

Kapitel 2

Das Approximationsverfahren

2.1 DMS-Splines

Wir wollen zunächst den DMS-Spline einführen. Dazu beschränken wir uns auf den bivariaten Fall, da dieser für die Flächenmodellierung von Interesse ist. Für den allgemeinen Fall von multivariaten DMS-Splines sei beispielsweise auf [DMS92] und [Hus98] verwiesen. Der DMS-Spline besteht aus einer gewichteten Summe von multivariaten normalisierten B-Splines. Wir beginnen unsere Betrachtungen mit deren univariaten Verwandten.

Definition 2.1 (univariater normalisierter B-Spline)

Gegeben seien reelle Knoten

$$t_{-k} = \dots = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = \dots = t_{n+k}$$

mit $t_i < t_{i+k+1}$ für $i = -k, \dots, n-1$. Dann ist der i -te B-Spline $(k+1)$ -ter Ordnung zur Knotenfolge $T := (t_{-k}, \dots, t_{n+k})$ definiert durch

$$N_{i,k,T}(x) := (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, \dots, t_{i+k+1}; (\cdot - x)_+^k].$$

Bemerkung 2.2

In der obigen Definition ist wie üblich $[t_i, \dots, t_{i+k+1}; f]$ die $(k+1)$ -te dividierte Differenz zur Funktion f , welche man rekursiv wie folgt bestimmen kann:

Seien $t_i \leq \dots \leq t_{i+k+1}$ gegeben, so setze

$$[t_j; f] := f(t_j) \quad (j = i, \dots, i+k+1)$$

und für $l = 1, \dots, k+1$:

$$[t_j, \dots, t_{j+l}; f] := \begin{cases} \frac{[t_{j+1}, \dots, t_{j+l}; f] - [t_j, \dots, t_{j+l-1}; f]}{t_{j+l} - t_j} & \text{falls } t_j \neq t_{j+l} \\ f^{(l)}(t_j) & \text{falls } t_j = t_{j+l} \end{cases} \quad (j = i, \dots, i+k+1-l).$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß Notationen mit eckigen Klammern verschiedene Bedeutungen haben können. So werden neben der dividierten Differenz auch das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und die konvexe Hülle $[\mathcal{M}]$ der Menge $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) so bezeichnet.

Desweiteren ist die abgeschnittene Potenzfunktion $(\cdot)_+^k$ aus obiger Definition gegeben durch:

$$(x)_+^k := \begin{cases} (x)^k & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Univariate (normalisierte) B-Splines spielen in verschiedenen Bereichen der Mathematik eine große Rolle, was auf ihre Vielzahl an (geometrischen) Eigenschaften zurückzuführen ist.

Satz 2.3 (Eigenschaften univariater normalisierter B-Splines)

1. *Lokaler Träger: Es gilt:*

$$N_{i,k,T}(x) = 0 \quad \forall x \notin [t_i, t_{i+k+1}].$$

2. *Positivität: Es gilt:*

$$N_{i,k,T}(x) > 0 \quad \forall x \in (t_i, t_{i+k+1}).$$

3. *Polynomialität: Gilt $t_j < t_{j+1}$ ($j \in \{i, \dots, i+k\}$), so ist $N_{i,k,T}|_{[t_j, t_{j+1}]}$ ein Polynom vom (maximalen) Grad k .*

4. *Partition der Eins: Es gilt:*

$$\sum_{i=-k}^{n-1} N_{i,k,T}(x) = 1 \quad \forall x \in (t_0, t_n).$$

5. *Rekursionsformel (Identität von Mansfield): Es gilt:*

$$N_{i,0,T}(x) = \begin{cases} \chi_{[t_i, t_{i+1})}(x) & \text{falls } t_i < t_{i+1} \\ 0 & \text{falls } t_i = t_{i+1} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

sowie für $k=1, 2, 3, \dots$

$$N_{i,k,T}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_{i,k-1,T}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1,T}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

hierbei ist $\frac{0}{0} := 0$ zu setzen (für den Fall $t_{i+k} = t_i$ bzw. $t_{i+k+1} = t_{i+1}$). Weiter ist

$$\chi_{\mathcal{M}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathcal{M} \end{cases}$$

wie üblich die charakteristische Funktion der Menge \mathcal{M} .

6. *Basiseigenschaft:* Es sei $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ die feinste streng monoton wachsende Unterfolge von T , und x_i habe die Vielfachheit $\nu_i := k - \mu_i$ in T , also $T = (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\nu_1\text{-mal}}, \dots, \underbrace{x_m, \dots, x_m}_{\nu_m\text{-mal}})$. Dann bilden die B-Splines

$$\{N_{i,-k,T}, \dots, N_{i,n-1,T}\}$$

eine Basis des (polynomialen) Spline-Raumes

$$S_{k,T} := S_{k,X,\nu} := \{f \mid f_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \Pi_k, f \text{ ist } \mu_i\text{-mal stetig differenzierbar in } x_i \ (0 < i < m)\}.$$

Hierbei ist wie üblich Π_k der Raum der Polynome vom Höchstgrad k . Somit kann $f \in S_{k,T}$ dargestellt werden durch:

$$f = \sum_{i=-k}^{n-1} d_i N_{i,k,T}.$$

7. Definiert man nun die sogenannten Greville-Abszissen wie folgt:

$$\xi_i := \frac{1}{k}(t_{i+1} + \dots + t_{i+k}) \quad (i = -k, \dots, n-1),$$

sowie die sogenannten de Boor- bzw. Kontroll-Punkte

$$\begin{pmatrix} \xi_i \\ d_i \end{pmatrix},$$

so ergeben sich für den sogenannten Schoenberg-Spline

$$\sum_{i=-k}^{n-1} f(\xi_i) N_{i,k,T}(t)$$

weitere interessante Eigenschaften:

(a) *Interpolation an den Endpunkten:* Es gilt für $f : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(t_0) = \sum_{i=-k}^{n-1} f(\xi_i) N_{i,k,T}(t_0) \quad \text{sowie} \quad f(t_n) = \sum_{i=-k}^{n-1} f(\xi_i) N_{i,k,T}(t_n).$$

(b) *Reproduktion linearer Funktionen:* Sei $l(x) = ax + b$ gegeben, so gilt:

$$l(x) = \sum_{i=-k}^{n-1} l(\xi_i) N_{i,k,T}(x) \quad \forall x \in [t_0, t_n].$$

(c) *Konvexe-Hülle-Eigenschaft:* Es gilt für $f : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left(x, \sum_{i=-k}^{n-1} f(\xi_i) N_{i,k,T}(x) \right) \in [(\xi_{r-k}, f(\xi_{r-k})), \dots, (\xi_r, f(\xi_r))]$$

$$\forall x \text{ mit } x_r \leq x \leq x_{r+1}.$$

(d) *Variationsverminderungseigenschaft:* Durch Verbinden der Kontrollpunkte $\begin{pmatrix} \xi_i \\ d_i \end{pmatrix}$ erhält man ein sogenanntes Kontrollpolygon. Jede Gerade schneidet den Graphen von $\sum_{i=-k}^{n-1} d_i N_{i,k,T}$ höchstens so oft wie das zugehörige Kontrollpolygon.

Beweis: Beweise dieser Aussagen findet man vielfach, z.B. zu 6. in [Sei89] und die der übrigen in [deB78]. ■

Curry und Schoenberg [CuS66] fanden eine weitere geometrische Eigenschaft heraus:

Satz 2.4 (Splines durch Orthogonalprojektionen von Simplizia¹)

Es bezeichne

$$M_{i,k,T} := \frac{k+1}{t_{i+k+1} - t_i} N_{i,k,T}$$

den B-Spline, der so normalisiert ist, daß gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} M_{i,k,T}(x) dx = 1.$$

Weiter sei ein Simplex $S_{k+1} \in \mathbb{R}^{k+1}$ mit Eckpunkten

$$(t_i, y_i), \dots, (t_{i+k+1}, y_{i+k+1}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{k+1}$$

gegeben mit

$$\{t_i, \dots, t_{i+k+1}\} \subseteq T \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^{k+1}} \chi_{S_{k+1}}(u) du = \text{Vol}_{k+1}(S_{k+1}) = 1.$$

Dann gilt:

$$M_{i,k,T}(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \chi_{S_{k+1}}(x, y) dy \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^k).$$

¹Der Begriff Simplizia mutet etwas fremd an, doch laut Duden existieren zwei Plural-Formen von Simplex (Simplexe und Simplizia). Simplicies ist hingegen kein offizieller Plural, wie man durch die Verwandtschaft von Index zu Simplex vermuten könnte.

Beweis: Man vergleiche [CuS66]. ■

Auf diese Weise hätte man (univariate) Splines mit Hilfe von Simplizia einführen können statt über dividierte Differenzen, und es hätte zu denselben Ergebnissen geführt. Diese Idee griff de Boor 1976 auf [deB76] und führte zum ersten Mal multivariate B-Splines ein. Er nahm einen Simplex entsprechend höherer Dimension und ließ mehr Freiheitsgrade. So erhielt er eine nichtnegative stückweise polynomiale Funktion mit kompaktem Träger, die gewissen Stetigkeitsbedingungen genügte. Über diesen B-Spline schrieb er, daß er zu diesem Zeitpunkt noch keine Idee habe, wie hilfreich er sein könnte. Wir beschränken uns im folgenden auf den bivariaten Fall.

Definition 2.5 (Simplex-Spline)

Es sei $S_{k+2} = [X]$ mit $X = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k+2}\} \subset \mathbb{R}^{k+2} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) ein nichtentarteter Simplex im \mathbb{R}^{k+2} (also $Vol_{k+2}(S_{k+2}) > 0$). Weiter sei $P : \mathbb{R}^{k+2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die durch

$$\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} = (u_1, u_2) \quad , \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+2}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$$

gegebene Projektion. Der Simplex-Spline $M_X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zum Simplex S_{k+2} der Ordnung $k + 1$ ist dann gegeben durch

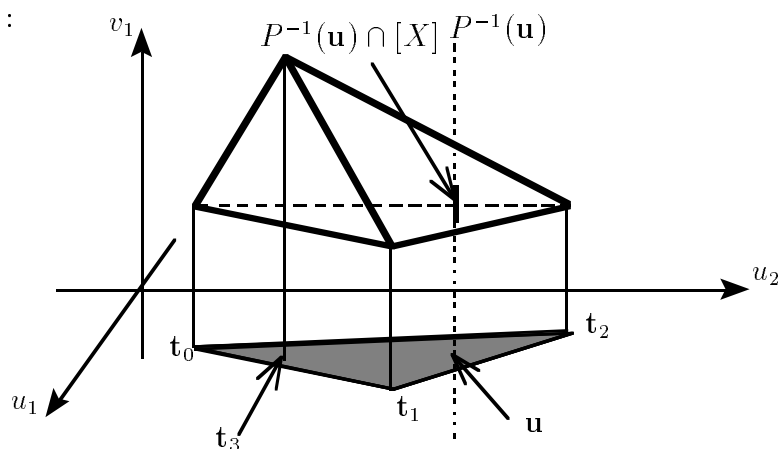
$$M_X(\mathbf{u}) := Vol_k([X] \cap P^{-1}(\{\mathbf{u}\})).$$

Dabei bezeichnet $P^{-1}(\mathcal{M}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+2} \mid P(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}\}$ das volle Urbild der Menge \mathcal{M} . Für $k = 0$, setze

$$M_X(\mathbf{u}) := \chi_{[X]}(\mathbf{u}).$$

Beispiel 2.6

1. $k = 1$:



2. Seien Simplizia

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (2, -1, 1), (3, 0, 0)\} & \text{und} \\ X_2 &= \{(0, 0, 1), (1, 1, 3), (2, -1, -8), (3, 0, 0)\} \end{aligned}$$

gegeben. Dann werden durch beide (bivariate) Simplex-Splines über $T = \{(0, 0), (1, 1), (2, -1), (3, 0)\}$ definiert. Die Funktionswerte an der Stelle $\mathbf{u} = (1, 0.5)$ ergeben sich dann zu

$$\begin{aligned} M_{X_1}(1, 0.5) &= \frac{1}{6} & \text{und} \\ M_{X_2}(1, 0.5) &= 1. \end{aligned}$$

Das Volumen der Simplizia beträgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}_3([X_1]) &= \frac{1}{2} & \text{und} \\ \text{Vol}_3([X_2]) &= 3. \end{aligned}$$

Teilen wir den Funktionswert durch das Volumen des Simplex, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{M_{X_1}(1, 0.5)}{\text{Vol}_3([X_1])} &= \frac{1}{3} & \text{und} \\ \frac{M_{X_2}(1, 0.5)}{\text{Vol}_3([X_2])} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Das zweite Beispiel legt nahe, Simplex-Splines zu normalisieren und läßt vermuten, daß normalisierte Simplex-Splines bereits durch die *Knoten* $\mathbf{t}_i = P(\mathbf{x}_i)$ bestimmt sind. In der Literatur wird meistens die Normalisierung $\frac{M_X}{\text{Vol}_{k+2}[X]}$ verwendet, welche als Hintergrund $\int_{\mathbf{R}^n} \frac{M_X}{\text{Vol}_{k+2}[X]} = 1$ hat. Dahmen, Micchelli und Seidel [DMS92] verwenden allerdings eine andere Normalisierung, welche den Wegfall eines Faktors $(k+2)/k$ in einer später auftauchenden Rekursionsformel zur Folge hat.

Definition 2.7 (normalisierter Simplex-Spline)

Gegeben sei $K = \{\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_{k+2}\} \subset \mathbb{R}^2$ ($k \in \mathbb{N}_0$) mit $\text{Vol}_2([K]) > 0$. Dann existiert $X = \{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k+2}\} \subset \mathbb{R}^{k+2}$ mit $K = \{\mathbf{t}_0 = P(\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{t}_{k+2} = P(\mathbf{x}_{k+2})\}$ und $\text{Vol}_{k+2}([X]) > 0$, und es ist der normalisierte Simplex-Spline $(k+1)$ -ter Ordnung zu K gegeben durch:

$$M(\mathbf{u}|K) := \frac{k!}{(k+2)!} \frac{M_X(\mathbf{u})}{\text{Vol}_{k+2}[X]}.$$

P ist die aus Definition 2.5 bekannte Projektion.

Die Existenz der Menge X ist einfach einzusehen: Da

$$\text{Vol}_2([K]) > 0$$

gilt, existieren

$$\{\mathbf{t}_{i_0}, \mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}\} \subset K \text{ mit } \text{Vol}_2(\{\{\mathbf{t}_{i_0}, \mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}\}\}) > 0.$$

O.B.d.A. sei $\{\mathbf{t}_{i_0}, \mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}\} = \{\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$. Bilde $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ wie folgt:

$$\mathbf{x}_i := (\mathbf{t}_i, \mathbf{0}) \text{ mit } \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k \quad (i = 0, 1, 2).$$

Die Punkte $\mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{k+2}$ können durch

$$\mathbf{x}_{2+i} := (\mathbf{t}_{2+i}, \mathbf{e}_{k,i}) \quad (i = 1, \dots, k) \text{ mit } \mathbf{e}_{k,i} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{(i-1)\text{-mal}}, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$$

festgelegt werden. $\text{Vol}_{k+2}([X]) > 0$ ergibt sich dann sofort:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+2)!} \cdot \text{Vol}_{k+2}([X]) &= |\det(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_0)| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} (\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0) & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & E_k \end{pmatrix} \right| \\ &= |\det(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0)| > 0. \end{aligned}$$

Dabei ist $(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_0, \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_0)$ eine reguläre 2×2 -Matrix, $\mathbf{A} = (-\mathbf{t}_0, \dots, -\mathbf{t}_0)$ eine $2 \times k$ -Matrix, $\mathbf{0}$ eine $k \times 2$ -Matrix mit ausschließlich Nullen als Einträge und E_k die $k \times k$ -Einheitsmatrix.

Ein Beweis zur Wohldefiniertheit des normalisierten Simplex-Splines findet sich in [Hus98].

Man kann den multivariaten B-Spline auch zur Distribution erweitern, was oftmals als einzige Definition gegeben wird, allerdings wenig anschaulich ist. Der Vollständigkeit halber sei sie hier auch angegeben.

Definition 2.8 (normalisierter distributioneller Simplex-Spline)

Der normalisierte Simplex-Spline $M(\cdot|K) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei die Distribution, für die gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} M(\mathbf{u}|K) \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = k! \int_{\Sigma_{k+2}} \varphi\left(\sum_{i=0}^{k+2} \lambda_i \mathbf{t}_i\right) d\boldsymbol{\lambda} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2).$$

Dabei gilt: $\Sigma_{k+2} := \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{k+2} \mid \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k+2; \sum_{i=1}^{k+2} \lambda_i \leq 1\}$, $\lambda_0 := 1 - \sum_{i=1}^{k+2} \lambda_i$ und $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2) := \{\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in C^\infty; \varphi \text{ hat kompakten Träger}\}$.

Zur Berechnung von Simplex-Splines wird im allgemeinen eine Rekursion über den Polynomgrad von Micchelli [Mic80] verwendet.

Satz 2.9 (Rekursionsformel über den Polynomgrad)

Sei $K = \{\mathbf{t}_0, \dots, \mathbf{t}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ ($n = k + 2 > 3$) und $\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{u} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \mathbf{t}_i$ mit $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.

Dann gilt:

$$M(\mathbf{u}|K) = \sum_{i=0}^n \lambda_i M(\mathbf{u}|K_i)$$

mit $K_i = K - \{\mathbf{t}_i\}$, falls alle relevanten Splines $M(\cdot|K_i)$ in \mathbf{u} stetig sind.

Beweis: Man vergleiche [Mic80]. ■

Es soll nun das von W. Dahmen, C. A. Micchelli und H. P. Seidel eingeführte Spline-Schema (vgl. [DMS92]) hier vorgestellt werden. Wie bereits eingangs erwähnt, beschränken wir uns auf den bivariaten Fall. Die Grundfunktionen stellen eine Verallgemeinerung der normalisierten B-Splines ins Multivariate dar. Viele der oben beschriebenen Eigenschaften univariater normalisierter B-Splines können auch für den multivariaten Fall gezeigt werden. Ein wesentliches Hilfsmittel für die Festlegung der Definitionsbereiche stellen Triangulierungen dar.

Definition 2.10 (Triangulierung, Dreieck)

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{S} = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n | \mathbf{t}_j = (t_{j_1}, t_{j_2}), j = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{R}^2$ von Punkten mit $\text{Vol}_2([\mathcal{S}]) > 0$. Dann ist

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{T_1, \dots, T_m | T_i = \{\mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}, \mathbf{t}_{i_3}\} \subset \mathcal{S}, i = 1, \dots, m\}$$

eine Triangulierung von \mathcal{S} , falls gilt:

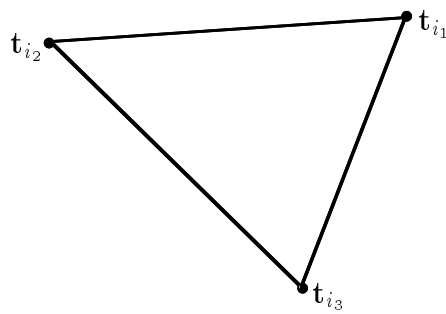
1. $\text{Vol}_2([T_i]) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$
2. $\bigcup_{i=1}^m [T_i] = [\mathcal{S}]$
3. $[T_i] \cap [T_j] = [T_i \cap T_j] \quad \forall T_i, T_j \in \mathcal{T}$
4. $[T_i] \cap \mathcal{S} = T_i$.

Die konvexen Hüllen der Elemente der Triangulierung $[T_i] := [\mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}, \mathbf{t}_{i_3}]$ ($i = 1, \dots, m$) heißen Dreiecke der Triangulierung.

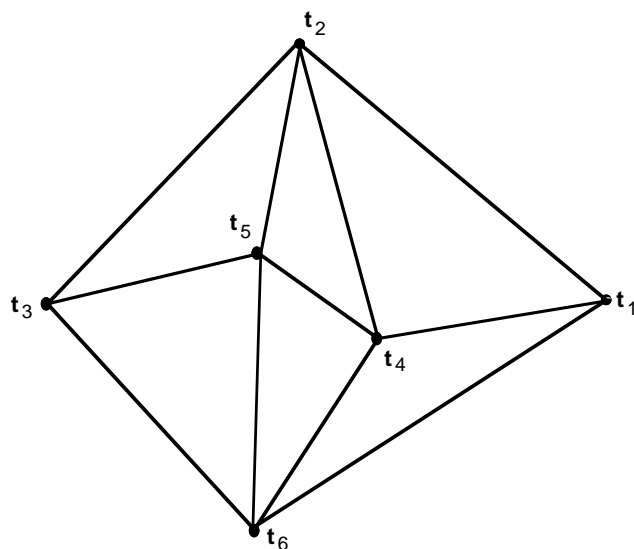
Ein Dreieck ist die konvexe Hülle dreier Punkte $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3 \in \mathbb{R}^2$, die nicht kollinear liegen, und wird mit $[\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3]$ bezeichnet. Dabei seien die Eckpunkte entgegen des Uhrzeigersinns notiert.

Bemerkung 2.11

1. Die Elemente einer Triangulierung bilden nichtentartete Dreiecke.
2. Der triangulierte Bereich ist konvex.
3. Der Schnitt zweier verschiedener Dreiecke einer Triangulierung bildet immer eine Nullmenge.
4. Jedes Dreieck enthält genau drei Punkte aus \mathcal{S} und diese als Eckpunkte.
5. In $[T_i] = [\mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}, \mathbf{t}_{i_3}]$ steckt eine gewisse Ordnung. Im Gegensatz zur sonstigen Bezeichnung einer konvexen Hülle einer Menge entfallen in diesem Fall zur Verdeutlichung die Mengenklammern.



6. Ist $\mathcal{S} = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n\} \subset \mathbb{R}^2$ gegeben, können wir durch eine Multiindexmenge \mathcal{J} eine Triangulierung eindeutig festlegen. Sei z.B. folgende Triangulierung einer Menge $\mathcal{S} = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_6\}$ gegeben:



Dann wird deren Gestalt durch

$$\mathcal{J} = \{(2, 3, 5), (3, 6, 5), (6, 4, 5), (6, 1, 4), (1, 2, 4), (2, 5, 4)\}$$

(in Verbindung mit \mathcal{S}) eindeutig beschrieben.

Zur Definition des DMS-Splines benötigt man eine der Triangulierung zugeordnete Knotenmenge. Von dieser zugeordneten Knotenmenge hängt sowohl die Stetigkeit als auch der Grad des DMS-Splines ab.

Definition 2.12 (zugeordnete Knotenmenge)

Es sei $\mathcal{T} = \{T_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}, \mathbf{t}_{i_3}\} | \mathbf{i} \in \mathcal{J}\}$ eine Triangulierung von $\mathcal{S} = \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_n\} \subset \mathbb{R}^2$. Jedem Eckpunkt $\mathbf{t}_i \in \mathcal{S}$ werden Knoten $\mathbf{t}_{i,0}, \dots, \mathbf{t}_{i,k}$ zugeordnet derart, daß

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{i,0} = \dots = \mathbf{t}_{i,k} = \mathbf{t}_i & \quad , \text{ falls } \mathbf{t}_i \in \partial[\mathcal{S}] \\ \mathbf{t}_{i,0} = \mathbf{t}_i \text{ und } \mathbf{t}_{i,\nu} \in [\mathcal{S}] & \quad , \nu = 1, \dots, k \quad , \text{ falls } \mathbf{t}_i \in \text{int}[\mathcal{S}] \end{aligned}$$

gilt. Dabei bezeichnet $\partial\mathcal{M}$ den Rand und $\text{int}\mathcal{M}$ das Innere einer Menge \mathcal{M} . Weiter gelte für alle $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3) \in \mathcal{J}$, daß

$$\mathbf{t}_{i_1, b_0}, \dots, \mathbf{t}_{i_3, b_2} \quad \forall \mathbf{b} = (b_0, \dots, b_2) \in \{0, \dots, k\}^3$$

affin unabhängig (vgl. Bemerkung 2.13) sind. Dann nennen wir

$$\mathcal{K}(\mathcal{T}) := \{\mathbf{t}_{i,\nu} | \mathbf{t}_i \text{ ist Eckpunkt von } \mathcal{T}, \nu = 0, \dots, k\}$$

eine Knotenmenge der Ordnung $k+1$ zur Triangulierung \mathcal{T} und jeden Punkt $\mathbf{t}_{i,\nu}$ einen Knoten.

Bemerkung 2.13 (affine Unabhängigkeit)

$\{\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ sind affin unabhängig genau dann, wenn $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

Definition 2.14 (bivariater normalisierter B-Spline) (vgl. [DMS92])

Sei $T_{\mathbf{i}} = \{\mathbf{t}_{i_1}, \mathbf{t}_{i_2}, \mathbf{t}_{i_3}\}$ ein Element der Triangulierung \mathcal{T} mit der zugeordneten Knotenmenge $\mathcal{K}(\mathcal{T})$. Dann ist der bivariate normalisierte B-Spline $(k+1)$ -ter Ordnung gegeben durch:

$$N_{\mathbf{i}, \mathbf{b}, k}(\mathbf{x}) := |d(X_{\mathbf{i}, \mathbf{b}})| \cdot M(\mathbf{x} | V_{\mathbf{i}, \mathbf{b}}).$$

Dabei gelten folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} X_{\mathbf{i}, \mathbf{b}} & := \{\mathbf{t}_{i_j, b_j} | j = 1, 2, 3\}, & |\mathbf{b}| & = k \\ V_{\mathbf{i}, \mathbf{b}} & := \{\mathbf{t}_{i_j, \nu} | \nu = 0, \dots, b_j; j = 1, 2, 3\}, & |\mathbf{b}| & = k \quad \text{und} \\ d(W) & := \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{pmatrix}, & W & = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} \subset \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

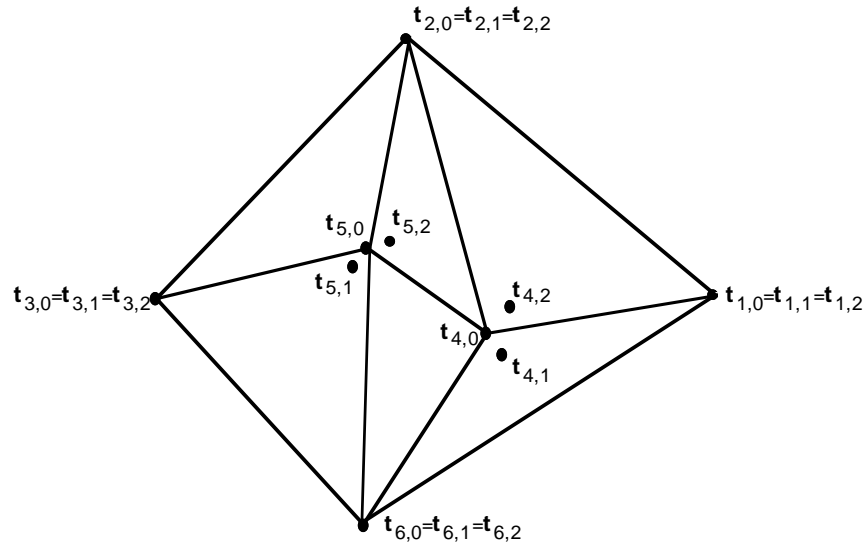
mit $|\mathbf{b}| := \|\mathbf{b}\|_1 = \sum_{i=1}^3 |b_i| = k$.

Bemerkung 2.15

1. \mathbf{i} zeigt also an, bzgl. welchem Element der Triangulierung der Spline definiert ist; \mathbf{b} bestimmt (in Verbindung mit \mathbf{i}) die Menge der Knoten aus $\mathcal{K}(\mathcal{T})$, und k gibt den Grad der stückweise polynomialen Funktion an.
2. Bei den Bezeichnungen bzgl. multivariater Splines ist Vorsicht geboten. Die hier als normalisierter Simplex-Spline bezeichnete Funktion wird in der Literatur z.B. oft lediglich Simplex-Spline oder auch multivariater B-Spline genannt.

Beispiel 2.16

Sei $T = \{\{t_2, t_3, t_5\}, \{t_3, t_6, t_5\}, \{t_6, t_4, t_5\}, \{t_6, t_1, t_4\}, \{t_1, t_2, t_4\}, \{t_2, t_5, t_4\}\}$ und $k = 2$. Die Knotenmenge sei wie im Bild dargestellt.



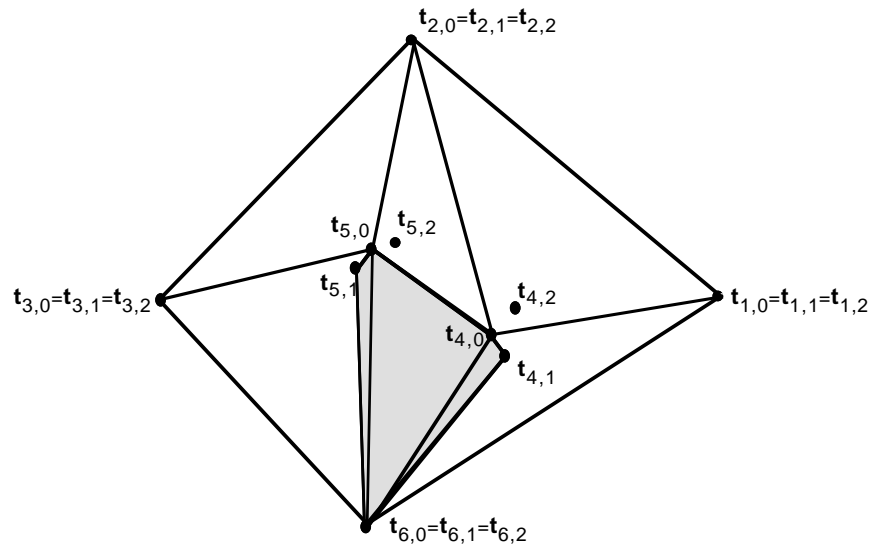
Dann gilt z.B.

$$X_{(6,4,5),(0,1,1)} = \{t_{6,0}, t_{4,1}, t_{5,1}\},$$

und der Träger von $N_{(6,4,5),(0,1,1),2}$ ergibt sich aus der konvexen Hülle von

$$V_{(6,4,5),(0,1,1)} = \{t_{6,0}, t_{4,0}, t_{4,1}, t_{5,0}, t_{5,1}\}$$

wie unten markiert.



Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den DMS-Spline definieren.

Definition 2.17 (DMS-Spline)

Sei eine Triangulierung $\mathcal{T} = \{T_i = \{t_{i_1}, t_{i_2}, t_{i_3}\} | i \in \mathcal{J}\}$ und eine zugeordnete Knotenmenge $\mathcal{K}(\mathcal{T})$ gegeben, sowie Gewichte $\alpha_{i,\mathbf{b}} \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{b} \in \{0, \dots, k\}^3$. Dann ist der DMS-Spline $(k+1)$ -ter Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} \sum_{|\mathbf{b}|=k} \alpha_{i,\mathbf{b}} N_{i,\mathbf{b},k}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Bemerkung 2.18

Man kann statt der Gewichte auch sogenannte Kontrollpunkte $\alpha_{i,\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ wählen und erhält somit eine parametrische Darstellung einer Spline-Fläche.

Viele der Eigenschaften univariater normalisierter B-Splines gelten auch für die multivariaten Verwandten.

Satz 2.19 (Eigenschaften bivariater normalisierter B-Splines)

1. *Lokaler Träger:* Es gilt:

$$N_{i,\mathbf{b},k}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \notin [V_{i,\mathbf{b}}].$$

2. *Positivität:* Es gilt:

$$N_{i,\mathbf{b},k}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \text{int}([V_{i,\mathbf{b}}]).$$

3. *Polynomialität:* $N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k}$ stimmt auf jedem Gebiet, das von keiner Strecke zweier Punkte aus $V_{\mathbf{i},\mathbf{b}}$ durchschnitten wird, mit einem Polynom vom gesamten Grad k überein.

4. *Partition der Eins:* Es gilt:

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}} \sum_{|\mathbf{b}|=k} N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k}(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in [\mathcal{S}].$$

5. *Lineare Unabhängigkeit:* Die normalisierten B-Splines $N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{i} \in \mathcal{J}$, $|\mathbf{b}| = k$) sind linear unabhängig über $[\mathcal{S}]$.

6. *Stetigkeit:* Sei $N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k}(\mathbf{x}) = |d(X_{\mathbf{i},\mathbf{b}})| \cdot M(\mathbf{x}|V_{\mathbf{i},\mathbf{b}})$ wie in Definition 2.14 gegeben, und für jede Kombination von d Knoten $\{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_d\} \subseteq V_{\mathbf{i},\mathbf{b}}$ ($d > 2$) gilt $\text{Vol}_2([\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_d]) > 0$. Dann gilt:

$$N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k} \in C^{k+2-d}(\mathbb{R}^2) = C^{k+2-d}(\mathbb{R}^2).$$

7. Die Greville-Abszissen seien wie folgt definiert:

$$\xi_{\mathbf{i},\mathbf{b}} := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^3 \sum_{\nu=0}^{b_j-1} \mathbf{t}_{i_j,\nu}, \quad \mathbf{i} \in \mathcal{J}, |\mathbf{b}| = k.$$

Somit ergeben sich weitere Eigenschaften:

(a) *Reproduktion linearer Funktionen:* Sei $l(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^t \cdot \mathbf{x} + b$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}$ gegeben, so gilt:

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}} \sum_{|\mathbf{b}|=k} l(\xi_{\mathbf{i},\mathbf{b}}) N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in [\mathcal{S}].$$

(b) *Konvexe-Hülle-Eigenschaft:* Es gilt für $f : [\mathcal{S}] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\left(\mathbf{x}, \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}} \sum_{|\mathbf{b}|=k} f(\xi_{\mathbf{i},\mathbf{b}}) N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k}(\mathbf{x}) \right) \in \left[\left\{ (\xi_{\mathbf{i},\mathbf{b}}, f(\xi_{\mathbf{i},\mathbf{b}})) \mid \mathbf{i} \in \mathcal{J}, |\mathbf{b}| = k \right\} \right] \\ \forall \mathbf{x} \in [\mathcal{S}].$$

Beweis: Die Aussagen 1 - 3 folgen sofort aus den Definitionen 2.7 und 2.14. Beweise zu den Aussagen 4, 5 und 7a findet man in [DMS92], zu Aussage 6 in einer Arbeit von Dahmen und Micchelli [DaM83] sowie zu Aussage 7b in [Wen93]. In [DMS92] und [Wen93] sind die Voraussetzungen an die zugeordnete Knotenmenge zwar noch stärker, durch lediglich kleine Modifikationen kann man dennoch analog die gewünschten Beweise erhalten. ■

2.2 Approximation mit DMS-Splines

Wir wollen versuchen, den DMS-Spline zur Approximation zu nutzen. Seien dazu Daten

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_l\} \subset \mathbb{R}^2$$

gegeben sowie Funktionswerte in den Daten $f(\mathbf{d}_i) \in \mathbb{R}$, welche zu approximieren sind. Zunächst stellt sich die Frage, was notwendig ist, um einen DMS-Spline darzustellen. Dazu betrachten wir dessen Definition:

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}} \sum_{|\mathbf{b}|=k} \alpha_{\mathbf{i}, \mathbf{b}} N_{\mathbf{i}, \mathbf{b}, k}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Es sind (bei gegebenem Grad k) offensichtlich drei Schritte zu vollziehen:

1. Bestimmung einer Triangulierung,
2. Bestimmung einer zugeordneten Knotenmenge und
3. Bestimmung der Koeffizienten $\alpha_{\mathbf{i}, \mathbf{b}}$.

2.2.1 Zur Triangulierung

Es stellt sich zunächst die Frage nach der Gestalt der Triangulierung. Naheliegender wäre es, eine Triangulierung $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ der Daten zu erstellen. So verfährt man z.B. auch bei Interpolation durch eine Bernstein-Bézier-Darstellung. Bei DMS-Splines ist es allerdings nicht sinnvoll, da unnutzbare Freiheitsgrade entstünden, und die Darstellung viel komplizierter ausfiele als bei einer Bernstein-Bézier-Auswertung über Dreiecken. Eine Triangulierung der Daten besteht aus besonders vielen Dreiecken. Wir wollen uns mit weniger zufrieden geben und auch auf die Forderung nach Interpolation verzichten, welche wir nur im speziellen erreichen werden, z.B. wenn in $[V_{\mathbf{i}, \mathbf{b}}]$ (vgl. 2.14) genau k zu approximierende Werte der Daten aus \mathcal{D} liegen, so wird in diesen interpoliert.

Dieser Verzicht kann sich insbesondere bei großen Mengen zu approximierender Werte bezahlt machen, da sich der Aufwand aufgrund einer geringeren Menge an Dreiecken verringert.

Wir werden uns einer zunächst ganz allgemeinen Triangulierung $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ bedienen, welche alle Daten $\mathbf{d}_i \in \mathcal{D}$ überdeckt, d.h.

$$\mathcal{D} \subset [\mathcal{S}].$$

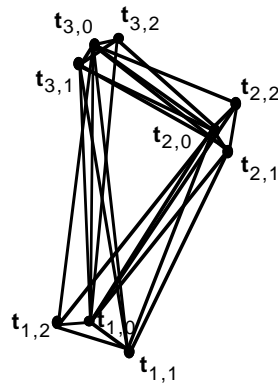
Die Anforderungen an die Menge \mathcal{S} und an die Triangulierung $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ werden wir noch unter 2.2.3 herausarbeiten.

2.2.2 Zur Knotenmenge

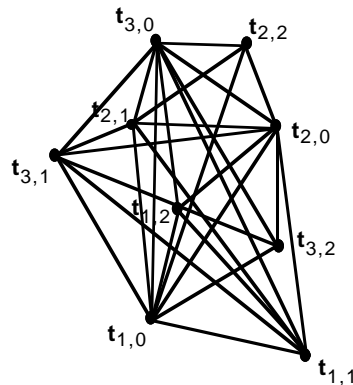
Angenommen wir haben eine Triangulierung gefunden, so fehlt uns noch die zugeordnete Knotenmenge

$$\mathcal{K}(\mathcal{T}) = \{t_{i,\nu} | t_i \text{ ist Eckpunkt von } \mathcal{T}, \nu = 0, \dots, k\}.$$

Diese bestimmt sowohl den Grad des Splines als auch die Ordnung der Stetigkeit. Oft geht man davon aus, daß die Knoten $t_{i,\nu}$ ($\nu = 1, \dots, k$) sehr nahe am Knoten $t_{i,0}$ liegen und somit hauptsächlich dem Erlangen eines maximalen Stetigkeitsgrades dienen (vgl. Satz 2.19 6.).



Man spricht von einer Knotenwolke. Eine solche Wahl hat auch den Vorteil, daß sich die Komplexität der Auswertung der Splines im Gegensatz zu einer allgemeineren Wahl der zugeordneten Knoten verringert (vgl. [Hus98]). Auf diese Art entstehen viele kleine und wenige große Gebiete, auf denen der Spline mit einem Polynom vom Grad k übereinstimmt (vgl. auch Satz 2.19 3.). Wählen wir die zugeordneten Knoten hingegen so, daß die Größe der polynomialen Gebiete weniger stark differiert, dann hinterläßt die Gestalt des Approximanten meist einen homogenen Eindruck.



2.2.3 Zu den Gewichten

Sei nun sowohl die Triangulierung als auch die zugeordnete Knotenmenge gegeben. Es fehlen zur Darstellung des DMS-Splines (vgl. 2.1) also nur noch die Gewichte. Der naheliegendste Ansatz zu deren Bestimmung ist ein Least-Square-Verfahren. Sei zur Vereinfachung

$$DMS(\mathbf{d}_i) := \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}} \sum_{|\mathbf{b}|=k} \alpha_{\mathbf{i},\mathbf{b}} N_{\mathbf{i},\mathbf{b},k}(\mathbf{d}_i) \quad \forall \mathbf{d}_i \in \mathcal{D}.$$

mit

$$\mathcal{J} = \{\mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_m\}.$$

Somit gilt es

$$\sum_{i=1}^l (DMS(\mathbf{d}_i) - f(\mathbf{d}_i))^2 = \text{Min}$$

zu lösen.

Die Größe der zu behandelnden Matrizen hängt von der Anzahl der gegebenen Daten, der Größe der Triangulierung und dem Grad des Splines ab. Das folgende Lemma gibt Auskunft darüber, inwiefern der Grad der Splines einget.

Lemma 2.20 (Anzahl an bivariaten normalisierten B-Splines pro Dreieck der Triangulierung im DMS-Spline)

Es gibt $\binom{k+2}{k}$ verschiedene 3-Tupel mit Einträgen aus $\{0, \dots, k\}$ (mit Wiederholungen) deren Summe der Einträge genau k ist.

Beweis: Findet sich in [Hus98]. ■

Setzen wir nun $\binom{k+2}{k} = \kappa$, so können wir das i.allg. überbestimmte System wie folgt schreiben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_1) \dots N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_1) \dots N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_1) \dots N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_l) \dots N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_l) \dots N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_l) \dots N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_l) \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_1} \\ \vdots \\ \alpha_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_\kappa} \\ \vdots \\ \alpha_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_1} \\ \vdots \\ \alpha_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_\kappa} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{d}_1) \\ \vdots \\ f(\mathbf{d}_l) \end{pmatrix}.$$

Eine eindeutige Lösung des Minimierungsproblems existiert, falls A vollen Rang hat (vgl. Schaback und Werner [ScW92] S. 73)

$$rg(A) = m \cdot \kappa \leq l.$$

Ist das obige Gleichungssystem exakt zu lösen, erhalten wir einen Interpolanten.

$\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_\kappa}, \dots, \alpha_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_1}, \dots, \alpha_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_\kappa})$ ist genau dann die Lösung, wenn $\boldsymbol{\alpha}^*$ die Gleichung

$$A^T A \boldsymbol{\alpha}^T = A^T \mathbf{f}^T \tag{2.2}$$

mit $\mathbf{f} = (f(\mathbf{d}_1), \dots, f(\mathbf{d}_l))$ löst.

$A^T A$ ist sogar positiv definit, sofern A vollen Rang hat (vgl. Schwarz [Shw93] S. 297).

Betrachten wir zunächst DMS-Splines, bei denen die Träger der einzelnen normalisierten B-Splines minimal sind. Minimale Träger erreichen wir, wenn die Knotenmenge wie folgt gewählt wird:

$$\mathbf{t}_{i,0} = \dots = \mathbf{t}_{i,k} = \mathbf{t}_i \quad \forall \mathbf{t}_i \in \mathcal{S}.$$

Also ist jeder Knoten mit dem Punkt der triangulierten Menge, dem er zugeordnet ist, identisch. Die Träger des B-Splines $N_{\mathbf{i}, \mathbf{b}}$ werden auf diese Weise minimal, da sie mit dem Dreieck, das durch \mathbf{i} festgelegt ist, identisch sind, und dieses immer zum Träger gehört.

O.B.d.A. seien die Daten nun so geordnet, daß die ersten sich im ersten Dreieck befinden, die danach im zweiten, etc.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{l_1} &\in [T_1] \\ &\vdots \\ \mathbf{d}_{l_{i-1}+1}, \dots, \mathbf{d}_{l_i} &\in [T_i] \\ &\vdots \\ \mathbf{d}_{l_{m-1}+1}, \dots, \mathbf{d}_{l_m} = \mathbf{d}_l &\in [T_m]. \end{aligned}$$

A hat dann etwa folgende Gestalt:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|ccc|ccc} N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_1) & \dots & N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_1) & 0 & \dots & 0 & & & & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & & & & \vdots & \vdots & \\ N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_{l_1}) & \dots & N_{\mathbf{i}_1, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_{l_1}) & 0 & \dots & 0 & & & & & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & \\ \hline & & \vdots & & & \ddots & & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ \hline & & 0 & \dots & 0 & & & 0 & \dots & 0 & N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_{l_{m-1}+1}) & \dots & N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_{l_{m-1}+1}) & & \\ \vdots & \vdots & & & & \dots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & & & & & 0 & \dots & 0 & N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_1}(\mathbf{d}_{l_m}) & \dots & N_{\mathbf{i}_m, \mathbf{b}_\kappa}(\mathbf{d}_{l_m}) & & \end{array} \right)$$

Wir erhalten eine Blockmatrix. Auf der Diagonalen der Blockmatrix sind Blöcke mit Werten der bivariaten normalisierten B-Splines in den Daten. Auf den anderen Positionen sind Blöcke, die hauptsächlich Nullen als Einträge haben, da die dort behandelten Daten i.allg. nicht in den Trägern der dort behandelten B-Splines liegen. Von Null verschiedene Einträge können nur entstehen, wenn Daten auf dem Rand der Dreiecke der Triangulierung vorkommen. Die Blöcke außerhalb der Diagonalen können aber nie vollen Rang haben.

Leicht einzusehen ist nun, daß für den vollen Rang $m \cdot \kappa$ der Matrix jeder Block auf der Diagonalen vollen Rang κ haben muß. Notwendig dafür ist in erster Linie, daß in jedem Dreieck $[T_i]$ der Triangulierung die Anzahl $l_i - l_{i-1}$ der Daten größer oder gleich κ ist. Da die Träger der B-Splines aufgrund der Wahl der zugeordneten Knotenmenge minimal waren, können wir nun (bei minimal κ Daten) unabhängig von der Gestalt der zugeordneten Knotenmenge sagen, daß kein normalisierter B-Spline des DMS-Splines zuwenig Daten im Träger hat.

Da die normalisierten B-Splines über dem triangulierten Gebiet linear unabhängig sind haben wir es nun – in der Regel – mit einem regulären Ausgleichsproblem zu tun und somit lediglich das Gleichungssystem (2.2) zu lösen.

In Ausnahmefällen kann es aufgrund der Geometrie der Daten zu einer singulären Problemstellung kommen. Liegen beispielsweise bei der oben angesprochenen zugeordneten Knotenmenge in einem Dreieck alle Daten auf der Kurve eines Polynoms in zwei Variablen von der Ordnung k , so wird der Block bzgl. dieses Dreiecks in der (ebenfalls oben angegebenen) Blockmatrix nicht vollen Rang besitzen (vgl. hierzu Beresin und Shidkow[BSh70]). In diesen Fällen sei z.B. auf Lorentz [Lor91] verwiesen, wo singuläre Interpolationsprobleme ausführlich behandelt werden.

2.3 Beispiele zur Approximation

Es werden nun ein paar Beispiele gezeigt, die das Approximationsverhalten veranschaulichen sollen. Zum einen wird auf die Reproduktion von Polynomen eingegangen, womit wir auch gleichzeitig die Approximationsordnung behandeln. Zum anderen betrachten wir das Verhalten anhand der Franke-Funktion:

$$\begin{aligned} \text{Franke}(x, y) = & 0.75 e^{\frac{-(1+9x)^2}{49} + \frac{-1-9y}{10}} - 0.2 e^{-(-4+9x)^2 - (-7+9y)^2} \\ & + 0.5 e^{\frac{-(-2+9x)^2 - (-3+9y)^2}{4}} + 0.75 e^{\frac{-(-2+9x)^2 - (-2+9y)^2}{4}} . \end{aligned}$$

Die Beschriftungen der Achsen in den Bildern ergeben sich aufgrund der Tatsache, daß die Funktionen auf einem 16×16 -Gitter ausgewertet wurden.

Beispiel 2.21 (Reproduktion von Polynomen)

In [Wen93] werden Aussagen zur Reproduktion von Polynomen durch DMS-Splines gemacht. Demnach reproduziert das hier vorgestellte Verfahren, falls das

in 2.2.3 beschriebene Least-Square-Problem regulär ist, bei Verwendung eines DMS-Splines $(k+1)$ -ter Ordnung Polynome vom Grad k . Das Verfahren hat somit die Approximationsordnung $k + 1$. Das ist insofern zu erwarten gewesen, da es sich beim DMS-Spline um eine stückweise polynomiale Funktion vom Grad k handelt.

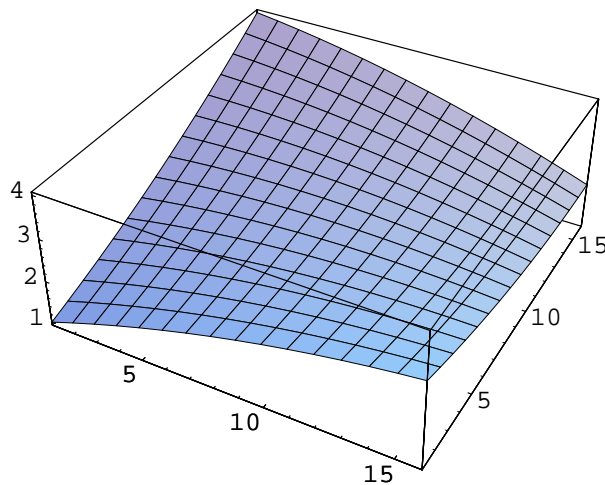
1. Es soll das Polynom

$$p(x, y) = 1 + 2x + 3y - 4xy + x^2 - y^2$$

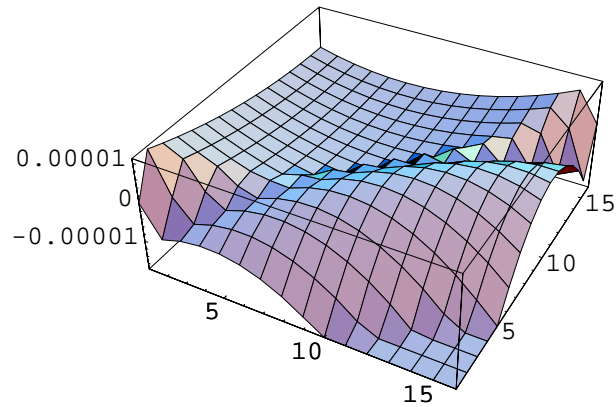
auf dem Einheitsquadrat durch einen DMS-Spline der Ordnung $k = 3$ approximiert werden. Dazu wurden 15 Daten im Einheitsquadrat zufällig generiert, die Triangulierung berechnet, als Knotenmenge die triviale

$$\mathbf{t}_{i,0} = \mathbf{t}_{i,1} = \mathbf{t}_{i,2} \quad \forall i$$

zugeordnet und dann per Least-Square-Verfahren die Gewichte bestimmt. Der Graph des Polynoms sieht wie folgt aus:



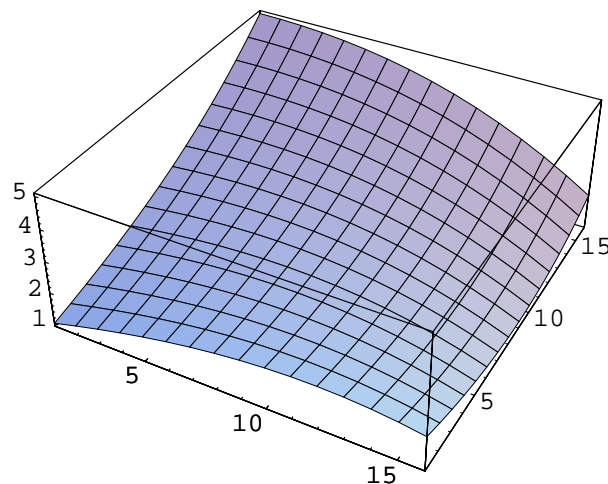
Zum approximierenden DMS-Spline sieht man keine Unterschiede, was die Fehlerfunktion im Bild unten noch einmal verdeutlicht. Die Fehler in dieser Größe lassen sich auf Rechenungenauigkeiten zurückführen, da die berechneten Gewichte auf die 5. Stelle hinter dem Komma gerundet wurden.



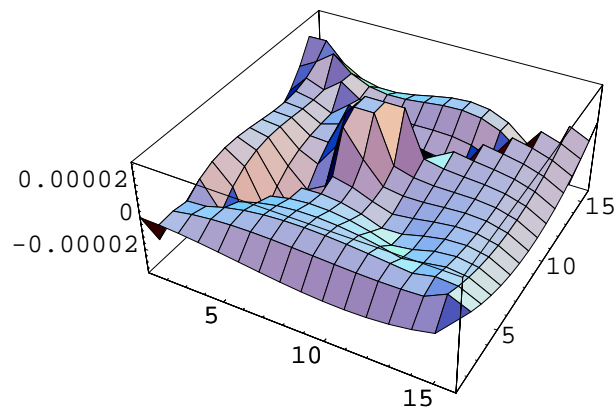
2. Als zweites Beispiel soll noch ein Polynom vom Grad $k = 3$ approximiert werden. Hier greifen wir analog auf einen DMS-Spline vom Grad 3 (Ordnung 4) zurück. Er reproduziert natürlich auch. Das Polynom ist gegeben durch

$$p(x, y) = 1 + 2x + 3y - 4xy + x^2 - y^2 + x^3 - y^3 + x^2y - xy^2.$$

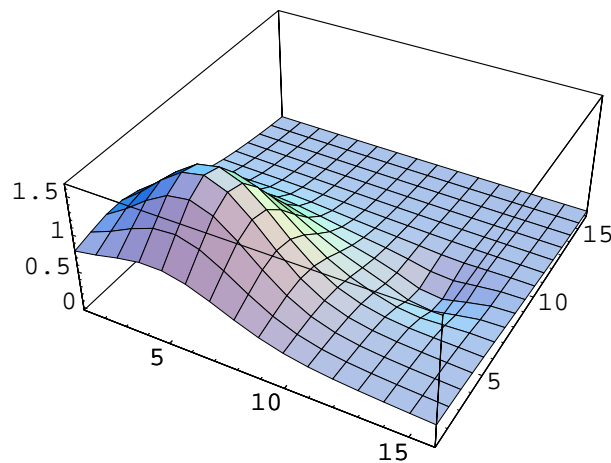
Diesmal wurde mit Hilfe von 50 zufällig generierten Daten auf dem Einheitsquadrat operiert. Das Polynom sowie der approximierende DMS-Spline haben folgende Gestalt:



Es ergibt sich erneut eine Fehlerfunktion mit Werten, die sich auf Rechenungenauigkeiten zurückführen lassen.



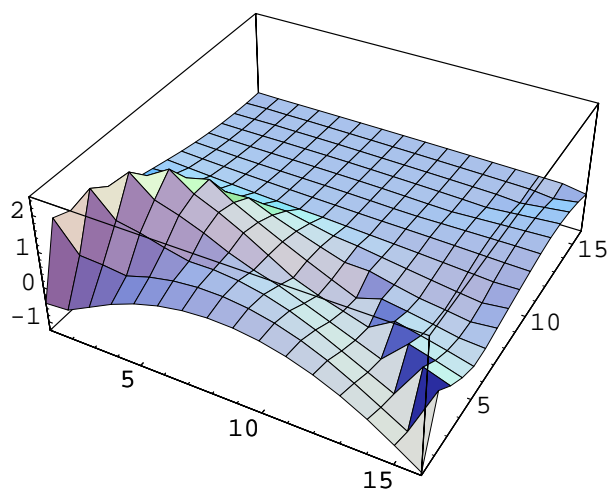
Kommen wir nun zur Franke-Funktion, die die folgende Gestalt hat und bereits zu Anfang des Abschnitts definiert wurde:



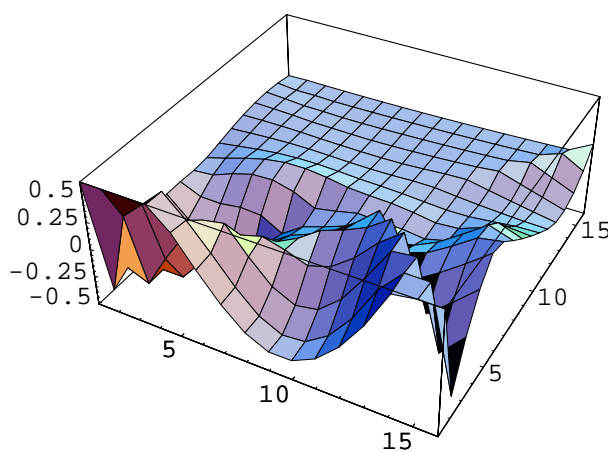
Beispiel 2.22 (Franke-Funktion)

Eine wichtige Funktion zum Testen von Scattered-Data-Approximationsverfahren ist die Franke-Funktion. Sie beinhaltet viele geometrische Merkmale (lokales Minimum/Maximum oder Bereiche mit fast konstanten Werten) und wird daher häufig verwendet. Zu dieser Funktion gibt es drei Sätze von Testdaten (mit 25, 33 und 100 Daten). Mit allen dreien werden wir den DMS-Spline bzgl. der Approximation testen. Eine Diskussion folgt im Anschluß. Die zugeordnete Knotenmenge wurde nach Möglichkeit gleichmäßig und weiträumig verteilt, wie in 2.2.2 kurz diskutiert, um eine möglichst homogene Fläche zu erhalten.

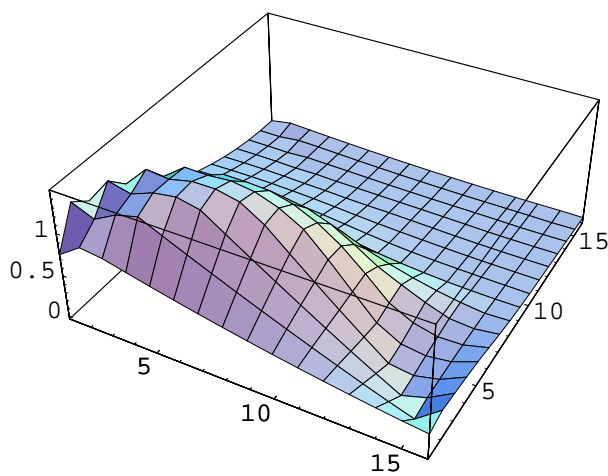
1. Bei 25 Daten und Grad $k = 2$ ergibt sich folgender Approximant



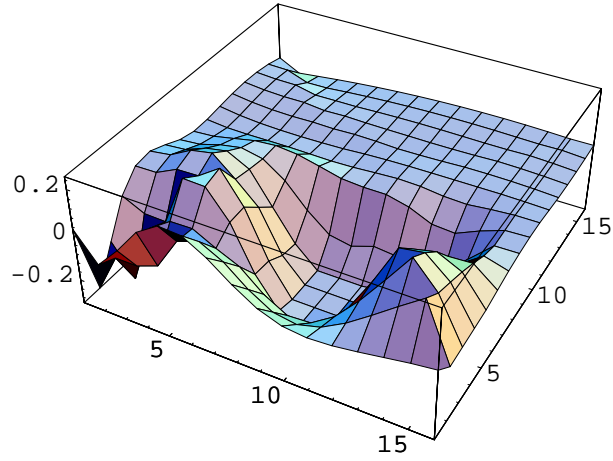
und daraus die Fehlerfunktion



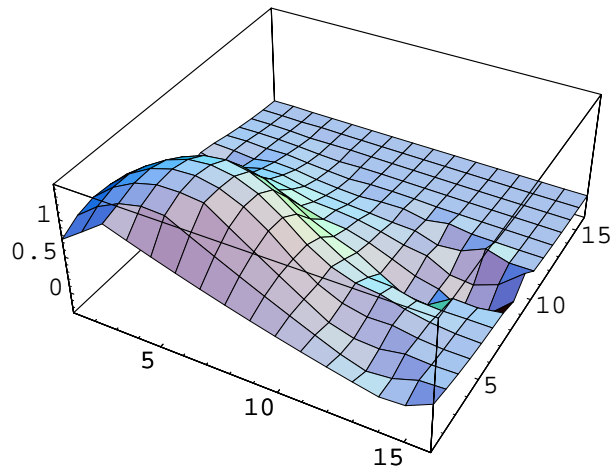
2. Bei 33 Daten und Grad $k = 2$ ergibt sich folgender Approximant



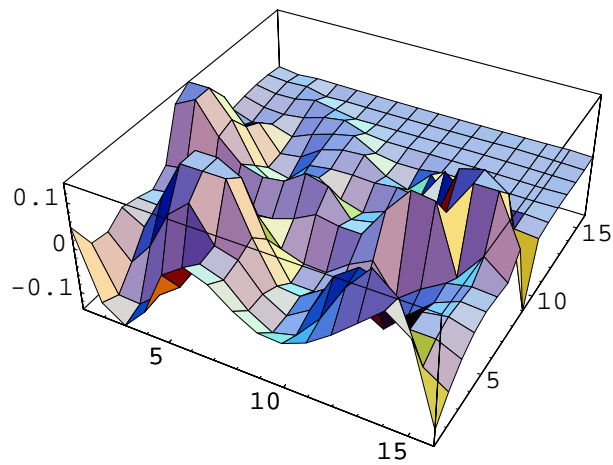
und daraus die Fehlerfunktion



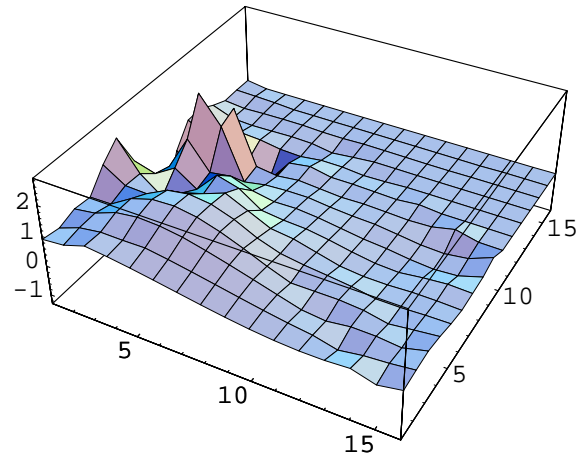
3. Bei 100 Daten und Grad $k = 2$ ergibt sich folgender Approximant



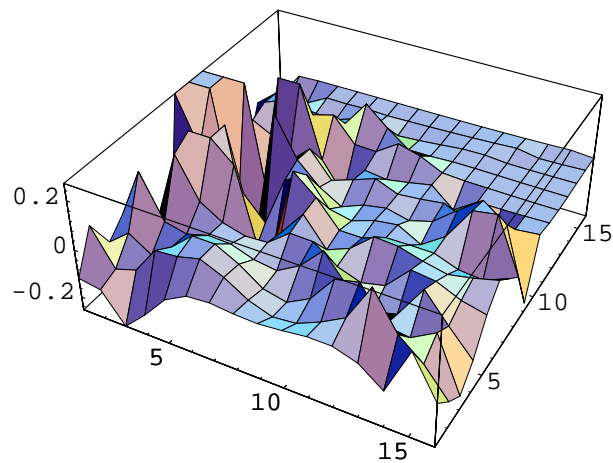
und daraus die Fehlerfunktion



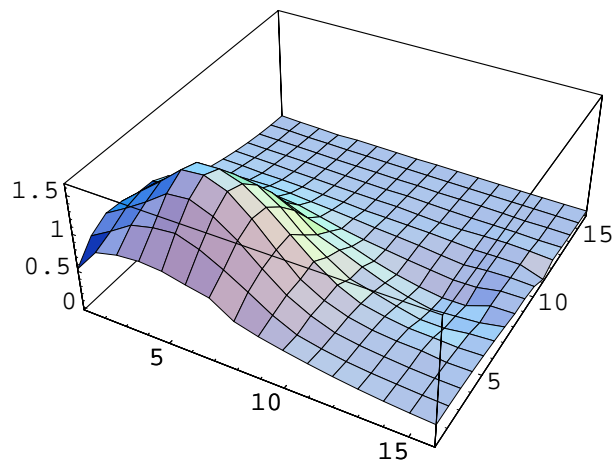
4. Bei 100 Daten und Grad $k = 3$ ergibt sich folgender Approximant



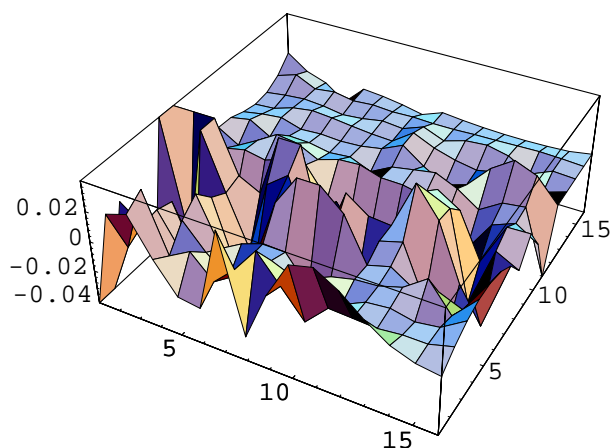
und daraus die Fehlerfunktion



5. Ein weiterer Approximationsversuch wurde unternommen und zwar mit dem 100 Daten-Satz und weiteren 200 Daten, die zufällig im Einheitsquadrat erzeugt wurden. Es ergab sich folgender Approximant



und daraus die Fehlerfunktion



Man kann an dieser Reihe von Beispielen einiges erkennen. Was klar ist, ist daß durch mehr Daten die Funktion immer besser approximiert wird. Mit der visuellen Approximation können wir allerdings nicht zufrieden sein, da andere Verfahren bei den gleichen Daten-Sätzen durchaus bessere Ergebnisse liefern. Das liegt daran, daß die Form der Funktion erst durch Polynome hohen Grades *annähernd* erreicht werden kann oder aber durch viele kleine *Patches*. Dafür stehen allerdings zu wenig Daten zur Verfügung. Betrachten wir die Approximation nur diskret in den Daten, so sehen wir, daß durch das Verfahren durchweg gute Ergebnisse erreicht werden. Beim 25-Daten-Satz ergibt sich ein maximaler relativer Fehler von 0.8 % :

$$\max_{1 \leq i \leq 25} \left| 1 - \frac{DMS(\mathbf{d}_i)}{Franke(\mathbf{d}_i)} \right| = 0.008$$

und eine durchschnittliche relative Abweichung von 0.006 % . Die visuellen Defizite kommen bei Betrachtung des sogenannten *RMS-Fehlers* (root-mean-square)

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{nm} [f(x_i) - DMS(x_i)]^2}$$

zum Ausdruck, welcher im allgemeinen über einem $n \times m$ -Gitter (hier mit $n = m = 33$) berechnet wird (vgl. Hoschek und Lasser [HoL93]). Er beträgt $RMS = 0.41013$ bei dem 25-Daten-Satz und der vorgestellten Approximationsmethode. Die *Surface-Spline*-Methode von Harder und Desmarais [HaD72] beispielsweise erreicht bei dem gleichen Datensatz und der gleichen Testfunktion einen RMS-Fehler von 0.03480 (vgl. Franke und Nielson [FrN91]).

Weiter zu erkennen ist, daß gerade an den Übergängen der polynomialen Bereiche des Approximanten immer wieder extreme Abweichungen entstehen. Das

passiert insbesondere, wenn in unmittelbarer Nähe keine Daten mit zu approximierenden Werten mehr liegen. Durch die Least-Square-Methode zur Bestimmung der Koeffizienten des DMS-Splines wird eben nur auf den absoluten Fehler in den Daten geachtet, nicht aber auf die Gestalt des Approximanten.