

Anhang

A3: Definitionen einiger Größen aus der Filtrationstechnik

Die **Bettporosität** oder Schüttungsporosität ε (DVGW W212) ist das Verhältnis vom Zwischenraumvolumen zwischen den Körnern der Schüttung V_z zum Gesamtvolumen der Schüttung V_B :

$$\varepsilon = \frac{V_z}{V_B} \quad (\text{A3.1})$$

Die **Kornporosität** ε_K ist entsprechend das Verhältnis vom Porenvolumen des Kornes zum Gesamtvolumen des Kornes.

Die **Filtergeschwindigkeit** und die **Spülggeschwindigkeit** v_f stellen das Verhältnis des durch den Filter transportierten Volumenstroms Q zur Filterquerschnittsfläche A_F bei der Filtration oder bei der Spülung dar. Sie stellen jeweils eine mittlere Geschwindigkeit dar, die man als die Strömungsgeschwindigkeit eines kolbenförmigen Strömungsprofils durch den leeren Filter interpretieren kann.

$$v_f = \frac{Q}{A_F} \quad (\text{A3.2})$$

Die **Feststoffdichte** (DVGW W212) ρ_s ist bei porösen Filtermaterialien der Quotient aus Masse und Feststoffvolumen (unter Ausschluß des Hohlräumvolumens im Korn). Bei nicht porösen Materialien ist die Feststoffdichte identisch mit der Kornrohddichte und der Kornnaßdichte.

Die **Kornrohddichte** ρ_K (DVGW W212) ist der Quotient aus der Masse und jenem Kornvolumen, das die Poren und Blasen einschließt. Sie ist über die Kornporosität ε_K mit der Feststoffdichte gekoppelt.

$$\rho_K = (1 - \varepsilon_K) \cdot \rho_s \quad (\text{A3.3})$$

Bei der Unterwasserlagerung im Filter füllen sich offene Porenräume der Filtermaterials mit Wasser. Die Dichte des wassergesättigten Filtermaterials wird als **Kornnaßdichte** ρ_N bezeichnet.

$$\rho_N = \rho_K \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_K \cdot \rho}{(1 - \varepsilon_K) \cdot \rho_s} \right) \quad (\text{A3.4})$$

A4: Anmerkungen zur Lösung der Strömungsgleichung

A4.1: Die Wirbeltransportgleichung für Kugelumströmungen

Die Navier-Stokes Gleichungen lauten für den inkompressiblen Fall, wie er bei herkömmlichen Strömungen mit Wasser vorliegt:

$$\rho \cdot \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] - \eta \cdot \Delta \vec{v} = -\nabla p \quad (\text{A4.1})$$

$$\text{div}(\vec{v}) = 0$$

Für numerische Berechnungen von Kugelumströmungen ist es vorteilhaft, Kugelkoordinaten zu verwenden und die Navier-Stokes Gleichungen durch die Wirbeltransportgleichung zu ersetzen. Mit den Umformungen nach den Gl. A4.2, A4.3 und A4.4 aus der Vektoranalysis (BRONSTEIN et al. 1995, S. 597, Gl. 17.70.b)

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v}^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (\text{A4.2})$$

$$\Delta \vec{v} = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{v}}_{\text{div}(\vec{v})=0}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \quad (\text{A4.3})$$

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v} \quad (\text{A4.4})$$

erhält man:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla(\vec{v}^2) - \vec{v} \times \vec{\omega} + \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p \quad (\text{A4.5})$$

Aus der Rotation eines jeden Gliedes folgt dann (mit $\text{rot}(\nabla p) = \vec{0}$) die instationäre Wirbeltransportgleichung in vektorieller Darstellungsform:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \vec{v} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{\omega}) = \vec{0} \quad (\text{A4.6})$$

Im folgenden soll der Spezialfall der rotationssymmetrischen Strömungen in Kugelkoordinaten betrachtet werden. Durch diese Vorgehensweise wird das naturgemäß 3-dimensionale Strömungsproblem auf ein quasi 2-dimensionales Problem reduziert.

In Kugelkoordinaten besitzt der Wirbelvektor $\vec{\omega}$ unter der Bedingung einer rotationssymmetrischen Strömung lediglich noch eine von Null verschiedene Koordinate, die

im folgenden als die Wirbelstärke ϕ bezeichnet wird. Weiterhin verschwinden auch alle partiellen Ableitungen nach φ .

D. h. es gilt:

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_r \\ \omega_\theta \\ \omega_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{\partial (r \cdot v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{A4.7})$$

Unter Ausnutzung der Rotationssymmetrie und der Stromfunktion nach Gl. 4.2 und 4.3 in Kugelkoordinaten berechnen sich die in den Gl. A4.5 und A4.6 auftretenden Terme zu:

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \phi \\ \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.8})$$

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi}{r \cdot \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\phi}{r \cdot \sin \theta} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A4.9})$$

$$\text{rot} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \phi) \\ -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A4.10})$$

$$\text{rot rot} \vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{r \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi \cdot r \cdot \sin \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial (\phi \cdot r \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (\text{A4.11})$$

Die ursprünglich als vektorielle Wirbeltransportgleichung (A4.6) formulierten Navier-Stokes Gleichungen (A4.1) reduzieren sich mit den Gl. A4.9 und A4.11 auf eine skalare Gleichung für die Wirbelstärke (Gl. A4.12).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\phi}{r \cdot \sin \theta} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi}{r \cdot \sin \theta} \right) \right] \\
= \frac{v}{r \cdot \sin \theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi \cdot r \cdot \sin \theta) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial (\phi \cdot r \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} \right) \right]
\end{aligned} \tag{A4.12}$$

Aus Gl. A4.5 folgt mit den Gl. A4.8 und A4.10 eine weitere Darstellungsform der Navier-Stokes Gleichungen, die sich insbesondere für Druckberechnungen aus dem Geschwindigkeitsfeld eignen.

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (v_r^2 + v_\theta^2) - v_\theta \cdot \phi - \frac{v}{r \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \phi) \tag{A4.13}$$

$$-\frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{2 \cdot r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r^2 + v_\theta^2) + v_r \cdot \phi - \frac{v}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot \phi) \tag{A4.14}$$

Ersetzt man die Wirbelstärke ϕ durch die Geschwindigkeiten nach Gl. 4.36, so entsteht daraus ein nur von den Strömungsgeschwindigkeiten und dem Druck abhängiges Gleichungssystem.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \\
+ v \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) - \frac{2 \cdot v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \cdot v_\theta \cdot \cot \theta \right]
\end{aligned} \tag{A4.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \cdot v_r}{r} = -\frac{1}{\rho \cdot r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \\
+ v \cdot \left[\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right]
\end{aligned} \tag{A4.16}$$

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 \cdot v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \cdot \sin \theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{A4.17}$$

A4.2: Das Strömungsgitter

Zur Diskretisierung der Kugelumströmung wird um die Kugel ein konzentrisches Gitter erzeugt, wobei an den Gitterpunkten die diskretisierte Wirbeltransportgleichung sowie die Stromfunktionsgleichung erfüllt sein müssen (vgl. Bild A4.1).

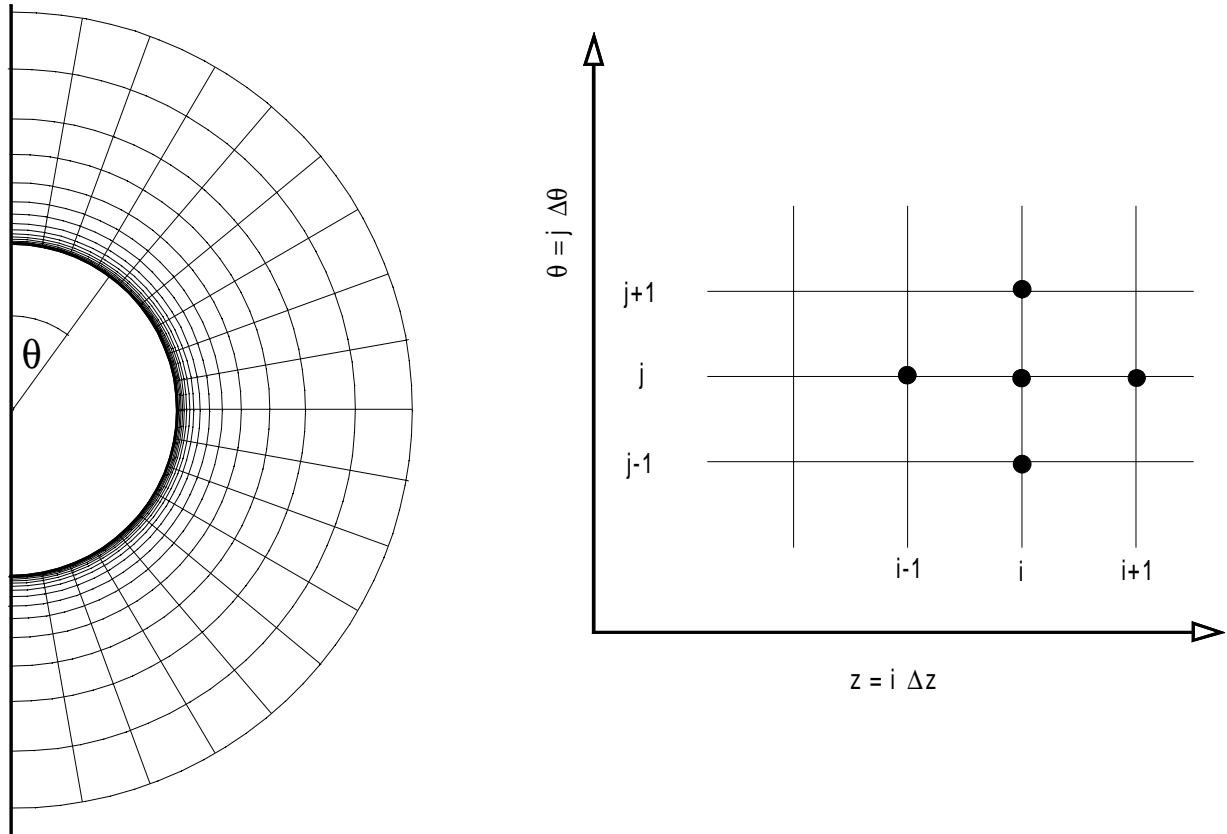


Bild A4.1: Konzentrisches Gitter um die Kugel (links) und äquidistantes Gitter für die Berechnung (rechts)

Die Diskretisierung erfolgt dadurch, daß die Differentialquotienten in der Regel durch zentrale Differenzenquotienten 2. Ordnung der Form

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2 \cdot \Delta z} \quad (\text{A4.18})$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right|_i \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta z^2} \quad (\text{A4.19})$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(g(z) \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right|_i \approx \frac{g_{i+\frac{1}{2}} \cdot f_{i+1} - \left[g_{i+\frac{1}{2}} + g_{i-\frac{1}{2}} \right] \cdot f_i + g_{i-\frac{1}{2}} \cdot f_{i-1}}{\Delta z^2} \quad (\text{A4.20})$$

mit konstanter Schrittweite Δz approximiert werden.

Erfahrungsgemäß treten in der Nähe der umströmten Oberflächen die stärksten Veränderungen der Strömungsgrößen auf, so daß hier ein möglichst engmaschiges Gitternetz wünschenswert ist. Aufgrund des Konfliktes, ein möglichst engmaschiges Gitter zu verwenden ohne dabei die Rechenzeiten zu stark ansteigen zu lassen, wird nur für die radiale Richtung, wie bei JENSON (1959), eine Koordinatentransformation der Form

$$r^* = \exp(z) \quad (\text{A4.21})$$

eingeführt und das Gitter dann mit äquidistanten Gitterabständen Δz und $\Delta \theta$ aufgebaut.

In den numerischen Berechnungen zur Kugelumströmung mit dem Happel-Modell war die Verwendung von 20 Gitterpunkten in radialer Richtung sowie 20 Gitterpunkten in tangentialer Richtung ausreichend. Bei den Berechnungen mit der komplexeren Strömungsgeometrie des modifizierten Happel-Modells sind dagegen 20 Gitterpunkte in radialer Richtung und 60 Gitterpunkte in tangentialer Richtung verwendet worden, um die Strömung in dem Einströmfenster sowie dem Ausströmfenster mit hinreichender Genauigkeit darstellen zu können.

Es ist für numerische Berechnungen weiterhin vorteilhaft, dimensionslose Größen einzuführen. Die Wirbeltransportgleichung (Gl. 4.35) und die Gleichung der Wirbelstärke (Gl. 4.37) werden unter Verwendung der dimensionslosen Größen nach Tabelle A4.1 in die dimensionslosen Darstellungen der Wirbeltransportgleichung (A4.22) und der Wirbelstärke (Gl. A4.23) überführt.

Tabelle A4.1: Zusammenstellung der dimensionslosen Kenngrößen

dimensionslose Kenngrößen	Formelzeichen	Definition
Radius	r^*	$r^* = \frac{r}{a_k}$
transformierter Radius	z	$z = \ln \frac{r}{a_k}$
Zeit	τ	$\tau = \frac{v \cdot t}{d_k^2}$
Wirbelstärke	ϕ^*	$\phi^* = \frac{\phi \cdot d_k}{v}$
transformierte Wirbelstärke	φ	$\varphi = \phi^* \cdot e^z \cdot \sin \theta$
Stromfunktion	$\bar{\psi}$	$\bar{\psi} = \frac{\psi}{v \cdot d_k}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{4}{e^{2z}} \cdot (\Delta_{\theta} + \Delta_z) \quad (\text{A4.22})$$

mit

$$\Delta_z = e^z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{e^z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{2}{e^z \sin \theta} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2 \cdot \varphi \right)$$

$$\Delta_{\theta} = \sin \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) - \frac{2}{e^z \sin \theta} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - 2 \cdot \varphi \cdot \cot \theta \right)$$

$$\varphi = \frac{8}{e^z} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{e^z} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) + \frac{\sin \theta}{e^z} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} \right) \right] \quad (\text{A4.23})$$

A4.3: Vergleich der numerischen Lösungen mit bekannten Ergebnissen

Zur Überprüfung des numerischen Verfahrens sowie des Programm-Codes wurden Ergebnisse mit bekannten analytischen und numerischen Ergebnissen verglichen.

Es zeigte sich, daß die mit dem entwickelten Programm-Code berechneten numerischen Ergebnisse unter schleichenden Bedingungen Abweichungen unter 0,5% gegenüber den analytischen Lösungen nach Gl. 4.4 und Gl. 4.11 besitzen.

Bei größeren Reynoldszahlen wurden zum Vergleich die numerischen Ergebnisse zur Kugelumströmung von JENSON (1959) herangezogen. JENSON (1959) betrachtete in seinen Untersuchungen den Fall einer freien Kugelumströmung, die er mit der stationären Wirbeltransportgleichung und den Randbedingungen nach KUWABARA (vgl. Tabelle 4.2) berechnete. Zur Lösung setzte JENSON ebenfalls ein Finite-Differenzen Verfahren mit Differenzen 2. Ordnung ein. Tabelle A4.2 zeigt einige Stromfunktionen in Abhängigkeit der Winkelkoordinate θ und der dimensionslosen Radialkoordinate r^* , die mit dem entwickelten Programm-Code unter den gleichen Bedingungen wie bei JENSON berechnet wurden. Das Strömungsfeld wurde mit 17 Gitterpunkten in radialer Richtung und 29 Punkten in tangentialer Richtung diskretisiert. Dabei wurde der Rand des Fernfeldes in einem Abstand des ca. 6-fachen Kugelradius angenommen. In Tabelle A4.3 sind zum Vergleich die Stromfunktionswerte von JENSON zusammengefaßt.

Aus der Gegenüberstellung der berechneten Stromfunktionen kann man feststellen, daß in der Halbebene des Anströmbereiches die Abweichungen der von JENSON (1959) angegebenen Stromfunktionswerte bei einer Reynoldszahl von 40 in der Regel kleiner als 1% sind. Etwas größere Abweichungen von ca. 3% lassen sich im Mittel in der anderen Halbebene feststellen, wobei die Abweichungen in der Nähe der Kugeloberfläche auf bis zu 10% ansteigen können. Extreme Abweichungen zeigen sich lediglich im Ablösegebiet in der Nähe der Kugeloberfläche.

Tabelle A4.2: Berechnete Stromfunktionen ψ^* bei $Re=40$

$\ln r^* / \theta$	6°	30°	60°	90°	114°	144°
0,1	0,0005126	0,01101	0,02663	0,02288	0,01009	0,0007734
0,2	0,00197	0,04294	0,1082	0,09845	0,04645	0,004845
0,3	0,0041	0,09072	0,2397	0,2357	0,1204	0,01546
0,4	0,006719	0,1504	0,4133	0,4384	0,2435	0,03662
0,5	0,009816	0,2213	0,6252	0,7068	0,4264	0,07324
0,6	0,01349	0,3054	0,8784	1,041	0,6771	0,1313
0,7	0,01788	0,4059	1,181	1,447	1,002	0,2177
0,8	0,02314	0,5264	1,544	1,937	1,409	0,3405
0,9	0,02948	0,6717	1,982	2,527	1,908	0,5086
1	0,03715	0,8473	2,511	3,239	2,514	0,732
1,1	0,04644	1,06	3,151	4,102	3,247	1,022
1,2	0,05771	1,318	3,929	5,148	4,136	1,39
1,3	0,0714	1,632	4,873	6,418	5,215	1,851
1,4	0,08806	2,013	6,021	7,961	6,524	2,423
1,5	0,1083	2,478	7,418	9,838	8,115	3,127
1,6	0,133	3,043	9,119	12,12	10,05	3,989
1,7	0,1631	3,732	11,19	14,9	12,4	5,041
1,8	0,1998	4,572	13,72	18,29	15,26	6,319

Tabelle A4.3: Von JENSON (1959) berechnete Stromfunktionen ψ^* bei $Re=40$

$\ln r^* / \theta$	6°	30°	60°	90°	114°	144°
0,1	0,000517	0,01107	0,02637	0,02199	0,00944	0,0007
0,2	0,00196	0,0424	0,10595	0,0949	0,0441	0,00452
0,3	0,00408	0,0894	0,2348	0,2276	0,1152	0,0146
0,4	0,00671	0,1484	0,406	0,425	0,2345	0,0349
0,5	0,00982	0,2188	0,616	0,6895	0,413	0,0702
0,6	0,01351	0,3026	0,867	1,02	0,659	0,1265
0,7	0,01793	0,403	1,168	1,422	0,98	0,2108
0,8	0,02325	0,523	1,529	1,907	1,383	0,331
0,9	0,0297	0,668	1,965	2,491	1,877	0,497
1	0,0374	0,844	2,492	3,2	2,477	0,719
1,1	0,0467	1,056	3,13	4,055	3,2	1,009
1,2	0,058	1,314	3,905	5,095	4,08	1,377
1,3	0,0718	1,627	4,855	6,36	5,15	1,832
1,4	0,0886	2,008	6,005	7,905	6,445	2,39
1,5	0,1089	2,472	7,405	9,785	8,02	3,065
1,6	0,1338	3,038	9,105	12,085	9,94	3,88
1,7	0,1639	3,73	11,185	14,885	12,275	4,87
1,8	0,2	4,575	13,72	18,3		

A4.4 Randbedingung am Rand der Happel-Zelle

Aus Gl. 4.9 folgt bei verschwindender Wandschubspannung am Zellenrand die Bedingung,

$$\phi(r = b, \theta) = 2 \cdot \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \quad (\text{A4.24})$$

die eingesetzt in Gl. 4.36 die partielle Ableitung der Tangentialgeschwindigkeit v_θ nach r eliminiert. Man erhält:

$$\phi(r = b, \theta) = 2 \cdot \left(\frac{v_\theta}{b} - \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A4.25})$$

Im weiteren kann ausgehend von der Randbedingung nach Gl. 4.39

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = v_f \cdot \sin \theta \quad (\text{A4.26})$$

die partielle Ableitung der Radialgeschwindigkeit v_r nach θ in Gl. A4.25 eliminiert werden. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} \phi(r = b, \theta) &= 2 \cdot \left(\frac{v_\theta}{b} - v_f \cdot \sin \theta \right) \\ &= \frac{2}{b^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\text{Re} \cdot v}{b^2} \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A4.27})$$

A5: Strömungen mit permeablen Kugeln

A 5.1: Faktoren A bis H für das Modell der permeablen Kugel

Für das in Kapitel 5. beschriebene Modell der permeablen Kugel wurden folgende Abhängigkeiten zwischen den Parametern A bis H und dem Permeabilitätsparameter β sowie dem Radienverhältnis p an den Randbedingungen berechnet:

$$A = - \frac{[\beta^3 + 6\beta - (3\beta^2 + 6) \cdot \tanh \beta] \cdot \beta^5}{N}$$

$$B = \frac{[2\beta^3 p^5 + 30\beta p^5 + 3\beta^3 - (12\beta^2 p^5 + 30p^5 + 3\beta^2) \cdot \tanh \beta] \cdot \beta^3}{N}$$

$$C = 1 - B \cdot \frac{p}{\beta}$$

$$D = -A \cdot \frac{p^5}{\beta^5}$$

$$E = 0$$

$$F = -10 \cdot D - B \cdot \frac{1}{\beta^3}$$

$$G = 0$$

$$H = \frac{-6\beta^5 \cdot (p^5 - 1)}{N \cdot \cosh \beta}$$

$$N = -3\beta^3 - 2\beta^5 - 3\beta^5 p^5 - 42\beta^3 p^5 + 3\beta^5 p + 2\beta^5 p^6 - 90\beta p^5 + 30\beta^3 p^6 + (3\beta^2 - 3\beta^4 p + 90p^5 + 15\beta^4 p^5 + 72\beta^2 p^5 - 12\beta^4 p^6 - 30\beta^2 p^6) \cdot \tanh \beta$$

Der Widerstandsfaktor Ω , zur Ermittlung der Strömungskraft auf einen permeablen Kollektor, wurde im weiteren zu

$$\Omega(\beta, p) = \frac{-\frac{2}{3}\beta^2 [2\beta^3 p^5 + 18\beta p^5 + 3\beta^3 + 12\beta - (8\beta^2 p^5 + 18p^5 + 7\beta^2 + 12) \cdot \tanh \beta]}{N}$$

berechnet.

A5.2 Die Strömungsgitter für die permeable Kugel

Bei dem Strömungsproblem der permeablen Kugel findet neben einer Umströmung der Kugel auch eine Durchströmung statt, so daß zwei getrennte Strömungsgebiete existieren, die durch die Randbedingung an der Kugeloberfläche miteinander gekoppelt sind. Das Gitter für die Umströmung der permeablen Kugel wurde in gleicher Weise aufgebaut wie für den Fall der massiven Kugel (vgl. Anhang A5.1).

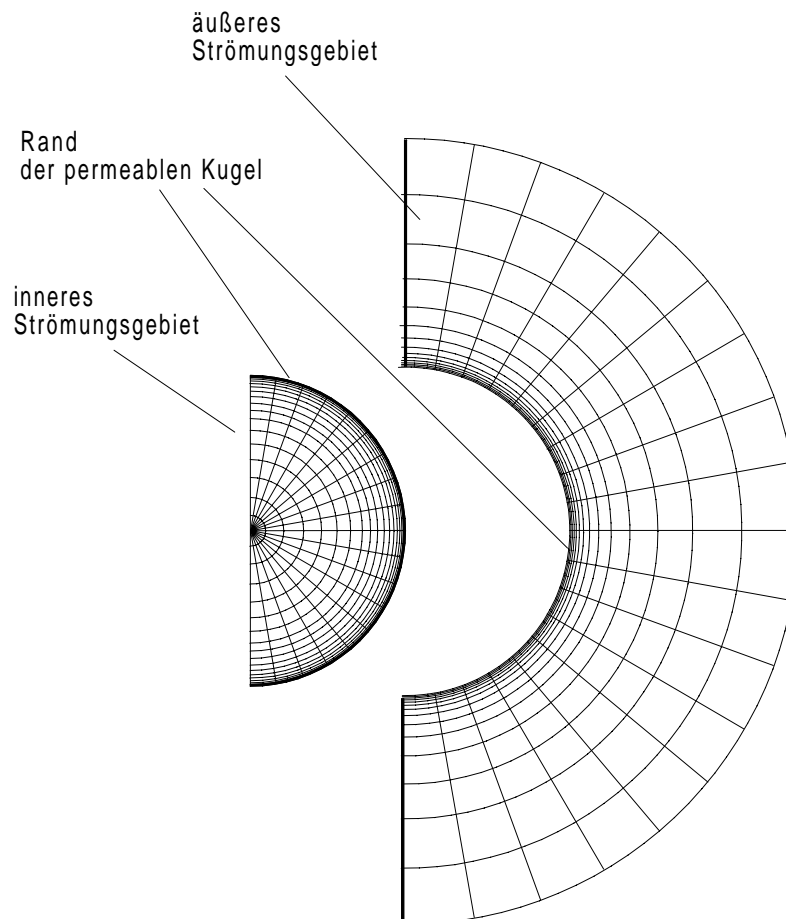


Bild A5.1: Konzentrische Gitter innerhalb der permeablen Kugel und um die Kugel herum (schematisch)

Für die Durchströmung wird ein separates Gitter definiert, bei dem wiederum starke Gradienten in der Nähe des Kugelrandes zu berücksichtigen sind (vgl. Bild A5.2). Um ein enges Gitter am Kugelrand zu haben, wird im Inneren der permeablen Kugel eine Transformation der Form

$$r^* = z^q \quad \text{mit } q < 1 \quad (\text{A5.1})$$

eingeführt. Es zeigte sich, daß im inneren Strömungsgebiet mit 95 Gitterpunkten für die radiale Richtung deutlich mehr Gitterpunkte als für das äußere Strömungsgebiet (20 Punkte) erforderlich waren. Der Parameter q zur Einstellung der Gitterfeinheit in der Nähe der

Kugeloberfläche lieferte gute Ergebnisse bei einem Wert von 0,3 (vgl. Bild A5.2). In der tangentialen Richtung erwiesen sich 20 Gitterpunkte als ausreichend. Bild A5.2 zeigt ferner, welchen Einfluß die Anzahl der Gitterpunkte in radialer Richtung im inneren Strömungsgebiet auf die Qualität der Lösung bei schleichenden Bedingungen besitzt. Als Vergleichslösung wurde die analytische Lösung nach Gl. 5.4 verwendet. Man erkennt in Bild A5.2 weiterhin, daß die Verdopplung der radialen Gitterpunkte für die Außenströmung nur eine unerhebliche Verbesserung der Lösung im Inneren der permeablen Kugel bewirkt, wenn im Inneren 95 radiale Gitterpunkte eingesetzt werden.

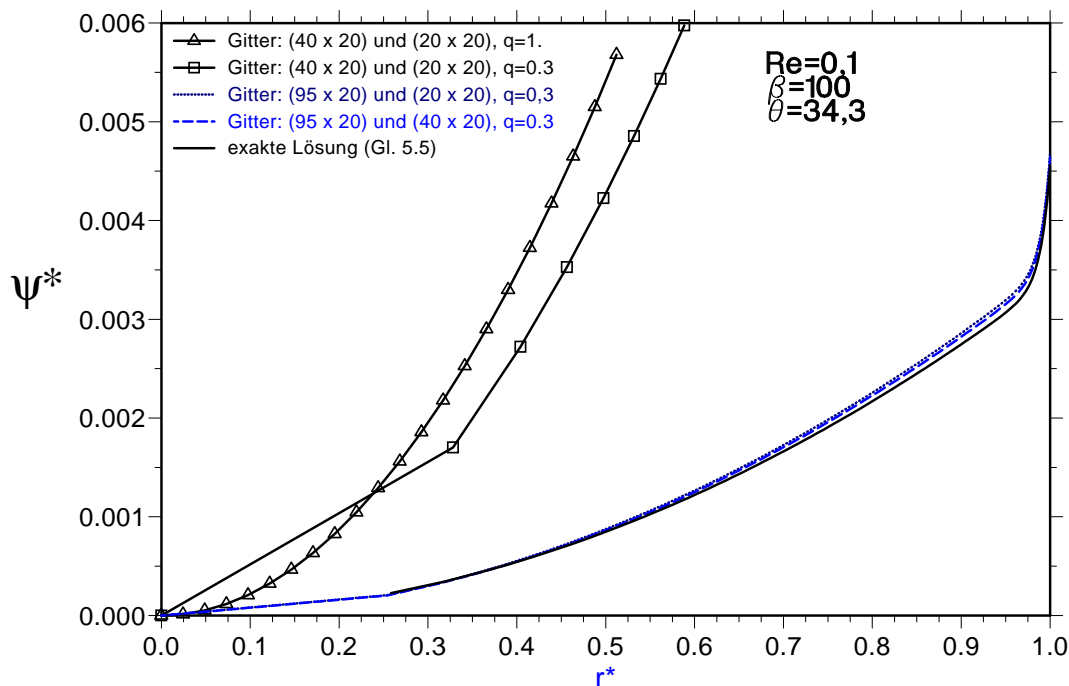


Bild A5.2: Einfluß der Strömungsgitter (Innen [radial x tangential] und Außen [radial x tangential]) auf die Genauigkeit der berechneten Stromlinien

A6: Versuche mit der Testzelle für Kollektormatten

A6.1: Druckverlustmessungen bei Kollektormatten

Tabelle A6.1: Druckverluste für die Kollektormatte I60 bei 18,4°C

Spülgeschwindigkeit in m/h	Versuch 1 Druckverlust mbar	Versuch 2 Druckverlust mbar
33,33	11	10,5
50,00	16	16,5
66,67	22,5	22,5
83,33	30	29
100,00	39,5	37
116,67	43,5	44,5
133,33	53	52,5
150,00	60,5	61
166,67	70,5	71
183,33	80,5	81,5
200,00	90	90
3,33	1	1,5
6,67	2	2
10,00	3,5	3,5
13,33	4,5	4,5
16,67	5,5	5,5
20,00	6,5	6,5
23,33	7,5	7,5
26,67	9	8,5
30,00	10	9,5
Permeabilität in m ²	3,03·10 ⁻⁹	3,21·10 ⁻⁹

Tabelle A6.2: Druckverluste für die Kollektormatte T2540 bei 7,7°C (Versuch 1) und 23°C (Versuch 2)

Spülgeschwindigkeit in m/h	Versuch 1 Druckverlust mbar	Versuch 2 Druckverlust mbar
0,00	0	0
33,33	3	2,5
50,00	4,5	3,5
66,67	6,5	5,5
83,33	8,5	7
100,00	10,5	9
116,67	13	11
133,33	15,5	13
150,00	18	15
166,67	21	16
183,33	23	19,5
200,00	25	21
216,67	27,5	23,5
233,33	30,5	27
250,00	34	29
266,67	37	30,5
283,33	39,5	33,5
300,00	42	38
316,67	47,5	41
333,33	51	45,5
Permeabilität in m ²	1,29·10 ⁻⁸	1,19·10 ⁻⁸

Tabelle A6.3: Druckverluste für die Kollektormatte I6070 bei 16°C, I80 bei 14°C und I100 bei 13°C

Spülgeschwindigkeit in m/h	Versuch 1 I6070 Druckverlust mbar	Versuch 2 I6070 Druckverlust mbar	Versuch 1 I80 Druckverlust mbar	Versuch 2 I80 Druckverlust mbar	Versuch 1 I100 Druckverlust mbar	Versuch 2 I100 Druckverlust mbar
0,00	0	0	0	0	0	0
3,33	0,5	0,5	1	1	1	1
6,67	1	1,5	2	2	2,5	3
10,00	1,5	2	4	4	4,5	4,5
13,33	1,5	2,5	5	5	6	6
16,67	2,5	3	7	7	7,5	8
20,00	3	3,5	8	8	9	10
23,33	4	4	9	9,5	11	11
26,67	4,5	5	11	11,5	12	13
30,00	5	5,5	13	13	15	15
33,33	6	6	15	14	17	16
33,33	5	6	13	14	15	16
50,00	8	9	19	21	23	24
66,67	12	11	27	28	32,5	34
83,33	15	16	34	38	42	45
100,00	19	20	44	48	54	57
116,67	23	25	54	58	68	71
133,33	28	29	65	69	79	85
150,00	33	34	73	79	94	100
166,67	38	39	87	91	110	115
183,33	43	44	97	104	123	131
200,00	49	50	109	116	141	148
216,67	54	55	122	129	158	165
Permeabilität in m ²	6,69·10 ⁻⁹	6,08·10 ⁻⁹	2,89·10 ⁻⁹	2,59·10 ⁻⁹	2,69·10 ⁻⁹	2,40·10 ⁻⁹

A6.2: Versuche zur Filtration mit Kollektormatten

Eine Kollektormatte im Format 3 x 3 x 1 cm wird in die Testzelle eingelegt und dann über einen definierten Zeitraum mit einer Kalziumkarbonat-Suspension von 100 mg/l im Abstrom durchströmt. Nach Ablauf der Filtrationsdauer folgt eine Spülung im Aufstrom mit einer Spülgeschwindigkeit von ca. 300 m/h, bei der der größte Teil der Beladung mit dem Spülwasser abgelöst und abtransportiert wird. Das Waschwasser wird zur späteren Analyse aufgefangen.

Der Anschluß der unteren Druckmeßstelle im Deckel wird gelöst und das Wasservolumen aus dem Zuleitungssystem (ca. 60 ml) zu dem Waschwasser hinzugefügt. Nun kann der Deckel der Testzelle entfernt werden, wobei kleine Wasservolumina aus den Deckelanschlüssen noch dem Waschwasser hinzugefügt werden. Die PSK-Matte wird nun mit einer Pinzette aus der Testzelle entfernt und in einer speziellen Quetschvorrichtung durch Auspressen von der restlichen Beladung gereinigt. Dabei wird mit ca. 30 ml zusätzlichem Wasser aus einer Spritzflasche die Reinigung unterstützt. Diese Trübstoffmasse wurde zunächst separat aufgefangen, später dem Waschwasser zugeschlagen.

Das Waschwasser wird über einen bindemittelfreien Glasfaserfilter (Typ MN 85/90 BF der Firma Macherey-Nagel) abfiltriert und dann mittels eines Feststoff-TOC-Gerätes (C-Mat 5500 der Firma Ströhlein) der anorganische Kohlenstoff (TIC) ermittelt. Da trotz sorgfältiger Vorarbeiten, wie Glühen der Keramikscheibchen und der Glasfaserfilter, noch ein geringer organischer Kohlenstoff (TOC) vorhanden sein kann und sich störend auswirken kann, erfolgt eine temperaturgesteuerte Verbrennung der Beladung im IR-Ofen. Das Programm sieht zunächst eine Verbrennung der Probe bei 600°C vor, bis der vom NDIR-Detektor gelieferte Peak wieder die Basislinie erreicht hat. Erst in der anschließenden Verbrennung bei 1000°C wird das Kalziumkarbonat der Probe gespalten und der TIC als Kohlenstoffmasse bestimmt. Der Feststoffgehalt an CaCO_3 berechnet sich im weiteren über das Molverhältnis von Kalziumkarbonat zu Kohlenstoff.

Die auf diese Weise bestimmte Trübstoffmasse beinhaltet neben der entfernten Beladung auch noch eine geringe Trübstoffmasse aus den Suspensionen im Zuleitungssystem der Testzelle, im Porensystem der Kollektormatte und im Ableitungssystem. Um diese zusätzliche Masse, die aus der Summe der Produkte dieser Volumina und ihren Trübstoffkonzentrationen zu bestimmen ist, muß die analysierte Feststoffmasse rechnerisch korrigiert werden. Vereinfachend wurde das Porenvolumen in der Kollektormatte je zur Hälfte dem Zulaufsystem (insgesamt 60 ml) mit der Zulaufkonzentration c_0 und dem Ablaufsystem (insgesamt 50 ml) mit der Filtratkonzentration c zugeschlagen. Die Filtratkonzentration berechnet sich dabei aus Gl. 6.7.

Im weiteren ist die Filtrationszeit t^* um die mittlere Aufenthaltszeit im Zuleitungssystem t_0 zu korrigieren, in der die Trübstofffront von der Trübstoffvorlage bis in die Kollektormatte transportiert wird. Während dieser Aufenthaltszeit sind noch keine Partikeln zur Abscheidung in die Kollektormatten transportiert worden. Die mittlere Aufenthaltszeit t_0 ergibt sich aus dem Verhältnis des Fluidvolumens im Zuleitungssystem zum Volumenstrom bei der Filtration.

Um die Anströmung der Kollektormatte bei der Filtration möglichst homogen zu gestalten, wurde im Zulauf unmittelbar vor der Kollektormatte eine weitere Matte positioniert. Sie war mit 1,5 cm Länge nur halb so lang wie die Kollektormatte und zeigte deutlich schlechtere Filtrationseigenschaften. Ihre Abscheideleistung wurde separat erfaßt und im Ergebnis des Filterparameters der zu untersuchenden Kollektormatte berücksichtigt. In den Tabellen A6.4 und A6.5 sind die Filterparameter der gesamten Anordnung, bestehend aus der Kollektormatte und der Vergleichmäßiger-Matte, dargestellt.

Tabelle A6.4: Filtrationsversuche mit der Kollektormatte I60

Filterlaufzeit t* in min	Beladung mg/cm ³	Filtergeschwindigkeit in m/h	Filtrationstemperatur in °C	Filterparameter l/m
54,67	1,706	0,84	20,4	43,15
59,67	2,209	1,04	19,6	35,20
29,67	1,426	1,29	19,6	35,05
39,67	1,885	1,30	19,6	33,82
16,37	1,68	3,18	19,9	29,51
26,37	2,64	3,22	20,1	27,48
36,37	3,89	3,43	20,4	27,38
46,37	5,21	3,36	20,5	30,56
56,37	5,84	3,36	20,5	26,87
66,37	7,06	3,28	20,4	29,16
18,14	2,496	6,29	20,0	16,74
28,14	4,942	6,49	19,9	22,21
38,14	6,011	6,55	19,8	18,89
48,14	7,327	6,44	19,6	18,48
58,14	9,655	6,38	19,2	21,09
68,14	10,701	6,60	20,3	18,64
18,94	3,466	11,25	20,4	11,55
29,94	5,577	11,43	20,3	11,57
38,94	7,078	11,18	20,2	11,54
48,94	9,324	11,40	19,9	11,93
58,94	10,296	11,15	19,8	11,04
68,94	12,533	11,62	19,2	11,02
19,25	3,908	15,82	20,2	8,76
29,25	5,860	15,79	20,1	8,64
39,25	8,694	15,66	20	9,80
49,25	10,911	16,18	19,7	9,43
59,25	12,344	16,02	19,6	8,89
69,25	14,781	16,04	19,5	9,12
19,63	4,125	33,30	20,3	4,02
29,63	6,761	32,62	20,2	4,48
39,63	8,821	32,69	20,2	4,36
49,63	11,650	31,79	19,8	4,76
69,63	16,095	32,34	19,9	4,59

Tabelle A6.5: Filtrationsversuche mit der Kollektormatte T2540

Filterlaufzeit t* in min	Beladung mg/cm ³	Filtergeschwindigkeit in m/h	Filtrationstemperatur in °C	Filterparameter l/m
18,46	0,616	1,16	20,2	22,25
28,46	1,009	1,05	19,1	30,83
48,46	1,550	1,01	20,1	28,28
58,46	1,858	1,11	19,3	23,81
26,28	1,02	3,20	20,6	8,19
36,28	2,30	3,20	20,5	14,73
46,28	2,60	3,28	20,5	12,27
56,28	3,18	3,33	20,7	12,13
66,28	4,74	3,26	20,6	16,74
18,15	1,502	6,41	20,0	8,82
28,15	2,389	6,61	20,2	8,75
38,15	3,278	6,59	19,1	8,92
48,15	4,160	6,08	20,5	9,88
58,15	5,579	6,79	20,1	9,77
68,15	6,064	6,49	19,3	9,45
18,95	1,872	11,85	20,3	5,41
28,95	3,057	11,51	20,4	6,02
38,95	3,722	11,46	20,3	5,42
48,95	5,043	11,10	20,1	6,10
58,95	6,643	11,16	19,9	6,69
68,95	7,984	11,64	19,9	6,57
19,26	2,220	16,29	19,8	4,54
29,26	3,201	16,20	19,6	4,32
39,26	4,869	16,04	19,4	5,00
49,26	5,955	16,01	19,3	4,87
59,26	8,283	16,32	19,5	5,58
69,26	8,380	16,10	20,0	4,84
19,63	2,438	32,84	19,7	2,35
29,63	3,845	32,62	19,5	2,48
39,63	5,261	32,40	19,0	2,55
49,63	6,478	32,73	18,9	2,48
55,63	7,618	32,65	19,0	2,62
69,63	9,562	32,42	19,5	2,64

Tabelle A6.6: Filtrationsversuche mit der Vergleichmäßiger-Matte

Filterlaufzeit t* in min	Beladung mg/cm ³	Filtergeschwindigkeit in m/h	Filtrationstemperatur in °C	Filterparameter l/m
38,24	1,927	6,90	20,6	2,99
48,24	2,304	6,70	20,4	2,92
58,24	2,532	6,88	20,5	2,58
39,02	2,025	12,74	19,9	1,65
49,02	2,715	12,17	20,1	1,85
59,02	3,155	11,96	20,2	1,81

A6.3: Spülversuche mit Kollektormatten

Tabelle A6.7: Entfernte Beladungen nach einer Filtrationszeit von 20 Minuten für I60 bei 11 m/h

Spülgeschwindigkeit in m/h	$\sigma_0=3,38\text{mg/cm}^3$ entfernte Beladung mg/cm^3
3,3	$(-0,347) \approx 0$
10,0	$(-0,174) \approx 0$
16,7	1,395
33,3	1,898
50,0	0,982
66,7	1,445
83,3	2,004
100,0	1,753
150,0	2,240
200,0	2,096

Tabelle A6.8: Entfernte Beladungen nach einer Filtrationszeit von 60 Minuten für I60 bei 10 m/h

Spülgeschwindigkeit in m/h	$\sigma_0=11,22\text{mg/cm}^3$ entfernte Beladung mg/cm^3
3,3	$(-0,346) \approx 0$
10,0	1,035
16,7	3,114
33,3	4,960
50,0	7,035
66,7	7,698
83,3	8,977
100,0	8,397
150,0	9,372
200,0	9,279

Tabelle A6.9: Entfernte Beladungen nach einer Filtrationszeit von 120 Minuten für I60 bei 10 m/h

Spülgeschwindigkeit in m/h	$\sigma_0=22,3\text{mg/cm}^3$ entfernte Beladung mg/cm^3
3,3	$(-0,653) \approx 0$
3,3	$(-0,720) \approx 0$
10,0	1,051
16,7	5,454
33,3	13,090
50,0	15,922
66,7	17,135
133,3	19,412
200,0	18,828
200,0	19,364

Tabelle A6.10: Entfernte Beladungen nach einer Filtrationszeit von 60 Minuten für T2540 bei 11,5 m/h

Spülgeschwindigkeit in m/h	$\sigma_0=5,68\text{mg/cm}^3$ entfernte Beladung mg/cm^3
3,3	0,102
10,0	1,560
16,7	2,592
33,3	3,208
50,0	3,790
66,7	3,933
83,3	4,535
100,0	4,904
150,0	6,075
200,0	5,948

Tabelle A6.11: Entfernte Beladungen nach einer Filtrationszeit von 60 Minuten für I6070 bei 10 m/h

Spülgeschwindigkeit in m/h	$\sigma_0=6,84\text{mg/cm}^3$ entfernte Beladung mg/cm^3
3,3	0,366
10,0	1,677
16,7	2,554
33,3	3,346
50,0	4,097
66,7	4,668
83,3	4,573
100,0	5,250
150,0	5,380
200,0	6,918

A7: Kalibrierkurve für die Trübungsmessung

Zur Quantifizierung der Feststoffkonzentration im Spülwasser bzw. der mit dem Reinigungsverfahren abgelösten Feststoffmasse wurden mit dem ULTRATURB Kalibrierkurven zwischen Feststoffkonzentration und Trübung für verschiedene Materialien aufgenommen. Bild A7.1 zeigt eine Kalibrierkurve für den Modelltrübstoff Kalziumkarbonat über den gesamten Meßbereich des ULTRATURB von 0 bis 1000 FNU. Die Kalibrierkurve läßt sich in guter Näherung durch einen Exponentialansatz beschreiben.

$$c(x) = 627.6 - 627.6 \cdot \exp(-0.001025 \cdot x) \quad (\text{A7.1})$$

Hier bedeutet c die Feststoffkonzentration in mg/l und x die Trübung in FNU.

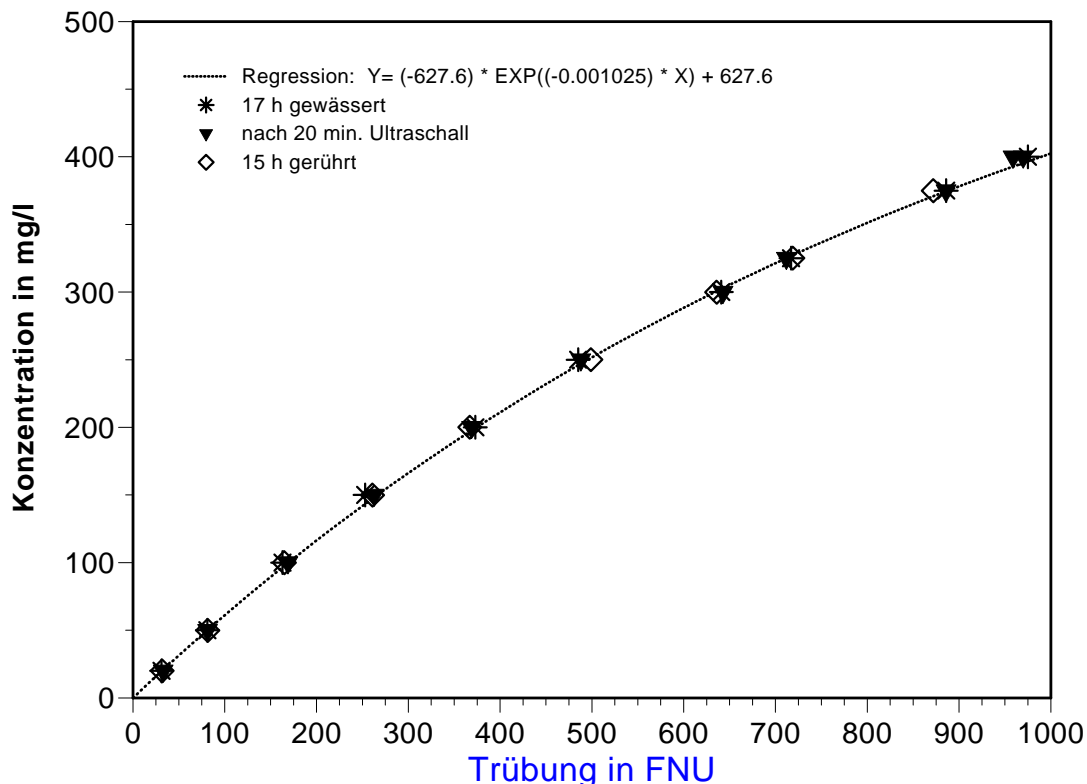


Bild A7.1: Kalibrierkurven für Kalziumkarbonat mit dem ULTRATURB

Die Kalibrierkurve wurde aus den Daten von insgesamt 3 unabhängigen Meßreihen ermittelt. Der Modelltrübstoff Kalziumkarbonat wurde vor den Messungen über mehrere Stunden in Wasser gerührt. Bei einer der Meßreihen wurden die Kalziumkarbonat-Proben vor der Trübungsmessung zusätzlich mit Ultraschall behandelt. Es wurde auf diese Weise überprüft, inwieweit der Ultraschall die Trübstoffe verändern kann und somit einen Einfluß auf die Trübungsmessung haben kann. Die gute Übereinstimmung der Daten aus allen Meßreihen belegt einen gut reproduzierbaren Zusammenhang zwischen Trübungssignal und Feststoffkonzentration. Weiterhin ist durch den Ultraschall keine Beeinflussung der Kalibrierkurve zu erwarten.

A8: Beladungsform der inneren Oberfläche der PSK

Für die Abscheidemechanismen bei der Filtration und die Ablösevorgänge bei der Spülung ist von Bedeutung, ob sich die Beladung der inneren PSK-Oberfläche mit Partikeln in Form einer Vielzahl von Schichten dieser Partikeln darstellt oder ob durch die Beladung lediglich eine Monoschicht vorliegt. Im letzteren Fall sind die Partikel direkt mit der PSK-Oberfläche in Kontakt, so daß die Haftungsbedingungen anders sind als bei einem Kontakt lediglich mit anderen Partikeln gleicher Art.

Betrachtet man die Partikel, die die Beladung darstellen, als ideal kugelförmig und von einer einheitlichen Größe, so ist der Flächenbedarf eines Partikel näherungsweise mit seiner Projektionsfläche auf der inneren PSK-Oberfläche identisch. Bei einer einschichtigen Beladung ist dann das Verhältnis von Partikelvolumen zur inneren PSK-Oberfläche ca. $2/3 \cdot d_k$. Das bedeutet, daß eine einschichtige Beladung um so schneller erreicht wird je kleiner die abgeschiedenen Partikeln sind.

In den Versuchen mit den PSK-Tiefenfilter wurde auf den PSK eine mittlere Beladung von $4,12\text{mg/cm}^3$ abgeschieden. Für die PSK vom Typ I60 mit einer inneren Oberfläche von $92,5\text{cm}^2/\text{cm}^3$ (Tabelle 6.1) und den Kalziumkarbonat-Partikeln, die eine Dichte von ca. $2,5\text{g/cm}^3$ besitzen, stellt sich eine mittlere Schichthöhe von $0,17\mu\text{m}$ ein. Für Partikeln mit einem Durchmesser von $3\mu\text{m}$ wird daher im Mittel keine Beladung aus mehreren Partikelschichten entstehen. Da allerdings lokal im PSK begünstigte Abscheidegebiete auftreten werden, können dort mehrschichtige Beladungen auftreten.

A9: Theoretische Grundlagen zum Ultraschall

Die Bewegungen der Fluidelemente im Schallfeld lassen sich mit den grundlegenden Erhaltungsgleichungen der Strömungsmechanik, den Navier-Stokes Gleichungen, beschreiben (KUTTRUFF, 1988). Für die Vorgänge im Schallfeld ist es in der Regel ausreichend, die Erhaltungsgleichungen in reibungsfreier, kompressibler Form zu verwenden (kompressible Euler-Gleichungen):

$$\nabla p + \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \quad (\text{A9.1})$$

$$\text{div}(\rho \cdot \vec{v}) + \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (\text{A9.2})$$

Unter der Annahme kleiner Druck- und Dichteänderungen im Schallfeld kann der von der Dichte abhängige Druck $p(\rho)$ in eine Taylorreihe (Linearisierung) um die als konstant anzunehmenden Ruhegrößen im Fluid p_0, ρ_0 entwickelt werden:

$$\begin{aligned} p' &= p - p_0 \\ \rho' &= \rho - \rho_0 \end{aligned} \quad (\text{A9.3})$$

Man erhält:

$$p = p_0 + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_0 \cdot (\rho - \rho_0) \quad (\text{A9.4})$$

bzw.

$$p' = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_0 \cdot \rho' \quad (\text{A9.5})$$

Die Ableitung des Druckes nach der Dichte

$$c^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_0 = \left. \frac{dp'}{d\rho'} \right|_0 \quad (\text{A9.6})$$

kann durch die so definierte Schallgeschwindigkeit c ersetzt werden.

Mit den zuvor getroffenen Annahmen kleiner Druck- und kleiner Dichteänderungen rechtfertigen sich die Vereinfachungen, daß

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (\text{A9.7})$$

und $\rho \approx \rho_0$ (A9.8)

Aus Gl. (A9.1) erhält man dann: $\nabla p + \rho_0 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ (A9.9)

Berücksichtigt man im weiteren, daß

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad (\text{A9.10})$$

so folgt aus Gl. (A9.2): $\rho_0 \cdot c^2 \cdot \text{div}(\vec{v}) + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$ (A9.11)

Aus Divergenzbildung von (A9.9) sowie Bildung der zeitlichen Ableitung von (A9.11) ergeben sich:

$$\text{div}(\nabla p) + \rho_0 \cdot \text{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = 0 \quad (\text{A9.12})$$

$$\rho_0 \cdot \text{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A9.13})$$

Aus der Differenzbildung der beiden Gleichungen (A9.12) und (A9.13) kann der Term mit der Geschwindigkeit eliminiert werden und man erhält lediglich eine Gleichung für den Druck:

$$\text{div}(\nabla p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A9.14})$$

Mit der Identität $\Delta p = \text{div}(\nabla p)$ folgt die sogenannte Wellengleichung für die linearisierten Schallfeldgrößen (KUTTRUFF, 1988):

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{A9.15})$$

Für eine eindimensionale Wellenausbreitung in Richtung der x-Koordinate ergibt die Lösung von Gl. (A9.15):

$$p(x, t) = \hat{p} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \quad (\text{A9.16})$$

A9.1: Beziehungen im linearisierten Schallfeld

Die im Ultraschallfeld erzeugten Druckwellen resultieren aus Bewegungen der Fluidelemente, die entweder zu einer lokalen Verdichtung oder Verdünnung des Fluids führen. Falls lediglich eine Wellenausbreitung in einer Koordinatenrichtung x vorliegt, lassen sich die Gleichungen für die Bewegungen der Fluidelemente ausgehend von der Gleichung A9.9 ableiten.

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (\text{A9.17})$$

Durch eine zeitliche Integration von (A9.17) unter Berücksichtigung von Gl. (A9.16) erhält man die Geschwindigkeit mit der sich ein Fluidelement um eine mittlere Position im Schallfeld bewegt, die als Schnelle u bezeichnet wird.

$$u(x, t) = \frac{k \cdot \hat{p}}{\rho_0 \cdot \omega} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \quad (\text{A9.18a})$$

Unter Berücksichtigung der Definition für die Wellenzahl $k = \frac{\omega}{c}$ folgt für die Schnelle

$$u(x, t) = \frac{\hat{p}}{\rho_0 \cdot c} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) \quad (\text{A9.18b})$$

Die Auslenkung ξ der Fluidelemente, die auch als Schallausschlag oder Elongation bezeichnet wird, ergibt sich aus einer weiteren zeitlichen Integration:

$$\xi(x, t) = \frac{\hat{p}}{\rho_0 \cdot c \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \quad (\text{A9.19})$$

Aus den Gleichungen von Druck, Schnelle und Auslenkung der Fluidelemente lassen sich einige grundlegende Beziehungen ablesen:

- Druck und Schnelle sind in Phase zueinander.
- Schnelle und Auslenkung sind in der Phase um 90° verschoben, so daß die Schnelle dort verschwindet, wo die Auslenkung der Fluidelemente maximal wird. Die Auslenkung eilt der Schnelle um 90° voraus.

- Zwischen den Amplituden von Auslenkung $\hat{\xi}$, Schnelle \hat{u} und Schalldruckamplitude \hat{p} gelten folgende Zusammenhänge (z. B. BERGMANN, 1954):

$$\hat{\xi} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 \cdot c \cdot \omega} \quad (\text{A9.20})$$

$$\hat{u} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 \cdot c} \quad (\text{A9.21})$$

Diese Größen sind mit der mittleren Schallintensität I im Ultraschallfeld durch

$$I = \frac{\hat{p}^2}{2 \cdot \rho_0 \cdot c} \quad (\text{A9.22})$$

verknüpft. Die hier abgeleiteten Gleichungen (A.9.18 bis A9.22) wurden z. B. schon von BERGMANN (1954) mitgeteilt.

A9.2: Kavitation im Ultraschallfeld

Ausgehend von einer Energiebilanz für eine pulsierende Gasblase lässt sich die zeitliche Änderung des Radius einer schwingenden Gasblase im Ultraschallfeld durch die nachfolgende Differentialgleichung beschreiben (z. B. KUTTRUFF, 1988), die als Noltingk-Neppiras-Gleichung bezeichnet wird.

$$\rho \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) + p_\infty + \frac{2\sigma}{R} - p_i + 4\eta \frac{\dot{R}}{R} = 0 \quad (\text{A9.23})$$

Für den Druck im Inneren der Gasblase soll im folgenden die Isentropenbeziehung gültig sein, aus der sich der momentane Druck p_i in der Blase mit dem Radius R aus dem anfänglichen Druck p_{i0} sowie dem Anfangsradius R_0 und dem Isentropenexponenten κ berechnet.

$$p_i = p_{i0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3 \cdot \kappa} \quad (\text{A9.24})$$

Das Zeitverhalten des äußeren vom Ultraschall aufgeprägten Druckes $p_\infty(t)$ wird durch einen statischen Druckanteil p_0 und einen periodisch zeitveränderlichen Anteil approximiert:

$$p_\infty(t) = p_0 + \hat{p} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad (\text{A9.25})$$

Betrachtet man das Fluid, das die kavitierende Gasblase umgibt, als inkompressibel, so kann aus der Kontinuitätsgleichung (Gl. A4.17) und den aus der NOLTINGK-NEPPIRAS-Gleichung (A9.23) ermittelten Blasenbewegungen das Druckfeld in dem umliegenden Fluid berechnet werden. Das Geschwindigkeitsfeld außerhalb der Blase, das eine reine Radialströmung darstellt, folgt aus Gl. A4.17 zu:

$$v_r(r,t) = \frac{R^2}{r^2} \cdot \dot{R} \quad (\text{A9.26})$$

Der Druck im umliegenden Fluid der Blase kann aus den Navier-Stokes Gleichungen in der Formulierung nach Gl. A4.15 berechnet werden, wobei aufgrund der großen Beschleunigungen der Reibungsterm vernachlässigt werden kann.

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \cdot \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) = 0 \quad (\text{A9.27})$$

Unter Verwendung von Gleichung (A9.26) folgt dann:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho}{r^2} (2 \cdot R \cdot \dot{R}^2 + R^2 \cdot \ddot{R}) + \frac{2 \cdot \rho \cdot R^4}{r^5} \cdot \dot{R}^2 \quad (\text{A9.28})$$

Unter Verwendung der Noltingk-Neppiras-Gleichung (A9.23) kann bei Vernachlässigung eines dort ebenfalls auftretenden Reibungstermes eine Beziehung für die Radialbeschleunigung \ddot{R} abgeleitet werden:

$$R^2 \cdot \ddot{R} = R \cdot \left(\frac{p(R) - p_\infty}{\rho} - \frac{3}{2} \cdot \dot{R}^2 \right) \quad (\text{A9.29})$$

Der Druck auf der äußeren Blasenfläche $p(R)$ im Fluid berechnet sich dabei aus dem Innendruck abzüglich der Wirkung der Oberflächenspannung.

$$p(R) = p_i - \frac{2 \cdot \sigma}{R} \quad (\text{A9.30})$$

Durch Einsetzen von Gl. A9.29 in Gl. A9.28 erhält man dann:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\rho}{r^2} \left(2 \cdot R \cdot \dot{R}^2 + R \cdot \left(\frac{p(R) - p_\infty}{\rho} - \frac{3}{2} \cdot \dot{R}^2 \right) \right) + \frac{2 \cdot \rho \cdot R^4}{r^5} \cdot \dot{R}^2 \quad (\text{A9.31})$$

Durch Integration von der Blasenoberfläche R bis zum Punkt r im Fluid folgt die Druckverteilung im Fluid (außerhalb der Kavitationsblase), die sich aus dem Schallfeld und den überlagerten Druckwellen der Kavitationsblase zusammensetzt:

$$p(r,t) = p_{\infty} + \left(\frac{\rho}{2} \cdot \dot{R}^2 + p(R) - p_{\infty} \right) \cdot \frac{R}{r} - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{R^4}{r^4} \cdot \dot{R}^2 \quad (\text{A9.32})$$

Die hier abgeleitete Gl. (A9.32) wird auch von PLESSET und PROSPERETTI (1977) mitgeteilt.

Lebenslauf

von

Jörg Kaulitzky

15.12.1964 geboren in Duisburg

Schulausbildung

01.08.71 - 16.07.75 Grundschule Schulstraße in Duisburg

30.08.75 - 16.06.84 Leibniz-Gymnasium in Duisburg

16.06.84 Abitur

Studium/Praktika

06.08.84 - 28.09.84 Industriepraktikum bei der Fa. Jacobs GmbH

15.10.84 Beginn des DII-Studiums „Allgemeiner Maschinenbau“
an der Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg

15.10.86 Diplom-Vorprüfung „Allgemeiner Maschinenbau“

01.04.88 - 01.10.88 Urlaubssemester zur Absolvierung eines dreimonatigen
Industriepraktikums bei der THYSSEN STAHL AG

09.01.91 Diplom-Hauptprüfung

Beruflicher Werdegang

01.03.91 - 31.12.94 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Rheinisch-
Westfälischen Institut für Wasserchemie und
Wassertechnologie (IWW), Bereich Wassertechnologie

seit 01.01.95 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich
Maschinenbau, Fachgebiet Verfahrenstechnik /
Wassertechnik der Gerhard-Mercator-Universität - GH
Duisburg