(\xi)=0$ ergibt sich:

$$F^{(m+1)}(\xi) = f^{(m+1)}(\xi) - c \cdot (m+1)! = 0 \quad (\text{B.8})$$

Löst man die obige Gleichung (B.8) nach c auf, so ergibt sich:

$$c = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \quad (\text{B.9})$$

Mit Hilfe von Gleichung (B.7) läßt sich der Interpolationsfehler an der Stelle x_f zu:

$$\varepsilon_I(x_f) = f(x_f) - P_n(x_f) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot w(x_f) \quad (\text{B.10})$$

angeben. Mit Hilfe dieser Formel läßt sich sofort eine Schranke für den Interpolationsfehler $\varepsilon_I(x)$ angeben, falls sich der Betrag der $(m+1)$.ten Ableitung von $f(x)$ bzgl. des Interpolationsintervalls $[a,b]$ leicht abschätzen läßt:

$$\varepsilon_I(x) = |f(x) - P_m(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \cdot |w(x)| \quad (\text{B.11})$$

Kommen wir nun zu den moderneren Interpolationsverfahren, die für den Einsatz in der Praxis weitaus praktikabler sind. Hierzu zählt die stückweise Polynom- bzw. Spline-Interpolation. Aufgrund der hervorragenden Eigenschaften der kubischen Interpolation, sei der resultierende Interpolationsfehler:

$$\varepsilon_I(x) = f(x) - S_3(x) \quad (\text{B.12})$$

betrachtet, der zwischen einer Funktion $f(x) \in C^4[a,b]$ und der stückweise kubischen Polynom- bzw. Spline-Interpolierenden $S_3(x)$ auftritt. Das Interpolationsintervall $I[a,b] \subseteq \mathbf{IR}$ ist dabei in einzelne Teilintervalle bzgl. der Zerlegung $Z_n := \{a=x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1}=b\}$ unterteilt. Aufgrund der Interpolationsbedingung $S_3(x_i)=0$ gilt folglich für den Interpolationsfehler $\varepsilon_I(x) \in C^3[a,b]$:

$$\varepsilon_I(x_i) = 0 \quad \forall \quad i=0,1,\dots,n-1. \quad (\text{B.13})$$

Nach dem Satz von Rolle existieren genau $(n-1)$ Stellen ξ_i , für die die Ableitung $\varepsilon_I'(x)$ der Fehlerfunktion verschwindet:

$$\varepsilon_I'(\xi_i) = 0 \quad \forall \quad i=1,2,\dots,n-1. \quad (\text{B.14})$$

Werden zudem die vollständigen Randbedingungen aus Gleichung (3.28) zugrunde gelegt, so gilt zusätzlich:

$$\varepsilon_1'(a = x_0) = \varepsilon_1'(b = x_{n-1}) = 0. \quad (\text{B.15})$$

Um nun eine Beziehung zwischen dem Fehler $\varepsilon_1(x)$ und der zu approximierenden Funktion $f(x)$ herzustellen, bilden wir das innere Produkt $\langle f''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle$. Da sich nach zweimaliger Ableitung der Gleichung (B.12) $f''(x) = S_3''(x) + \varepsilon_1''(x)$ ergibt, kann das innere Produkt $\langle f''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle$ auch geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \langle f''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle &= \langle S_3''(x) + \varepsilon_1''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle \\ &= \langle S_3''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle + \langle \varepsilon_1''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Partielle Integration des inneren Produkts $\langle S_3''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle$ ergibt:

$$\begin{aligned} \langle S_3''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle &= \int_a^b S_3''(x) \cdot \varepsilon_1''(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_3''(x) \cdot \varepsilon_1''(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} S_3''(x) \cdot \varepsilon_1'(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \sum_{i=1}^{n-1} S_3'''(x) \cdot \varepsilon_1(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S_3^{(4)}(x) \cdot \varepsilon_1(x) dx, \quad (\text{B.17}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da alle drei Summen den Wert Null annehmen. Die erste Summe verschwindet wegen der Stetigkeit von $S_3''(x) \cdot \varepsilon_1'(x)$ sowie den geltenden Eigenschaften gemäß Gleichung (B.15), die sich aus den vollständigen Randbedingungen für die Ableitung $\varepsilon_1'(x)$ der Fehlerfunktion ergeben. Die zweite Summe verschwindet ebenfalls, da die kubische Spline-Interpolierende $S_3(x)$ die Interpolationsbedingung erfüllt, d.h. exakt durch die Stützstellen x_i verlaufen muß, und somit der resultierende Interpolationsfehler $\varepsilon_1(x_i) = 0 \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$ wird. Die dritte und letzte Summe verschwindet in gleicher Weise, da $S_3(x)$ auf den Teilintervallen $[x_{i-1}, x_i] \quad \forall i = 0, 1, \dots, n-1$ maximal ein Polynom dritten Grades sein kann und somit die vierte Ableitung $S_3^{(4)}(x) = 0$ ist. Gleichung (B.16) ergibt in Kombination mit dem Ergebnis der Gleichung (B.17) die sog. erste Integral-Relation:

$$\langle f''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle = \|\varepsilon_1''(x)\|_2^2. \quad (\text{B.18})$$

Wird nun der Ausdruck des inneren Produkts $\langle f''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle$ aus Gleichung (B.18) wiederum partiell integriert, so ergibt sich entsprechend den Überlegungen zur Gleichung (B.17):

$$\langle f''(x), \varepsilon_1''(x) \rangle = \langle f^{(4)}(x), \varepsilon_1(x) \rangle, \quad (\text{B.19})$$

woraus sich mit Hilfe der Gleichung (B.18) die zweite Integral-Relation ableiten läßt:

$$\langle f^{(4)}(x), \varepsilon_1(x) \rangle = \|\varepsilon_1''(x)\|_2^2. \quad (\text{B.20})$$

Die Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung auf die Gleichung (B.20) liefert uns:

$$\|\varepsilon_1''(x)\|_2^2 \leq \|\varepsilon_1(x)\|_2 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2. \quad (\text{B.21})$$

Den noch fehlenden Zusammenhang zwischen der Fehlerfunktion $\varepsilon_1(x)$ und dessen ersten beiden Ableitungen $\varepsilon_1'(x)$ sowie $\varepsilon_1''(x)$ erhält man durch die zweimalige Anwendung der Friedrichs'schen Ungleichung [31] auf die Fehlerfunktion $\varepsilon_1(x)$:

$$\|\varepsilon_1(x)\|_2 \leq \frac{\Delta x}{\pi} \cdot \|\varepsilon_1'(x)\|_2 \quad (\text{B.22})$$

und

$$\|\varepsilon_1'(x)\|_2 \leq 2 \cdot \frac{\Delta x}{\pi} \cdot \|\varepsilon_1''(x)\|_2, \quad (\text{B.23})$$

wobei:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n-1} \quad (\text{B.24})$$

den Stützstellenabstand bzw. die äquidistante Breite eines Teilintervalles $[x_{i-1}, x_i]$ angibt. Benutzen wir Gleichung (B.22) und (B.23), so ergibt sich ausgehend von Gleichung (B.21) der mittlere quadratische Fehler für die zweite Ableitung des Fehlerterms $\|\varepsilon_1''(x)\|_2$:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1''(x)\|_2^2 &\leq \|\varepsilon_1(x)\|_2 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2 \\ \stackrel{\text{Gl.(B.22)}}{\Rightarrow} \|\varepsilon_1''(x)\|_2^2 &\leq \frac{\Delta x}{\pi} \cdot \|\varepsilon_1'(x)\|_2 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2 \\ \stackrel{\text{Gl.(B.23)}}{\Rightarrow} \|\varepsilon_1''(x)\|_2^2 &\leq 2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 \cdot \|\varepsilon_1''(x)\|_2 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2 \\ \Rightarrow \|\varepsilon_1''(x)\|_2 &\leq 2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Setzt man Gleichung (B.22) und (B.23) nochmals in Gleichung (B.25) ein, so ergeben sich die Abschätzungen für den quadratischen Fehler des resultierenden Interpolationsfehlers $\varepsilon_1(x)$ sowie dessen erster und zweiter Ableitung $\varepsilon_1'(x)$ und $\varepsilon_1''(x)$:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_1''(x)\|_2 &\leq 2 \cdot \left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2 \\ \stackrel{\text{Gl.(B.23)}}{\Rightarrow} \|\varepsilon_1'(x)\|_2 &\leq 4 \cdot \left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^3 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2 \\ \stackrel{\text{Gl.(B.22)}}{\Rightarrow} \|\varepsilon_1(x)\|_2 &\leq 4 \cdot \left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^4 \cdot \|f^{(4)}(x)\|_2 \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Unter schärferen Bedingungen kann sogar die punktweise Konvergenz $\|\varepsilon_1(x)\|_\infty$ gezeigt werden.

Abschätzungen für den resultierenden Interpolationsfehler $\varepsilon_1(x)$ sind je nach Art und Ordnung des angewendeten Interpolationsverfahren in der nachfolgenden **Tabelle B.1** der Übersichtlichkeit halber gegenübergestellt.

Zu beachten ist dabei jedoch die Norm, nach dem der jeweilige Interpolationsfehler $\epsilon_I(x)$ abgeschätzt worden ist. Wird die L_2 -Norm verwendet, so sagt die Abschätzung nur etwas über den mittleren quadratischen Interpolationsfehler $\|\epsilon_I(x)\|_2$ aus, dagegen nichts über den maximalen punktweisen Fehler. Soll dagegen die punktweise Konvergenz gezeigt werden, so muß die L_∞ -Norm zur Berechnung des Interpolationsfehler $\epsilon_I(x)$ verwendet werden.

Tabelle B.1 Fehlerabschätzungen für unterschiedliche Interpolationsverfahren

Interpolations- fehler $\epsilon_I(x)$ Interpolations- verfahren	linear	quadratisch	kubisch
klassische Interpolation (nach Lagrange)	$\leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} f''(\xi)}{2!} \cdot w(x) $ *)	$\leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} f'''(\xi)}{3!} \cdot w(x) $ *)	$\leq \frac{\max_{\xi \in [a,b]} f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot w(x) $ *)
moderne Interpolation (stückweise Polynom- bzw. Spline- Interpolation)	$\leq \left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^2 \cdot f''(x)$ **)	/	$\leq 4 \cdot \left(\frac{\Delta x}{\pi}\right)^4 \cdot f^{(4)}(x)$ **)

*) $\epsilon(x)$ gemäß der L_∞ -Norm, **) $\epsilon(x)$ gemäß der L_2 -Norm

C Grundlegende Funktionsweise und charakteristische Eigenschaften eines $\Sigma\Delta$ -Modulators

Bild C.1 zeigt ein allgemeingültiges Blockdiagramm für einen $\Sigma\Delta$ -Modulator. Der Modulator ist ein nichtlinearer Regelkreis, der in einen linearen Block (Schleifenfilter) und einen nichtlinearen Block (Quantisierer) zerlegt werden kann. Die Ordnung des Schleifenfilters bestimmt gleichzeitig die Ordnung des $\Sigma\Delta$ -Modulators. Das Schleifenfilter kann sowohl zeitkontinuierlich als auch zeitdiskret aufgebaut sein. Häufig wird jedoch die zeitdiskrete Lösung bevorzugt verwendet, da im Gegensatz zur zeitkontinuierlichen Lösung die Lage der Pol- und Nullstellen exakt über ein Verhältnis(!) von Kapazitäten eingestellt werden kann. Somit können die gewünschten Filtereigenschaften ohne aufwendiges Lasertrimmen von integrierten Widerständen in einer CMOS-Technologie erzielt werden. Weitere Vor- und Nachteile für die zeitdiskrete sowie die zeitkontinuierliche Lösung sind in [66, S.168ff] nachzulesen.

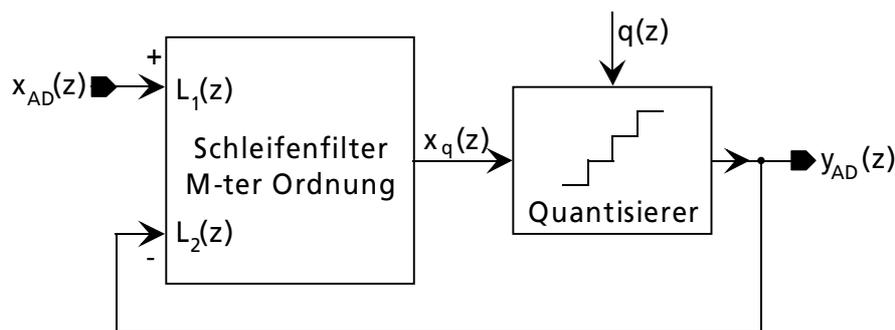


Bild C.1 Architektur eines $\Sigma\Delta$ -Modulators M-ter Ordnung

Der Ausgang des Schleifenfilters, bzw. der Eingang $x_q(z)$ des Quantisierers kann durch:

$$x_q(z) = L_1(z) \cdot x_{AD}(z) - L_2(z) \cdot y_{AD}(z) \quad (\text{C.1})$$

beschrieben werden. Aufgrund der Tatsache, daß es sich beim $\Sigma\Delta$ -Modulator um einen nichtlinearen Regelkreis handelt, wir aber die Analysemethoden der linearen Systemtheorie verwenden wollen, muß eine Linearisierung des Quantisierers erfolgen. Im ersten Schritt wird der Quantisierer durch eine einfache Addition eines Fehlersignals $q(z)$ zum Nutzsignal $x_q(z)$ ersetzt. Damit ist die Nichtlinearität jedoch noch nicht eliminiert, sondern nur auf den Fehlereingang verschoben worden. Da üblicherweise eine Korrelation zwischen dem Fehlersignal $q(z)$ und dem Eingangssignal $x_{AD}(z)$ des $\Sigma\Delta$ -Modulators existiert, besteht die eigentliche Linearisierung erst darin, gewisse Bedingungen an das Eingangssignal zu stellen [98], so daß die Korrelation zwischen der Fehler- und Signalsequenz zu vernachlässigen ist. Um die Analyse einfach zu halten wird davon ausgegangen, daß die Fehlersequenz, die durch die Quantisierung entsteht, als ein eigenständiges Signal betrachtet werden kann, dessen Eigenschaften der einer weißen Rauschquelle entsprechen.

Aus diesem Grunde wird $q(z)$ häufig auch als Quantisierungsrauschen bezeichnet. Definiert man nun $q(z)$ aus der Differenz zwischen dem Eingang $x_q(z)$ und dem Ausgang $y_{AD}(z)$ des Quantisierers:

$$q(z) = y_{AD}(z) - x_q(z), \quad (\text{C.2})$$

so kann das Ausgangssignal $y_{AD}(z)$ des Modulators durch eine häufig in der Literatur gefundene Schreibweise [66]:

$$y_{AD}(z) = \frac{L_1(z)}{1+L_2(z)} \cdot x_{AD}(z) + \frac{1}{1+L_2(z)} \cdot q(z) = H_{STF}(z) \cdot x_{AD}(z) + H_{NTF}(z) \cdot q(z). \quad (\text{C.3})$$

ausgedrückt werden. $H_{STF}(z)$ und $H_{NTF}(z)$ sind infolgedessen die Signal- und Rauschübertragungsfunktionen des vorliegenden $\Sigma\Delta$ -Modulators. Solange die Nullstellen von $H_{STF}(z)$ nicht mit den Polstellen des gemeinsamen Nennerpolynoms $1-L_2(z)$ übereinstimmen, besitzt die Rausch- und Signalübertragungsfunktion dieselben Polstellen. Aus diesem Grund reicht es im allgemeinen für eine Stabilitätsbetrachtung aus, die Nullstellen des Nennerpolynoms von $H_{NTF}(z)$ zu untersuchen. Mit Hilfe der Übertragungsfunktionen $H_{NTF}(z)$ und $H_{STF}(z)$ kann der funktionale Zusammenhang der Schleifenfilter:

$$L_1(z) = \frac{H_{STF}(z)}{H_{NTF}(z)} \quad \text{und} \quad L_2(z) = \frac{H_{NTF}(z) - 1}{H_{NTF}(z)} \quad (\text{C.4})$$

abgeleitet werden. Für tiefpaßbegrenzte Eingangssignale $x_{AD}(z)$ des Modulators werden als Schleifenfilter häufig kaskadierte Integratoren verwendet, die je nach Ordnung ein oder mehrere Pole im Durchlaßbereich besitzen. Die Integratoren besitzen im interessierenden Durchlaßbereich eine hohe Verstärkung, die für die Unterdrückung des Quantisierungsrauschens $q(z)$ verantwortlich sind. Besitzen die Eingangssignale keinen Gleichanteil, können ebenso Bandpässe als Schleifenfilter eingesetzt werden. Für die Integratoren kommen sog. „Forward“- und „Backward-Euler“-Integratoren aus **Bild C.2** in Frage. Wie der Name schon sagt, besitzen die „Forward-Euler“-Integratoren eine Verzögerung im Vorwärtszweig, die „Backward-Euler“-Integratoren eine Verzögerung im Rückwärtszweig [99].

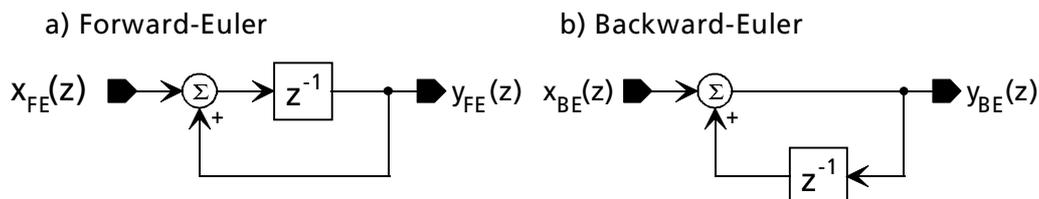


Bild C.2 „Forward-Euler“- und „Backward-Euler“-Integratoren

Die Übertragungsfunktionen des „Forward-Euler“-Integrators $H_{FE}(z)$ und des „Backward-Euler“-Integrators $H_{BE}(z)$ ergeben sich im z -Bereich zu:

$$H_{FE}(z) = \frac{y_{FE}(z)}{x_{FE}(z)} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z-1} \quad \text{und:} \quad H_{BE}(z) = \frac{y_{BE}(z)}{x_{BE}(z)} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}. \quad (\text{C.5})$$

Wird beispielsweise für einen $\Sigma\Delta$ -Modulator erster Ordnung ($M=1$) ein sog. „Forward-Euler“-Integrator mit $L_1(z) = H_{FE}(z) = -L_2(z)$ und ein Komparator als Quantisierer verwendet, so ergibt sich die Signal- und Rauschübertragungsfunktion gemäß Gleichung (C.3) zu:

$$H_{STF}(z) = z^{-1} \quad \text{und} \quad H_{NTF}(z) = (1-z^{-1})^1. \quad (\text{C.6})$$

Bei der Verwendung eines „Backward-Euler“-Integrators ergibt sich:

$$H_{STF}(z) = \frac{1}{2-z^{-1}} = \frac{1}{D(z)} \quad \text{und} \quad H_{NTF}(z) = \frac{1-z^{-1}}{2-z^{-1}} = \frac{(1-z^{-1})^1}{D(z)}. \quad (\text{C.7})$$

In dem nachfolgenden **Bild C.3** sind die Auswirkungen bei der Verwendung der unterschiedlichen Integrortypen graphisch verdeutlicht.

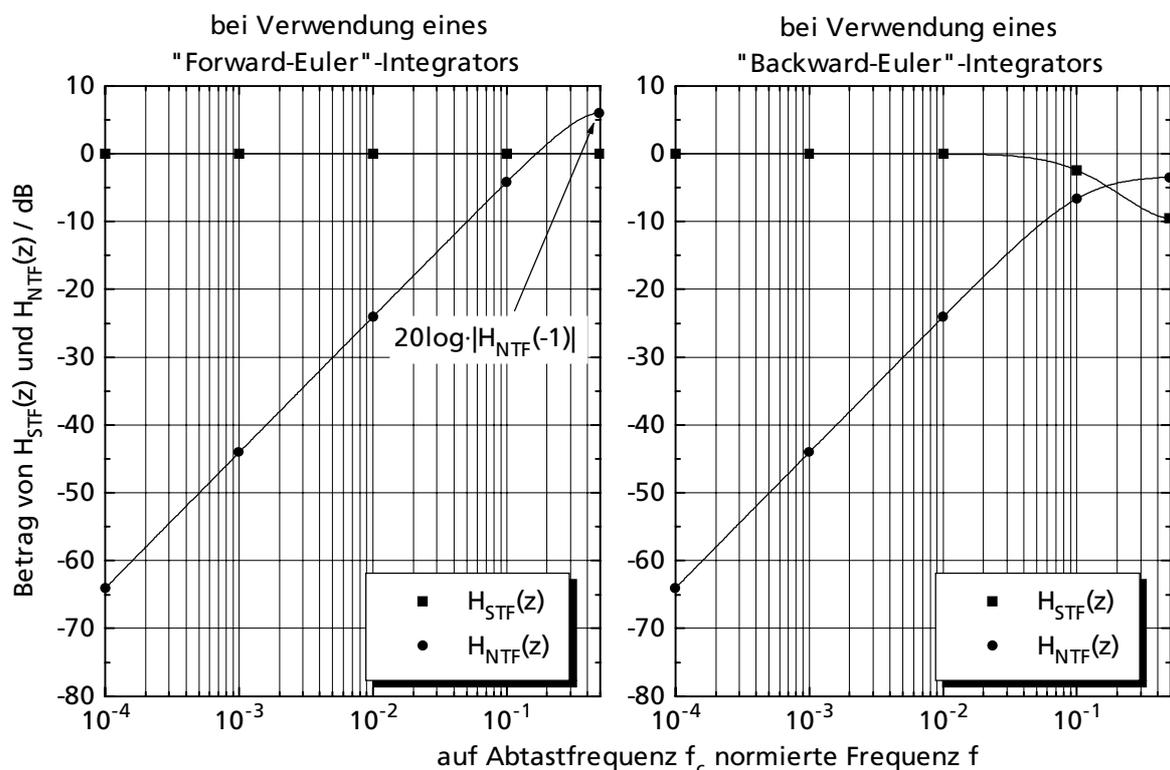


Bild C.3 Signal- und Rauschübertragungsfunktionen eines $\Sigma\Delta$ -Modulators 1.ter Ordnung bei Verwendung eines „Forward-Euler“- und „Backward-Euler“-Integrators

Bei der Verwendung eines „Forward-Euler“-Integrators verläuft die Signalübertragungsfunktion $H_{STF}(z)$ flach über dem gesamten Frequenzbereich bis einschließlich zur halben Abtastfrequenz $f_c/2$. Die Rauschübertragungsfunktion $H_{NTF}(z)$ weist ein differenzierendes Verhalten auf, das in der Literatur häufig auch als sog. „Noise-Shaping“ bezeichnet wird. Der Betrag der Rauschübertragungsfunktion sinkt unterhalb der halben Abtastfrequenz mit 20dB/Dekade und unterdrückt somit zunehmend zu abnehmenden Frequenzen hin das als „weiß“ angenommene Quantisierungsrauschen $q(z)$. Bei der Verwendung eines „Backward-Euler“-Integrators erfährt das Eingangssignal $x_{AD}(z)$ des Modulators eine Bandbegrenzung, die durch die Nullstellen der Übertragungsfunktion $D(z)$ hervorgerufen werden. Diese Funktion $D(z)$ ist ebenfalls für die Abschwächung der maximalen Verstärkung $|H_{NTF}(-1)|=2^M$ der Rauschübertragungsfunktion nahe der halben Abtastfrequenz verantwortlich. Die zuvor beschriebene „Noise-Shaping“-Eigenschaft bleibt jedoch ebenso wie bei der Verwendung eines „Forward-Euler“-Integrators erhalten.

Eine Untersuchung der unterschiedlichsten Modulatorarchitekturen höherer Ordnung M führt auf zwei immer wieder auftretende Rauschübertragungsfunktionen [66]:

der Form a):
$$H_{NTF}(z) = (1 - z^{-1})^M \quad (C.8)$$

und der Form b):
$$H_{NTF}(z) = \frac{(1 - z^{-1})^M}{D(z)}. \quad (C.9)$$

Diese Funktionen weisen Hochpaßcharakter auf, deren Beträge unterhalb der halben Abtastfrequenz $f_c/2$ mit $M \cdot 20$ dB/Dekade absinken. Speziell bei Modulatoren höherer Ordnung mit $M > 2$ treten jedoch bei der Verwendung von den sehr einfachen H_{NTF} 's der Form a) Stabilitätsprobleme auf, da die maximal auftretende Verstärkung $|H_{NTF}(-1)|=2^M$ mit zunehmender Ordnung M immer größer wird. Da das Signal am Eingang $x_q(z)$ des Komparators durch:

$$x_q(z) = H_{STF}(z) \cdot x_{AD}(z) + [H_{NTF}(z) - 1] \cdot q(z) \quad (C.10)$$

definiert ist, können die auftretenden Amplituden am Komparatoreingang sehr groß werden, wenn die Verstärkung der Rauschübertragungsfunktion $H_{NTF}(z)$ groß ist. Mit zunehmender Amplitude am Eingang des Komparators wird die Schleifenverstärkung g des Regelkreises immer kleiner. Wird die Schleifenverstärkung g zu gering, kann es zu Instabilitäten im Regelkreis kommen. Um die Stabilität, bzw. die Stabilitätsprobleme des nichtlinearen Regelkreises mit den Methoden der linearen Systemtheorie (z.B. mit Hilfe der Wurzelortskurven) genauer zu untersuchen, wird der Komparator durch ein lineares Element ersetzt. Hierzu wird ein Verstärker mit signalabhängigen Verstärkungsfaktor g verwendet. Der Verstärkungsfaktor g definiert sich über den Quotienten zwischen dem Aus- und Eingang des Komparators. Da dieser ausgangsseitig nur zwei Werte (± 1) annehmen kann, besitzt der Verstärkungsfaktor, wie in dem nachfolgenden **Bild C.4** gezeigt, hyperbelartigen Charakter.

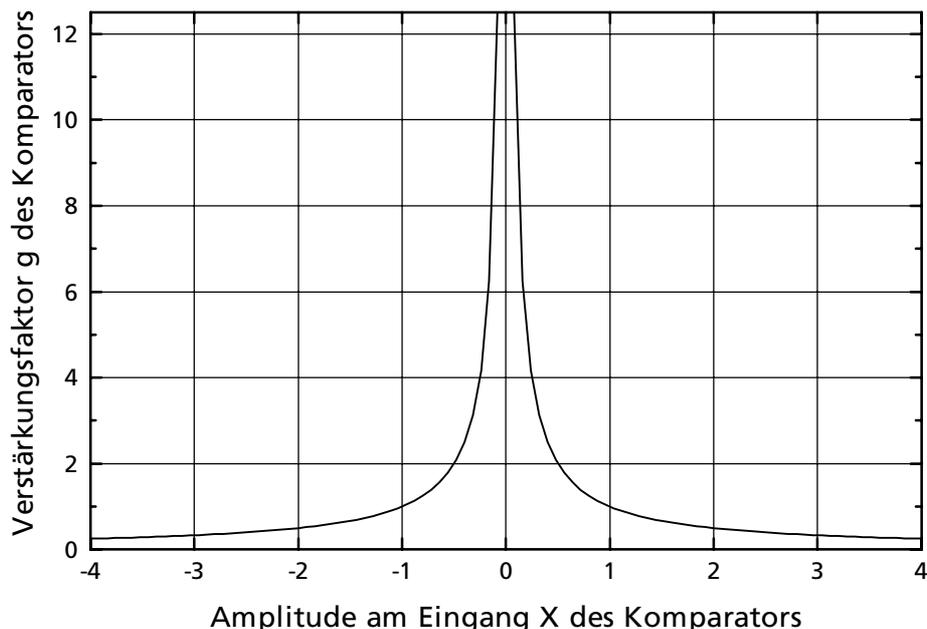


Bild C.4 Verstärkungsfaktor g eines Komparators

Bei kleinen Signalamplituden am Eingang des Komparators resultiert eine große Schleifenverstärkung g des Regelkreises. Im Gegensatz dazu nimmt g bei steigenden Signalamplituden am Eingang des Komparators mit einer $1/x$ -Charakteristik ab.

Geht man von der Rauschübertragungsfunktion mit rein differenzierenden Charakter gemäß der Form a) aus, und wird ein Komparator als Quantisierer verwendet, so kann eine allgemeingültige Formel für den Signal-Rausch-Abstand SNR eines $\Sigma\Delta$ -Modulators M -ter Ordnung angegeben werden [61]:

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{sig}}}{P_q}\right) + (2 \cdot M + 1) \cdot 10 \cdot \log\left(\frac{f_c}{2 \cdot f_B}\right) - 10 \cdot \log\left(\frac{\pi^{2M}}{2 \cdot M + 1}\right). \quad (\text{C.11})$$

Hierin gibt f_c die Abtastfrequenz und f_B die Bandbreite des Eingangssignals x_{AD} an. Die Geschwindigkeitsreserve, die laut dem Nyquistkriterium und der Überabtastung vorhanden ist, wird häufig als sog. Oversampling-Rate $\text{OSR} = f_c / 2 \cdot f_B$ bezeichnet. P_{sig} und P_q geben die Rauschleistungen des Eingangssignals x_{AD} sowie des Quantisierungsfehlers q an. Legt man für das Eingangssignal x_{AD} ein sinusförmiges Signal mit einer Amplitude A zugrunde, so ergibt sich für die Leistung $P_{\text{sig}} = A^2/2$. Die Leistung P_q des als weiß angenommenen Quantisierungsfehlers q hängt dabei von der Quantisierungsstufenhöhe Δ ab, und es ergibt sich [100]:

$$P_q = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\Delta^2}{12}. \quad (\text{C.12})$$

Stellt man den Signal-Rausch-Abstand SNR graphisch über der Oversampling-Rate OSR dar, so ergibt sich das nachfolgend gezeigte **Bild C.5**. Aus dieser Grafik läßt sich entnehmen, daß mit zunehmender Ordnung M des $\Sigma\Delta$ -Modulators bei gleichzeitig konstant bleibender OSR größere Signal-Rausch-Abstände SNR's erzielt werden können. Ebenso kann durch die Erhöhung der Modulator-Ordnung M bei konstanter SNR die Oversampling-Rate OSR reduziert werden.

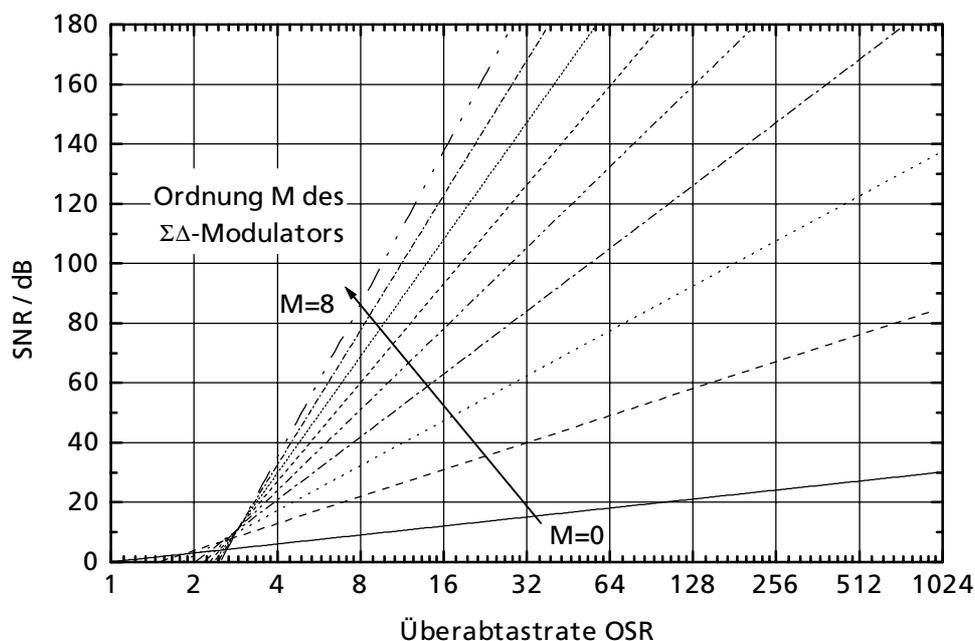


Bild C.5 Signal-Rausch-Abstand SNR über der Überabtastrate OSR für H_{NTF} 's der Form $(1-z^{-1})^M$

$\Sigma\Delta$ -Modulatoren mit den Rauschübertragungsfunktionen der Form a) sind für $M > 2$ aus den zuvor beschriebenen Gründen nur sehr schwer stabil zu halten. Diese rein differenzierenden H_{NTF} 's der Ordnung $M > 2$ können nur noch über eine Kaskadierung mehrerer $\Sigma\Delta$ -Modulatoren der Ordnung $M \leq 2$ realisiert werden. Diese Art der Modulatoren werden in der Literatur als sog. MASH-Wandler (Multi Stage Noise Shaper) bezeichnet. Nicht kaskadierte Wandler höherer Ordnung ($M > 2$) müssen durch eine andere Maßnahme stabil gehalten werden. Nun kommen Modulatoren mit den bereits erwähnten H_{NTF} 's der Form b) in Betracht. Bei diesen Übertragungsfunktionen handelt es sich wiederum um H_{NTF} 's der Form $(1-z^{-1})^M$, jedoch kann über eine zusätzliche Funktion $D(z)$ die Verstärkung nahe der halben Abtastfrequenz $f_c/2$ kontrolliert eingestellt werden.

Die Kleinsignalanalyse [105] ergibt für die Übertragungsfunktion $H(s)$ unter der Annahme, daß die Steilheiten g_m der betrachteten Transistoren viel größer sind als die entsprechenden Ausgangsleitwerte g_d , folgenden Ausdruck:

$$H(s) = \frac{g_{m3} \cdot g_{m5} \cdot g_{m6} \cdot \left(1 + \frac{s \cdot C_{db5}}{g_{m5}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s \cdot (C_{LC} + C_{db6})}{g_{m6}}\right)}{P_1(s) + P_2(s)} \quad (D.1)$$

$$\text{mit: } P_1(s) = g_{d6} \cdot (g_{d7} + g_{d8}) \cdot g_{m5} \cdot \left(1 + \frac{s \cdot C_{db6}}{g_{d6}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s \cdot C_{LC}}{g_{d7} + g_{d8}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s \cdot (C_{LA} + C_{db5})}{g_{m5}}\right) \quad (D.2)$$

$$\text{und: } P_2(s) = g_{din} \cdot g_{d5} \cdot g_{m6} \cdot \left(1 + \frac{s \cdot C_{LA}}{g_{din}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s \cdot C_{LC}}{g_{m6}}\right) \cdot \left(1 + \frac{s \cdot (C_{LB} + C_{db5})}{g_{d5}}\right). \quad (D.3)$$

Die Leerlaufverstärkung A_{VO} ergibt sich aus Gleichung (D.1) für niedrige Frequenzen zu:

$$A_{VO} = \frac{g_{m3}}{\frac{g_{d6} \cdot (g_{d7} + g_{d8})}{g_{m6}} + \frac{g_{d5} \cdot (g_{d3} + g_{d4})}{g_{m5}}} = g_{m3} \cdot r_{out}. \quad (D.4)$$

Die Leerlaufverstärkung A_{VO} bestimmt sich somit aus der Steilheit g_{m3} der Eingangstransistoren und dem hochohmigen Ausgangswiderstand r_{out} . Die Lage der Pol- und Nullstellen kann ebenfalls aus der berechneten Kleinsignal-Übertragungsfunktion $H(s)$ gemäß Gleichung (D.1) berechnet werden. Der dominante Pol p_1 sitzt am Ausgang bedingt durch den hohen Ausgangswiderstand und der Kapazität C_{LB} am Knoten B, die von der Lastkapazität C_L und C_2 dominiert wird:

$$p_1 = -\frac{1}{r_{out} C_{LB}}. \quad (D.5)$$

Weiterhin ergeben sich zwei hochfrequente Polstellen:

$$p_2 = -\frac{g_{m5}}{C_{LA}} \quad \text{und} \quad p_3 = -\frac{g_{m6}}{C_{LC}}. \quad (D.6)$$

Der Einfluß der Polstelle p_3 wird durch die erste der beiden existenten Nullstellen:

$$z_1 = -\frac{g_{m6}}{C_{LC}} \quad \text{und} \quad z_2 = -\frac{g_{m5}}{C_{db5}} \quad (D.7)$$

kompensiert. Der verbleibende zweite Pol p_2 , der somit die Phasenreserve bestimmt, ist stark von der Steilheit der Kaskodentransistoren M_5 und M_5' sowie der parasitären Kapazität C_{LA} an dem Knoten A abhängig.

Das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GBW ist definiert als:

$$\text{GBW} = A_{v0} \cdot |p_1| = \frac{g_{m3}}{C_{LB}} \quad (\text{D.8})$$

und dient als Designkriterium für die Lage des nichtdominanten Pols p_2 . Bei vorgegebenem Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GBW und Phasenreserve Φ_M gilt folgende Gleichung für die Lage der nichtdominanten Polstelle p_2 :

$$|p_2| \geq \text{GBW} \cdot \tan(\Phi_M). \quad (\text{D.9})$$

Neben den Designkriterien für die Dimensionierung der Leerlaufverstärkung A_{v0} , der Phasenreserve Φ_M und dem Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GBW aus der Kleinsignalanalyse werden für die Einstellung des Großsignalverhaltens weitere Gleichungen benötigt. Diese Gleichungen, die das Großsignalverhalten beschreiben, sind zusammen mit den Kleinsignalgleichungen übersichtlich in der nachfolgenden **Tabelle D.1** dargestellt.

Tabelle D.1 Designgleichungen für Operationsverstärker nach **Bild D.1**

Leerlaufverstärkung A_{v0}	$A_{v0} = g_{m3} \cdot r_{out}$
Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GBW	$\text{GBW} = \frac{g_{m3}}{C_{LB}}$
Phasenreserve Φ_M	$\Phi_M = \arctan\left(\frac{g_{m5}}{C_{LA} \cdot \text{GBW}}\right)$
Anstiegsgeschwindigkeit SR	$\text{SR} = \frac{I_{SS}}{2 \cdot C_{LB}}$
Ausgangshub OS	$\Delta U_{out}^+ = \Delta U_{out}^- = U_{DD} - 2 \cdot U_{SAT,CM}$
Kaskodenstrom I_{casc}	$I_{casc} = \text{GBW} \cdot C_{LA} \cdot \tan(\Phi_M) \cdot \Delta U^+$
Leistungsverbrauch P_W	$P_W = 2 \cdot (I_{casc} + I_{SS}) \cdot U_{DD}$

E Zweistufige Operationsverstärker und ihre Kompensationsmethoden

Einstufige Operationsverstärker besitzen, wie bereits in Anhang D gezeigt, einen sehr hochohmigen Ausgang. Diese Verstärker sind somit nicht in der Lage niederohmige Lasten bis in den Bereich von einigen hundert Ohm zu treiben. Aus diesem Grund verwendet man für solche Anwendungen meist zweistufige Operationsverstärkerkonzepte mit einer niederohmigen zweiten Stufe. Solche Architekturen weisen beim einfachen Hintereinanderschalten der einzelnen Verstärkerstufen Polstellen auf, die im Frequenzbereich sehr nahe beieinander liegen, so daß kein stabiles Verhalten des Operationsverstärkers zu erwarten ist. Die Polstellen müssen mittels geeigneter Maßnahmen derart auseinander geschoben werden, daß eine genügend große Phasenreserve entsteht. Dieses Auseinanderschieben der Pole, oft auch als "pole-splitting" bezeichnet, kann auf unterschiedlichste Weise geschehen. Die üblichsten Methoden sind die Miller-, RC-, und Grounded-Gate-Frequenzkompensation. Nachteil bei diesen zweistufigen Verstärkern ist, daß mit zunehmender Lastkapazität C_L der Verstärker wieder an Phasenreserve, sprich Stabilität verliert.

Jede Verstärkerstufe wird im folgenden durch einen dominanten Pol und einer Verstärkung beschrieben. Somit kann das kleinsignalmäßige Verhalten kaskadierter Verstärkerstufen durch die nachfolgende Übertragungsfunktion $H(s)$ beschrieben werden:

$$H(s) = \frac{A_{vo} \cdot \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{s}{z_i}\right)}{\prod_{j=1}^M \left(1 - \frac{s}{p_j}\right)}, \quad (\text{E.1})$$

wobei N und M die Anzahl der vorhanden Pol- und Nullstellen und A_{vo} die Leerlaufverstärkung angibt. Mit Hilfe dieser Informationen können Aussagen über die Stabilität des Systems getroffen werden.

Bei der **Miller-Kompensation** wird die Kompensationskapazität C_C zwischen die Ausgänge der beiden Verstärkerstufen geschaltet, wodurch der Ausgang der ersten Verstärkerstufe eine virtuell mit der Verstärkung der zweiten Stufe vergrößerte Kapazität sieht. Mit Hilfe einer Kleinsignalanalyse der in **Bild E.1** gezeigten Schaltung können für den Entwurf und das Verständnis einige nützliche Zusammenhänge abgeleitet werden [106].

Die gesamte Leerlaufverstärkung A_{vo} bestimmt sich zu:

$$A_{vo} = g_{m1} \cdot R_1 \cdot g_{m2} \cdot (R_2 || R_L), \quad (E.2)$$

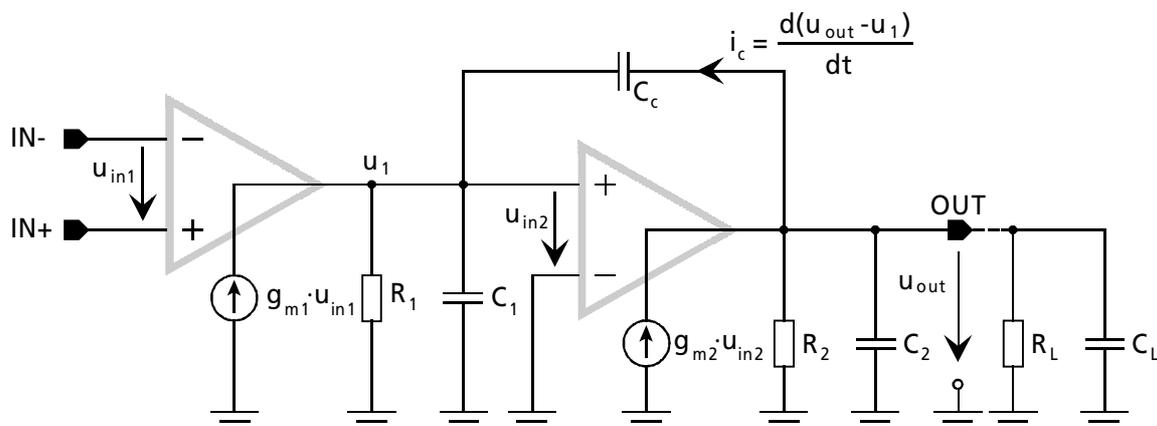


Bild E.1 Kleinsignal-ESB eines zweistufigen Verstärkers mit Miller-Kompensation

wobei sich zwei Polstellen:

$$p_1 \approx -\frac{1}{R_1 \cdot g_{m2} \cdot (R_2 || R_L) \cdot C_c} \quad \text{und} \quad p_2 \approx -\frac{g_{m2}}{C_2 + C_L} \quad (E.3)$$

ergeben. Zusätzlich tritt eine Nullstelle z_1 in der rechten Halbebene der komplexen s -Ebene auf, die sich nachteilig auf das Frequenzverhalten auswirkt, da sie eine Betragsanhebung und eine zusätzliche Phasenabsenkung verursacht:

$$z_1 \approx \frac{g_{m2}}{C_c}. \quad (E.4)$$

Die Lage der Nullstelle kann kontrolliert werden, wenn zu der Kompensationskapazität C_c ein Widerstand R_c in Reihe geschaltet wird. Die dann entstehende Nullstelle bestimmt sich zu:

$$z_1 \approx \frac{1}{C_c \cdot \left(\frac{1}{g_{m2}} - R_c \right)}. \quad (E.5)$$

Durch geeignete Wahl von R_c kann die Nullstelle entweder ins Unendliche oder in die rechte Halbebene geschoben werden. Diese Art der Kompensation wird in der Literatur häufig auch als **RC-Kompensation** bezeichnet. Das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GBW läßt sich über das Produkt des dominanten Pols p_1 und den Leerlaufverstärkungen $A_{vo1} = g_{m1} \cdot R_1$ und $A_{vo2} = g_{m2} \cdot (R_2 || R_L)$ berechnen zu:

$$GBW = A_{vo} \cdot |p_1| = \frac{A_{vo1} \cdot A_{vo2}}{R_1 \cdot g_{m2} \cdot (R_2 || R_L) \cdot C_c} = \frac{g_{m1}}{C_c}. \quad (E.6)$$

Für die Lage des nichtdominanten Pols p_2 kann folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$|p_2| > \text{GBW} \cdot \tan(\phi_M), \quad (\text{E.7})$$

wobei dann für die Dimensionierung der Kompensationskapazität C_C folgende Beziehung erfüllt sein muß:

$$C_C \geq \frac{g_{m1}}{g_{m2}} \cdot C_2 \cdot \tan(\phi_M). \quad (\text{E.8})$$

Eine weitere übliche Methode ist die in **Bild E.2** gezeigte **Grounded-Gate-Kompensation** [107]. Wie die nachfolgenden Kleinsignaluntersuchungen ergeben, können im Vergleich zur Miller-Kompensation größere kapazitive Lasten an den Ausgang geschaltet werden ohne einen Verlust an Phasenreserve, bzw. Stabilität zu erleiden. Durch die Eliminierung des Vorwärtspfades zwischen den beiden Verstärkerstufen durch die Kompensationskapazität C_C kann im Vergleich zur Miller-Kompensation nicht nur die Nullstelle in der rechten komplexen s-Halbebene vermieden werden, sondern auch zusätzlich eine Verbesserung der Betriebsspannungsunterdrückung PSRR und des Rauschverhaltens erzielt werden [108]. Die Kleinsignalanalyse ergibt für die Leerlaufverstärkung A_{V0} keine Veränderung gegenüber der Miller-Kompensation.

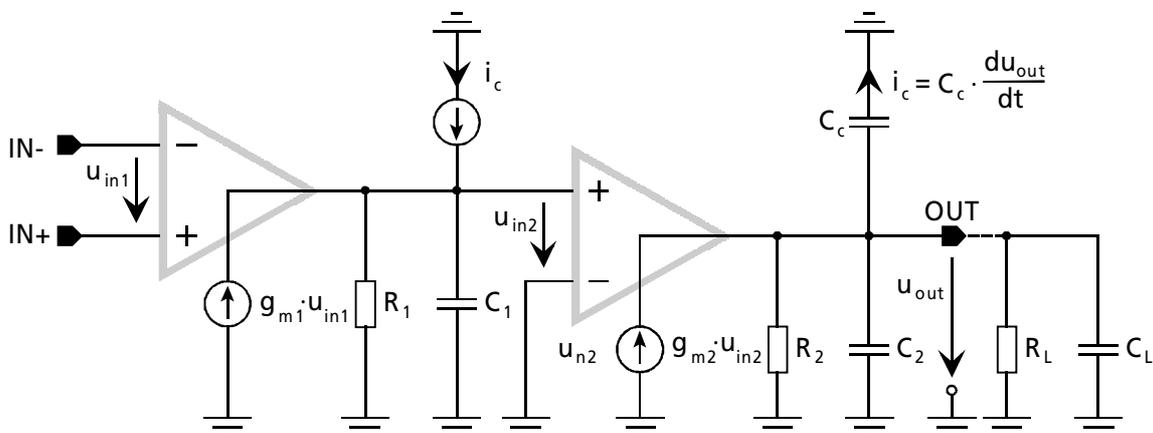


Bild E.2 Kleinsignal-ESB eines zweistufigen Operationsverstärkers mit „grounded-gate“-Kompensation

Unter Vernachlässigung der endlichen Steilheit g_{m3} des Kaskodentransistors, der für die Erzeugung der in **Bild E.2** benötigten virtuellen Masse benötigt wird, ergeben sich erneut die Lagen zweier Polstellen zu:

$$p_1 \approx -\frac{1}{R_1 \cdot g_{m2} \cdot (R_2 \parallel R_L) \cdot C_C} \quad \text{und} \quad p_2 \approx -\frac{g_{m2}}{(C_2 + C_L)} \cdot \frac{C_C}{C_1}. \quad (\text{E.9})$$

Ein Vergleich mit den Polstellen der Miller-Kompensation aus Gleichung (E.3) ergibt, daß die Lage des Pols p_2 um den Faktor (C_C/C_1) größer ist. Aufgrund dieser Tatsache kann die Bandbreite bei gleichen Stabilitätsanforderungen um den zuvor genannten Faktor erhöht werden. Bei der Berücksichtigung einer endlichen Steilheit g_{m3} ergibt sich zusätzlich ein hochfrequenter Pol p_3 :

$$p_3 = -\frac{g_{m3} \cdot (C_C + C_2 + C_L)}{C_C \cdot (C_2 + C_L)} \quad (\text{E.10})$$

und eine Nullstelle z_1 :

$$z_1 \approx -\frac{g_{m3}}{C_C}. \quad (\text{E.11})$$

Mit der Annahme $C_2 + C_L \gg C_C$ fällt der Pol p_3 genau mit der Nullstelle z_1 zusammen:

$$(C_2 + C_L) \gg C_C \Rightarrow p_3 = -\frac{g_{m3}}{C_C}. \quad (\text{E.12})$$

Das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt ergibt sich, wie bei der Miller-Kompensation zu:

$$\text{GBW} = A_{vo} \cdot p_1 = \frac{A_{vo1} \cdot A_{vo2}}{R_1 \cdot g_{m2} \cdot (R_2 || R_L) \cdot C_C} = \frac{g_{m1}}{C_C}. \quad (\text{E.13})$$

Bei gleichen Stabilitätsanforderungen kann die Kompensationskapazität kleiner gewählt werden, so daß sich die aufgrund Gleichung (E.13) erzielbare Bandbreite vergrößert. Eine gewünschte Phasenreserve Φ_M kann mit Hilfe der nachfolgenden Beziehung gezielt über die Lage des zweiten Pols p_2 eingestellt werden:

$$|p_2| > \text{GBW} \cdot \tan(\phi_M). \quad (\text{E.14})$$

Für eine definierte Phasenreserve Φ_M muß für das Verhältnis der Steilheiten die Bedingung:

$$\frac{g_{m1}}{g_{m2}} \leq \frac{C_C^2}{(C_2 + C_L) \cdot C_1 \cdot \tan(\phi_M)} \quad (\text{E.15})$$

bei vorgegebener Kompensationskapazität C_C und Lastkapazität C_L eingehalten werden. Sind die Steilheiten der ersten zwei Stufen vorgegeben, so läßt sich die benötigte Kompensationskapazität C_C berechnen:

$$C_C \geq \sqrt{\frac{g_{m1}}{g_{m2}} \cdot C_2 \cdot C_1 \cdot \tan(\phi_M)}. \quad (\text{E.16})$$

Wird ein niederohmiger analoger Ausgang für einen integrierten Schaltkreis benötigt, der zusätzlich mit kapazitiven Lasten im nF-Bereich belastet werden darf, kann die in **Bild E.3** gezeigte Struktur verwendet werden [109]. Die Verwendung einer zweistufigen Architektur mit einer effizienten class-AB Ausgangsstufe und der zuvor vorgestellten Kompensationsmethode nach dem sogenannten Grounded-Gate-Prinzip [107, 108] erlaubt es, den Ausgang U_{out} des Operationsverstärkers bis zu den Betriebsspannungsgrenzen hin auszusteuern. Da der Operationsverstärker häufig als Buffer bzw. Eins-Verstärker betrieben wird, muß die Eingangsstufe bestehend aus den Transistoren M_{V3} und M_{V4} ebenfalls über den gesamten Aussteuerbereich der letzten Verstärkerstufe funktionsfähig sein.

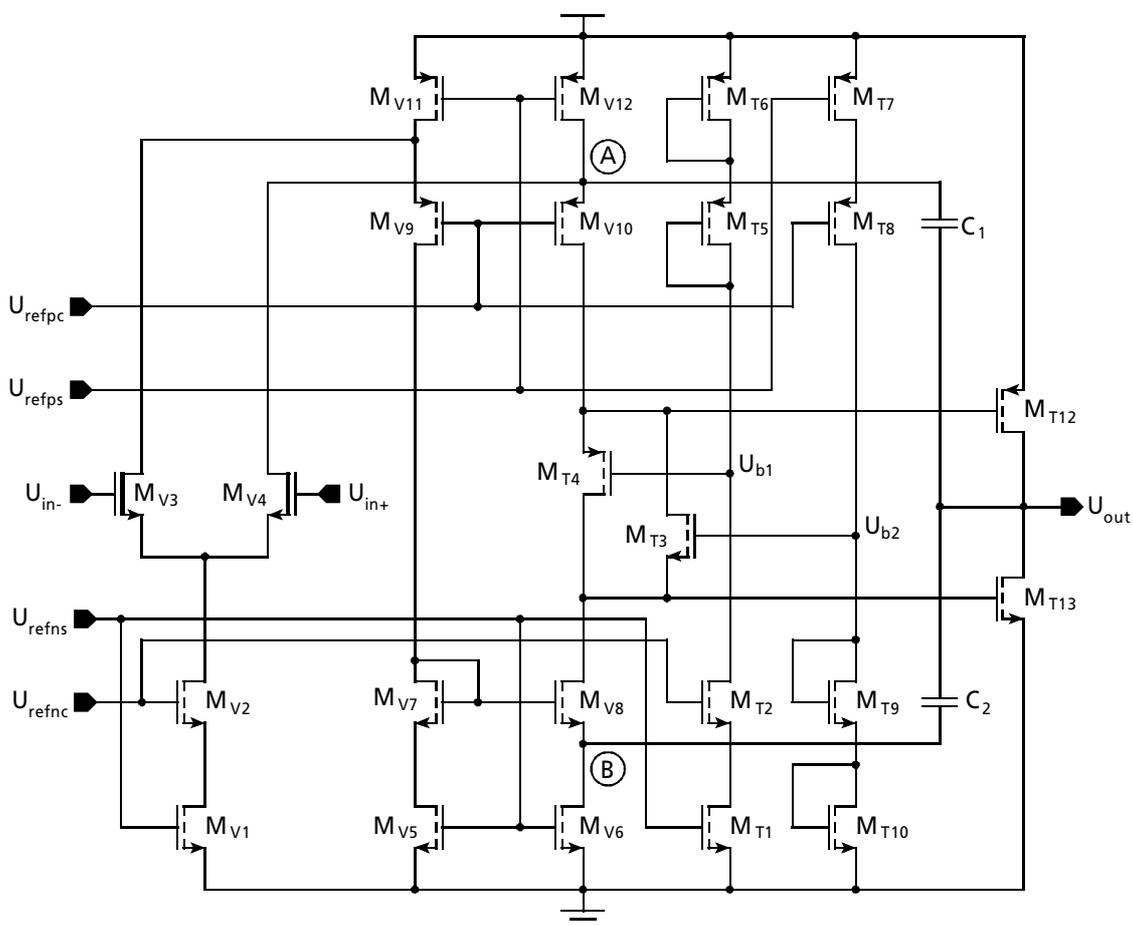


Bild E.3 Operationsverstärker mit einer class-AB Ausgangsstufe ($R_L=2,25K\Omega$, $C_L=1nF$)

Stehen im Gegensatz zu der hier verwendeten Technologie keine nichtimplantierten Transistoren für die Eingangsstufe zur Verfügung, so können sogenannte komplementäre Eingangsstufen zur Lösung des Problems verwendet werden. Diese besitzen in ihrer einfachsten Form das Problem, daß die Steilheit g_m der Eingangsstufe über den gesamten Aussteuerbereich um den Faktor 2 variiert.

Da das Verstärkungs-Bandbreite-Produkt GBW aufgrund der Proportionalität mit der Steilheit g_m ebenfalls um den Faktor 2 schwankt, und die Polstellen davon unbeeinträchtigt bleiben, muß eine sorgfältige Frequenzgangkompensation vorgenommen werden, damit der Verstärker über den gesamten Eingangsspannungsbereich stabil bleibt. In der letzten Zeit sind jedoch eine Reihe von schaltungstechnischen Maßnahmen veröffentlicht worden, die eine konstante Steilheit über den gesamten Eingangsspannungsbereich gewährleisten [110-112].

Die Transistoren M_{T12} und M_{T13} der Ausgangsstufe werden von der vorhergehenden gefalteten Kaskode über zwei komplementäre Levelshifter M_{T3} und M_{T4} angesteuert. Im Ruhezustand befinden sich beide Transistoren M_{T3} und M_{T4} im leitfähigen Zustand und halten für eine Minimierung der Verlustleistung mit Hilfe der Bias-Transistoren M_{T1} - M_{T8} die Gate-Source-Spannungen der Ausgangstransistoren niedrig. Wird der Ausgang des Verstärkers zur unteren Betriebsspannung hin angesteuert, so wird das Gate-Potential des n-Kanal-Transistors M_{T13} hochgezogen. Aufgrund eines konstanten Potentials U_{b2} sperrt der Levelshift-Transistor M_{T3} , und das komplementäre Gegenstück M_{T4} muß den gesamten Strom des Kaskodenzweigs übernehmen. Unter diesen Bedingungen zieht der Transistor M_{T4} das Gate-Potential des p-Kanal-Ausgangstransistor M_{T12} ebenfalls zur positiven Betriebsspannung hoch, so daß dieser sperrt [109, 113]. Im Fall einer Aussteuerung zur positiven Betriebsspannung wiederholen sich die eben beschriebenen Vorgänge in komplementärer Weise.

Die Kompensation erfolgt über die zuvor erwähnte Grounded-Gate-Kompensation nach Ahuja. Als virtuelle Massepunkte werden die Potentiale an den Knoten (A) und (B) verwendet, die über Kaskoden konstant gehalten werden. Steuert der Verstärker bis an eine Betriebsspannungsgrenze aus, so kann es vorkommen, daß auf dieser Seite die Transistoren aus dem Sättigungsbereich herausfahren und die benötigte virtuelle Masse für die Kompensation zerstört wird. In diesem Fall übernimmt die zweite Kompensationskapazität die Aufgabe der Stabilisierung.

F Übertragungsfunktion eines SC-Integrators mit korreliertem Doppelabtasten (CDS) und kapazitivem Rücksetzen (CR)

Integratoren sind wichtige Grundbausteine für Filter, interpolative A/D-Wandler und Pulsweiten-Modulatoren. Die Anforderung, den Offset und das niederfrequente $1/f$ -Rauschen des verwendeten Operationsverstärkers wirksam zu unterdrücken, ist durch das Prinzip der korrelierten Doppelabtastung CDS [114] (im eng. "**C**orrelated **D**ouble **S**ampling") möglich. **Bild F.1 b)** zeigt einen häufig verwendeten, nichtinvertierenden SC-Integrator, der zudem über kapazitives Rücksetzen CR (im eng. "**C**apacitive **R**esetting") [75] verfügt, damit der Ausgang U_{out} in der nichtintegrierenden Taktphase Φ nicht immer das Potential der virtuellen Masse annehmen muß, sondern auf der Ausgangsspannung des vorhergehenden Integrations schritts abzüglich der Offsetspannung gehalten wird.

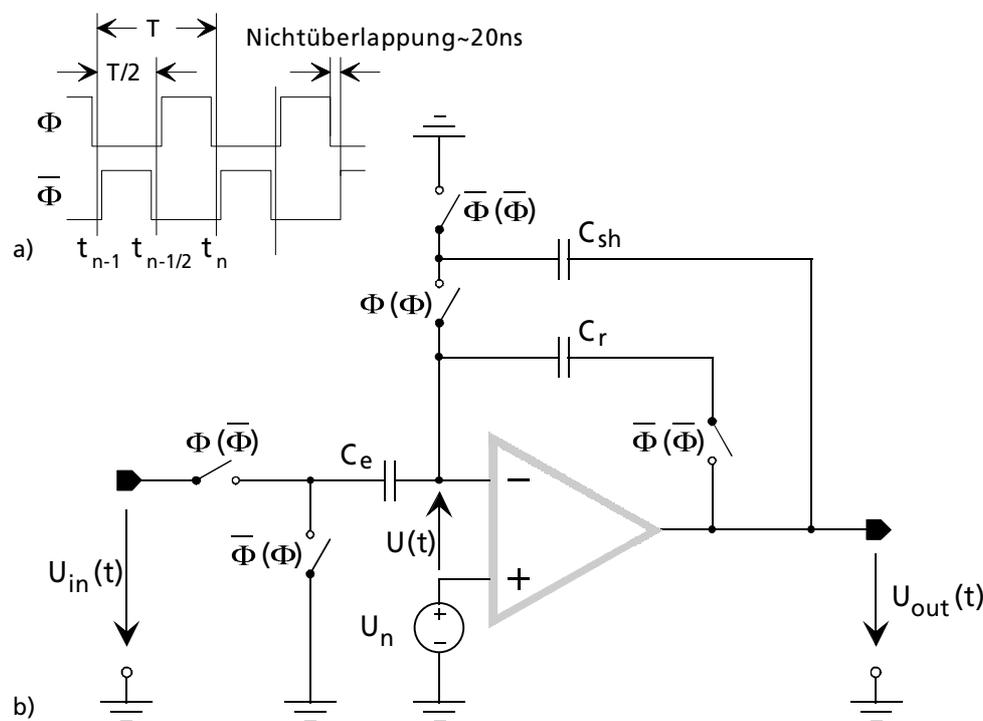


Bild F.1 a) Taktschema eines nichtüberlappenden Zweiphasentaktes
 b) SC-Integrator mit korrelierter Doppelabtastung

Hierzu dient eine Haltekapazität C_{sh} , die in der Integrationsphase $\bar{\Phi}$ auf die Ausgangsspannung aufgeladen wird und in der nichtintegrierenden Phase Φ in die Rückkopplung geschaltet wird. Soll der Integrator invertierendes Verhalten zeigen, so müssen lediglich die Taktphasen der Schalter vor der Eingangskapazität C_e vertauscht werden. Die vorliegende Schaltung benötigt einen nichtüberlappenden Zweiphasentakt nach **Bild F.1 a)**. Während der Taktphase Φ wird der Operationsverstärker kapazitiv gegengekoppelt, so daß sich die Eingangskapazität C_e auf die Eingangsspannung U_{in} abzüglich der eingangsbezogenen Rauschspannung U_n auf-

lädt. Die auf der Eingangskapazität C_e abgespeicherte Ladung wird in der Taktphase $\bar{\Phi}$ auf die Rückkoppelkapazität C_r verschoben, die wegen der gewünschten Integratoreigenschaft in keiner Taktphase entladen bzw. zurückgesetzt wird. Beim nichtinvertierenden Integrator entsteht im Gegensatz zum invertierenden Integrator eine Verzögerung um eine halbe Taktphase zwischen der Abtastung der Integrationsspannung U_{in} und dem Zeitpunkt der Integration.

Über das Aufstellen der Ladungsbilanzen in jeder Taktphase und der Ladungserhaltung kann die Signal- und Rauschübertragungsfunktion des nichtinvertierenden Integrators aus **Bild F.1** berechnet werden. Unter Berücksichtigung einer endlichen Leerlaufverstärkung A_{VO} ergibt sich für die Signalübertragungsfunktion $H_{STF}(z)$:

$$H_{STF}(z) = \frac{\left(\frac{-C_e^2}{A_{VO} \cdot c \cdot d} + \frac{C_e}{c} \right) \cdot z^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{-1} \cdot \left(\frac{C_r + \frac{C_r}{A_{VO}}}{c} + \frac{C_e}{A_{VO} \cdot c} \cdot \frac{C_{sh} + \frac{C_e}{A_{VO}}}{d} \right)}, \quad (F.1)$$

sowie für die Rauschübertragungsfunktion $H_{NTF}(z)$:

$$H_{NTF}(z) = \frac{\left(\frac{-C_e^2}{A_{VO} \cdot c \cdot d} - \frac{C_r}{c} \right) \cdot z^{-1} + \left(\frac{-C_e}{c} + \frac{C_e}{A_{VO} \cdot c} \cdot \frac{C_e + C_{sh}}{d} \right) \cdot z^{-\frac{1}{2}} + \frac{C_e + C_r}{c}}{1 - z^{-1} \cdot \left(\frac{C_r + \frac{C_r}{A_{VO}}}{c} + \frac{C_e}{A_{VO} \cdot c} \cdot \frac{C_{sh} + \frac{C_e}{A_{VO}}}{d} \right)}. \quad (F.2)$$

Die in der Signal- und Rauschübertragungsfunktion eingeführten Abkürzungen c und d lauten:

$$c = \frac{C_e}{A_{VO}} + C_r + \frac{C_r}{A_{VO}} \quad (F.3)$$

und:

$$d = \frac{C_e}{A_{VO}} + C_{sh} + \frac{C_{sh}}{A_{VO}}. \quad (F.4)$$

Bild F.2 zeigt die mit der Leerlaufverstärkung A_{VO} parametrisierte Signal- und Rauschübertragungsfunktionen des zuvor analysierten SC-Integrators, die über einer auf die Abtastfrequenz f_c normierten Frequenz f aufgetragen sind. Der Parameter A_{VO} wurde von 40-80dB mit einer Schrittweite von jeweils 20dB variiert. Durch das kapazitive Rücksetzen wird die Integratoreigenschaft nicht wie beim konventionellen Integrator ohne CR durch die Leerlaufverstärkung A_{VO} , sondern durch das Quadrat der Leerlaufverstärkung A_{VO}^2 begrenzt. Leider wird die Rauschspannung U_n nicht mit der quadratischen, sondern nur mit der einfachen Leerlaufverstärkung A_{VO} im Bezug zur Signalübertragungsfunktion H_{STF} unterdrückt.

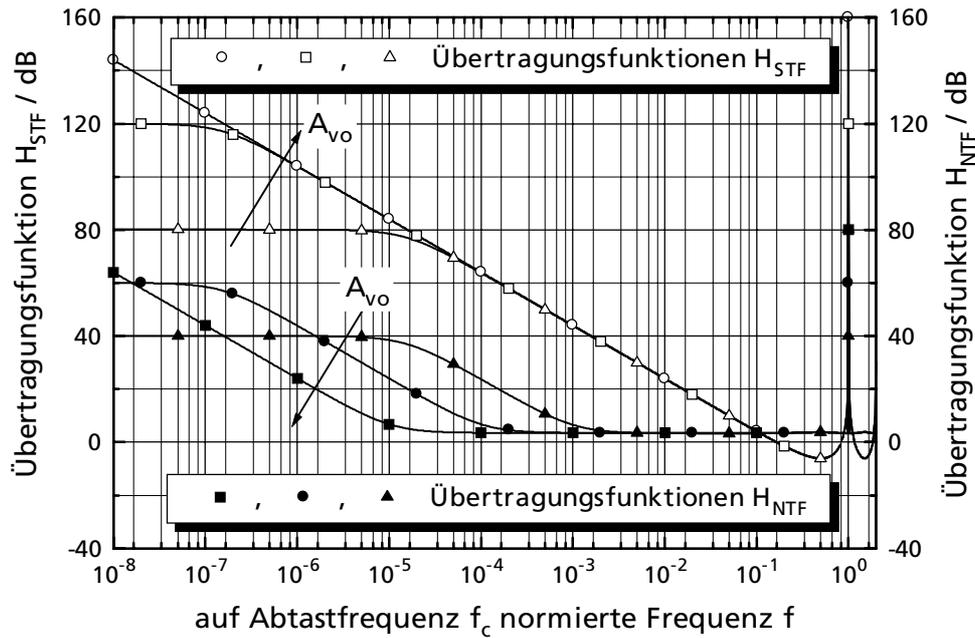


Bild F.2 Signal- und Rauschübertragungsfunktion eines SC-Integrators mit korrelierter Doppelabtastung CDS und kapazitivem Rücksetzen CR

Die normierte Durchtrittsfrequenz f_0/f_c des Integrators, bei der die Übertragungsfunktion den Betrag von 1 annimmt, berechnet sich aus der zuvor berechneten Signalübertragungsfunktion H_{STF} unter Vernachlässigung der Leerlaufverstärkung A_{VO} zu:

$$\frac{f_0}{f_c} = \frac{1}{\pi \cdot \sin\left(\frac{C_e}{2 \cdot C_r}\right)}. \tag{F.5}$$

Um den Einfluß der Leerlaufverstärkung A_{VO} des verwendeten Operationsverstärkers auf das Übertragungsverhalten des nichtinvertierenden Integrators zu analysieren, muß sowohl die reale als auch die ideale Signalübertragungsfunktion des vorliegenden Abtastsystems bekannt sein. Die reale Signalübertragungsfunktion H_{STF} wird dabei im Gegensatz zur idealen Signalübertragungsfunktion $H_{STF,ideal}$ unter der Berücksichtigung realer Operationsverstärkerdaten berechnet. Ein Vergleich beider Signalübertragungsfunktionen mit $z=e^{j\omega T}$ ergibt eine frequenzabhängige Abweichung $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{H_{STF}(z = e^{j\omega T})}{H_{STF,ideal}(z = e^{j\omega T})} = \frac{1}{(1 - m(\omega)) \cdot e^{-j\theta(\omega)}} \xrightarrow{m(\omega), \theta(\omega) \ll 1} F(\omega) \cong \frac{1}{1 - m(\omega) - j\theta(\omega)}, \tag{F.6}$$

wobei $m(\omega)$ und $\theta(\omega)$ den Betrags- sowie Phasenfehler angeben, der durch die Einführung eines Operationsverstärkers mit endlicher Leerlaufverstärkung A_{VO} entsteht [114, 116, 117]. Während bei SC-Verstärkern hauptsächlich nur der entstandene Betragsfehler $m(\omega)$ interessiert, ist bei Integratoren oder Filterschaltungen neben dem Betragsfehler $m(\omega)$ auch der Phasenfehler $\theta(\omega)$ von großem Interesse.

Mit der idealen Übertragungsfunktion $H_{\text{STF,ideal}}$ des nichtinvertierenden SC-Integrators:

$$H_{\text{STF,ideal}} = \frac{C_e}{C_r} \cdot \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{1-z^{-1}} \quad (\text{F.7})$$

ergibt sich unter der Annahme, daß $A_{\text{VO}} \gg 1$ und $\omega \cdot T \ll 1$ ist, für den Betragsfehler der nachfolgende Ausdruck:

$$m(\omega) = -\frac{1}{A_{\text{VO}}} \cdot \left(1 + \frac{C_e}{C_r} + \frac{C_e}{C_{\text{sh}}}\right). \quad (\text{F.8})$$

Der Fehler $m(\omega)$ ist frequenzunabhängig, hängt umgekehrt proportional von der Leerlaufverstärkung A_{VO} ab und kann weiter verringert werden, wenn die Haltekapazität C_{sh} im Vergleich zur Eingangskapazität C_e groß gewählt wird. In **Bild F.3** ist der prozentuale Betragsfehler über der Leerlaufverstärkung A_{VO} aufgetragen, der zudem mit dem zuvor angesprochenem Verhältnis zwischen C_e und C_{sh} parametrisiert ist. Um den Fehler gerade im Bereich kleiner Leerlaufverstärkungen gering zu halten, muß das Verhältnis zwischen der Eingangs- und Haltekapazität größer als eins sein. Für den Phasenfehler ergibt sich:

$$\theta(\omega) = -\frac{C_e \cdot \sin(\omega \cdot T)}{2 \cdot C_r \cdot A_{\text{VO}}^2 \cdot (\cos(\omega \cdot T) - 1)}, \quad (\text{F.9})$$

der im Gegensatz zum Betragsfehler von der Frequenz abhängt und ebenfalls im **Bild F.3** über die auf die Taktfrequenz f_c normierte Frequenz dargestellt ist mit A_{VO} als Parameter.

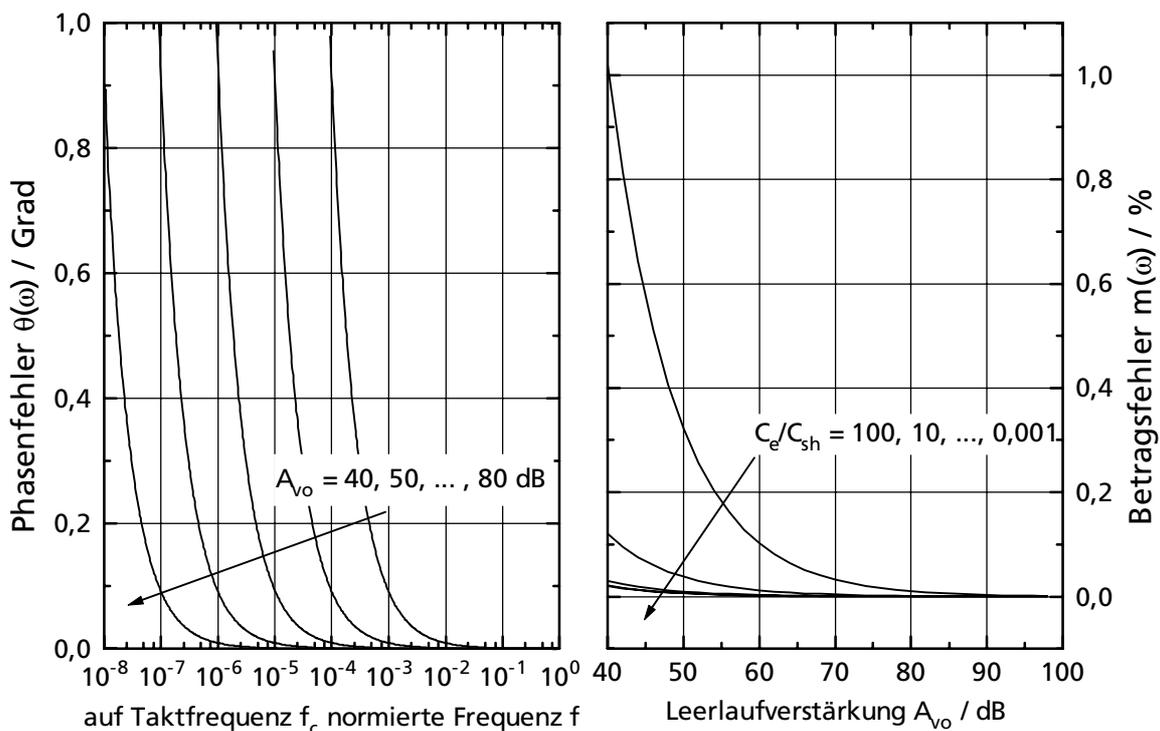


Bild F.3 Betrags- und Phasenfehler des nichtinvertierenden Integrators mit CDS und CR

G Offsetkompensierter SC-Komparator

Beim in **Bild G.1** gezeigten SC-Komparator handelt es sich um ein kapazitiv gekoppeltes Latch mit automatischem Offsetabgleich [114]. Das Latch wird über eine Mitkopplung aus zwei invertierenden Verstärkern gebildet.

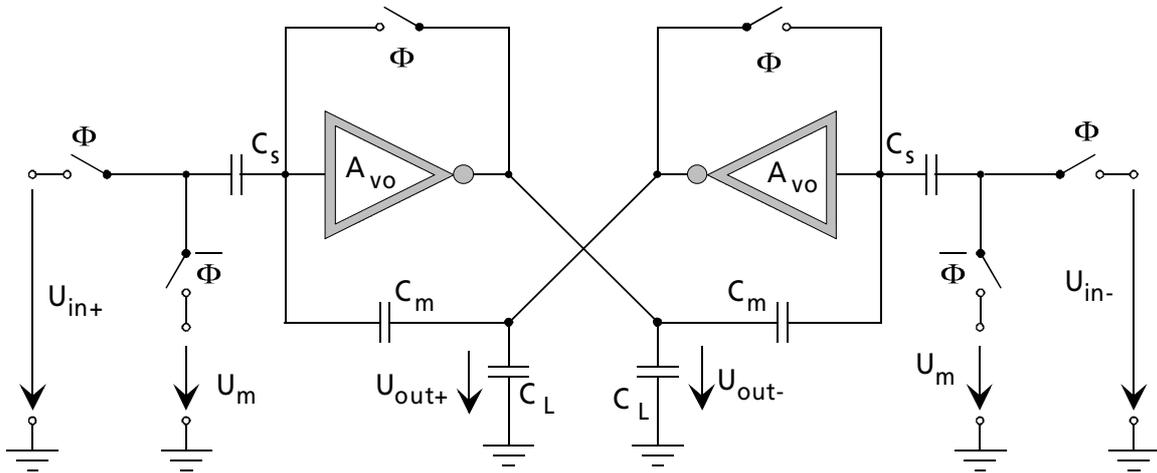
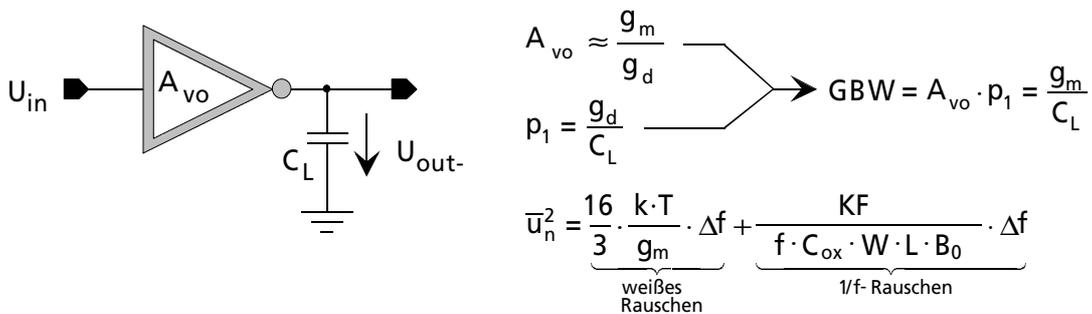


Bild G.1 Aufbau des zeitdiskreten SC-Komparators

Um den Komparator abzugleichen, werden die Ausgänge der invertierenden Verstärker in der Taktphase Φ mit ihren jeweiligen Eingängen kurzgeschlossen. Werden als Verstärkerelemente Inverter oder AC-gekoppelte Inverter wie in **Bild G.2** gezeigt verwendet,



Realisierung (a): Inverter

Realisierung (b): AC-gekoppelter Inverter

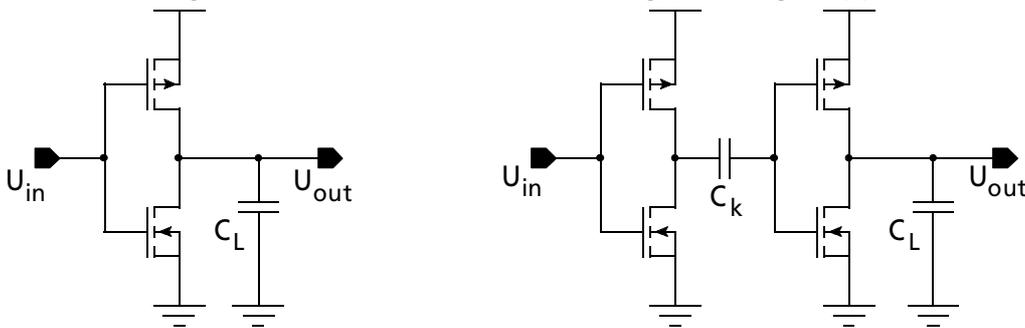


Bild G.2 Realisierung der Verstärkerelemente

so verlieren diese während der Rückkopplung ihre hohe Verstärkung und es stellen sich Arbeitspunkte ein, die von den Verhältnissen der Steilheiten g_m der jeweiligen p- und n-Kanal-Transistoren sowie der Betriebsspannung abhängig sind. Außerdem werden zu diesem Zeitpunkt die Eingangskondensatoren C_S und C'_S gegen die Potentiale an den Eingängen $in+$ und $in-$ auf ihre jeweilige Eingangsspannung U_{in+} sowie U_{in-} aufgeladen. Da die Arbeitspunkte der Inverter variieren können, werden die Asymmetrien auf den Kondensatoren C_m , bzw. C'_m abgespeichert. In der Taktphase $\bar{\Phi}$ findet der eigentliche Vergleich statt. Hierzu wird die hohe Verstärkung der Inverterstrukturen wieder hergestellt, indem die Verbindungen zwischen ihren Ein- und Ausgängen wieder aufgetrennt werden. Lag zwischen U_{in+} und U_{in-} zum Zeitpunkt Φ keine Spannungsdifferenz an, so muß der Komparator in den zuvor eingestellten Arbeitspunkten verweilen. Lag jedoch eine positive oder negative Spannungsdifferenz vor, so kippt der Komparator in einen seiner stabilen Arbeitspunkte.

Im folgenden soll das Signal-Rausch-Leistungsverhältnis SNR eines solchen Komparators hergeleitet werden. Hierzu müssen die mittleren quadratischen Rauschladungsbeiträge $\bar{Q}_{C_S,n}^2$ auf den Abtastkondensatoren C_S während der einzelnen Taktphasen Φ und $\bar{\Phi}$ untersucht werden. Einen Beitrag zur mittleren quadratischen Rauschladung $\bar{Q}_{C,n}^2$ einer Kapazität C liefert der endliche Einschaltwiderstand R_{on} der Schalter. **Bild G.3** zeigt eine Zusammenschaltung eines realen Schalters S und einer Kapazität C , anhand derer die mittlere quadratische Rauschladung berechnet werden kann. Hierbei wird der reale Schalter durch eine Rauschspannungsquelle $\bar{u}_{R,n}^2$ und einen idealen, d.h. rauschfreien Schalter dargestellt.

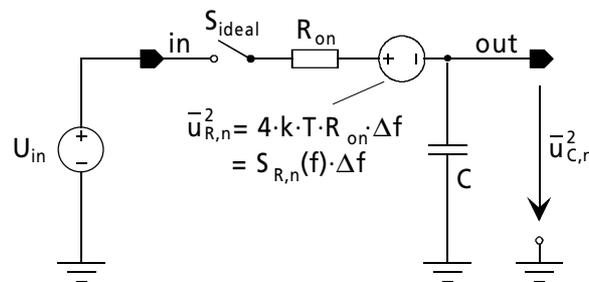


Bild G.3 Herleitung des $k \cdot T/C$ -Rauschen

Falls die Spannungsquelle am Eingang ideal, d.h. der Innenwiderstand der Quelle gleich Null ist, so berechnet sich die mittlere quadratische Rauschspannung $\bar{u}_{C,n}^2$ am Ausgang out zu:

$$\bar{u}_{C,n}^2 = \int_0^{\infty} S(f) df = \int_0^{\infty} S_{R,n}(f) \cdot |H(f)|^2 df \quad (\text{G.1})$$

mit der spektralen Rauschleistungsdichte $S_{R,n}(f) = \bar{u}_{R,n}^2 / \Delta f = 4 \cdot k \cdot T \cdot R_{on}$ und der Übertragungsfunktion $H(f)$, mit der die Rauschspannung $\bar{u}_{R,n}^2$ des realen Schalters zum Ausgang out hin übertragen wird.

Das Ergebnis:

$$\bar{u}_{C,n}^2 = \int_0^{\infty} S_{R,n}(f) \cdot |H(f)|^2 df = \frac{4 \cdot k \cdot T \cdot R_{on}}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{1 + (\omega \cdot R_{on} \cdot C)^2} = \frac{k \cdot T}{C} \quad (G.2)$$

ist sehr interessant, da die Größe der spektralen Rauschspannung $\bar{u}_{C,n}^2$ nicht von der Größe des Schalterwiderstandes R_{on} abhängig ist. Somit berechnet sich die mittlere quadratische Rauschladung auf einer Kapazität, die durch den Widerstand R_{on} eines Schalters verursacht wird zu:

$$\bar{Q}_{C,n}^2 = C^2 \cdot \bar{u}_{C,n}^2 = k \cdot T \cdot C. \quad (G.3)$$

Nun müssen noch die Beiträge zur Rauschladung, die durch die Verstärkerelemente hervorgerufen werden, untersucht werden. Die eingangsbezogene Rauschspannung $\bar{u}_{INV,n}^2$ eines Inverters lautet:

$$\bar{u}_{INV,n}^2 = \underbrace{\frac{16}{3} \cdot \frac{k \cdot T}{g_m} \cdot \Delta f}_{\text{weißes Rauschen}} + \underbrace{\frac{KF}{f \cdot C_{ox} \cdot W \cdot L \cdot B_0} \cdot \Delta f}_{1/f\text{-Rauschen}}. \quad (G.4)$$

In den nachfolgenden Berechnungen wird jedoch nur das eingangsbezogene thermische, bzw. weiße Rauschen der Inverter betrachtet, da das 1/f-Rauschen durch die ebenfalls implementierte korrelierte Doppelabtastung unterdrückt wird. Da die Inverter in den verschiedenen Taktphasen unterschiedliche Beschaltungen aufweisen, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall a): Verstärker ist gegengekoppelt (Taktphase Φ)

Ist der Verstärker voll gegengekoppelt, so besitzt er eine Bandbreite f_{-3dB} , in die sowohl die Leerlaufverstärkung A_{vo} als auch der dominante Pol p_1 des Inverters eingeht und aus der die äquivalente Rauschbandbreite:

$$\Delta f = \frac{\pi}{2} \cdot f_{-3dB} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{GBW}{2 \cdot \pi} = \frac{A_{vo} \cdot p_1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{g_m}{g_d} \cdot \frac{g_d}{C_L} = \frac{g_m}{4 \cdot C_L} \quad (G.5)$$

des Inverters resultiert. Somit berechnet sich die eingangsbezogene Rauschspannung des Inverters in der Taktphase Φ zu:

$$\bar{u}_{INV,\Phi,n}^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{k \cdot T}{g_m} \cdot \frac{g_m}{4 \cdot C_L} = \frac{4}{3} \cdot \frac{k \cdot T}{C_L}, \quad (G.6)$$

die auf einer Kapazität C die mittlere quadratische Rauschladung:

$$\bar{Q}_{INV,\Phi,n}^2 = C^2 \cdot \bar{u}_{INV,\Phi,n}^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{k \cdot T \cdot C}{C_L}, \quad (G.7)$$

verursacht.

Fall b): Verstärker ist nicht gegengekoppelt (Taktphase $\bar{\Phi}$)

Ist der Verstärker offen, d.h. nicht gegengekoppelt, so ändert sich seine Bandbreite f_{-3dB} , die im Gegensatz zu Fall a) nur noch den dominanten Pol p_1 beinhaltet. Die äquivalente Rauschbandbreite Δf berechnet sich demzufolge zu:

$$\Delta f = \frac{\pi}{2} \cdot f_{-3dB} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_1}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{g_d}{C_L} = \frac{g_d}{4 \cdot C_L}. \quad (\text{G.8})$$

Die mittlere quadratische Rauschspannung ergibt sich in der Taktphase $\bar{\Phi}$ analog zu Fall a):

$$\bar{u}_{INV,\bar{\Phi},n}^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{k \cdot T}{g_m} \frac{g_d}{4 \cdot C_L} = \frac{4}{3} \cdot \frac{k \cdot T}{A_{vo} \cdot C_L}, \quad (\text{G.9})$$

die auf einer Kapazität C eine mittlere quadratische Rauschladung:

$$\bar{Q}_{INV,\bar{\Phi},n}^2 = C^2 \cdot \bar{u}_{INV,\bar{\Phi},n}^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{k \cdot T \cdot C}{C_L} \quad (\text{G.10})$$

hervorruft.

Werden die auftretenden Rauschbeiträge einer jeweiligen Taktphase addiert, so erhält man für die Taktphase Φ die mittlere quadratische Rauschladung $\bar{Q}_{n,\Phi}^2$ auf der Abtastkapazität C_S :

$$\bar{Q}_{n,\Phi}^2 = k \cdot T \cdot (C_s + C_m) + \frac{4}{3} \cdot k \cdot T \cdot \frac{C_s^2}{(C_s + C_m + C_c)} \quad (\text{G.11})$$

sowie in der Taktphase $\bar{\Phi}$ die ebenfalls entstehende Rauschladung $\bar{Q}_{n,\bar{\Phi}}^2$:

$$\bar{Q}_{n,\bar{\Phi}}^2 = k \cdot T \cdot C_s + \frac{4}{3} \cdot k \cdot T \cdot \frac{C_s^2}{A_{vo} \cdot C_c}. \quad (\text{G.12})$$

Werden die einzelnen Beiträge der mittleren quadratischen Rauschladungen beider Taktphasen summiert, so erhält man die sog. äquivalente Rauschladung ENC (im engl.: **Equivalent Noise Charge**):

$$ENC^2 = \bar{Q}_{n,\Phi}^2 + \bar{Q}_{n,\bar{\Phi}}^2 = 2 \cdot k \cdot T \cdot C_s + k \cdot T \cdot C_m + \frac{4}{3} \cdot k \cdot T \cdot \frac{C_s^2}{(C_s + C_m + C_c)} + \frac{4}{3} \cdot k \cdot T \cdot \frac{C_s^2}{A_{vo} \cdot C_c}. \quad (\text{G.13})$$

Wird diese äquivalente Rauschladung ENC zur mittleren quadratischen Signalladung \bar{Q}_{signal}^2 ins Verhältnis gesetzt, so erhält man letztendlich das gewünschte Signal-Rauschleistungs-Verhältnis SNR:

$$SNR = 10 \cdot \log\left(\frac{\bar{Q}_{signal}^2}{ENC^2}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{\Delta U^2 \cdot C_s^2}{ENC^2}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{(U_{in} - U_m)^2 \cdot C_s^2}{ENC^2}\right). \quad (\text{G.14})$$

H Übertragungsfunktion eines SC-Verstärkers mit korreliertem Doppelabtasten (CDS) und kapazitivem Rücksetzen (CR)

SC-Verstärker sind wie die zuvor behandelten SC-Integratoren wichtige Grundbausteine komplexer Signalverarbeitungssysteme. Da die Verstärkung durch das Verhältnis zwischen Eingangs- und Ausgangskapazität definiert wird, kann aufgrund der hohen Paarungsgenauigkeit integrierter Kapazitäten eine hochpräzise Gleichspannungsverstärkung eingestellt werden. Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen ist der in **Bild H.1** gezeigte invertierende SC-Verstärker [82].

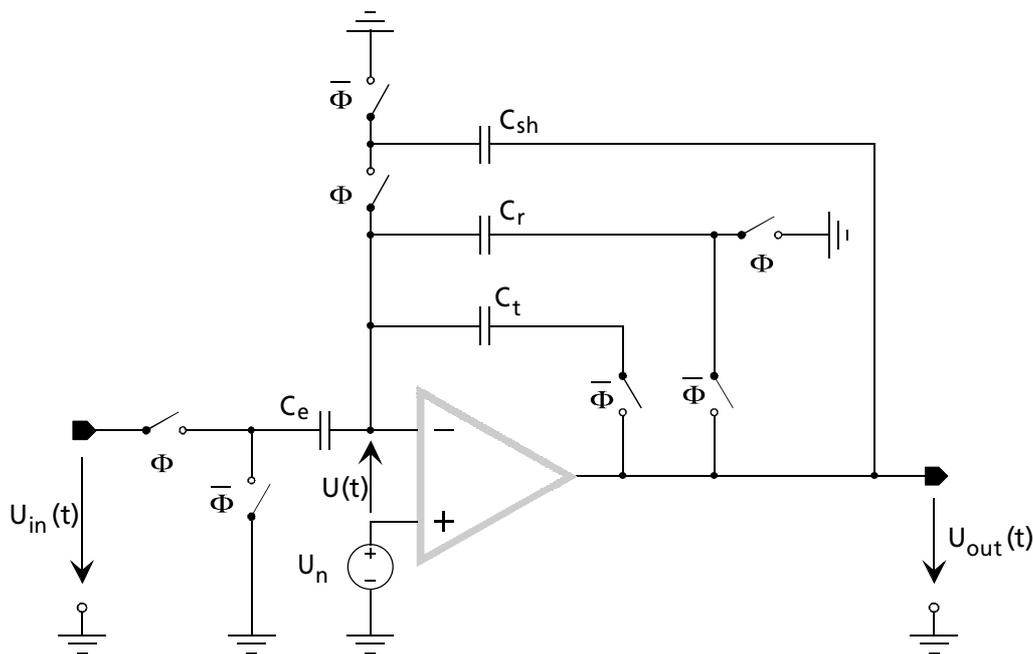


Bild H.1 SC-Verstärker mit korreliertem Doppelabtasten und kapazitivem Rücksetzen

Im Gegensatz zum nichtinvertierenden Verstärker entsteht eine Verzögerung um eine halbe Taktphase zwischen der Abtastung der Eingangsspannung U_{in} und der offsetfreien Verstärkungsphase. Werden wie beim Integrator die Taktphasen der Schalter vor der Abtastkapazität C_e vertauscht, zeigt der Verstärker ein nichtinvertierendes Verhalten. Die Unterdrückung von Offset und niederfrequentem $1/f$ -Rauschen des Verstärkers erfolgt wie bereits beim SC-Integrator nach dem Prinzip der korrelierten Doppelabtastung CDS (im eng.: **Correlated Double Sampling**) [114]. In der Taktphase Φ wird die Eingangskapazität C_e auf die Eingangsspannung U_{in} aufgeladen, während der Rückkoppelkondensator C_r auf die Offsetspannung U_n zurückgesetzt wird. Damit in der Rücksetzphase die Ausgangsspannung U_{out} nicht immer das Potential der virtuellen Masse annehmen muß, wird der Kondensator C_{sh} in der offsetfreien Taktphase $\bar{\Phi}$ - in der außerdem die Ladung der Eingangskapazität C_e auf die Rückkoppelkapazität C_r verschoben wird - auf die Ausgangsspannung aufgeladen und in der nachfolgenden Taktphase Φ in die Rückkopplung geschaltet. Dieses Prinzip wird

kapazitives Rücksetzen CR (im eng.: **Capacitive Resetting**) genannt, da das Entladen bzw. Zurücksetzen der Rückkoppelkapazität C_r durch eine kapazitive Gegenkopplung erfolgt. In der sog. Halte-, bzw. Rücksetzphase ändert sich die Ausgangsspannung lediglich um den unverstärkten Offset am Eingang des Verstärkers. Die Implementierung der Haltefunktion durch den Kondensator C_{sh} in der Taktphase Φ verringert die Anforderungen an die Leerlaufverstärkung A_{vo} und Anstiegsgeschwindigkeit SR des verwendeten Operationsverstärkers [82].

Der Verstärker besitzt über die noch verbleibende Integrationskapazität C_t eine einstellbare Bandbegrenzung. Die Ladung der Eingangskapazität C_e teilt sich somit in der Taktphase $\bar{\Phi}$ in eine Parallelschaltung aus Rückkoppelkapazität C_r und Integrationskapazität C_t auf. Da die Kapazität C_t in der Rücksetzphase nicht entladen wird, kann die Ladung der Eingangskapazität C_e nach Ablauf der eingestellten Zeitkonstanten vollständig auf die Rückkoppelkapazität C_r übertragen werden. Dieser Vorgang entspricht einer Tiefpaßfilterung, der bei stark überabgetasteten Systemen zu einer Dämpfung des hochfrequenten Rauschens beiträgt. Da diese breitbandigen Rauschanteile nun nicht mehr in dem Maße durch Unterabtastung in das Basisband heruntergefaltet werden, ist eine Erhöhung des Signal-Rausch-Abstandes SNR zu erwarten.

Eine Analyse des SC-Verstärkers führt unter Berücksichtigung einer endlichen Leerlaufverstärkung A_{vo} auf die nachfolgende Signalübertragungsfunktion $H_{STF}(z)$:

$$H_{STF}(z) = \frac{C_e \cdot (a - b) \cdot z^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{-1} \cdot \left(b \cdot \left(\frac{C_e + C_r}{A_{vo}} + C_r + C_{sh} \right) + a \cdot \left(C_t + \frac{C_t}{A_{vo}} \right) \right)}. \quad (\text{H.1})$$

Für die Rauschübertragungsfunktion $H_{NTF}(z)$ ergibt sich:

$$H_{NTF}(z) = \frac{(C_e + C_r + C_t) \cdot a + ((C_e + C_{sh} + C_r) \cdot b - (C_e + C_r) \cdot a) \cdot z^{-\frac{1}{2}} - (C_t \cdot a + (C_e + C_r) \cdot b) \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1} \cdot \left(\left(C_t + \frac{C_t}{A_{vo}} \right) \cdot a + \left(\frac{C_e + C_r}{A_{vo}} + C_r + C_{sh} \right) \cdot b \right)}. \quad (\text{H.2})$$

Für beide Übertragungsfunktionen $H_{STF}(z)$ und $H_{NTF}(z)$ gelten die eingeführten Abkürzungen:

$$a = \frac{1}{\frac{C_e + C_r + C_t}{A_{vo}} + C_r + C_t} \quad (\text{H.3})$$

$$\text{und: } b = \frac{\frac{C_e + C_r}{A_{vo}}}{\left(\frac{C_e + C_r + C_t}{A_{vo}} + C_r + C_t \right) \cdot \left(\frac{C_e + C_r + C_{sh}}{A_{vo}} + C_{sh} \right)}. \quad (\text{H.4})$$

Für niedrige Frequenzen ($z|_{\omega=0}$) kann die Signalübertragungsfunktion stark vereinfacht werden:

$$H_{STF}(z) = \frac{C_e}{C_r} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{C_e + C_r}{C_r \cdot A_{Vo}^2}} \right) \xrightarrow{\frac{C_e + C_r}{C_r \cdot A_{Vo}^2} \ll 1} H_{STF}(z) = \frac{C_e}{C_r} \cdot \left(1 - \frac{C_e + C_r}{C_r \cdot A_{Vo}^2} \right). \quad (H.5)$$

Wird der erste Klammersausdruck der Gleichung (H.5) in eine Taylor-Reihe entwickelt und nach dem zweiten Glied abgebrochen, so kann eine weitere vereinfachte Übertragungsfunktion angegeben werden, aus der leicht der niederfrequente Betragsfehler m abgelesen werden kann [82]:

$$m \cong \frac{C_e + C_r}{C_r \cdot A_{Vo}^2}. \quad (H.6)$$

Bild H.2 zeigt mit der Leerlaufverstärkung A_{Vo} parametrisierte Signal- und Rauschübertragungsfunktionen des zuvor analysierten SC-Verstärkers, die über einer auf die Taktfrequenz f_c normierten Frequenz f aufgetragen sind. Der Parameter A_{Vo} wurde von 40-80dB mit einer Schrittweite von jeweils 20dB verändert. Der niederfrequente Betragsfehler m aus Gleichung (H.6), der durch den Effekt des kapazitiven Rücksetzens nur noch mit $1/A_{Vo}^2$ in die Signalübertragungsfunktion eingeht, ist aufgrund der verwendeten Skalierung nicht erkennbar.

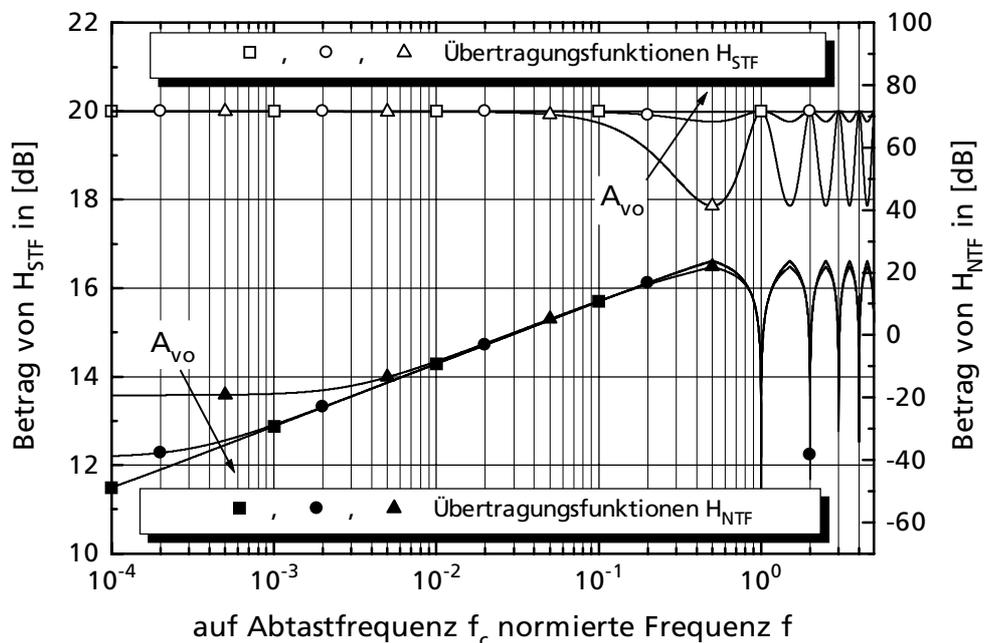


Bild H.2 Signal- und Rausch-Übertragungsfunktion des SC-Verstärkers mit korreliertem Doppelabtasten CDS und kapazitivem Rücksetzen CR

Die Rauschübertragungsfunktion steigt bis zur halben Taktfrequenz f_c mit 20dB/Dekade an und erreicht dort ihr Maximum. Durch das korrelierte Doppelabtasten wird der Offset und das niederfrequente $1/f$ -Rauschen maximal mit der vollen Leerlaufverstärkung A_{Vo} des verwendeten

Operationsverstärkers unterdrückt. Trotz der Tatsache, daß der Verstärkungsfehler nur noch mit $1/A_{V0}^2$ in die Signalübertragungsfunktion eingeht, ist es deshalb ein Irrtum, zu glauben, auf eine ausreichende Leerlaufverstärkung A_{V0} verzichten zu können. Für eine vorgegebene 3dB-Eckfrequenz berechnet sich die Größe der Tiefpaßkapazität C_t aus der Signalübertragungsfunktion $H_{STF}(z)$ unter Vernachlässigung einer endlichen Leerlaufverstärkung A_{V0} mit Hilfe der bilinearen z-Transformation zu:

$$C_t = C_r \cdot \frac{f_c - \pi \cdot f_{-3dB}}{2 \cdot \pi \cdot f_{-3dB}} \quad (\text{H.7})$$

Bild H.3 zeigt den Einfluß bei Veränderung der Tiefpaßkapazität C_t um jeweils den Faktor zehn auf die Signal- und Rauschübertragungsfunktionen. Bei jeder Verzehnfachung der Tiefpaßkapazität C_t verschiebt sich die -3dB-Eckfrequenz um jeweils eine Dekade zu niedrigeren Frequenzen. Die vor der halben Taktfrequenz einsetzende Tiefpaßcharakteristik bewirkt, daß das Übertragungsverhalten des Rauschens bei Frequenzen oberhalb der Tiefpaßeckfrequenz verbessert werden kann.

Diese weitere Reduktion des Rauschens kann in der weiteren Signalverarbeitung nicht mehr zur Verschlechterung der Auflösung, bzw. des Signal-Rausch-Abstandes beitragen.

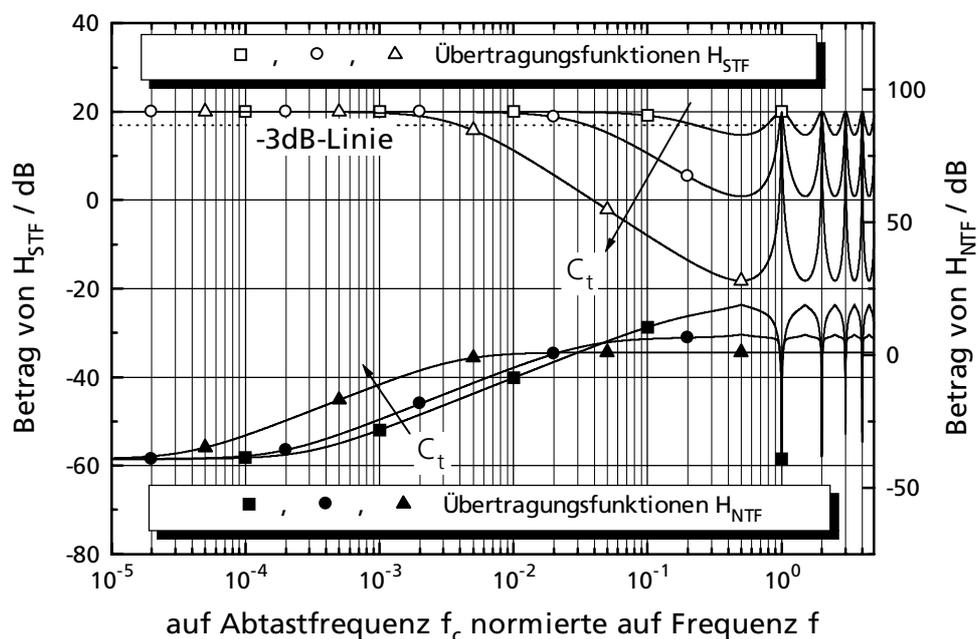


Bild H.3 Signal- und Rausch-Übertragungsfunktionen des SC-Verstärkers mit integriertem Tiefpaßverhalten, korreliertem Doppelabtasten und kapazitivem Rücksetzen