

5. Strömungsmodelle für permeable Kollektoren

Im Fall der hochporösen, permeablen Kollektoren wird während der Filtration die Beladung auf den Fasern im Inneren der Kollektoren und nicht auf den äußeren Oberflächen, wie bei massiven Kollektoren, abgeschieden. Ein meist geringer Teilstrom der Suspension transportiert während der Filtration Trübstoffe in den Kollektorkern, wobei die bekannten Abscheidemechanismen zur Anlagerung der Trübstoffe an die Faseroberflächen führen.

Die während der Filtration mit permeablen Kollektoren ablaufenden Prozesse wurden sehr grundlegend von MULDER und GIMBEL (1989, 1991) sowie NAHRSTEDT und GIMBEL (1993) theoretisch und experimentell untersucht. Grundlage des theoretischen Teils ihrer Untersuchungen stellte das Modell einer permeablen Kugel dar, das neben einer äußeren Umströmung in einem Zellenmodell nach HAPPEL auch eine Durchströmung der permeablen Kugel zuläßt.

Für die Regeneration von permeablen Kollektoren durch eine Wasserspülung müssen auf den Faseroberflächen entsprechend der in den Kapiteln 3. und 4. vorgestellten Ablösemechanismen hohe Schergradienten erzeugt werden. Zur Beschreibung der Ablösung ist daher die Kenntnis des Durchströmungsprozesses von gleicher entscheidender Bedeutung, wie für den Filtrationsprozeß. Im folgenden werden zwei Strömungsmodelle vorgestellt und diskutiert, die die Quantifizierung der Durchströmung des permeablen Kollektors ermöglichen sollen.

5.1 Schleichende Strömungen

Das Problem der Umströmung und Durchströmung hochporöser Körper innerhalb einer Filterbettschüttung läßt sich unter der Annahme schleichender Strömungen im Inneren der Körper und um den porösen Körper herum unter speziellen Randbedingungen analytisch lösen. Die Ausgangsbasis für die schleichende Umströmung eines Körpers stellt die Stokes-Gleichung (4.1) dar,

$$\begin{aligned}\nabla p &= \eta \cdot \Delta \vec{v} \\ \nabla \cdot \vec{v} &= 0\end{aligned}\quad (4.1)$$

wobei unerheblich ist, ob der Körper hochporös und permeabel oder massiv ist. Dagegen kann die schleichende Durchströmung eines porösen Körpers mit dem empirischen Strömungsgesetz von Darcy beschrieben werden,

$$\nabla p = -\frac{\eta}{k} \vec{v} \quad (5.1)$$

welches insbesondere zur Modellierung von Grundwasserströmungen eingesetzt wird. Der Parameter k heißt Permeabilität und ist eine charakteristische Kenngröße dafür, welcher Volumenstrom durch eine Fläche unter der Wirkung eines Druckgefälles hindurchtritt.

HOLZBECHER (1996) erläutert, daß sich das Darcy-Gesetz auch aus den Navier-Stokes Gleichungen ableiten läßt, indem alle Terme, die zeitliche oder örtliche Änderungen der Strömungsgeschwindigkeiten enthalten, vernachlässigt werden. Der in den Navier-Stokes Gleichungen nicht enthaltene geschwindigkeitsproportionale Reibungsterm berücksichtigt makroskopisch die Scherkräfte der umgebenden Oberflächen auf das Fluid.

BRINKMAN (1947) stellt fest, daß die Kopplung der Stokes-Gleichung (4.1) mit dem Darcy-Ansatz (5.1) zur Beschreibung der Umströmung und Durchströmung poröser Körper zu unzulässigen Diskontinuitäten der Geschwindigkeitsvektoren am Rand des porösen Körpers führt. Um diesem Problem zu begegnen, erweiterte er den Darcy-Ansatz um den Viskositätsterm aus der Stokes-Gleichung.

$$\nabla p = -\frac{\eta}{k} \bar{v} + \eta \cdot \Delta \bar{v} \quad (5.2)$$

BRINKMAN argumentierte, daß in den Randgebieten des porösen Körpers der geschwindigkeitsproportionale Reibungsterm nach Darcy wegen der hohen Geschwindigkeitsgradienten vernachlässigbar klein wird, und somit Gl. 5.2 in die Stokes-Gleichung (Gl. 4.1) übergeht. Die Diskontinuitäten werden somit vermieden. Im Inneren des porösen Körpers werden dagegen die Geschwindigkeitsgradienten klein, so daß der von Darcy vorgeschlagene geschwindigkeitsproportionale Reibungsterm zunehmend überwiegt.

Analog der von HOLZBECHER (1996) gelieferten Ableitung des Darcy-Gesetzes ist eine Herleitung des BRINKMAN-Ansatz aus den Navier-Stokes Gleichungen möglich. Da für den BRINKMAN-Ansatz in den Navier-Stokes Gleichungen formal alle Terme bis auf das Stokes'sche Reibungsglied $\eta \cdot \Delta \bar{v}$ vernachlässigt werden, kann Gl. 5.2 als Stokes'sche Näherung des Darcy-Gesetzes aufgefaßt werden.

NEALE et al. (1973) fanden für die schleichende Umströmung und Durchströmung einer porösen Kugel in der Happel-Zelle die nachfolgend angegebenen allgemeinen Lösungen (Gl. 5.3 und 5.4) ausgedrückt durch die Stromfunktion und dem dimensionslosen Radius $\xi = r \cdot k^{-0.5}$. Die noch freien Parameter A bis H sind durch Randbedingungen zu bestimmen.

Umströmung:
$$\psi_U(\xi, \theta) = \frac{k \cdot v_f}{2} \left(\frac{A}{\xi} + B \cdot \xi + C \cdot \xi^2 + D \cdot \xi^4 \right) \cdot \sin^2 \theta \quad (5.3)$$

Durchströmung:
$$\psi_D(\xi, \theta) = \frac{k \cdot v_f}{2} \left(\frac{E}{\xi} + F \cdot \xi^2 + G \cdot \left(\frac{\cosh \xi}{\xi} - \sinh \xi \right) + H \cdot \left(\frac{\sinh \xi}{\xi} - \cosh \xi \right) \right) \cdot \sin^2 \theta \quad (5.4)$$

Da die Stromfunktion im gesamten Strömungsgebiet endlich sein muß, folgt aus einer Grenzwertbetrachtung für $\xi \rightarrow 0$, daß $E = 0$ und $G = 0$.

Am Rand der permeablen Kugel müssen einige Strömungsgrößen des äußeren und inneren Strömungsfeldes zusammenpassen, woraus sich Randbedingungen zur Bestimmung von A bis H formulieren lassen. So müssen die Schubspannung, der Druck und die beiden Geschwindigkeitskomponenten am Rand des äußeren und inneren Strömungsfeldes identisch sein. Für $\xi = a_k \cdot k^{-0.5} = \beta$ gilt:

$$\begin{aligned} p_U &= p_D \\ \tau_{r,\theta,U} &= \tau_{r,\theta,D} \\ v_{\theta,U} &= v_{\theta,D} \\ v_{r,U} &= v_{r,D} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Im weiteren müssen am Rand der Happel-Zelle $\xi = \beta \cdot p^{-0.5}$ die üblichen Randbedingungen, wie sie schon in Kapitel 4. formuliert wurden, gelten:

$$\begin{aligned} \tau_{r,\theta} &= 0 \\ v_r &= -v_f \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die Ergebnisse der Berechnungen zur Bestimmung der Parameter A-H decken sich bis auf das Vorzeichen mit den Ergebnissen von NEALE et al. (1973). Die eigenen Ergebnisse sind im Anhang A5.1 zusammengestellt.

5.1.1 Druckverlust und Betaausdehnung von PSK

Die Berechnung des Druckverlustes bei der Durchströmung einer Schüttung aus permeablen Kugeln kann analog zur Vorgehensweise bei massiven Kugeln aus der Widerstandskraft auf eine einzelne Kugel in der Schüttung vorgenommen werden (Gl. 4.21). Im weiteren bestimmt die Widerstandskraft der Strömung auf die permeable Kugel auch, in welchem Maße sich eine Schüttung bei einer Spülung im Aufstrom ausdehnt. Formal kann die Widerstandskraft wie bei massiven Kugeln in eine Druckwiderstandskraft und eine Reibungswiderstandskraft aufgespalten werden.

Ausgehend von den Navier-Stokes Gleichungen für schleichende Bedingungen (Gl. A4.14 im Anhang) und die Lösung für die Umströmung nach Gl. 5.3 erhält man durch Integration der Druckänderung auf der Oberfläche der permeablen Kugel über die Winkelkoordinate θ von 0 bis π

$$\frac{\partial p_w}{\partial \theta} = \frac{\eta \cdot v_f \cdot \sin \theta}{2 \cdot \sqrt{k}} \cdot \left(20 \cdot D \cdot \beta + \frac{2 \cdot B}{\beta^2} \right) \quad (5.7a)$$

mit
$$\beta = \frac{a_k}{\sqrt{k}} \quad (5.7b)$$

die Druckverteilung auf der Kollektoroberfläche zu

$$p_w(\theta) - p_w(0) = \frac{\eta \cdot v_f}{2 \cdot \sqrt{k}} \cdot \left(20 \cdot D \cdot \beta + \frac{2 \cdot B}{\beta^2} \right) \cdot (1 - \cos \theta) \quad (5.8)$$

Nach NEALE et al. (1973) berechnet sich die Widerstandskraft auf eine permeable Kugel aus dem Oberflächenintegral des Druckes und der Schubspannung an der Kugeloberfläche. Es ist hier zu beachten, daß wegen der nicht mehr gültigen Haftbedingung auf der Oberfläche des permeablen Kollektors die Wirbelstärke nicht mehr mit dem Schergradienten identisch ist.

$$F_{w,p} = -\frac{2}{3} \pi \cdot a_k \cdot \eta \cdot v_f \cdot \left(20D\beta^2 + 2B\frac{1}{\beta} \right) \quad (5.9)$$

$$F_{w,R} = 8\pi \cdot a_k \cdot \eta \cdot v_f \cdot \left(D\beta^2 + A\frac{1}{\beta^3} \right) \quad (5.10)$$

Die gesamte Strömungskraft auf den permeablen Kollektor berechnet sich in Anlehnung an das Stokes'sche Widerstandsgesetz zu

$$F_w = 6 \cdot \pi \cdot a_k \cdot \eta \cdot v_f \cdot \Omega(\varepsilon, \beta) \quad (5.11a)$$

mit
$$\Omega(\varepsilon, \beta) = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{6 \cdot A}{\beta^3} - \frac{B}{\beta} - 4 \cdot D \cdot \beta^2 \right) \quad (5.11b)$$

Da Gl. 5.11 mit einem Ansatz für schleichende Strömungen abgeleitet wurde, steigt die Widerstandskraft proportional zur Spülgeschwindigkeit v_f und der Viskosität η . Die Widerstandskraft ist im weiteren in komplizierter Weise über die Parameter A, B und D von der Bettporosität ε , dem Kugelradius a_k und der Permeabilität k abhängig. Es ist festzuhalten, daß das Ergebnis für den Widerstandsfaktor Ω von dem Ergebnis von NEALE et al. (1973) abweicht. Die Unterschiede zu dem Ergebnis von NEALE et al. sind darin begründet, daß sie an der Kugeloberfläche die Schubspannung $\tau_{r\theta}$ durch den Schergradienten ersetzt haben. Die bei massiven Kugeln zulässige Umformung führt bei der permeablen Kugel zu einem falschen Ergebnis (vgl. Definition von $\tau_{r\theta}$ in Gl. 4.7). Welche Auswirkungen sich daher auf Gl. 5.11 ergeben, wird im weiteren nicht mehr betrachtet.

Der Druckverlust in einer Schüttung von permeablen Kugeln berechnet sich mit Gl. 4.21 zu

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{9}{2} \cdot \frac{(1 - \varepsilon) \cdot \eta \cdot v_f \cdot \Omega(\varepsilon, \beta)}{a_k^2} \quad (5.12)$$

Aus einem Kräftegleichgewicht der Strömungskraft in Gl. 5.11 mit der Resultierenden aus Gewicht- und Auftriebskraft für einen permeablen Kollektor folgt eine Beziehung zur Berechnung der Betaausdehnung bei einer Spülung im Aufstrom.

$$v_f(\varepsilon, \beta) = \frac{2}{9} \cdot \frac{a_k^2 \cdot (\rho_N - \rho) \cdot g}{\eta \cdot \Omega(\varepsilon, \beta)} \quad (5.13)$$

Da in dem Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 1$ die Spülgeschwindigkeit in Gl. 5.13 in die Sedimentationsgeschwindigkeit übergeht, läßt sich folgendes Ausdehnungsgesetz für kleine Reynoldszahlen der sedimentierenden permeablen Kugel ableiten:

$$\frac{v_f(\varepsilon, \beta)}{v_s(\beta)} = \frac{\Omega(\varepsilon = 1, \beta)}{\Omega(\varepsilon, \beta)} \quad (5.14)$$

Der Einfluß des Permeabilitätsparameters β auf die Betaausdehnung läßt sich der Darstellung in Bild 5.1 entnehmen. Mit steigender Permeabilität des PSK ist wegen der abnehmenden Widerstandskraft eine zunehmende Spülgeschwindigkeit erforderlich, um die gleiche Betaausdehnung zu erzielen. Für PSK mit geringer Permeabilität, d. h. einem großen β , nähert sich der Kurvenverlauf zunehmend dem Betaausdehnungsgesetz von Happel für massive Kollektoren (Gl. 4.32). Bei einer Größenordnung des Permeabilitätsparameters β zwischen 50 und 90, wie sie bei den in den experimentellen Untersuchungen eingesetzten PSK vorlagen, verhält sich der permeable Kollektor schon weitgehend wie ein massiver Kollektor. In diesen Fällen kann man davon ausgehen, daß die in Kapitel 3.1 beschriebenen Korrelationen bei größeren Reynoldszahlen sinnvolle Näherungen zur Betaausdehnung von permeablen Kollektoren liefern. Zu dieser Schlußfolgerung führt auch die Analyse des Widerstandsfaktors Ω bei einer einzelnen permeablen Kugel (Bild 5.2). Für den hier betrachteten Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 1$ beschreibt der Widerstandsfaktor insbesondere, um welchen Faktor die Sedimentationsgeschwindigkeit einer massiven Kugel kleiner als die Sedimentationsgeschwindigkeit einer permeablen Kugel ist.

Aus Bild 5.2 ist insofern abzulesen, daß die Sedimentationsgeschwindigkeit einer permeablen Kugel weniger als 10% über der Sedimentationsgeschwindigkeit einer ansonsten identischen massiven Kugel liegt, sofern der Permeabilitätsparameter β einen Wert größer als ca. 20 besitzt. Unter diesen Bedingungen wird sich auch der Druckverlust bei der Durchströmung einer Schüttung aus permeablen Kugeln nur unwesentlich von dem Druckverlust bei einer Schüttung von massiven Kugeln unterscheiden (vgl. Gleichung 5.12).

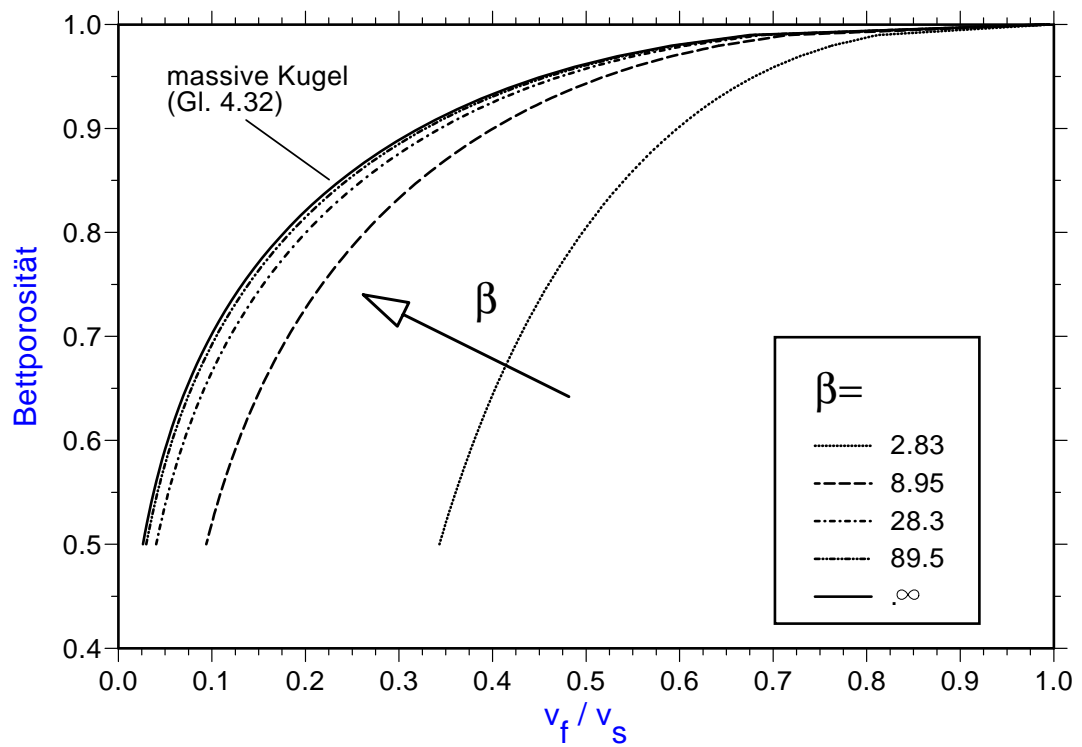


Bild 5.1: Berechnete Betaausdehnung von permeablen Kollektoren bei kleinen Reynoldszahlen

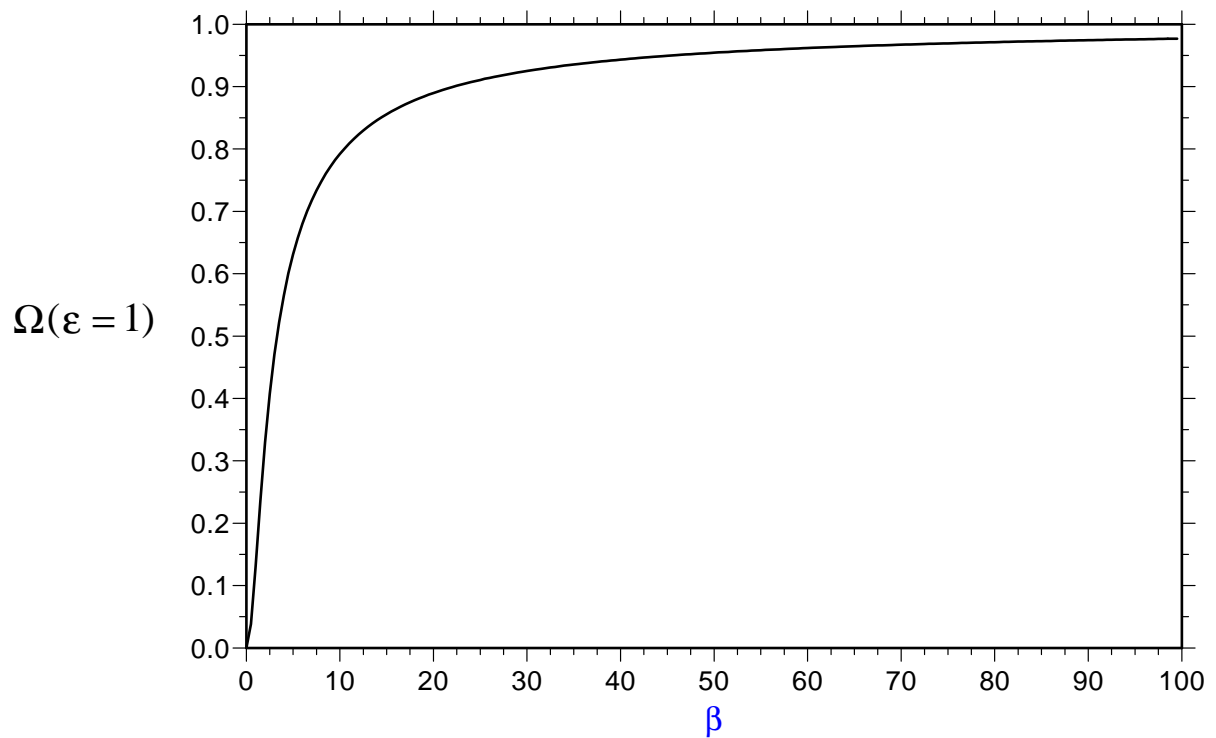


Bild 5.2: Widerstandsfaktor eines einzelnen permeablen Kollektors bei kleinen Reynoldszahlen

5.2 Strömungsmodell für größere Reynoldszahlen

In dem zuvor beschriebenen Strömungsmodell für permeable Kugeln wurde die Voraussetzung einer schleichenden Umströmung der permeablen Kugel getroffen. Die Voraussetzung impliziert, daß das Modell nur für sehr kleine Reynoldszahlen ($Re < 0,1$), d. h. kleine Strömungsgeschwindigkeiten, Gültigkeit besitzt. Für praxisrelevante Bedingungen in der Tiefenfiltration entstehen wegen des vergleichsweise großen Durchmessers der PSK leicht Reynoldszahlen über 30, die auf Werte über 300 bei der Spülung der Filter ansteigen können.

Um das bisher unter schleichenden Bedingungen betrachtete Modell der permeablen Kugel auf den Fall größerer Reynoldszahlen erweitern zu können, muß das bisher als vernachlässigbar klein angesehene Trägheitsglied $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ in der Stokes-Gleichung (Gl. 4.1) für die Umströmung der Kugel berücksichtigt werden. Wird im weiteren auch der instationäre Term mit der zeitlichen Ableitung des Geschwindigkeitsvektors bei der Umströmung miteinbezogen, so erweitert sich die Stokes-Gleichung zu den schon für massive Kollektoren angegebenen, vollständigen Navier-Stokes Gleichungen (Gl. 4.34).

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right] - \eta \cdot \Delta \vec{v} = -\nabla p \quad (4.34)$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

Für numerische Berechnungen von Kugelumströmungen ist es vorteilhaft, Kugelkoordinaten zu verwenden und die Navier-Stokes Gleichungen durch die Wirbeltransportgleichung zu ersetzen. Für rotationssymmetrische Umströmungen reduziert sich die vektorielle Wirbeltransportgleichung auf eine skalare Gleichung für die Wirbelstärke.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\phi}{r \cdot \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi}{r \cdot \sin \theta} \right) \right]$$

$$= \frac{\nu}{r \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi \cdot r \cdot \sin \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial (\phi \cdot r \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \quad (4.35)$$

Die instationäre Wirbeltransportgleichung ist parallel mit Gleichung 4.37 zu lösen.

$$\phi = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \right] \quad (4.37)$$

Für den Fall instationärer Vorgänge bei der Durchströmung der permeablen Kugel ist die Brinkman-Gleichung (Gl. 5.2) ebenfalls um den Term mit der zeitlichen Ableitung des Geschwindigkeitsvektors zu erweitern.

$$\rho \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \eta \cdot \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{k} \vec{v} = -\nabla p \quad (5.15)$$

Auf die Berücksichtigung des Trägheitstermes in Gl. 5.15 wurde, wie bei WU und LEE (1998), verzichtet. Die Strömung im Inneren der permeablen Kugel kann wegen der hier mit dem Faserdurchmesser zu bildenden Reynoldszahl auch bei vergleichsweise großen Strömungsgeschwindigkeiten noch als schleichend aufgefaßt werden. Darüber hinaus erspart diese Vorgehensweise erheblich Rechenzeit.

Die Wirbeltransportformulierung der instationären BRINKMAN-Gleichung (Gl. 5.15) liefert in Kugelkoordinaten unter der Voraussetzung einer rotationssymmetrischen Durchströmung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{v}{r \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi \cdot r \cdot \sin \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial (\phi \cdot r \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{v}{k} \cdot \phi = 0 \quad (5.16)$$

und muß wie bei der Umströmung der permeablen Kugel parallel mit Gleichung (4.37) gelöst werden.

Anfangs- und Randbedingungen:

Betrachtet man als Anfangsbedingung den Ruhezustand, so verschwindet die Stromfunktion und die Wirbelstärke auf dem gesamten Strömungsgebiet:

$$\begin{aligned} \psi(t = 0, r, \theta) &= 0 \\ \phi(t = 0, r, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Symmetrierand:

Auf dem Symmetrierand verschwinden die Tangentialgeschwindigkeit v_θ und alle Ableitungen nach der Winkelcoordinate θ . Man erhält daraus die Bedingung, daß die Stromfunktion entlang der Symmetrielinie ebenfalls verschwinden muß.

$$\begin{aligned}\psi(r, \theta = 0) &= 0 \\ \psi(r, \theta = \pi) &= 0\end{aligned}\quad (5.18a)$$

Im weiteren ergibt sich aus den genannten Bedingungen und der Definitionsgleichung der Wirbelstärke (4.37), daß die Wirbelstärke entlang der Symmetrielinie verschwinden muß.

$$\begin{aligned}\phi(r, \theta = 0) &= 0 \\ \phi(r, \theta = \pi) &= 0\end{aligned}\quad (5.18b)$$

Happel-Zellenrand:

Im weiteren müssen am Rand der Happel-Zelle die üblichen Randbedingungen, wie sie schon in Kapitel 4. formuliert wurden, gelten:

$$\begin{aligned}\tau_{r,\theta} &= 0 \\ v_r &= -v_f \cdot \cos \theta\end{aligned}\quad (5.19)$$

Kugeloberfläche:

Die Randbedingungen an der Kugeloberfläche nach Gl. 5.5 führen auf folgende von der Stromfunktion ψ und der Wirbelstärke ϕ abhängige Gleichungen für die Umströmung (Index U) und Durchströmung (Index D):

$$\phi_D = \phi_U \quad (5.20)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_D = \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_U \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}& \left[-\phi - a_k \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]_D = \\ & \left[\frac{1}{v} \cdot \left(\frac{1}{a_k^4 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{a_k^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{1}{v \cdot a_k} \cdot \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + 1 \right) \cdot \phi - a_k \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right]_U\end{aligned}\quad (5.22)$$

5.3 Numerisches Lösungsverfahren für das Modell der permeablen Kugel

Die Gleichungen (4.35) und (5.16) stellen ein instationäres partielles Differentialgleichungssystem vom parabolischen Typ dar. Beide Gleichungen lassen sich formal durch

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{Res}(\phi, \psi) \quad (5.23)$$

darstellen. Werden die rechten Seiten der Differentialgleichungen (4.35) bzw. (5.16) in der Darstellungsform nach Gl. 5.23 gebracht, so wird die rechte Seite als Residuum bezeichnet. Das Residuum ist hier eine Funktion der Wirbelstärke, der Stromfunktion und ihrer partiellen Ableitungen.

In der Arbeit wurde das Strömungsgebiet für das Modell der permeablen Kugel in ein Gitter für die Durchströmung und ein Gitter für die Umströmung aufgeteilt (vgl. Anhang A5.2). An den Gitterpunkten (i, j) wurden die in den Differentialgleichungen 4.35, 4.37 und 5.16 auftretenden partiellen Ableitungen in der Regel durch zentrale Differenzen 2. Ordnung approximiert. Lediglich innerhalb der permeablen Kugel wurden zur Steigerung der Genauigkeit für die Ableitungen in die radiale Richtung zentrale Differenzen 4. Ordnung verwendet.

Zur Lösung der Gleichung 5.23 kann die zeitliche Ableitung z. B. durch eine Differenz 1. Ordnung approximiert werden, was für die nachfolgenden Skizzierung der Vorgehensweise des Berechnungsgangs vorteilhaft ist, da sich eine einfache algebraische Gleichung zur Lösung von $\phi_{i,j}^{n+1}$ in der Zeitstufe $n+1$ ergibt.

$$\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = \text{Res}(\phi^n, \psi^n) \quad (5.24)$$

Ausgehend von dem Start der Strömungsberechnung sind mit den Rand- und Anfangsbedingungen in der Zeitstufe $n=0$ die Wirbelstärke und die Stromfunktion an jedem Gitterpunkt (i, j) in dem Strömungsfeld bekannt, so daß $\phi_{i,j}^{n+1}$ aus Gl. 5.24 unmittelbar berechnet werden kann.

Aus der diskretisierten Differentialgleichung 4.37, die für jeden Gitterpunkt (i, j) zu formulieren ist, entsteht zur Berechnung der Stromfunktion $\psi_{i,j}^{n+1}$ in der neuen Zeitstufe $n+1$ wegen der Kopplung mit benachbarten Gitterpunkten ein lineares Gleichungssystem. Das lineare Gleichungssystem, dessen Dimension sich aus dem Produkt der Gitterpunkte in

radialer und tangentialer Richtung ergibt und damit leicht sehr groß werden kann, wird mit einem iterativen Verfahren, der sogenannten SOR-Methode (*successive overrelaxation*), gelöst. Durch diese Vorgehensweise resultieren wegen der sehr dünn besetzten Matrix im Vergleich zu einem direkten Verfahren enorme Einsparungen an Arbeitsspeicher und Rechenzeit. Aus der nun auch in der neuen Zeitstufe bekannten Stromfunktion berechnet sich mit Gl. 5.24 wiederum die Wirbelstärke in der nachfolgenden Zeitstufe.

Eine gewisse Schwierigkeit ist bei der getrennten Berechnung der Stromfunktionen des inneren und äußeren Strömungsgebietes in den erst aus den Strömungsgebieten zu berechnenden Größen an der Oberfläche der permeablen Kugel (Gl. 5.22) zu sehen. Sie würden bei einer getrennten Lösung von Gl. 4.37 für das innere und äußere Gitter eine zusätzliche Iteration erforderlich machen. Da die Lösung von Gl. 4.37 iterativ mit der SOR-Methode erfolgt, wird statt einer getrennten Berechnung in zwei linearen Gleichungssystemen für das innere und äußere Strömungsgebiet ein gemeinsamer Berechnungsgang mit dem gesamten linearen Gleichungssystem durchgeführt. Dabei wird die sonst anfallende iterative Berechnung der Größen an der Oberfläche der permeablen Kugel zeitsparend in den Iterationsvorgang des SOR-Verfahrens einbezogen.

Zur Berechnung stationärer Lösungen wird der skizzierte Berechnungsgang so lange fortgesetzt, bis sich keine bzw. nur eine verschwindend kleine Änderung der Wirbelstärke und der Stromfunktion von einer Zeitstufe zur nächsten ergibt.

Um Lösungen von Gleichung (5.23) mit höherer Zeitgenauigkeit zu erzielen, wurde zusätzlich das CRANC-NICHOLSON-Verfahren (z. B. HIRSCH (1988); OERTEL, LAURIEN (1995)) realisiert.

$$\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = 0,5 \cdot \text{Res}(\phi^n, \psi^n) + 0,5 \cdot \text{Res}(\phi^{n+1}, \psi^{n+1}) \quad (5.25)$$

Es verfügt über eine Zeitgenauigkeit 2. Ordnung, erfordert aber u. a. deshalb mehr Rechenaufwand, da die noch unbekannte Stromfunktion in der Zeitstufe n+1 iterativ durch Lösung von Gleichung (4.37) bestimmt werden muß. Es ist im weiteren zu beachten, daß in den diskretisierten Residuen der Zeitstufen n und n+1 in Gl. 5.25 die Wirbelstärke und die Stromfunktion nicht nur am Gitterpunkt (i, j) auftritt, sondern je nach Ordnung der Differenzenformulierung auch an den Nachbarstellen (i+1, j), (i-1, j) etc.. Es entsteht daher ein lineares Gleichungssystem für $\phi_{i,j}^{n+1}$, das ebenfalls mit einem iterativen Lösungsverfahren, d. h. der SOR-Methode, gelöst wird.

5.4 Vergleich der Strömungsmodelle

Die bisher vorgestellten Strömungsmodelle unterscheiden sich u. a. darin, daß sie sich zur Ermöglichung einer analytischen Lösung auf kleine Strömungsgeschwindigkeiten beschränken oder für größere Strömungsgeschwindigkeiten komplexe numerische Verfahren erfordern. Ein weiteres Unterscheidungskriterium besteht darin, daß die Ein- und Ausströmbedingungen auf den Zellenrändern unterschiedlich definiert werden. Die Bedeutung dieser Vereinfachungen für die Lösungen sind z. T. sehr weitreichend und lassen sich auch anhand der Auswirkungen auf den Verlauf der Stromlinien abschätzen.

Die Einbeziehung des Trägheitsterms in die Stokes-Gleichung für die Umströmung der permeablen Kugel erlaubt die Berechnung des Strömungsfeldes innerhalb und außerhalb der permeablen Kugel bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten. Bild 5.3 zeigt den Verlauf der Stromlinien bei der Durchströmung und Umströmung eines PSK unter schleichenden Bedingungen, die mit den Navier-Stokes Gleichungen berechnet wurden. Im Hinblick auf die Qualität der Näherung durch die Annahme schleichender Bedingungen ist hier festzustellen, daß die Stromlinien innerhalb und außerhalb der permeablen Kugel symmetrisch zu einer durch die Kugelmittle und normal zur Anströmachse gedachten Ebene verlaufen. Die in der grafischen Darstellung erkennbare Symmetrie der Stromlinien läßt sich auch unmittelbar mit der Struktur der Lösung für die Stromlinien nach Gl. 5.3 und Gl. 5.4 belegen (ausschließliche Proportionalität zu $\sin^2(\theta)$).

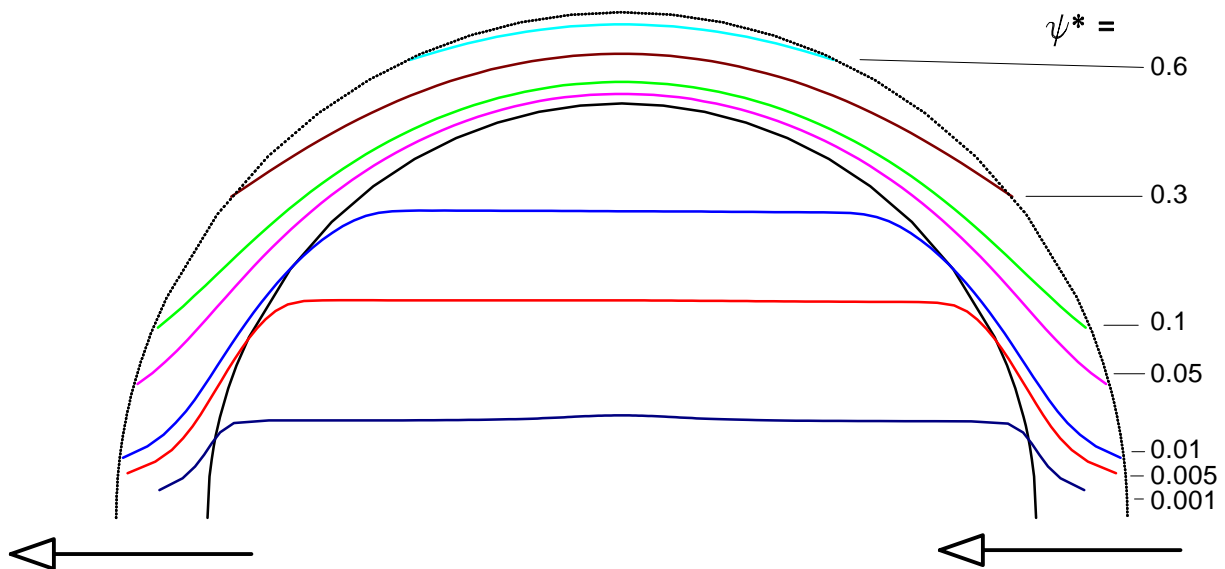


Bild 5.3: Stromlinien bei der Durchströmung und Umströmung eines PSK unter schleichenden Bedingungen ($\beta=60$, $Re=1$)

Der Verlauf der (dimensionslosen) Stromlinien ψ^* würde sich auf der Grundlage der Stokes-Gleichung mit zunehmender Reynoldszahl nicht verändern. Insofern belegen die mit den vollständigen Navier-Stokes Gleichungen in Bild 5.4 berechneten Stromlinien, daß aufgrund

der starken Abweichung von der Symmetrie bei großen Reynoldszahlen die Vernachlässigung des Trägheitsgliedes in den Navier-Stokes Gleichungen nicht mehr zulässig ist. Die Darstellung in Bild 5.4. macht im weiteren deutlich, daß bei steigender Reynoldszahl eine größere Anzahl Stromlinien die permeable Kugel durchströmen. Daraus ergibt sich, daß der relative Anteil des durch die Kugel permeierenden Volumenstroms mit steigender Reynoldszahl zunimmt.

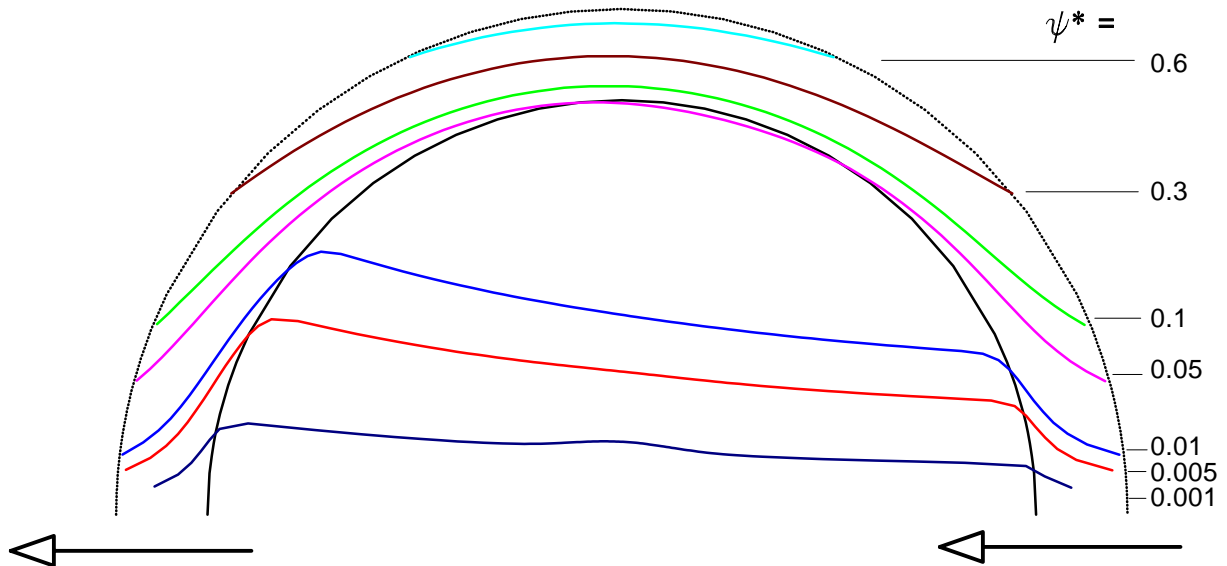


Bild 5.4: Stromlinien bei der Durchströmung und Umströmung eines PSK bei großer Reynoldszahl ($Re=180$, $\beta=60$)

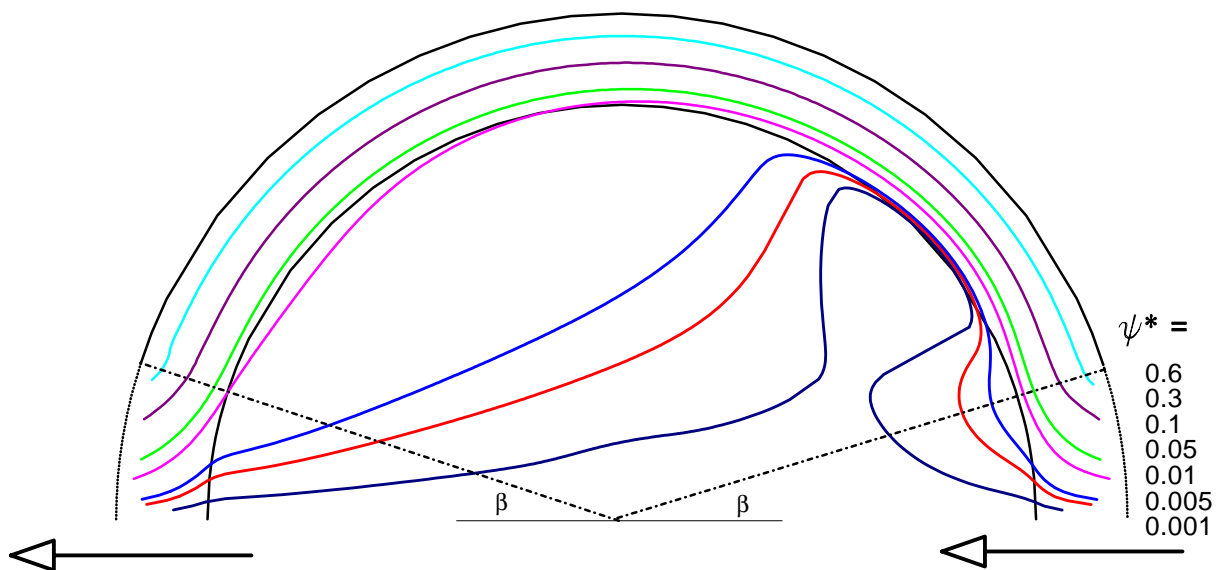


Bild 5.5: Stromlinien bei der Durchströmung und Umströmung eines PSK (modifiziertes Happel-Modell)
Parameter: $Re=22$, Permeabilitätsparameter $\beta = 54$, Öffnungswinkel des Einströmfensters $\beta = 18^\circ$

Wird das modifizierte Happel-Modell für die Strömungen zugrunde gelegt (vgl. Kapitel 4.3), so resultieren daraus erhebliche Auswirkungen auf den Verlauf der Stromlinien (Bild 5.5), die in die permeable Kugel eintreten. Da der Fluidstrom lediglich im Einströmfenster in die Happel-Zelle eintreten kann, liegen dort wegen des geringen Einströmquerschnittes erheblich größere Strömungsgeschwindigkeiten vor. Nach dem Eintritt in die permeable Kugel erfährt der Fluidstrom einen geschwindigkeitsproportionalen Widerstand, dem er sich durch eine Vergrößerung des Strömungsquerschnittes mit einer starken Umlenkung in Richtung des Kugelrandes zu entziehen versucht. Dabei werden die Stromlinien kurzfristig sogar in das Umströmungsgebiet verdrängt und können von dort erneut in die permeable Kugel eintreten.

Im folgenden werden Berechnungen zur Strömung immer auf der Grundlage des herkömmlichen Happel-Modells in Verbindung mit den Navier-Stokes Gleichungen durchgeführt. Dies erklärt sich dadurch, daß sich bisher das modifizierte Happel-Modell nicht als vorteilhafter im Vergleich zum herkömmlichen Happel-Modell erweisen konnte. Dazu trägt insbesondere auch der Vergleich der Zellenmodelle hinsichtlich des Druckverlustes bei massiven Kugeln in Kapitel 4.4 bei. Im weiteren spricht für die Verwendung des herkömmlichen Happel-Modells, daß mit dem Öffnungswinkel des Einströmfensters bei dem modifizierten Happel-Modell ein zusätzlicher Parameter in das Strömungsmodell eingefügt würde, über den nur sehr unzureichende Informationen vorliegen. Auf diesem Wege würde in den modellmäßigen Betrachtungen ein zusätzlicher Freiheitsgrad entstehen, der die Interpretationsvielfalt deutlich erhöht.

Die hier beschriebene Verwendungsmöglichkeit verschiedener Strömungsmodelle macht deutlich, daß durch die erforderlichen Vereinfachungen bei der Strömungsmodellierung für Tiefenfilter z. T. sehr weitreichende Auswirkungen auf die Lösungen entstehen. Dieser Aspekt ist bei der Interpretation der experimentellen Untersuchungen mit dem Strömungsmodell zu berücksichtigen. Die Entwicklung verbesserter Zellenmodelle, insbesondere was die Randbedingungen am Ein- und Auströmrand der Zelle anbetrifft, stellt daher einen zukünftigen Forschungsbedarf dar. Möglicherweise kann man die Randbedingung lediglich auf dem Einströmrand, z. B. durch eine Parallelströmung, vorgeben. Die Bedingung am Auströmrand könnte dann ggf. durch Extrapolation der Variablen aus dem Strömungsfeld bestimmt werden. Nach HIRSCH (1988) sind durch die Bestimmung der Randbedingungen durch Extrapolation aber erheblich größere Rechenzeiten zu erwarten, die die praktische Verwendbarkeit eines solchen Zellenmodelles dann einschränkt.