Hybride Zeitbereichsmethoden zur feldorientierten Berechnung zeitinvarianter Modelle von Funkkanälen in Gebäuden

Vom Fachbereich Elektrotechnik der
Gerhard–Mercator–Universität – Gesamthochschule Duisburg

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktor–Ingenieurs

genehmigte Dissertation

von

Dipl. – Ing. Andreas Lauer

aus

Duisburg

Referent: Prof. Dr. – Ing. Ingo Wolff
Korreferent: Prof. Dr. – Ing. Heinrich Brakelmann

Tag der mündlichen Prüfung : 09.07.1998

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Vorbetrachtungen zu Inhaus–Kanalmodellen

1.1 Einleitende Bemerkungen

Seit ca. 1980 findet ein rasanter Fortschritt in der Miniaturisierung elektronischer Schaltungen durch monolithische und hybride Integration statt [1]. Somit wird es immer interessanter, kostengünstige miniaturisierte Funkgeräte für verschiedene Kommunikationszwecke auch in Gebäuden einzusetzen.

Zu erwähnen sind hier vor allem moderne Funktelefone. Im D–Netz mit Trägerfrequenzen bei 900 MHz und E–Netz bei 1800 MHz arbeiten Geräte, die meist mit Basisstationen außerhalb des Gebäudes kommunizieren. Zudem gibt es sogenannte Schnurlos–Telefone, zum Beispiel nach dem DECT–Standard bei 1800 MHz mit gebäudeinternen Basisstationen.

Zunehmend werden auch Funkstrecken zur Datenübertragung in Gebäuden eingesetzt. Neben mobiler industrieller Datenerfassung und Robotersteuerung sind hier auch Anwendungen in privaten Haushalten zu nennen, beispielsweise die Fernablesung von Heizkostenzählern. Wegen geringer Datenrate kann man hier auf niedrige Frequenzen, z. B. um 400 MHz zurückgreifen. Außerdem entwickelt man ”wireless LANs”, drahtlose Computernetzwerke, die aufgrund der erforderlichen Bandbreite bei hohen Frequenzen, z. B. 17 GHz arbeiten.

Funkübertragung in Gebäuden ist keineswegs unkritisch. Neben gewollten und unbeabsichtigten elektromagnetischen Emissionen stört vor allem die Streuung des elektromagnetischen Feldes an verschiedenartigen Objekten, die in Gebäuden und deren Umgebung in hoher Dichte vorhanden sind.

Aussage 1.1 *Gute Ausnutzung gebäudeinterner Funkübertragungsstrecken erfordert aufgrund kritischer Ausbreitungsbedingungen infolge zeitvarianter Streuung der Funkwellen an verschiedenartigen Objekten genaue Untersuchungen.*

1.2 Substanz und Nutzen linearer Funkkanalmodelle

Zur Beschreibung von Funkübertragungsstrecken benutzt man Kanalmodelle. Es ist zweckmäßig, die Antennen dem Funkkanal zuzurechnen und die Schnittstellen des Kanalmodells in Form von Eingangs– und Ausgangsgrößen an den genau zu definierenden Antennenanschlüssen zu wählen. Bild 1.1 zeigt schematisch den Funkkanal mit n voneinander unabhängigen Funkgeräten G_1 bis G_n, die jeweils eine Antenne besitzen. Es wird zunächst nicht zwischen Sendern und Empfängern unterschieden. Mathematisch läßt sich dieser Funkkanal sehr allge-

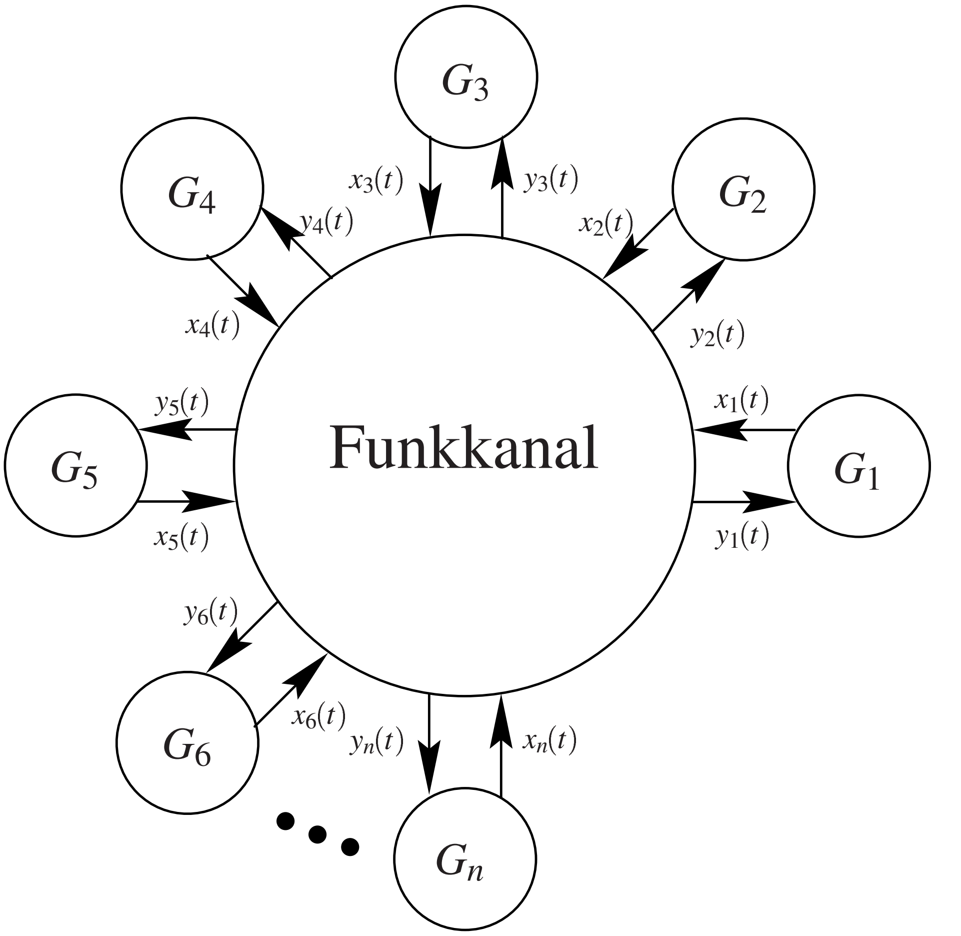

Bild 1.1. Der Funkkanal mit Systemumgebung.

mein durch einen Operator $\mathcal{F} : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n) \to (\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$ beschreiben mit

$$\mathbf{y}(t) = \mathcal{F}(\mathbf{x}(t)). \tag{1.2.1}$$

Der Eingangsvektor $\mathbf{x}(t)$ und der Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ sind zeitabhängige Spaltenvektoren mit den Komponenten x_ν bzw. y_ν, $\nu \in \{1, 2, 3..n\}$.

Da die auftretenden elektrischen und magnetischen Feldstärken sehr klein sind, kann der Kanal als linear angesehen werden. Unter Voraussetzung von Kausalität wird so allgemein

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}(t)) = \int_0^\infty \mathbf{h}(t,\tau)\,\mathbf{x}(t-\tau)\,d\tau. \tag{1.2.2}$$

Die Impulsantwort des nunmehr linearen zeitvarianten vektorwertigen Kanalmodells stellt $\mathbf{h}(t,\tau) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ dar.

Aussage 1.2 *Unter einem idealen linearen zeitvarianten Kanalmodell wird eine vektorwertige lineare Abbildung eines zeitabhängigen Eingangsvektors auf einen zeitabhängigen Ausgangsvektor verstanden, die den realen Funkkanal genau und deterministisch beschreibt. Es ist durch seine matrixwertige zeitabhängige Impulsantwort vollständig definiert.*

Das Modell ist allgemeiner, als es zunächst erscheint. So lassen sich zur Behandlung von Geräten mit mehr als einer Koppelstelle zum Funkfeld mehrere Eingangs und/oder Ausgangsgrößen zusammenfassen.

Häufig werden Kanalmodelle definiert, die additive Störungen $n(t)$ zulassen [2]. Die Störungen können hier als Funkgerät G_s aufgefaßt werden, welches für die Kanaleingangsgröße $x_\mathrm{s}(t) = n(t)$ sorgt, die ggf. eine Realisierung eines Zufallsprozesses sein kann.

Obiges Kanalmodell findet Verwendung beispielhafter und konkreter Art. Das Ziel konkreter Verwendung ist es, die Funkübertragung in wirklichen Gebäuden genau zu beschreiben. Dies ist vor allem bei der Installationsplanung von Funkanlagen von praktischem Nutzen. Will man das Kanalmodell jedoch im Zuge der Entwicklung von Funkgeräten (Hochfrequenzteil und Software) heranziehen oder allgemein Übertragungsverfahren entwickeln und testen, so genügt es, ein Kanalmodell für ein hypothetisches Gebäude zu verwenden, welches beispielhaft ausgewählt wird.

Aussage 1.3 *Konkrete Verwendung erfordert Kanalmodelle für wirkliche Gebäude. Zur beispielhaften Verwendung genügen manuell oder zufällig ausgewählte, hypothetische Kanalmodelle.*

Bisher wurde nicht die Gewinnung des Kanalmodells, d. h. die Bestimmung der Kanalimpulsantwort $\mathbf{h}(t,\tau)$ beschrieben.

Aussage 1.4 *Die Gewinnung von idealen zeitvarianten konkreten Kanalmodellen ist ein nichtkausaler Vorgang.*

Dies ist ein prinzipielles Problem bei der Vorhersage von Kanaleigenschaften, das von der Zeitvarianz des Funkkanals herrührt.

Bei der Berechnung konkreter Kanalimpulsantworten treten weitere prinzipielle Schwierigkeiten auf, da Geometrie und Materialzusammensetzung der Streuer oft nicht genau genug bekannt sind und sich für verborgene Strukturen (z. B. Stahlkonstruktionen in Betondecken, Feinstruktur von Menschen) auch nicht ermitteln lassen, ohne die Struktur zu zerstören.

1.3 Lineare Kanalmodelle in der Praxis

1.3.1 Zeitinvariante Kanalmodelle

Das Problem von Aussage 1.4 umgeht man in der Praxis, indem der Kanal zunächst als zeitinvariant angesehen wird. Ihm wird eine zeitinvariante Kanalimpulsantwort $\mathbf{h}(\tau)$ zugeordnet. Wegen der geringen Geschwindigkeit, mit der sich die Funkgeräte und die Streuer im Gebäude bewegen[1], fällt die damit verbundene Vernachlässigung des Dopplereffekts nur in Sonderfällen ins Gewicht.

Benötigt man ein zeitvariantes Kanalmodell, z. B. zum Test eines Handover–Verfahrens, ermittelt man zunächst für verschiedene Beispielkonfigurationen endlich viele zeitinvariante Kanalimpulsantworten. Diese lassen sich zu einer zeitvarianten Kanalimpulsantwort überlagern, die Gewichte werden beispielsweise mit einem zeitabhängigen Zufallsverfahren bestimmt.

Aussage 1.5 *Für einen Großteil der praktischen Verwendungszwecke genügen zeitinvariante Kanalmodelle, die für verschiedene Beispielkonfigurationen vorliegen.*

Ferner wird man Geometrie und Materialeigenschaften bei der Berechnung von Kanalmodellen aus Gründen des Datenbeschaffungs– und Rechenaufwands nur sehr stark vereinfacht berücksichtigen können. Vielfach werden Objekte (z. B. Möbel, Personen, Heizkörper, Streuer außerhalb des Gebäudes) einfach weggelassen. Die meisten Berechnungsverfahren benutzen außerdem nur pauschale oder sehr stark vereinfachte Modelle der Funkwellenausbreitung.

[1] Mit Ausnahme am Gebäude vorbeifahrender Automobile oder Züge. Ein sich mit 50 km/h bewegender Reflektor kann aufgrund des Dopplereffekts eine maximale Frequenzverschiebung von ca. 100 Hz bei einer Trägerfrequenz von 1 GHz bewirken.

1.3.2 Skalare Kanalmodelle

In der Literatur wird selten ein matrixwertiges Kanalmodell benutzt. Meist wird eine skalarwertige Impulsantwort $h(t,\tau)$ betrachtet [2, 3], die die Komponente $h_{\mu,\nu}(t,\tau)$ der matrixwertiges Kanalimpulsantwort $\mathbf{h}(t,\tau)$ darstellt. Dabei wird der Einfluß aller Funkgeräte (außer G_μ und G_ν) als Streuer vernachlässigt.

Aussage 1.6 *In der Praxis werden meist Funkkanäle mit zwei Funkgeräten, einem Sender G_ν und einem Empfänger G_μ, und der skalaren Kanalimpulsantwort $h(t,\tau)$ untersucht. Diese bildet näherungsweise das Element $h_{\mu,\nu}(t,\tau)$ der matrixwertigen Kanalimpulsantwort $\mathbf{h}(t,\tau)$ für n Funkgeräte.*

Die Kanalimpulsantwort reagiert sehr empfindlich auf Änderungen der Antennenstandorte (Fast Fading). Daher wird oft eine über benachbarte Antennenstandorte gemittelte Kanalimpulsantwort angegeben.

1.3.3 Kanalmodelle im Basisband

Vielfach wird dem Kanal ein idealisierter Hochfrequenzteil des Senders und Empfängers, bestehend aus zwei idealen Modulatoren und einem idealen Tiefpaß nach Bild 1.2 zugerechnet. Dann spricht man von einer Kanalimpulsantwort

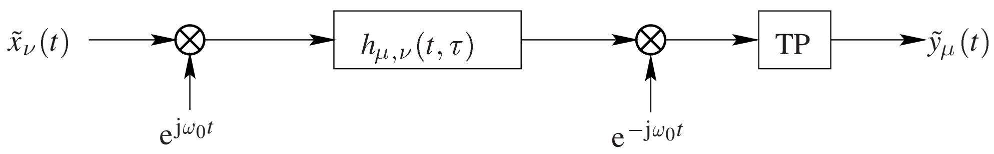

Bild 1.2. Der Basisbandkanal.

$\tilde{\mathbf{h}}(t,\tau)$ im Basisband mit dem Vektor der Eingangsgrößen $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ und dem Ausgangsvektor $\tilde{\mathbf{y}}(t)$. Mit der Tiefpaßgrenzkreisfrequenz ω_{g} und der Trägerkreisfrequenz ω_0 ist

$$\tilde{\mathbf{h}}(t,\tau) = \frac{\omega_{\mathrm{g}}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{si}\,(\omega_g(\tau-\zeta))\,\mathbf{h}(t-\tau+\zeta,\zeta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0\zeta}\,d\zeta. \tag{1.3.1}$$

Aussage 1.7 *Die Basisbandimpulsantwort $\tilde{\mathbf{h}}(t,\tau)$ ist komplexwertig und wegen des idealen Tiefpasses nichtkausal. Ist die Impulsantwort zeitinvariant, so ist auch die Basisbandimpulsantwort zeitinvariant.*

Für Abschätzungen wird oft auch nur der Betrag der Fouriertransformierten der zeitinvarianten Basisbandkanalimpulsantwort $\tilde{h}(\omega)$ für $\omega = 0$ ermittelt [4, 5]. Dies entspricht einer monofrequenten Betrachtung und wird im folgenden als Empfangsstärke bezeichnet.

1.3.4 Diskrete Kanalmodelle

Für einfache Anwendungszwecke kann ein diskretes Kanalmodell Verwendung finden [2, 6]. Hier besteht die Basisbandimpulsantwort aus einer Abfolge gewichteter Diracfunktionen. Der Tiefpaß aus Bild 1.2 besitzt somit eine unendliche Grenzfrequenz. Die diskrete Kanalimpulsantwort ist

$$\tilde{h}_d(t,\tau) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Theta_k(t)}\, \delta(\tau - \tau_k(t)) \,, \tag{1.3.2}$$

wobei die Teilfunktionen meist als diskrete Echos infolge einer Mehrwegeausbreitung interpretiert werden.

1.4 Verfahren zur Gewinnung von Kanalmodellen

Im folgenden werden stets lineare zeitinvariante skalare Kanalmodelle zugrunde gelegt.

1.4.1 Messungen

Kanalimpulsantworten kann man messen [6, 7]. Oft kommt ein relativ breitbandiges Meßgerät zur Verwendung, das über Hochfrequenzleitungen mit zwei Meßantennen verbunden ist. Auch Anordnungen mit getrenntem Sender und Empfänger sind üblich und bei größerem Antennenabstand notwendig, die Synchronisation ist jedoch aufwendig [6]. Bei Messungen wird oft mit homodynen, bandbegrenzten Empfängern operiert. Die Kanalimpulsantwort wird dann direkt im Basisband gemessen und angegeben.

Zu beachten ist, daß die Meßergebnisse sehr stark vom Meßaufbau abhängen, speziell von Art, Aufstellung und elektrischer Anbindung der verwendeten Meßantennen. Auch die Antennenzuleitungen und die Aufstellung der Meßgeräte sind hier zu berücksichtigen.

Vom Meßkanal auf den Funkkanal zwischen z. B. Handtelefon und Basisstation zu schließen ist problematisch. Für große prinzipielle Genauigkeit scheint es trotz hohem Aufwand angemessen, den Hochfrequenzteil des Meßgerätes in den

Originalgeräten unterzubringen und mit dem eigentlichen Meßgerät über elektromagnetisch unproblematische Leitungen, beispielsweise dielektrische Lichtwellenleiter, zu kommunizieren.

1.4.2 Einfache Berechnungsverfahren

Es gibt viele heuristische Berechnungsverfahren für Funkkanäle in Gebäuden. Oft wird nur die Empfangsstärke ermittelt, entweder pauschal [8, Tabelle 1] oder in Abhängigkeit der Gebäudegeometrie [7], wobei einfache Näherungsformeln zugrunde liegen.

Wände zwischen Sender und Empfänger werden in Pauschalmodellen z. B. durch einen materialabhängigen Empfangsstärkeverlust berücksichtigt, ebenso Freistrecken durch einen längenabhängigen. Prinzipiell wird hier zwischen der sogenannten LOS (Line of Sight) Situation, bei der die direkte Verbindungslinie zwischen Sender und Empfänger hindernisfrei ist und der NLOS (non Line of Sight) Situation unterschieden, bei der dies nicht der Fall ist.

Genauere Modelle berücksichtigen die Gebäudegeometrie auch außerhalb der direkten Verbindung zwischen Sender und Empfänger, um beispielsweise im NLOS–Fall bedeutsame Beugungseffekte an Wandecken mit zu erfassen [5].

1.4.3 Strahlenoptische Verfahren (GO), UTD, GTD

Gern werden zur Bestimmung von Kanalimpulsantworten strahlenoptische Verfahren (**G**eometrical **O**ptics) in Form der ”Ray Launching”, ”Ray Tracing” oder der verbesserten ”Ray Splitting” Methode [3] verwendet.

Hier wird die elektromagnetische Wellenausbreitung mit Hilfe einer Fernfeldnäherung vereinfacht, so daß ein Strahl als Repräsentant eines Wellenpaketes angesehen werden kann. Diese Strahlen können über verschiedene Mechanismen miteinander in Wechselwirkung treten. Berücksichtigung in Form der Fresnelschen Formel [9] finden zunächst Reflexion und Transmission der Strahlen an endlich dicken, ebenen dielektrischen Hindernissen. Meist werden die Reflexionseigenschaften der Streuer bei Bandmittenfrequenz berechnet, was als grobe Näherung angesehen werden muß, wenn Kanalimpulsantworten im Zeitbereich zu ermitteln sind.

Sollen für aufwendigere Simulationen Beugungseffekte mitberücksichtigt werden, bedient man sich der in der UTD (**U**niversal **T**heory of **D**iffraction) bzw. GTD (**G**eometrical **T**heory of **D**iffraction) ausgearbeiteten Ansätze für die Wechselwirkung optischer Strahlen in speziellen Anordnungen (dielektrische

Keile, Öffnungen etc.) [10]. Auch rauhe Oberflächen können mit einbezogen werden [3].

Berechnungen dieser Art liefern entweder Empfangsstärken [11] oder aber komplette Kanalmodelle [3], meist zeitdiskrete Modelle nach (1.3.2).

Um den Simulationsaufwand in Grenzen zu halten, werden bei der Strahlverfolgung die Streuer meist als unendlich dünne Bleche angesehen. Da Beugungseffekte viele zusätzliche Strahlen erzeugen, fließen sie oft nur bei wenigen Streuern in die Berechnungen ein [3].

Die Möblierung der Gebäude wird meist vernachlässigt, ebenso die innere Struktur von Stahlbetonkonstruktionen. Mit diesen Vereinfachungen lassen sich mit heutigen Computern dreidimensionale Simulationen der Funkwellenausbreitung in Gebäuden durchführen [11].

Aussage 1.8 *Strahlenoptische Verfahren für die Funkkanalsimulation in Gebäuden sind weit verbreitet. Aufgrund der vereinfachten Behandlung des elektromagnetischen Feldes, sind sie angebracht, wenn die Abmessungen der Streuer groß gegenüber der Freiraumwellenlänge bei Trägerfrequenz sind. Sie sind daher nur für hohe Frequenzen geeignet.*

Sollen auch Streuer mit kleinsten Abmessungen von z. B. einem Meter (Fenster, Türen usw.) ohne aufwendige Berücksichtigung von Beugungseffekten behandelt werden, so ist dies ab einer Trägerfrequenz von ca. 5 GHz ohne große Fehler möglich. Für diese Überschlagsrechnung wurde gefordert, daß ein ein Meter langer, homogener Stromfaden 90 % der Strahlungsleistung in einem Winkelbereich von 5° konzentriert.

1.4.4 Feldorientierte Berechnungsverfahren

Feldorientierte Berechnungsverfahren für die Kanalimpulsantwort gehen von der Maxwellschen Theorie aus [12, 13, 14]. Zur simulationstechnischen Behandlung werden die Maxwellschen Gleichungen im Zeit– oder Frequenzbereich aufgestellt, diskretisiert und dann numerisch ausgewertet. Hierfür gibt es verschiedene Standardverfahren (Stromentwicklungsmethoden wie das Randintegralverfahren [15], Reihenentwicklungsverfahren, etc.), die jedoch bisher für die Simulation von Funkkanälen in Gebäuden kaum zum Tragen kommen. Hauptgrund ist, daß die Simulation elektrisch großer Strukturen mit einer Maximalausdehnung von beispielsweise 100 Freiraumwellenlängen oft mit einem die Leistungsfähigkeit verfügbarer Computer um Größenordnungen überschreitenden Rechenaufwand verbunden ist.

Einzig Zeitbereichsmethoden, speziell das Verfahren der Finiten Differenzen im Zeitbereich (FDTD), haben sich bereits in begrenztem Umfang etabliert [16, 17, 18, 19]. Das Verfahren ist erstmals 1966 in [20] beschrieben worden und hat aufgrund der explosionsartigen Entwicklung der Computerleistung in letzter Zeit immer mehr Verwendung gefunden. Dies vor allem dort, wo es um die Berechnung elektrisch kleiner Hochfrequenzbauelemente im Mikro– und Millimeterwellenbereich geht [21, 22]. Auch im Mobilfunkbereich findet es Interesse, speziell für Antennenanalysen [23].

Im Gegensatz zu den oben angeführten strahlenoptischen Methoden, ist die erreichbare Genauigkeit bei feldorientierten Verfahren zunächst frequenzunabhängig. Da der Berechnungsaufwand jedoch mit der Trägerfrequenz stark ansteigt, bei den in dieser Arbeit untersuchten Verfahren mit ω_0^3 bis ω_0^4, sind diese Methoden zur Zeit nur für niedrige Frequenzen anwendbar.

1.5 Zielsetzung und Übersicht über die vorliegende Arbeit

Der Aufbereitung und Anwendung des Verfahrens der Finiten Differenzen im Zeitbereich zum Zweck der Berechnung linearer zeitinvarianter Funkkanalimpulsantworten in Gebäuden ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Hauptintention ist dabei, den weit verbreiteten strahlenoptischen Berechnungsverfahren eine weitere Erkenntnisquelle gegenüber zu stellen.

In Kapitel 2.5 wird zunächst das Problem der Berechnung zeitinvarianter Kanalimpulsantworten auf der Ebene der elektromagnetischen Wellenfelder betrachtet und dort zergliedert, wobei die Antennenberechnung von der Wellenausbreitungssimulation abgespalten wird.

Das so entstandene Wellenausbreitungsproblem wird in Kapitel 3 diskretisiert, der numerischen Berechnung der Antenneneigenschaften widmet sich Kapitel 4. Für beide Probleme wird je ein hybrides Zeitbereichsverfahren vorgestellt, das Diskontinuitäten mit Standardverfahren behandelt, homogene Gebiete aber mit einem effektiveren Algorithmus bearbeitet.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit Anwendungsaspekten. Koaxial gespeiste Beispielantennen werden in Bezug auf den Eingangsreflexionsfaktor und die Abstrahlcharakteristik untersucht, die berechneten Werte werden mit Messungen verglichen. Funkkanalimpulsantworten in zwei Testgebäuden werden bei 1800 MHz ermittelt und gemessenen gegenübergestellt.

Ein genaues Verfahren, das dem Stand der Simulationstechnik in vollem Umfang entspricht, wird ebenso entwickelt wie eine schnellere, vereinfachte Version. Für praktische Anwendungen kommt das vorgestellte Verfahren aufgrund geringer

Rechenzeiten durchaus in Frage, die vereinfachte Version ist in Bezug auf die Rechenzeit vielen Ray–Tracing Programmen sogar überlegen.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren sind momentan bis ca. 3 GHz voll nutzbar, bei höheren Frequenzen kann man erträgliche Rechenzeiten mit verringerter Genauigkeit durch grobere Diskretisierung erreichen. Hält jedoch die derzeitige Leistungsexplosion in der Computertechnik erwartungsgemäß an, werden feldorientierte Verfahren wie die hier vorgestellten zur Berechnung von Funkkanälen in Gebäuden immer attraktiver werden.

Kapitel 2

Vereinfachung und Zergliederung des Inhaus–Feldproblems

Prinzipiell sind moderne Zeitbereichsmethoden zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen mächtig genug, um aus einer gegebenen räumlichen Verteilung der Permittivität ε, der Permeabilität μ, der elektrischen Leitfähigkeit[1] κ und der magnetischen Leitfähigkeit σ, die die Antennen samt Gebäudeumgebung beschreiben, eine Funkkanalimpulsantwort direkt zu bestimmen. Wie in Kapitel 3 beschrieben, muß hierzu das elektromagnetische Feld räumlich und zeitlich diskretisiert werden. Daher ist der Rechenaufwand in erster Näherung abhängig vom Verhältnis v der größten Ausdehnung des simulierten Gebäudes, beispielsweise L =30 m, zur Zellgröße des Verfahrens, z. B. l =0,2 mm (um auch die Antennenzuleitungen noch gut auflösen zu können). Bei dreidimensionaler Rechnung müssen maximal v^3 Zellen im Computerspeicher gehalten und verarbeitet werden, hier also ca. $3 \cdot 10^{15}$ Elemente. Dies ist mit heutigen Computern schlichtweg unmöglich.

Der Umgehung dieses Problems ist das vorliegende Kapitel gewidmet. In Abschnitt 2.2 wird zunächst die für sich genommen machbare Antennensimulation abgespalten, um die Zellgröße auf z. B. 1/10 der Trägerwellenlänge λ_0 heraufsetzen zu können. Trotzdem kann das so entstandene Ausbreitungsproblem heutzutage mit erschwinglichen Computern nicht dreidimensional behandelt werden, daher beschäftigt sich Abschnitt 2.3 mit zweidimensionalen Berechnungsmöglichkeiten für Wellenfelder in dreidimensionalen Gebäuden. In Abschnitt 2.4 wird dann die vollständige Entkoppelbarkeit von Antennen– und Ausbreitungsproblem untersucht.

2.1 Definition des Inhaus–Feldproblems

Das Inhaus–Feldproblem dient der feldorientierten Ermittlung eines linearen zeitinvarianten skalaren Funkkanalmodells nach Abschnitt 1.3.

[1]Endliche Leitfähigkeiten dienen hier der Beschreibung dielektrischer Verluste. Will man auch metallische Verluste (Skineffekt) direkt mit einbeziehen, so steigt der Aufwand nochmals um viele Größenordnungen.

Das Feld befindet sich in einem durch die räumliche Verteilung der Permittivität $\varepsilon(\mathbf{x})$, der Permeablilität $\mu(\mathbf{x})$, der elektrischen Leitfähigkeit $\kappa(\mathbf{x})$ und der magnetischen Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{x})$ beschriebenen Gebäude. Metallische Gegenstände, insbesondere die Sende– und die Empfangsantenne, besitzen eine unendlich große elektrische Leitfähigkeit.

Die Eingangsgröße $x(t)$ des skalaren Funkkanals wird mit der Spannungsamplitude der hinlaufenden Welle in der Sendeantennenzuleitung identifiziert, die Ausgangsgröße $y(t)$ mit der Spannungsamplitude der auslaufenden Welle in der Empfangsantennenzuleitung. Die Referenzebene wird an das antennenseitige Ende der jeweiligen Leitung gelegt. Die zeitliche Fouriertransformierte $h(\omega)$ der Kanalimpulsantwort $h(\tau)$ entspricht damit dem aus der Hochfrequenztechnik als Transmissionsfaktor bekannten Streuparameter $S_{21}(\omega)$.

Es wird im folgenden ein kartesisches Koordinatensystem $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ zugrunde gelegt, dessen z–Richtung nach oben (senkrecht zur Erdoberfläche) orientiert ist.

2.2 Zergliederung des Feldproblems in Antennen– und Ausbreitungsproblem

Die auf den Metallflächen der Antennen vorhandene Flächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x}, t)$ kann als Quelle des elektromagnetischen Feldes aufgefaßt werden. Sie stellt gleichzeitig die Ersatzquelle für die Metallgebiete dar [14, Abschnitt 1.13]. Die Ersatzanordnung für die Metallgebiete sind dann luftgefüllte Gebiete mit einer Ersatzflächenstromdichte auf dem Rand.

Aussage 2.1 *Sind in unmittelbarer Nähe der Antennen keine Streuer vorhanden, so gilt in guter Näherung:*

1. *Die Ersatzflächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,s}}(\mathbf{x}, t)$ der Sendeantenne ist bei unveränderter Eingangsgröße $x(t)$ identisch mit der Flächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,s,0}}(\mathbf{x}, t)$ auf derselben Antenne im Vakuum.*

2. *Die Ersatzflächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,e}}(\mathbf{x}, t)$ der Empfangsantenne ist bei unverändertem Primärfeld $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}(\mathbf{x}, t)$ identisch mit der Flächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,e,0}}(\mathbf{x}, t)$ auf derselben Antenne im Vakuum.*

3. *Die Ausgangsgröße $y(t)$ ist bei gleicher Flächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,e}}(\mathbf{x}, t)$ auf der Empfangsantenne identisch mit der Ausgangsgröße $y_0(t)$ derselben Antenne im Vakuum.*

Das Primärfeld $\mathbf{F}_\mathrm{p}(\mathbf{x},t) = \left(\mathbf{E}_\mathrm{p}^\mathrm{T}(\mathbf{x},t), \mathbf{H}_\mathrm{p}^\mathrm{T}(\mathbf{x},t)\right)^\mathrm{T}$ ist dabei jenes elektromagnetische Feld, welches sich ohne Vorhandensein der Empfangsantenne einstellen würde. Es überlagert sich mit dem von der Ersatzflächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,e}}(\mathbf{x},t)$ der Empfangsantenne erzeugten Sekundärfeld $\mathbf{F}_\mathrm{s}(\mathbf{x},t)$ zu einem Gesamtfeld

$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}_\mathrm{p}(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}_\mathrm{s}(\mathbf{x},t), \tag{2.2.1}$$

welches die Randbedingungen auf der Empfangsantenne im Vakuum erfüllt.

Das Gesamtfeld genügt den Maxwellschen Gleichungen, wenn die Einzelfelder dies tun. Die Randbedingungen in Form verschwindender Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke auf den Antennen werden nur näherungsweise erfüllt. Speziell werden in Aussage 2.1 Wirkungen nach Bild 2.1 vernachläßigt. Dort sind Wirkungen von Flächenstromdichten auf tangentiale elektrische Felder an den Antennenoberflächen durch Pfeile wiedergegeben. Gestrichelte Pfeile entsprechen vernachlässigten Wirkungen.

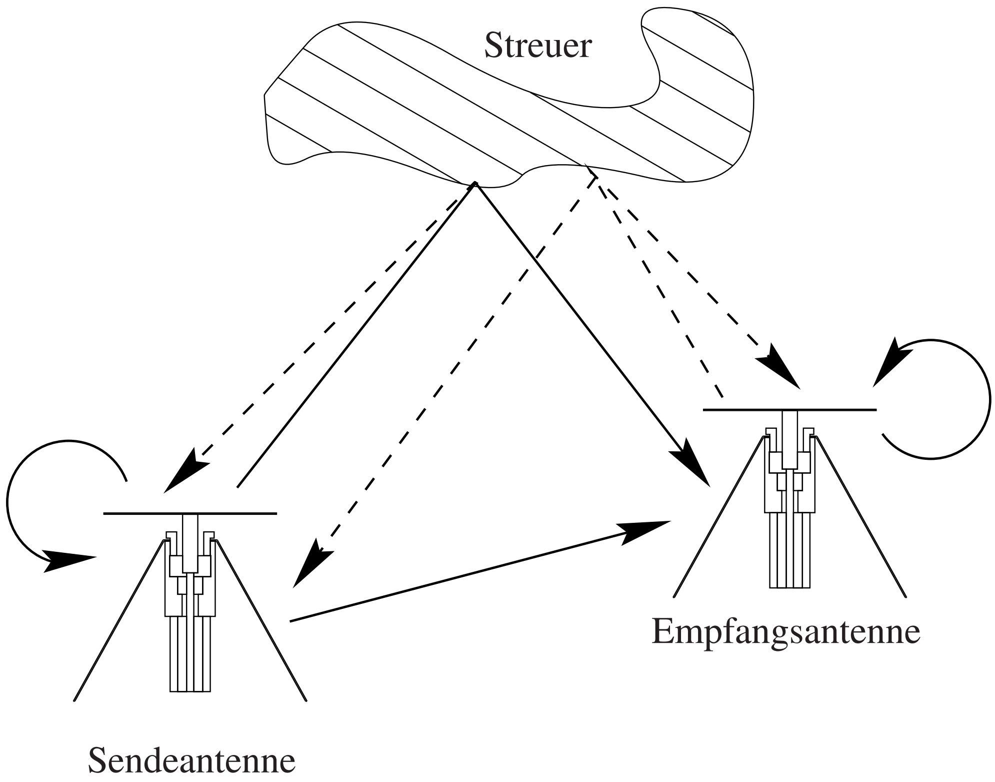

Bild 2.1. Wirkungen von Flächenstromdichten auf tangentiale elektrische Felder an den Antennenoberflächen.

Damit läßt sich die Ermittlung der Ausgangsgröße $y(t)$ wie folgt sequentiell gestalten.

Simulation der Sendeantenne im Vakuum: Eingangssignal ist $x(t)$. Es wird die Ersatzflächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,s}}(\mathbf{x},t)$ der Sendeantenne ermittelt.

Ausbreitungssimulation: Aus der Ersatzflächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{f,s}}(\mathbf{x},t)$ der Sendeantenne wird das Primärfeld $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}(\mathbf{x},t)$ in der Umgebung der Empfangsantenne berechnet.

Simulation der Empfangsantenne im Vakuum: Das bestimmte Primärfeld in der Umgebung der Empfangsantenne wird in die Ausgangsgröße $y(t)$ überführt.

2.3 Vereinfachung des Ausbreitungsproblems zur Behandlung mit einem zweieinhalbdimensionalen Lösungsverfahren

Sollen sich in einem Gebäude elektromagnetische Wellen nur in zwei Raumrichtungen, hier in der (x,y)–Ebene, ausbreiten, so bietet sich das Herausgreifen eines Stockwerks in folgender Art an:

Aussage 2.2 *Das Stockwerk wird als unendlich hoch angesehen. Hängen ferner die Materialeigenschaften der Streuer nicht von der z–Koordinate ab, so läßt sich das dreidimensionale elektromagnetische Feld nach Wanderwellen in z–Richtung entwickeln. Mit diesem Ansatz kann die z–Abhängigkeit des elektromagnetischen Feldes absepariert werden, das Restproblem ist zweidimensional.*

Bild 2.2 illustriert den in Aussage 2.2 umrissenen Sachverhalt. Die Näherung des unendlich hohen Stockwerks ist auch bei der zweidimensionalen Ray Tracing Methode gebräuchlich [3]. Betrachtet man nur solche Antennen, die nicht direkt nach oben oder unten abstrahlen, bleibt der Fehler meist gering. Der Wanderwellenansatz ist

$$\mathbf{F}_{\mathrm{p}}(\mathbf{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{\mathrm{p}}(x,y,k_{\mathrm{z}},t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{z}}z}\, dk_{\mathrm{z}}, \tag{2.3.1}$$

wobei sich die Spektralanteile $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}(x,y,k_{\mathrm{z}},t)$ für verschiedene transversale Wellenzahlen k_{z} unabhängig voneinander berechnen lassen. Im monofrequenten Fall entspricht die transversale Wellenzahl k_z der Wellenausbreitung unter einem Winkel $\theta = \arccos \frac{k_{\mathrm{z}}}{k_0}$ gegen die Vertikale (bei $\theta = 0$ breitet sich die Welle nach oben aus), mit der Freiraumwellenzahl $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$.
Für jeden Wert der transversalen Wellenzahl k_{z} ist eine separate Simulation erforderlich, zur exakten Auswertung von (2.3.1) also unendlich viele. Somit muß

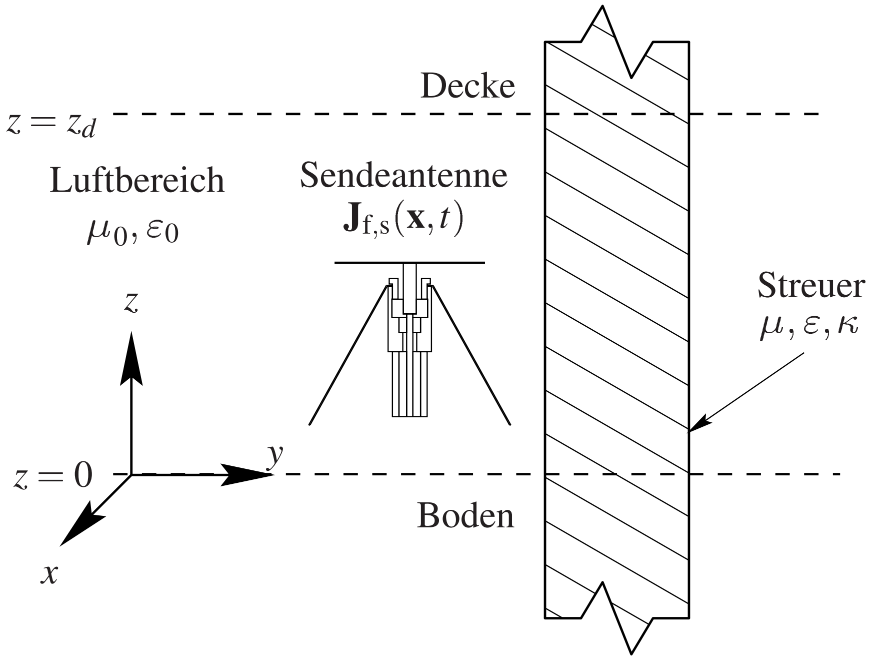

Bild 2.2. Zweidimensionales Gebäude in Gestalt eines vereinfachten Stockwerks.

die Integration in (2.3.1) durch eine geeignete Summe genähert werden. Dann ist

$$\mathbf{F}_\mathrm{p}(\mathbf{x},t) = \sum_{i=-n}^{n} \mathbf{F}_\mathrm{p}(x,y,k_{\mathrm{z},i},t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{\mathrm{z},i}z}\, \varDelta_{k_{\mathrm{z},i}}, \tag{2.3.2}$$

wobei die Diskretisierung nichtäquidistant erfolgen kann. Die Summe ist endlich, da Feldanteile mit $|k_\mathrm{z}| > k_0$ nicht ausbreitungsfähig sind.
Der Wanderwellenansatz führt zu komplexwertigen elektromagnetischen Feldgleichungen im Zeitbereich. Um den damit verbundenen Simulationsmehraufwand zu vermeiden, werden bei der Ausbreitungssimulation Stehwellen

$$\mathbf{F}_\mathrm{ps}(\mathbf{x},k_\mathrm{z},t) = \mathbf{F}_\mathrm{p}(x,y,k_\mathrm{z},t) \left\{ \begin{array}{lll} \sin(k_\mathrm{z}z) & \text{für} & H_\mathrm{z}, E_\mathrm{x}, E_\mathrm{y} \\ \cos(k_\mathrm{z}z) & \text{für} & E_\mathrm{z}, H_\mathrm{x}, H_\mathrm{y} \end{array} \right\} \tag{2.3.3}$$

angesetzt. Aus zwei Stehwellen gleicher transversaler Wellenzahl k_z läßt sich nach

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\mathrm{p}(\mathbf{x},k_\mathrm{z},t) &= \mathbf{F}_\mathrm{ps}(\mathbf{x},k_\mathrm{z},t) \pm \mathrm{j}\,\mathbf{F}_\mathrm{ps}(\mathbf{x} + \frac{\pi}{2k_\mathrm{z}}\mathbf{e}_\mathrm{z}, k_\mathrm{z}, t) \\ &= \mathbf{F}_\mathrm{p}(x,y,k_\mathrm{z},t) \left\{ \begin{array}{l} \sin(k_\mathrm{z}z) + \mathrm{j}\sin(\pi/2 + k_\mathrm{z}z) = \mathrm{j}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_\mathrm{z}z} \\ \cos(k_\mathrm{z}z) + \mathrm{j}\cos(\pi/2 + k_\mathrm{z}z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_\mathrm{z}z} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

unmittelbar eine Wanderwelle überlagern.
Im folgenden wird $\mathbf{F}_{\mathrm{ps}}(\mathbf{x}, k_{\mathrm{z}}, t)$ als Mode zur transversalen Wellenzahl k_{z} bezeichnet.

2.4 Entkopplung von Antennen– und Ausbreitungsproblem

Für die Ausbreitungssimulation muß die Ersatzflächenstromdichte der Sendeantenne bekannt sein. Daher ist das Ausbreitungsproblem zunächst antennenabhängig. Zudem wird zur Simulation der Empfangsantenne das Primärfeld $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}(\mathbf{x}, t)$ benötigt, damit ist die Empfangsantennensimulation abhängig von der Ausbreitungssimulation.

2.4.1 Ermittlung eines äquivalenten Stromfadens für die Sendeantenne

Aussage 2.3 *Ist die Sendeantenne durch einen konzentrierten Stromfaden der Stromstärke $i_{\mathrm{s}}(z, t)$ längs einer einzigen, in z–Richtung ausgedehnten Strecke ersetzbar, so läßt sich das zweidimensionale Ausbreitungsproblem antennenunabhängig formulieren.*

Rotationssymmetrische Antennen, deren Symmetrieachse in z–Richtung liegt, lassen sich in guter Näherung durch einen solchen äquivalenten Stromfaden ersetzen. Der Stromfaden erzeugt im Vakuum das gleiche Fernfeld wie die Antenne. Derartige Antennen, wie Dipol– und Disconeantenne, werden in der Funkkanalmeßtechnik oft eingesetzt.
Konzentrierte Ersatzstromstärken für Draht–Dipolantennen sind aus der Literatur bekannt [24]. Im folgenden wird unter Verwendung des Fernfelds ein äquivalenter Stromfaden für allgemeine Antennen hergeleitet. Ein konzentrierter Stromfaden der Stromstärke $i(z, \omega)$ in Richtung der positiven z–Achse erzeugt im Vakuum ein elektromagnetisches Feld mit dem magnetischen Vektorpotential

$$\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mathbf{e}_{\mathrm{z}}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i(z', \omega) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 |\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|} \, dz' . \tag{2.4.1}$$

Eine Fernfeldnäherung liefert in Kugelkoordinaten $\mathbf{x} = (r, \theta, \alpha)^{\mathrm{T}}$ für das magnetische Feld

$$\mathbf{H}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x}, \omega) = \mathrm{j} k_0 \frac{\sin\theta}{4\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{r} \int_{-\infty}^{\infty} i(z', \omega) \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{\mathrm{z}} z'} \, dz' \, \mathbf{e}_{\alpha} \tag{2.4.2}$$

mit der transversalen Wellenzahl $k_z = k_0 \cos\theta$.

Aussage 2.4 *In das Fernfeld geht die Ortsabhängigkeit der erzeugenden konzentrierten Stromstärke nur über die Fouriertransformierte der Stromstärke $i(z,\omega)$ in den Spektralbereich mit der Wellenzahl $k_z = k_0 \cos\theta$ ein. Im Fernfeld machen sich dabei nur Spektralanteile mit transversalen Wellenzahlen $|k_z| \leq k_0$ bemerkbar, Anteile mit größeren Wellenzahlen strahlen nicht ab.*

Aussage 2.4 kann genutzt werden, um andersherum einer Antenne mit dem Fernfeld $\mathbf{H}_f(\mathbf{x},\omega)$ einen äquivalenten Stromfaden der Stromstärke $i_s(z,\omega)$ zuzuordnen. Dazu definiert man zunächst

$$
\begin{aligned}
i_s(k_z,\omega) &= \frac{H_{f,\alpha}(\mathbf{x},\omega)}{\mathrm{j}k_0 \dfrac{\sin\theta}{2} \dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{r}} \\
&= \frac{2}{\mathrm{j}} \frac{H_{f,\alpha}(\mathbf{x},\omega)}{\sqrt{k_0^2 - k_z^2}} \frac{r}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}.
\end{aligned}
\tag{2.4.3}
$$

Durch Fouriertransformation ergibt sich die gewünschte Ersatzstromstärke

$$
i_s(z,\omega) = \int_{-k_0}^{k_0} i_s(k_z,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z'}\, dk_z. \tag{2.4.4}
$$

Aussage 2.5 *Der äquivalente Stromfaden, der sich aus dem Fernfeld der Sendeantenne im Vakuum ergibt, kann für die Ausbreitungssimulation direkt in der bandbegrenzten Spektralbereichsdarstellung verwendet werden. Muß er z. B. für eine dreidimensionale Ausbreitungssimulation jedoch im Ortsbereich formuliert werden, so ist er dort wegen der Bandbegrenzung im Spektralbereich zu lang. Abhilfe schafft die stetig differenzierbare Fortsetzung der Ersatzstromstärke im Spektralbereich, die nach Aussage 2.4 das meßbare Fernfeld unberührt läßt.*

Der Ersatzstrom im Spektralbereich $i_s(k_z,\omega)$ wird dazu bei $|k_z| > k_0$ durch Polynome erster Ordnung stetig differenzierbar fortgesetzt. Multiplikation der fortgesetzten Funktion mit der Fensterfunktion

$$
f_e(k_z) = \begin{cases} 1 & , |k_z| \in [0, k_0] \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{2C}\left(\frac{|k_z|}{k_0} - 1\right)\right) & , |k_z| \in]k_0, k_0\,(C+1)] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \tag{2.4.5}
$$

führt zu sanftem Abklingen im Spektralbereich. Die spektrale Erweiterung C hat sich mit $C = 5$ als praktisch brauchbar erwiesen, das Integrationsintervall für das numerisch auszuwertende Integral in (2.4.4) ist dann mit $]-6k_0, 6k_0[$ noch hinreichend klein.

Diagramm 2.1 zeigt dazu die aus dem Fernfeld einer 8 cm langen Drahtantenne mit kosinusförmiger Stromverteilung mit einem Maximalwert von 1 A ermittelte ortsabhängige Ersatzstromstärke bei $f = 1,8$ GHz. Setzt man als Schnittgrenze eine Stromstärke von 1 mA an, so ist die Ersatzdrahtantenne ohne spektrale Erweiterung ($C = 0$) viel länger als 2 m. Bei $C = 5$ ist sie ca. 30 cm lang, der Verlauf der Ersatzstromstärke kommt dann dem der Originalstromstärke schon sehr nahe.

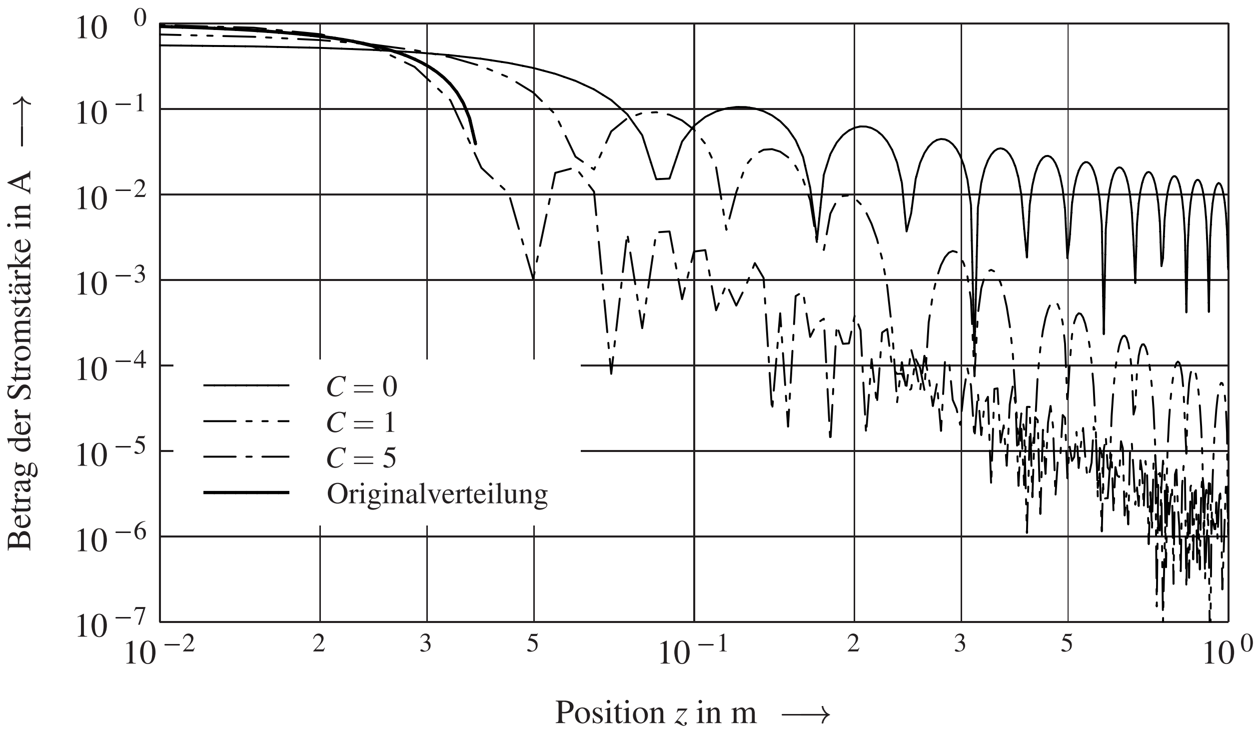

Diagramm 2.1. Betrag der aus dem Fernfeld ermittelten ortsabhängigen Ersatzstromstärke einer 8 cm langen Drahtantenne mit kosinusförmiger Stromverteilung bei $f = 1800$ MHz. Parameter ist der spektrale Erweiterungsfaktor C. Die Verteilung ist achsensymmetrisch zu $z = 0$, das Diagramm zeigt nur den Teil $z > 0$.

2.4.2 Abkopplung der Empfangsantenne

Aussage 2.6 *Bei rotationssymmetrischen Antennen, deren Achse in z–Richtung liegt, ist das Ausgangssignal im Empfangsbetrieb nur von der z–Komponente des elektrischen Primärfeldes* $E_{\mathrm{p,z}}(\mathbf{x},t)$ *auf der Antennenachse abhängig.*

Zur Herleitung eines Ausdrucks für das Ausgangssignals wird das als reines Wanderwellenfeld angenommene monofrequente elektrische Primärfeld $\mathbf{E}_{\mathrm{p}}(x,y,k_{\mathrm{z}},\omega)$ im Spektralbereich nach ebenen Wellen mit unterschiedlichem Einfallswinkel φ gemäß

$$\mathbf{E}_{\mathrm{p}}(x,y,k_{\mathrm{z}},\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} w(\varphi,k_{\mathrm{z}},\omega)\,\mathbf{d}_{\varphi}\,\mathbf{E}_{\varphi=0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}(\varphi,k_{\mathrm{z}})\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathrm{e}})}\,d\varphi \tag{2.4.6}$$

entwickelt, wobei $\mathbf{x}_{\mathrm{e}}$ der Ortsvektor der Empfangsantennenmitte ist.[2] Die Drehmatrix ist

$$\mathbf{d}_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.4.7}$$

und der elektrische Feldvektor ist $\mathbf{E}_{\varphi=0} = (-\cos(\theta), 0, \sin(\theta))$, wobei $\theta = \arccos(k_{\mathrm{z}}/k_0)$ gilt.
Die Antenne reagiere nun auf eine ebene Welle

$$\mathbf{E}_{\varphi=0}(x,y,k_{\mathrm{z}},\omega) = \mathbf{E}_{\varphi=0}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\mathbf{k}(\varphi=0,k_{\mathrm{z}})\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\mathrm{e}})} \tag{2.4.8}$$

mit einem Ausgangssignal $y_{\varphi=0}(k_{\mathrm{z}},\omega)$. Da die Antenne aufgrund der Rotationssymmetrie Wellenanteile, die unter verschiedenen Winkeln φ einfallen nicht unterscheiden kann, ist der gesamte Spektralanteil des Ausgangssignals

$$y(k_{\mathrm{z}},\omega) = y_{\varphi=0}(k_{\mathrm{z}},\omega)\int_{-\pi}^{\pi} w(\varphi,k_{\mathrm{z}},\omega)\,d\varphi. \tag{2.4.9}$$

Auf der Antennenachse ist aber die z–Komponente des elektrischen Primärfeldes

$$E_{\mathrm{p,z}}(k_{\mathrm{z}},\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} w(\varphi,k_{\mathrm{z}},\omega)\,\sin(\theta)\,d\varphi \tag{2.4.10}$$

[2] Es sind nur die Feldanteile enthalten, für die die Empfangsantenne empfindlich ist.

und so

$$y(k_z, \omega) = y_{\varphi=0}(k_z, \omega) \, \frac{E_{p,z}(k_z, \omega)}{\sin(\theta)}. \tag{2.4.11}$$

Das Ausgangssignal der rotationssymmetrischen Empfangsantenne hängt also nur von der z–Komponente des elektrischen Primärfeldes auf der Antennenachse ab.

Die Empfangsantennensimulation ist damit von der Ausbreitungssimulation abgekoppelt, denn $y_{\varphi=0}(k_z, \omega)$ kann unabhängig vom Ausbreitungsproblem ermittelt werden.

2.5 Gesamtkonzept der feldorientierten Berechnung der Kanalimpulsantwort im unendlich hohen Stockwerk

Das Zusammenfügen der Ergebnisse von Antennen– und Ausbreitungssimulation geschieht zweckmäßig im Frequenz– und Spektralbereich.

Zunächst wird hier noch einmal das Ablaufschema für die entkoppelten Simulationen zusammengefaßt.

Simulation der Sendeantenne im Vakuum: Mit beliebiger hinlaufender Welle in der Antennenzuleitung wird die Übertragungsfunktion $h_x(k_z, \omega)$ für den äquivalenten Stromfaden bestimmt. Dazu ist eine einzige Zeitbereichssimulation erforderlich.

Ausbreitungssimulation: Mit beliebigem, konzentriertem Stromfaden an der Sendeantennenposition wird die Ausbreitungssimulation angeregt. Je Stützstelle von k_z ist eine Simulation erforderlich. Es ergibt sich die modale Übertragungsfunktion $h_p(k_z, \omega)$ für die z–Komponente der elektrischen Feldstärke am Empfangsstandort.

Simulation der Empfangsantenne im Vakuum: Die Empfangsantenne wird mit einer ebenen Welle als Primärfeld angeregt. Je Einfallswinkel der ebenen Welle ist eine Simulation erforderlich. Die Übertragungsfunktion für die auslaufende Welle in der Antennenleitung ist $h_y(k_z, \omega)$.

Die Zeitbereichssimulationen liefern zunächst Zeitreihen für die jeweiligen Ergebniswerte. Da die Anregungszeitfunktion jedoch vorgegeben wird, läßt sich mit der diskreten Fouriertransformation problemlos die jeweils benötigte Übertragungsfunktion im Frequenzbereich bestimmen.

Insgesamt gilt dann für die Fouriertransformierte

$$h(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\, d\tau \tag{2.5.1}$$

der skalaren Kanalimpulsantwort des Funkkanals

$$h(\omega) = \int_{-k_0}^{k_0} h_{\mathrm{x}}(k_{\mathrm{z}}, \omega)\, h_{\mathrm{p}}(k_{\mathrm{z}}, \omega)\, h_{\mathrm{y}}(k_{\mathrm{z}}, \omega)\, dk_{\mathrm{z}}. \tag{2.5.2}$$

2.6 Ein Interpolationsverfahren für die modale Übertragungsfunktion

Aussage 2.7 *Sind die Sende– und die Empfangsantenne elektrisch weit voneinander entfernt, so hängt die modale Übertragungsfunktion, besonders ihr Phasenwinkel, sehr stark von der transversalen Wellenzahl ab.*

Gleichung (2.5.2) muß also mit sehr vielen (Größenordnung 5000) Stützstellen diskretisiert werden. Da aber nicht so viele Ausbreitungssimulationen durchgeführt werden können, ist ein Interpolationsverfahren erforderlich.

Klassische Interpolationsverfahren, die gewichtete Mittelwerte bilden, kommen nicht in Frage, da sich auch die Frequenzabhängigkeit stark mit der transversalen Wellenzahl ändert. Es wird also ein problemangepaßtes Interpolationsverfahren benötigt.

Eine konzentrierte elektrische Stromstärke $i_{\mathrm{s}}(k_{\mathrm{z}}, \omega)$ erzeugt ein elektrisches Feld mit einer z–Komponente

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{z}}(\varrho, k_{\mathrm{z}}, \omega) &= -\frac{Z_{\mathrm{F},0}\, i_{\mathrm{s}}(k_{\mathrm{z}}, \omega)}{4} \frac{k^2}{k_0} H_0^{(2)}(k\varrho), \\ k &= \sqrt{k_0^2 - k_{\mathrm{z}}^2} \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

mit dem Feldwellenwiderstand im Vakuum $Z_{\mathrm{F},0}$ und der Hankelfunktion zweiter Art der Ordnung null $H_0^{(2)}(\zeta)$. Der Abstand des Aufpunkts vom Quellpunkt ist ϱ.

Berechnet man das Gesamtfeld durch Superposition des Feldes, das vom Ersatzstrom der Sendeantenne erzeugt wird, mit dem Feld seiner Spiegelströme[3] $c_\nu\, i_\mathrm{s}(k_\mathrm{z},\omega)$, so ergibt sich

$$
\begin{aligned}
E_\mathrm{z}(\varrho,k_\mathrm{z},\omega) &= -\frac{Z_{\mathrm{F},0}\, i_\mathrm{s}(k_\mathrm{z},\omega)}{4}\frac{k^2}{k_0}\sum_\nu c_\nu\, H_0^{(2)}(k\varrho_\nu) \\
&= \frac{h_\mathrm{E}(k)}{k_0},
\end{aligned} \tag{2.6.2}
$$

wobei $h_\mathrm{E}(k)$ der Abkürzung dient mit $k^2 = k_0^2 + k_\mathrm{z}^2$.
Eine Zeitbereichssimulation mit festem k_z liefert $h_\mathrm{E}(k)$ für alle $k > k_\mathrm{z}$. Da die rechten Seiten von (2.6.2) nur über k von k_z abhängen, kann $E_\mathrm{z}(\varrho,k_\mathrm{z},\omega)$ für andere $\tilde{k}_\mathrm{z} > k_\mathrm{z}$ bei entsprechend geänderter Kreisfrequenz ω bestimmt werden. Gleiches gilt für die modale Übertragungsfunktion $h_\mathrm{p}(k_\mathrm{z},\omega)$.
Die Interpolations– beziehungsweise Extrapolationsvorschrift lautet dann

$$
\begin{aligned}
h_\mathrm{p}(k_\mathrm{z},\omega) &\approx \frac{\omega_1}{\omega}\, h_\mathrm{p}(k_{\mathrm{z},1},\omega_1), \\
\omega_1 &= c_0\sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - k_\mathrm{z}^2 + k_{\mathrm{z},1}^2}.
\end{aligned} \tag{2.6.3}
$$

In der schnelleren, vereinfachten Version des Simulationsverfahrens wird $h_\mathrm{p}(k_\mathrm{z},\omega)$ nur für $k_\mathrm{z} = 0$ mit dem Ausbreitungssimulator ermittelt. Alle anderen Stützstellen werden mit (2.6.3) extrapoliert.

[3] Hierfür werden die Streuer als dünne Bleche angenommen, die die Wellenausbreitung nicht verzögern.

Kapitel 3
Ein Hybrides Multimode FDTD–Verfahren zur Ausbreitungssimulation

Im vorliegenden Kapitel wird ein orts– und zeitdiskretes Simulationsverfahren zur Lösung des in Kapitel 2 definierten Ausbreitungsproblems entwickelt.

Ausgehend vom bekannten Yee–Schema [20] wird dazu in Abschnitt 3.2 zunächst ein zweidimensionales Zeitbereichsverfahren hergeleitet, mit dem die Moden für verschiedene transversale Wellenzahlen k_z getrennt simuliert werden können. In homogenen Gebieten kann dieses vereinfacht werden, wobei sich eine Diskrete Wellengleichung (DWG) ergibt. Die Kombination beider Methoden stellt ein leistungsfähiges, hybrides Simulationsverfahren dar, das die Grundlage dieser Arbeit bildet.

Abschnitt 3.4 beschäftigt sich mit den besonders wichtigen absorbierenden Randbedingungen. Hierfür wurde der in [25] vorgestellte perfekte Absorber wegen seiner hervorragenden Eigenschaften ausgewählt.

Am Kapitelende kommen noch Erweiterungsmöglichkeiten in Hinsicht auf Verfahrensverfeinerungen und die Anbindung an andere Simulatoren zur Sprache.

3.1 Diskrete Felder, Feldoperatoren

Das elektromagnetische Feld $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \left(\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t), \mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t)\right)^{\mathrm{T}}$ stellt eine Abbildung des $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ auf den $\mathbb{R}^6$ dar, die bestimmten Anfangs– und Randbedingungen sowie den Maxwellschen Rotationsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x},t) - \kappa(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t) - \mathbf{J}(\mathbf{x},t), \\
-\mu(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{x},t) &= \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) + \sigma(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x},t)
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

genügt. Hierbei ist ∂_t der Operator für die partielle Differentiation nach der Zeit t und $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ ein eingeprägtes Feld der elektrischen Stromdichte. Dielektrische Verluste werden formal über die elektrische Leitfähigkeit $\kappa(\mathbf{x})$, magnetische Verluste über die magnetische Leitfähigkeit[1] $\sigma(\mathbf{x})$ berücksichtigt.

[1] Der Begriff der magnetischen Leitfähigkeit σ wird in der elektromagnetischen Feldtheorie nicht allgemein verwendet, da diese nicht unmittelbar einen physikalischen Effekt beschreibt. Nützlich ist

Zur numerischen Behandlung wird statt des kontinuierlichen elektromagnetischen Feldes ein diskretes elektromagnetisches Feld $\mathbf{F}(\mathbf{X},T)$, $\mathbf{X} \in \mathbb{Z}^3$, $T \in \mathbb{Z}$ betrachtet.

Das diskrete Feld wird mit dem kontinuierlichen verknüpft, indem man es als Ansammlung von *Repräsentativwerten*[2] desselben auffaßt. Jedem Repräsentativwert wird ein Ort $\mathbf{x}$ und eine Zeit t des kontinuierlichen Raumes zugeordnet, er wird an diese Stelle *interpretiert*. Dieser geometrische Interpretationsprozeß wird mathematisch als ein Vektor von Zuordnungsabbildungen $\mathbf{Z}$ des $\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}$ auf den $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ aufgefaßt, der für jede Feldkomponente eine Komponente besitzt.

Aussage 3.1 *Um bei der Behandlung von diskreten Feldern lange Ausdrücke mit einer unübersichtlichen Fülle von Indizes zu vermeiden hat es sich bewährt, sogenannte Feldoperatoren einzuführen. Sie finden zur Manipulation der Felder wie z. B. Verschiebung und Differenzenbildung Verwendung. Die Menge $\mathbb{O}$ der Feldoperatoren stellt die algebraische Struktur eines Rings dar, der als Operatorenring zusammen mit den diskreten Feldern einen Modul*[3] *bildet [26].*

Grundlegende Feldoperatoren, die sogenannten Erzeugenden des Rings, sind $0, 1, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{t}$ sowie $\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}}, \bar{\mathfrak{z}}$ und $\bar{\mathfrak{t}}$. Sie werden über ihre Wirkung auf diskrete Felder definiert. Es ist

$$\begin{aligned}
0\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= 0, \\
1\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X},T), \\
\mathfrak{x}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}+\mathcal{E}_\mathrm{x},T), \\
\mathfrak{y}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}+\mathcal{E}_\mathrm{y},T), \\
\mathfrak{z}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}+\mathcal{E}_\mathrm{z},T), \\
\bar{\mathfrak{x}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}-\mathcal{E}_\mathrm{x},T), \\
\bar{\mathfrak{y}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}-\mathcal{E}_\mathrm{y},T), \\
\bar{\mathfrak{z}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}-\mathcal{E}_\mathrm{z},T), \\
\mathfrak{t}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X},T+1), \\
\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{F}(\mathbf{X},T-1),
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

die magnetische Leitfähigkeit zunächst zur Symmetrisierung der Maxwellschen Gleichungen, sie kann aber auch zur Beschreibung frequenzabhängiger magnetischer Verluste verwendet werden. Da die magnetische Leitfähigkeit zur Beschreibung des perfekten Absorbers (Abschnitt 3.4) unbedingt benötigt wird, wird sie bereits an dieser Stelle eingeführt.

[2] Der Standardbegriff des Abtastwertes wäre hier unzutreffend, da die Werte nicht durch einen Abtastprozeß gewonnen, sondern mit einem numerischen Näherungsverfahren berechnet werden.

[3] Ein Modul ist eine algebraische Struktur, die einem Vektorraum gleicht, außer daß bei erstgenanntem der Operatorenraum kein Körper, sondern ein Ring ist.

mit den Einheitsvektoren $\mathcal{E}_\mathrm{x} = (1,0,0)^\mathrm{T}$, $\mathcal{E}_\mathrm{y} = (0,1,0)^\mathrm{T}$ und $\mathcal{E}_\mathrm{z} = (0,0,1)^\mathrm{T}$.

Die Multiplikation in $\mathbb{O}$ ist als Verkettungsoperation definiert. Beispielsweise ist $\mathfrak{x}^2\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) = \mathfrak{x}\mathfrak{x}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) = \mathbf{F}(\mathbf{X}+2\,\mathcal{E}_\mathrm{x},T)$ oder $\mathfrak{y}\mathfrak{x}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) = \mathbf{F}(\mathbf{X}+\mathcal{E}_\mathrm{x}+\mathcal{E}_\mathrm{y},T)$.

Der zu einem Feldoperator $\mathfrak{a} \in \mathbb{O}$ bezüglich der Multiplikation inverse Operator wird wahlweise als $\mathfrak{a}^{-1}$ oder $\overline{\mathfrak{a}}$ geschrieben.

Über die Verträglichkeitsbedingung $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) = \mathfrak{a}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) + \mathfrak{b}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T)$ läßt sich mit $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \mathbb{O}$ die Addition definieren.

Die angegebene algebraische Struktur ist ein kommutativer Ring, jedoch kein Körper, da z.B. der Feldoperator $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ kein inverses Element bezüglich der Multiplikation besitzt.[4]

Durch sukzessive Addition und Multiplikation wird ausgehend von den Erzeugenden ganz $\mathbb{O}$ generiert. Nimmt man die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ noch zu den Erzeugenden hinzu, so stellen die Feldoperatoren einen leistungsfähigen Kalkül bei der Arbeit mit diskreten Feldern dar.

Aussage 3.2 *Der Kalkül der ortsunabhängigen Feldoperatoren ist völlig in dem der z-Transformation [27] enthalten. Die Äquivalenz geht so weit, daß die Ausdrücke syntaktisch identisch sind.*

Dies löst sich auf, wenn man ortsabhängige Feldoperatoren betrachtet. Solche werden beispielsweise bei Diskontinuitäten der Permittivität, bei Betrachtung endlicher Feldräume und bei krummlinigen Koordinatensystemen (Kapitel 4) benötigt. Hier wird die Verwendung der z-Transformation sehr aufwendig, während die Feldoperatoren lediglich die Kommutativität der Multiplikation einbüßen, so ist

$$\begin{aligned} & \mathfrak{x}\,\mathfrak{a}(\mathbf{X})\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &=& \;\mathfrak{a}(\mathbf{X}+\mathcal{E}_\mathrm{x})\,\mathbf{F}(\mathbf{X}+\mathcal{E}_\mathrm{x},T) \\ \neq\; & \mathfrak{a}(\mathbf{X})\,\mathfrak{x}\,\mathbf{F}(\mathbf{X},T) &=& \;\mathfrak{a}(\mathbf{X})\,\mathbf{F}(\mathbf{X}+\mathcal{E}_\mathrm{x},T), \end{aligned}$$

mit $\mathfrak{a}(\mathbf{X}) : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{O}$.

Nun sind also Felder von Feldoperatoren möglich. Es bietet sich an, für diese wieder Feldoperatoren höherer Ordnung zu definieren, z. B. für die Mittelwertbildung verschiedener Permittivitäten. Zur Vermeidung von Fehldeutungen wird ein Operator höherer Ordnung geschweift geklammert.

[4] Es gibt keinen Feldoperator $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}(\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) = 1$.

3.2 Separation des dreidimensionalen Yee–Verfahrens

3.2.1 Das Yee-Schema für lineare isotrope Medien mit elektrischen und magnetischen Verlusten

Ausgangspunkt für die Entwicklung des Ausbreitungssimulationsverfahrens ist das FDTD–Verfahren in Form des dreidimensionalen Yee-Schemas [20, 28].

Die Komponenten des diskreten elektromagnetischen Feldes werden in die Mitten der Kanten zweier kubischer Untergitter interpretiert, ein Untergitter für die elektrische Feldstärke (E–Gitter) und eines für die magnetische Feldstärke (H–Gitter). Die Untergitter sind um eine halbe Raumdiagonale der Zelle des äquidistanten[5] Gitters gegeneinander verschoben. Wird der Koordinatenursprung in eine Ecke des E–Gitters gelegt, ergibt sich die Zelle $\mathbf{X}_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^{\mathrm{T}}$ nach Bild 3.1. Beide Untergitter zusammen bilden das Yee–Gitter. Betrachtet man die Zel-

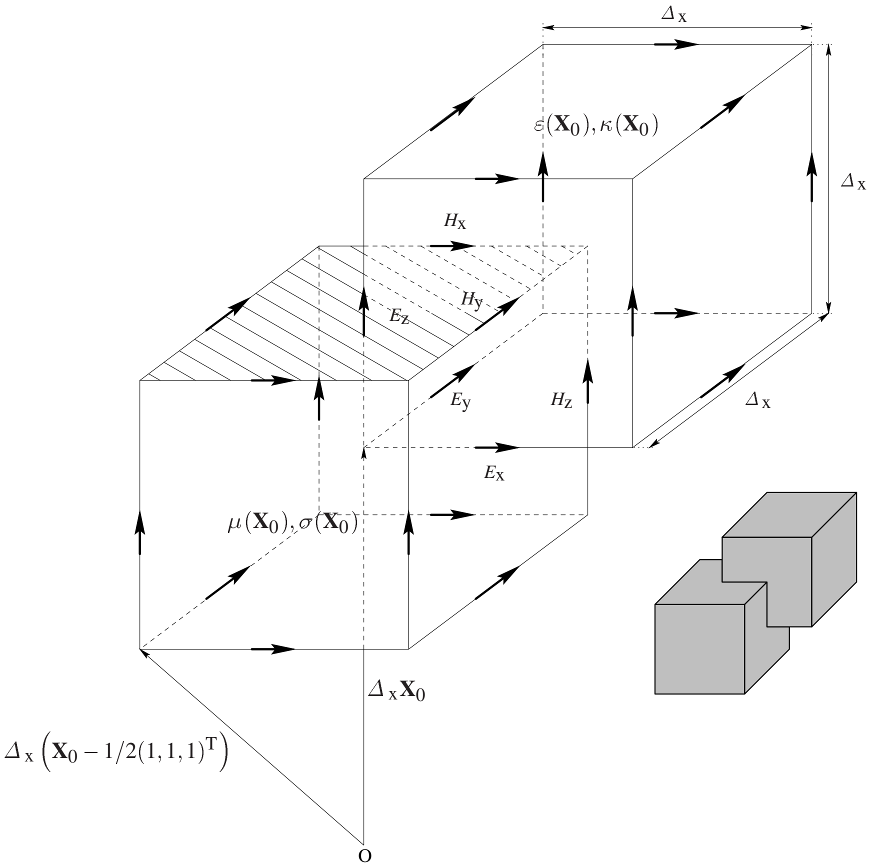

Bild 3.1. Die Einheitszelle $\mathbf{X}_0$ des Yee–Gitters.

[5]Nichtäquidistante Gitter sind wegen der Reflexionen an den Diskontinuitäten im Zusammenhang mit Wellenausbreitungssimulationen nur bedingt einsetzbar.

le des E–Untergitters als Einheitszelle, so befinden sich die Repräsentativwerte des E–Feldes in der Mitte der zur jeweiligen Feldkomponente parallelen Kante, die des H–Feldes in der Mitte der zur jeweiligen Feldkomponente orthogonalen Fläche des nunmehr kubisch flächenzentrierten Yee–Gitters mit der Gitterkonstanten $\varDelta_{\mathrm{x}}$.
Die in Bild 3.1 beschrifteten Feldwerte werden der Zelle $\mathbf{X}_0$ zugerechnet. Der Vektor der Zuordnungsabbildungen für das diskrete elektromagnetische Feld $\mathbf{F}(\mathbf{X},T)$ ist somit

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{F}}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \varDelta_{\mathrm{x}}/2\ \mathcal{E}_{\mathrm{x}} \\ \varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \varDelta_{\mathrm{x}}/2\ \mathcal{E}_{\mathrm{y}} \\ \varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \varDelta_{\mathrm{x}}/2\ \mathcal{E}_{\mathrm{z}} \\ \varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \varDelta_{\mathrm{x}}/2\ (\mathcal{E}_{\mathrm{y}}+\mathcal{E}_{\mathrm{z}}) \\ \varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \varDelta_{\mathrm{x}}/2\ (\mathcal{E}_{\mathrm{z}}+\mathcal{E}_{\mathrm{x}}) \\ \varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \varDelta_{\mathrm{x}}/2\ (\mathcal{E}_{\mathrm{x}}+\mathcal{E}_{\mathrm{y}}) \end{pmatrix}, \tag{3.2.1}$$

d. h. die H–Untergitterzelle $\varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X}_0 - \varDelta_{\mathrm{x}}/2\ (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ wird der E–Untergitterzelle $\varDelta_{\mathrm{x}}\mathbf{X}_0$ zugeschlagen[6].
Die Permittivität $\varepsilon(\mathbf{X}_0)$ und die elektrische Leitfähigkeit $\kappa(\mathbf{X}_0)$ füllen die genannte E–Untergitterzelle aus, die Permeabilität $\mu(\mathbf{X}_0)$ sowie die magnetische Leitfähigkeit $\sigma(\mathbf{X}_0)$ die genannte H–Untergitterzelle[7]. Damit sind Diskontinuitäten in den Materialparametern an den Kanten des jeweiligen Untergitters möglich. In den Kantenmitten können somit Repräsentativwerte für die Feldkomponenten der elektrischen Feldstärke E bzw. der magnetischen Feldstärke H in Kantenrichtung definiert werden, ohne Interpretationsprobleme aufgrund der Grenzbedingungen zu bekommen.
Zur Diskretisierung wird (3.1.1) mit Hilfe des Satz von Stokes in Integralform

$$\begin{aligned} \partial_t \int_A \varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{A} &= \int_{\partial A} \mathbf{H}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{s} - \int_A \kappa(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{A} \\ &\qquad - \int_A \mathbf{J}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{A}, \\ -\partial_t \int_A \mu(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{A} &= \int_{\partial A} \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{s} + \int_A \sigma(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{A} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

[6] Auf die auch übliche Darstellung mit halbzahligen Indizes wird hier verzichtet. Bei dieser muß der Übergang zu ganzzahligen Indizes spätestens bei der Implementierung auch erfolgen.

[7] So entsteht ein Versatz der magnetischen gegenüber der elektrischen Materialzelle um eine halbe Raumdiagonale einer Unterzelle. Dieser erschwert die Diskretisierung von Materialdiskontinuitäten mitunter erheblich, wenn sich elektrische und magnetische Materialparameter sprunghaft an der gleichen Stelle ändern. Eine Lösungsmöglichkeit für dieses Problem ist das Verschleifen des Übergangs derjenigen Materialparameter, die weniger stark variieren.

geschrieben. Gilt dies für jede beliebige Fläche A mit ihrem geschlossenen Rand ∂A, so sind die Maxwellschen Gleichungen exakt erfüllt. Werden aber nur Flächen A aus dem zu dem jeweils auf der linken Gleichungsseite stehenden Feld gehörigen Untergitter zugelassen, so ist dies eine zur Diskretisierung führende Näherung.

Im nächsten Schritt werden die Integrale näherungsweise durch die Repräsentativwerte ausgedrückt. Für die in Bild 3.1 schraffierte Fläche ist dann

$$
\begin{aligned}
(3.2.3)\quad & \frac{\varepsilon(\mathbf{X})+\varepsilon(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{x}})+\varepsilon(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{y}})+\varepsilon(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{x}}-\mathcal{E}_{\mathrm{y}})}{4}\Delta_{\mathrm{x}}^2\partial_t E_{\mathrm{z}}(\mathbf{X},t) = \\
& \Delta_{\mathrm{x}}\left(H_{\mathrm{y}}(\mathbf{X},t)-H_{\mathrm{x}}(\mathbf{X},t)-H_{\mathrm{y}}(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{x}},t)+H_{\mathrm{x}}(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{y}},t)\right) \\
& -\frac{\kappa(\mathbf{X})+\kappa(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{x}})+\kappa(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{y}})+\kappa(\mathbf{X}-\mathcal{E}_{\mathrm{x}}-\mathcal{E}_{\mathrm{y}})}{4}\Delta_{\mathrm{x}}^2 E_{\mathrm{z}}(\mathbf{X},t) \\
& -\Delta_{\mathrm{x}}^2 J_{\mathrm{z}}(\mathbf{X},t).
\end{aligned}
$$

Die Verwendung von Feldoperatoren macht dies kürzer und übersichtlicher

$$
\begin{aligned}
(3.2.4)\quad & 1/4\,\{1+\overline{\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\}\,\varepsilon(\mathbf{X})\Delta_{\mathrm{x}}^2\partial_t E_{\mathrm{z}}(\mathbf{X},t) = \\
& (1-\overline{\mathfrak{x}})\Delta_{\mathrm{x}} H_{\mathrm{y}}(\mathbf{X},t)+(\overline{\mathfrak{y}}-1)\Delta_{\mathrm{x}} H_{\mathrm{x}}(\mathbf{X},t) \\
& -1/4\,\{1+\overline{\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\}\,\kappa(\mathbf{X})\Delta_{\mathrm{x}}^2 E_{\mathrm{z}}(\mathbf{X},t) \\
& -\Delta_{\mathrm{x}}^2 J_{\mathrm{z}}(\mathbf{X},t).
\end{aligned}
$$

Schreibt man abkürzend

$$
(3.2.5)\quad
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathbf{X}) &= 1/4\{1+\overline{\mathfrak{a}}+\overline{\mathfrak{b}}+\overline{\mathfrak{a}}\overline{\mathfrak{b}}\} \quad \varepsilon(\mathbf{X}), \\
\kappa_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathbf{X}) &= 1/4\{1+\overline{\mathfrak{a}}+\overline{\mathfrak{b}}+\overline{\mathfrak{a}}\overline{\mathfrak{b}}\} \quad \kappa(\mathbf{X}), \\
\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathbf{X}) &= 1/4\{1+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\} \quad \mu(\mathbf{X}), \\
\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(\mathbf{X}) &= 1/4\{1+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\} \quad \sigma(\mathbf{X}),
\end{aligned}
$$

mit $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in\mathbb{O}$ und

$$
(3.2.6)\quad \tilde{a}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} a_{y,z}(\mathbf{X}) & 0 & 0 \\ 0 & a_{z,x}(\mathbf{X}) & 0 \\ 0 & 0 & a_{x,y}(\mathbf{X}) \end{pmatrix},
$$

$\tilde{a}(\mathbf{X}) \in \{\tilde{\mu}(\mathbf{X}), \tilde{\varepsilon}(\mathbf{X}), \tilde{\sigma}(\mathbf{X}), \tilde{\varkappa}(\mathbf{X})\}$, so wird insgesamt[8]

(3.2.7)

$$
\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{X},t) &= \frac{1}{\Delta_{\mathrm{x}}} \quad \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathfrak{z}}-1 & 1-\bar{\mathfrak{y}} \\ 1-\bar{\mathfrak{z}} & 0 & \bar{\mathfrak{x}}-1 \\ \bar{\mathfrak{y}}-1 & 1-\bar{\mathfrak{x}} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{X},t) \\
&\quad - \frac{\tilde{\varkappa}(\mathbf{X})}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})} \mathbf{E}(\mathbf{X},t) \\
&\quad - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})} \mathbf{J}(\mathbf{X},t)\,, \\
\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{X},t) &= \frac{1}{\Delta_{\mathrm{x}}} \quad \frac{1}{\tilde{\mu}(\mathbf{X})} \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{z}-1 & 1-\mathfrak{y} \\ 1-\mathfrak{z} & 0 & \mathfrak{x}-1 \\ \mathfrak{y}-1 & 1-\mathfrak{x} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{X},t) \\
&\quad - \frac{\tilde{\sigma}(\mathbf{X})}{\tilde{\mu}(\mathbf{X})} \mathbf{H}(\mathbf{X},t)\,.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (3.2.7) stellen das zeitkontinuierliche Yee-Schema dar.

Bild 3.2 zeigt das zeitliche Diskretisierungsschema. Die Repräsentativwerte des elektrischen Feldes werden den Zeitpunkten $T\Delta_{\mathrm{t}}$ zugeordnet, die des magnetischen den Zeiten $(T-1/2)\Delta_{\mathrm{t}}$. Die Diskretisierung der nicht eingezeichneten elektrischen Stromdichte ist der des *magnetischen* Feldes äquivalent. Der erste

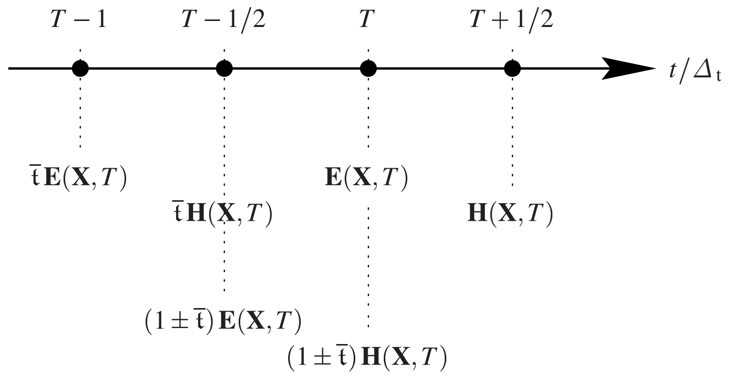

Bild 3.2. Zeitliches Diskretisierungsschema.

[8]Da $\tilde{\mu}(\mathbf{X})$ und $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})$ für die infragekommenden isotropen Medien Diagonalmatrizen sind, kann die Matrixdivision hier aufgrund der Kommutativität der Multiplikation symmetrischer Matrizen einfach als Bruch geschrieben werden.

Teil von (3.2.7) wird dem Zeitpunkt $t = (T-1/2)\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}$ zugeordnet. Es ist

(3.2.8)
$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{X},t)|_{t=(T-1/2)\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}} &\approx 1/\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}(1-\bar{\mathrm{t}})\,\mathbf{E}(\mathbf{X},T),\\
\mathbf{H}(\mathbf{X},t)|_{t=(T-1/2)\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}} &\approx \bar{\mathrm{t}}\quad \mathbf{H}(\mathbf{X},T),\\
\mathbf{E}(\mathbf{X},t)|_{t=(T-1/2)\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}} &\approx 1/2\ (1+\bar{\mathrm{t}})\,\mathbf{E}(\mathbf{X},T),\\
\mathbf{J}(\mathbf{X},t)|_{t=(T-1/2)\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}} &\approx \bar{\mathrm{t}}\quad \mathbf{J}(\mathbf{X},T),
\end{aligned}$$

sowie

(3.2.9)
$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{X},t)|_{t=T\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}} &\approx 1/\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}(1-\bar{\mathrm{t}})\,\mathbf{H}(\mathbf{X},T),\\
\mathbf{E}(\mathbf{X},t)|_{t=T\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}} &\approx \mathbf{E}(\mathbf{X},T),\\
\mathbf{H}(\mathbf{X},t)|_{t=T\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}} &\approx 1/2\ (1+\bar{\mathrm{t}})\,\mathbf{H}(\mathbf{X},T)
\end{aligned}$$

für den zweiten Teil von (3.2.7). Schreibt man (3.2.7) abkürzend als

(3.2.10)
$$\begin{aligned}
\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{X},t) &= \frac{1}{\mathit{\Delta}_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})}\bar{\mathbf{r}}\mathbf{H}(\mathbf{X},t) - \frac{\tilde{\varkappa}(\mathbf{X})}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})}\mathbf{E}(\mathbf{X},t) - \frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})}\mathbf{J}(\mathbf{X},t),\\
\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{X},t) &= \frac{1}{\mathit{\Delta}_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\mu}(\mathbf{X})}\mathbf{r}\mathbf{E}(\mathbf{X},t) - \frac{\tilde{\sigma}(\mathbf{X})}{\tilde{\mu}(\mathbf{X})}\mathbf{H}(\mathbf{X},t),
\end{aligned}$$

so ergibt sich

(3.2.11)
$$\begin{aligned}
\mathrm{t}^{-}\,\mathbf{E}(\mathbf{X},T) &= \frac{\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}}{\mathit{\Delta}_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})}\bar{\mathbf{r}}\bar{\mathrm{t}}\mathbf{H}(\mathbf{X},T) - \mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}\frac{\tilde{\varkappa}(\mathbf{X})}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})}\frac{1}{2}\mathrm{t}^{+}\mathbf{E}(\mathbf{X},T)\\
&\quad - \mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{X})}\quad \bar{\mathrm{t}}\ \mathbf{J}(\mathbf{X},T),\\
\mathrm{t}^{-}\,\mathbf{H}(\mathbf{X},T) &= \frac{\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}}{\mathit{\Delta}_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\mu}(\mathbf{X})}\mathbf{r}\mathbf{E}(\mathbf{X},T) - \mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}\frac{\tilde{\sigma}(\mathbf{X})}{\tilde{\mu}(\mathbf{X})}\frac{1}{2}\mathrm{t}^{+}\mathbf{H}(\mathbf{X},T)
\end{aligned}$$

mit $\mathrm{t}^{-} = (1-\bar{\mathrm{t}})$ und $\mathrm{t}^{+} = (1+\bar{\mathrm{t}})$.

Umstellen nach $\mathbf{E}(\mathbf{X},T)$ bzw. $\mathbf{H}(\mathbf{X},T)$ liefert das zeitdiskrete Yee–Schema

(3.2.12)
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{X},T) &= \frac{\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}}{\varkappa^{+}\mathit{\Delta}_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\bar{\mathbf{r}}\bar{\mathrm{t}}\mathbf{H}(\mathbf{X},T) + \frac{\varkappa^{-}}{\varkappa^{+}}\quad \bar{\mathrm{t}}\mathbf{E}(\mathbf{X},T)\\
&\quad - \frac{\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}}{\varkappa^{+}}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\bar{\mathrm{t}}\mathbf{J}(\mathbf{X},T),\\
\mathbf{H}(\mathbf{X},T) &= \frac{\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}}{\sigma^{+}\mathit{\Delta}_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\mu}}\mathbf{r}\mathbf{E}(\mathbf{X},T) + \frac{\sigma^{-}}{\sigma^{+}}\quad \bar{\mathrm{t}}\mathbf{H}(\mathbf{X},T)
\end{aligned}$$

mit[9]

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varkappa}^{+} &= 1+\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}, & \boldsymbol{\varkappa}^{-} &= 1-\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \\
\boldsymbol{\sigma}^{+} &= 1+\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}, & \boldsymbol{\sigma}^{-} &= 1-\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}.
\end{aligned}
\tag{3.2.13}
$$

Die Ortsabhängigkeit der Parameter ist nicht mehr explizit angegeben. Der Übersicht halber werden hier die Definitionen

$$
\tilde{a} = \begin{pmatrix} a_{y,z} & 0 & 0 \\ 0 & a_{z,x} & 0 \\ 0 & 0 & a_{x,y} \end{pmatrix},
\tag{3.2.14}
$$

$\tilde{a} \in \{\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varkappa}}\}$,

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} &= 1/4\{1+\overline{\mathfrak{a}}+\overline{\mathfrak{b}}+\overline{\mathfrak{a}}\overline{\mathfrak{b}}\} \quad \varepsilon, \\
\kappa_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} &= 1/4\{1+\overline{\mathfrak{a}}+\overline{\mathfrak{b}}+\overline{\mathfrak{a}}\overline{\mathfrak{b}}\} \quad \kappa, \\
\mu_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} &= 1/4\{1+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\} \quad \mu, \\
\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} &= 1/4\{1+\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\} \quad \sigma,
\end{aligned}
\tag{3.2.15}
$$

mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{O}$ und

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{z}-1 & 1-\mathfrak{y} \\ 1-\mathfrak{z} & 0 & \mathfrak{x}-1 \\ \mathfrak{y}-1 & 1-\mathfrak{x} & 0 \end{pmatrix}, \\
\overline{\mathbf{r}} &= \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mathfrak{z}}-1 & 1-\overline{\mathfrak{y}} \\ 1-\overline{\mathfrak{z}} & 0 & \overline{\mathfrak{x}}-1 \\ \overline{\mathfrak{y}}-1 & 1-\overline{\mathfrak{x}} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

nochmals aufgeführt.

Für die Verlustbehandlung gibt es auch ein anderes Zeitdiskretisierungsverfahren [29], das als Lösung einer gewöhnlichen Näherungsdifferentialgleichung mit zeitlichen Exponentialfunktionen gedeutet werden kann. Numerische Experimente mit einem eindimensionalen Yee–Schema zeigen die Gleichwertigkeit dessen mit der hier vorgestellten Methode [30]. Für gegen null gehende Leitfähigkeiten konvergieren die beiden Verfahren gegeneinander.

[9]Das Symbol 1 ist hier eine 3x3 Diagonalmatrix aus Einheitsfeldoperatoren.

An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, daß (3.2.12) auch unter Verwendung von Kreuzprodukten

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{r}\,\mathbf{E}(\mathbf{X},T), \\ \hat{\bar{\mathbf{r}}} \times \mathbf{H}(\mathbf{X},T) &= \bar{\mathbf{r}}\,\mathbf{H}(\mathbf{X},T) \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= (1-\mathfrak{x}\ 1-\mathfrak{y}\ 1-\mathfrak{z})^{\mathrm{T}}, \\ \hat{\bar{\mathbf{r}}} &= (1-\bar{\mathfrak{x}}\ 1-\bar{\mathfrak{y}}\ 1-\bar{\mathfrak{z}})^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

geschrieben werden kann.
Hierbei ist der als „ˆ” geschriebene Dualisierungsoperator linear und bijektiv. Er ordnet einem Vektor eine antisymmetrische Matrix zu. Der dazu inverse Operator wird durch das gleiche Symbol vertreten, so daß zweimaliges Dualisieren wieder den Ausgangsvektor ergibt. Der Definitionsbereich des inversen Operators umfaßt dabei ausdrücklich nur antisymmetrische Matrizen aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
Die Ähnlichkeit zu den kontinuierlichen Rotationsoperatoren im Nablakalkül ist auffallend. Der prinzipielle Unterschied besteht darin, daß $\hat{\mathbf{r}} \neq \hat{\bar{\mathbf{r}}}$ gilt und $\hat{\mathbf{r}}$ auch nicht durch Multiplikation mit einem Feldoperator in $\hat{\bar{\mathbf{r}}}$ überführt werden kann. Es ist nämlich

$$\hat{\bar{\mathbf{r}}} = -\begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathfrak{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathfrak{z}} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}. \tag{3.2.19}$$

Folgendes spricht für die allgemeine Verwendung der Matrizenschreibweise:

- Implementierung direkt „vom Blatt”.
- Einfache Behandlung von Eigenwertproblemen.
- Homogene Darstellung, da bei Diskontinuitäten in jedem Fall der Matrixkalkül zum Einsatz kommt.
- Ausnutzung des Assoziativgesetzes bei der Matrixmultiplikation.

Einziger Problemfall ist der Entwicklungssatz für das doppelte Kreuzprodukt. Dieser lautet im Matrizenkalkül

$$\mathbf{ABC} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{B}} \tag{3.2.20}$$

mit antisymmetrischen Matrizen $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und beliebiger Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$. Die Herleitung erfolgt unmittelbar über das doppelte Kreuzprodukt. Eine kreuzproduktfreie Darstellung, die auch für andere $\mathbf{C}$ oder höherdimensionale Räume Gültigkeit besitzt, ist über den Tensorkalkül möglich. Dem Dualisierungsoperator entspricht dann der Vorgang des Dualisierens durch Überschiebung mit einem Levi–Civita Tensor [31, 8.3.1.3].

3.2.2 Separation zur Herleitung des Multi–Mode FDTD–Verfahrens

Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt, erfolgt die Separation des Ausbreitungsverfahrens durch Ansatz von stehenden Wellen mit fester transversaler Wellenzahl k_z in z–Richtung. Es ist

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{x},t) &= \begin{pmatrix} \sin(k_z z) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(k_z z) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k_z z) \end{pmatrix} \mathbf{E}(x,y,t),\\
\mathbf{J}(\mathbf{x},t) &= \begin{pmatrix} \sin(k_z z) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(k_z z) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(k_z z) \end{pmatrix} \mathbf{J}(x,y,t),\\
\mathbf{H}(\mathbf{x},t) &= \begin{pmatrix} \cos(k_z z) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(k_z z) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(k_z z) \end{pmatrix} \mathbf{H}(x,y,t).
\end{aligned}
\tag{3.2.21}
$$

Der Separationsansatz (3.2.21) läßt sich sofort auf das diskrete Feld übertragen. Als Separationskonstante wird $K_z = k_z \varDelta_x$ verwendet. Es ist unter Berücksichtigung der Positionen der Repräsentativwerte im diskreten Feld nach Bild 3.1

(3.2.22)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{X},T) &= \begin{pmatrix} \sin(K_z Z) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(K_z Z) & 0 \\ 0 & 0 & \cos^{+}(K_z Z) \end{pmatrix} \mathbf{E}(X,Y,T),\\
\mathbf{J}(\mathbf{X},T) &= \begin{pmatrix} \sin(K_z Z) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(K_z Z) & 0 \\ 0 & 0 & \cos^{+}(K_z Z) \end{pmatrix} \mathbf{J}(X,Y,T),\\
\mathbf{H}(\mathbf{X},T) &= \begin{pmatrix} \cos^{+}(K_z Z) & 0 & 0 \\ 0 & \cos^{+}(K_z Z) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(K_z Z) \end{pmatrix} \mathbf{H}(X,Y,T),
\end{aligned}
$$

mit $\cos^+(K_z Z) = \cos(K_z(Z+1/2))$.
Aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(\bar{\mathfrak{z}}-1)\ \cos^+(K_z Z) &= 2\sin(\frac{K_z}{2})\sin(K_z Z), \\
(\mathfrak{z}-1)\ \sin(K_z Z) &= 2\sin(\frac{K_z}{2})\cos^+(K_z Z).
\end{aligned} \tag{3.2.23}
$$

Damit wird nach Herauskürzen der Separationsfunktionen[10]

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_t}{\varkappa^+\Delta_x}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\bar{\mathbf{r}}_2\bar{\mathfrak{t}}\mathbf{H}(X,Y,T)+\frac{\varkappa^-}{\varkappa^+}\quad\bar{\mathfrak{t}}\mathbf{E}(X,Y,T) \\
&\qquad -\frac{\Delta_t}{\varkappa^+}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\bar{\mathfrak{t}}\mathbf{J}(X,Y,T), \\
\mathbf{H}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_t}{\sigma^+\Delta_x}\frac{1}{\tilde{\mu}}\mathbf{r}_2\mathbf{E}(X,Y,T)+\frac{\sigma^-}{\sigma^+}\quad\bar{\mathfrak{t}}\mathbf{H}(X,Y,T)
\end{aligned} \tag{3.2.24}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \tilde{K}_z & 1-\mathfrak{y} \\ -\tilde{K}_z & 0 & \mathfrak{x}-1 \\ \mathfrak{y}-1 & 1-\mathfrak{x} & 0 \end{pmatrix}, \\
\bar{\mathbf{r}}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \tilde{K}_z & 1-\bar{\mathfrak{y}} \\ -\tilde{K}_z & 0 & \bar{\mathfrak{x}}-1 \\ \bar{\mathfrak{y}}-1 & 1-\bar{\mathfrak{x}} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.2.25}
$$

wobei $\tilde{K}_z = 2\sin(\frac{K_z}{2})$ als diskrete transversale Wellenzahl bezeichnet wird.

Aussage 3.3 *Das separierte Yee–Schema liefert nach Superposition der Moden dieselben Ergebnisse, die das dreidimensionale Yee–Schema für die vereinfachte Stockwerkstruktur nach Bild 2.2 ermittelt. Es kann auch* **vor** *der Diskretisierung separiert werden, dann wird* $\tilde{K}_z = K_z$.

3.3 Die Diskrete Wellengleichung zur vereinfachten Behandlung homogener Gebiete

In homogenen quellfreien Gebieten läßt sich das separierte Yee–Schema noch vereinfachen. Es ist

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{x}-1 \quad \mathfrak{y}-1 \quad \tilde{K}_z)\,\mathbf{r}_2 &= \hat{\mathbf{r}}_2^T\mathbf{r}_2 = 0, \\
(\bar{\mathfrak{x}}-1 \quad \bar{\mathfrak{y}}-1 \quad -\tilde{K}_z)\,\bar{\mathbf{r}}_2 &= \hat{\bar{\mathbf{r}}}_2^T\bar{\mathbf{r}}_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.3.1}
$$

[10]Die Materialparameter $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varkappa}$, $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\sigma}$ dürfen jetzt nicht mehr von Z abhängen.

und bei geeigneten Anfangsbedingungen somit wegen (3.2.24)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}(X,Y,T) &= 0, \\ \hat{\bar{\mathbf{r}}}_2^{\mathrm{T}}\,\mathbf{E}(X,Y,T) &= 0. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Dies entspricht den kontinuierlichen Gleichungen div $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = 0$, div $\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = 0$, die in homogenen quellfreien Gebieten Gültigkeit besitzen.
Gleichung (3.2.24) läßt sich ferner umformen in

(3.3.3)

$$\begin{aligned} \left(1-\tfrac{\boldsymbol{\sigma}^-}{\boldsymbol{\sigma}^+}\bar{\mathfrak{t}}\right)\left(1-\tfrac{\boldsymbol{\varkappa}^-}{\boldsymbol{\varkappa}^+}\bar{\mathfrak{t}}\right)\mathbf{E}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}^2}{\Delta_{\mathrm{x}}^2\tilde{\mu}\,\tilde{\varepsilon}\,\boldsymbol{\varkappa}^+\boldsymbol{\sigma}^+}\bar{\mathbf{r}}_2\,\mathbf{r}_2\,\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{E}(X,Y,T), \\ \left(1-\tfrac{\boldsymbol{\varkappa}^-}{\boldsymbol{\varkappa}^+}\bar{\mathfrak{t}}\right)\left(1-\tfrac{\boldsymbol{\sigma}^-}{\boldsymbol{\sigma}^+}\bar{\mathfrak{t}}\right)\mathbf{H}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}^2}{\Delta_{\mathrm{x}}^2\tilde{\mu}\,\tilde{\varepsilon}\,\boldsymbol{\varkappa}^+\boldsymbol{\sigma}^+}\mathbf{r}_2\,\bar{\mathbf{r}}_2\,\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{H}(X,Y,T). \end{aligned}$$

Nun ist wegen (3.2.20) und (3.3.1)[11]

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_2\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{E}(X,Y,T) &= -\hat{\bar{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}}\,\hat{\mathbf{r}}\,\mathbf{E}(X,Y,T), \\ \mathbf{r}_2\,\bar{\mathbf{r}}_2\,\mathbf{H}(X,Y,T) &= -\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\,\hat{\bar{\mathbf{r}}}\,\mathbf{H}(X,Y,T), \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

mit den skalaren Feldoperatoren

$$-\hat{\bar{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}}\,\hat{\mathbf{r}} = -\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}\,\hat{\bar{\mathbf{r}}} \;=\; \mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}+\mathfrak{y}+\bar{\mathfrak{y}}-4-\tilde{K}_{\mathrm{z}}^2. \tag{3.3.5}$$

Damit wird schließlich

(3.3.6)

$$\begin{aligned} \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{\varkappa}^-}{\boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{\varkappa}^+}\bar{\mathfrak{t}}-\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^-}{\boldsymbol{\sigma}^+}+\frac{\boldsymbol{\varkappa}^-}{\boldsymbol{\varkappa}^+}\right)+\mathfrak{t}\right]\mathbf{E}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}^2(\mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}+\mathfrak{y}+\bar{\mathfrak{y}}-4-\tilde{K}_{\mathrm{z}}^2)}{\Delta_{\mathrm{x}}^2\tilde{\mu}\,\tilde{\varepsilon}\,\boldsymbol{\varkappa}^+\boldsymbol{\sigma}^+}\mathbf{E}(X,Y,T), \\ \left[\frac{\boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{\varkappa}^-}{\boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{\varkappa}^+}\bar{\mathfrak{t}}-\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}^-}{\boldsymbol{\sigma}^+}+\frac{\boldsymbol{\varkappa}^-}{\boldsymbol{\varkappa}^+}\right)+\mathfrak{t}\right]\mathbf{H}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}^2(\mathfrak{x}+\bar{\mathfrak{x}}+\mathfrak{y}+\bar{\mathfrak{y}}-4-\tilde{K}_{\mathrm{z}}^2)}{\Delta_{\mathrm{x}}^2\tilde{\mu}\,\tilde{\varepsilon}\,\boldsymbol{\varkappa}^+\boldsymbol{\sigma}^+}\mathbf{H}(X,Y,T). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3.3.6) werden Diskrete Wellengleichungen (DWGn) genannt. Sie gelten auch für die einzelnen Feldkomponenten. Im folgenden werden nur die z–Komponenten der DWGn verwendet, nach [14, Kapitel 1.4] ist nämlich das quellfreie elektromagnetische Feld eindeutig durch zwei Feldkomponenten festgelegt.

---

[11] Für $\tilde{K}_{\mathrm{z}} = 0$ verschwinden die dritte Zeile und die dritte Spalte von $\hat{\mathbf{r}}\,\hat{\bar{\mathbf{r}}}^{\mathrm{T}}$ und $\hat{\bar{\mathbf{r}}}\,\hat{\mathbf{r}}^{\mathrm{T}}$. Zur Herleitung der DWG für $E_{\mathrm{z}}(X,Y,T)$ braucht dann (3.3.1) *nicht* verwendet zu werden, somit sind auch *inhomogene* Permittivität und elektrische Leitfähigkeit zulässig. Die magnetischen Materialparameter $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ müssen aber ortsunabhängig sein, da beim Schritt zum oberen Teil von (3.3.3) die Kommutativität der Multiplikation mit der Feldoperatormatrix $\bar{\mathbf{r}}_2$ ausgenutzt wird. Die Feldkomponente $H_{\mathrm{z}}(\mathbf{x},t)$ mit der Separationsfunktion $\sin(k_{\mathrm{z}}z)$ verschwindet bei $\tilde{K}_{\mathrm{z}} = 0$.

3.3.1 Untersuchung der Effektivität von Zeitbereichsverfahren auf Basis der Diskreten Wellengleichungen

Die diskreten Wellengleichungen ermöglichen eine Computerspeicher– und Rechenzeitersparnis gegenüber dem Yee–Schema bei zweidimensionalen Zeitbereichssimulationen. Die x und y–Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes gibt es in einer DWG–Zelle gar nicht. Da zeitlich neue Werte der z–Komponenten beider Felder bei der DWG von zwei vergangenen Werten abhängen, müssen vier Feldwerte pro Zelle im Computerspeicher gehalten werden, bei der Yee–Zelle sind es sechs[12].Dies bedeutet eine Speicherersparnis von 33 %.

Zur Ermittlung der Rechenzeitersparnis ist hier nochmals vereinfacht die Hälfte des Yee–Schemas

$$\mathbf{E}(X,Y,T) = c_1 \begin{pmatrix} 0 & \tilde{K}_\mathrm{z} & 1-\overline{\mathfrak{y}} \\ -\tilde{K}_\mathrm{z} & 0 & \overline{\mathfrak{x}}-1 \\ \overline{\mathfrak{y}}-1 & 1-\overline{\mathfrak{x}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_\mathrm{x}(X,Y,T) \\ H_\mathrm{y}(X,Y,T) \\ H_\mathrm{z}(X,Y,T) \end{pmatrix} + c_2 \overline{\mathfrak{t}} \mathbf{E}(X,Y,T) \tag{3.3.7}$$

und eine der diskreten Wellengleichungen

$$E_\mathrm{z}(X,Y,T) = c_3(\overline{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x} + \overline{\mathfrak{y}} + \mathfrak{y} + c_4)\,\overline{\mathfrak{t}} E_\mathrm{z}(X,Y,T) + c_5 \overline{\mathfrak{t}}^2 E_\mathrm{z}(X,Y,T) \tag{3.3.8}$$

mit den Konstanten c_1 bis c_5 angegeben[13]. Im verlustlosen Fall gilt $c_2 = 1$ und $c_5 = 1$.

Bei der diskreten Wellengleichung sind bei geschickter Implementierung 4 Ladeoperationen[14] , 1 Speicheroperation, 2 Multiplikationen und 4 Additionen pro Halbzelle erforderlich. Im verlustbehafteten Fall erhöht sich die Zahl der Multiplikationen auf 3.

Arbeitet man mit dem Yee–Schema, so werden pro Halbzelle 6 Ladeoperationen[15] , 3 Speicheroperationen, 5 Multiplikationen und 10 Additionen benötigt.

So ergibt sich eine Gesamtzahl von 10 zu 18 Speicherzugriffen und 6 zu 30 arithmetischen Operationen (bzw. 7 zu 31 im verlustbehafteten Fall) pro Gesamtzelle. Je nach Verhältnis der Speicherzugriffsgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit der arithmetischen Operationen wird die Rechnung mit den DWGn um den Faktor 1,5 bis 5 schneller von statten gehen.

---

[12] Bei $\tilde{K}_\mathrm{z} = 0$ sind es zwei Feldwerte bei der DWG–Zelle gegenüber dreien beim Yee–Verfahren.

[13] Ausdrücke für diese Konstanten können (3.2.24) bzw. (3.3.6) entnommen werden.

[14] Man zählt sechs, zwei können jedoch entfallen, wenn die Werte der letztbehandelten Zelle in Registern gehalten werden

[15] Bei geschickter Implementierung wie oben.

3.3.2 Verbindung des Multi–Mode FDTD–Verfahrens mit der Diskreten Wellengleichung zu einem Hybrid

Da sich die diskreten Wellengleichungen nur für homogene Gebiete herleiten lassen[16], müssen Diskontinuitäten mit dem Yee–Verfahren behandelt werden. Dazu muß festgelegt werden, ob eine Feldkomponente in einer Zelle mit dem Yee–Verfahren oder der DWG behandelt wird, oder ob sie gar nicht berechnet werden muß.

Die Homogenität der Materialparameter wurde bei der Gewinnung von (3.3.2) und (3.3.3) dahingehend ausgenutzt, daß die Kommutativität der Multiplikation zweier Feldoperatoren ausgenutzt wurde.

Speziell wurde bei der Herleitung der DWG für $H_z(X,Y,T)$ die Kommutativität der Multiplikation von $\mathbf{r}_2$ mit $1/(\boldsymbol{\varkappa}^+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$ und die von $(\mathfrak{x}-1, \mathfrak{y}-1, \tilde{K}_z)$ mit $\tilde{\boldsymbol{\mu}}\,\boldsymbol{\sigma}^+$ ausgenutzt. Läßt man die Voraussetzung der Homogenität fallen, so treten nach Einsetzen der Definitionen und Kommutation bei $\mathbf{r}_2\,1/(\boldsymbol{\varkappa}^+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})$ in der relevanten dritten Zeile die Terme $\mathfrak{x}\varepsilon$, $\overline{\mathfrak{x}}\varepsilon$, $\mathfrak{y}\varepsilon$ und $\overline{\mathfrak{y}}\varepsilon$ auf (dieselben Terme erscheinen auch mit κ). Die weitere Herleitung ist identisch zu der im homogenen Fall, wenn

$$
\begin{array}{lllllllll}
\mathfrak{x}\varepsilon & = & \overline{\mathfrak{x}}\varepsilon & = & \mathfrak{y}\varepsilon & = & \overline{\mathfrak{y}}\varepsilon & = & \varepsilon, \\
\mathfrak{x}\kappa & = & \overline{\mathfrak{x}}\kappa & = & \mathfrak{y}\kappa & = & \overline{\mathfrak{y}}\kappa & = & \kappa
\end{array}
\tag{3.3.9}
$$

für die Zelle gilt, in der die DWG für $H_z(X,Y,T)$ benutzt werden soll. Die zweite Kommutation liefert

$$
\begin{array}{lllllll}
\mathfrak{y}\mu & = & \mathfrak{x}\mu & = & \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mu & = & \mu, \\
\mathfrak{y}\sigma & = & \mathfrak{x}\sigma & = & \mathfrak{x}\mathfrak{y}\sigma & = & \sigma.
\end{array}
\tag{3.3.10}
$$

Die analoge Betrachtung für $E_z(X,Y,T)$ ergibt

$$
\begin{array}{lllllllll}
\mathfrak{x}\mu & = & \overline{\mathfrak{x}}\mu & = & \mathfrak{y}\mu & = & \overline{\mathfrak{y}}\mu & = & \mu, \\
\mathfrak{x}\sigma & = & \overline{\mathfrak{x}}\sigma & = & \mathfrak{y}\sigma & = & \overline{\mathfrak{y}}\sigma & = & \sigma, \\
\overline{\mathfrak{y}}\varepsilon & = & \overline{\mathfrak{x}}\varepsilon & = & \overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\varepsilon & = & \varepsilon, & & \\
\overline{\mathfrak{y}}\kappa & = & \overline{\mathfrak{x}}\kappa & = & \overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}\kappa & = & \kappa. & &
\end{array}
\tag{3.3.11}
$$

Dies soll nun illustriert werden. Dazu zeigt Bild 3.3 zunächst symbolisch das zweidimensionale Gitter für die Diskrete Wellengleichung. In Bild 3.4 sind dann notwendig homogene Gebiete für die Behandlung der fett dargestellten Feldkomponenten eingezeichnet. Gestrichelt fette Berandungen bezeichnen dabei Gebiete konstanter magnetischer Materialparameter, durchgezogene fette Berandungen Gebiete konstanter elektrischer Materialeigenschaften.

[16] außer bei $\tilde{K}_z = 0$, s.o.

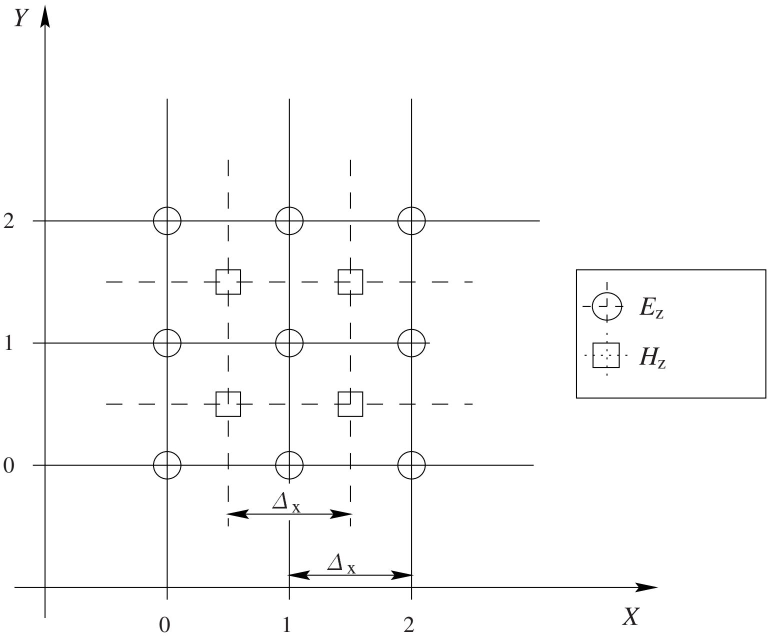

Bild 3.3. Zweidimensionales Gitter für die Diskreten Wellengleichungen.

Im Falle von inhomogenen Materialverteilungen, müssen diejenigen Feldkomponenten, für die diese Bedingungen nicht gelten, mit dem Yee–Schema behandelt werden. Dies gilt auch für die x und y–Komponenten des jeweils anderen Feldes, die einer solchen $H_z(X,Y,T)$ bzw. $E_z(X,Y,T)$–Komponente direkt benachbart sind und zur zeitabhängigen Berechnung derselben benötigt werden.
Bild 3.5 zeigt dazu zunächst die Symbolik für das zweidimensionale Yee-Gitter, Bild 3.6 zeigt ein hybrides Beispielgitter mit einer fett durchgezogen eingezeichneten Diskontinuität der elektrischen Materialparameter.
Es fällt auf, daß nur wenige Feldkomponenten mit dem langsamen Yee–Schema behandelt werden müssen.

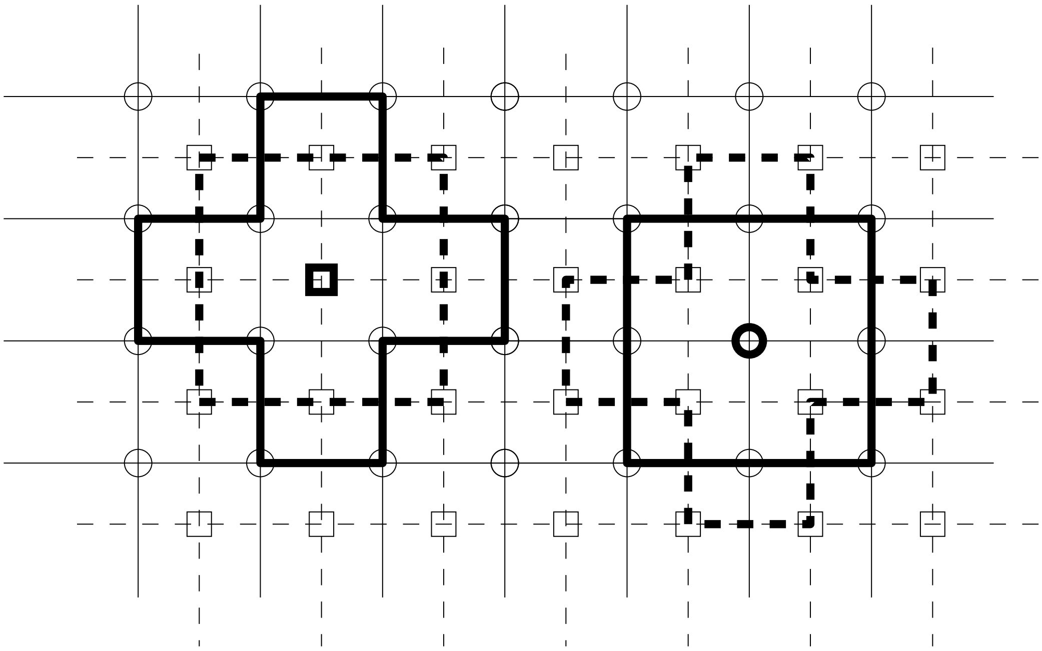

Bild 3.4. Gebiete notwendig homogener Materialparameter für die Anwendbarkeit der Diskreten Wellengleichungen auf die markierten Feldkomponenten. Dick durchgezogen umrandete Gebiete müssen homogene elektrische Materialparameter, dick gestrichelt umrandete Gebiete homogene magnetische Materialparameter aufweisen.

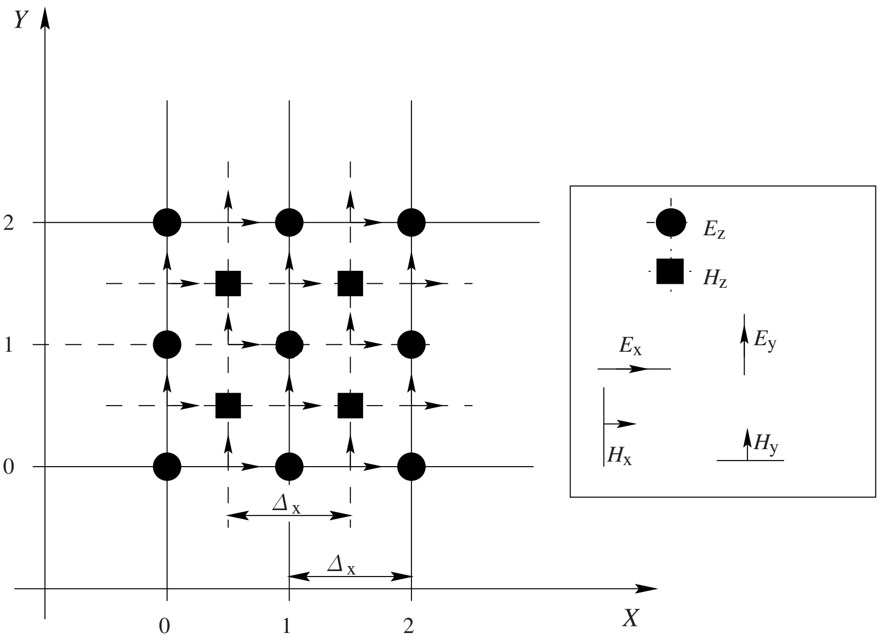

Bild 3.5. Zweidimensionales Gitter für das Yee–Schema.

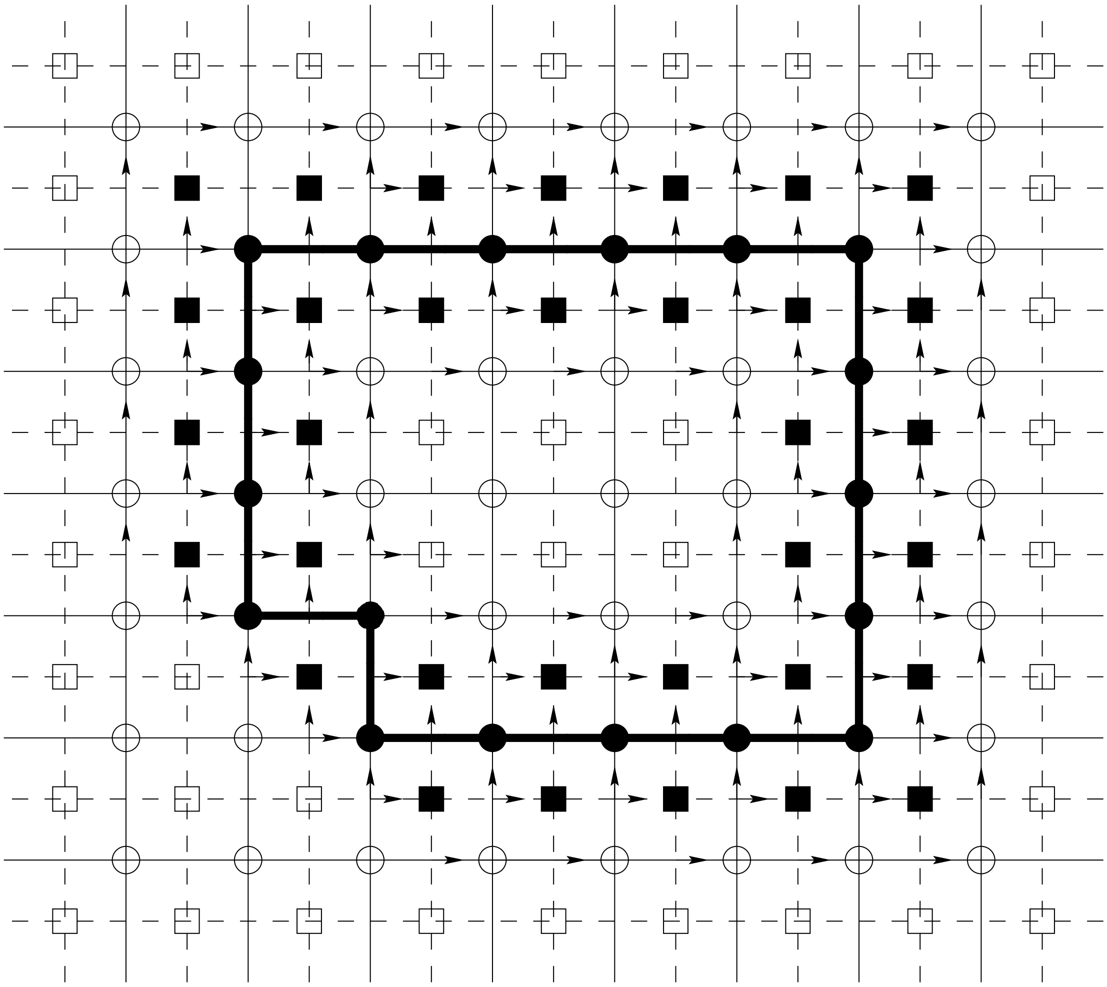

Bild 3.6. Zweidimensionales Gitter des hybriden Verfahrens im Falle einer unregelmäßigen Beispiel–Diskontinuität der elektrischen Materialparameter.

3.4 Absorbierende Randbedingungen: Der perfekte Absorber

Nur ein endlicher Teil des diskreten Feldraums kann im Computerspeicher gehalten werden. Setzt man die Umgebung dieses Teils als frei von Streuern voraus, so wird eine spezielle Behandlung der Ränder des Feldraums benötigt. An den Rändern sollen einfallende Wellen nicht reflektiert werden, man spricht daher auch von absorbierenden Randbedingungen (ABCs).
Lange Zeit standen keine zufriedenstellenden ABCs zur Verfügung. Mit diskretisierten Abstrahlbedingungen [32, 33] konnte zwar eine gewisse Reflexionsarmut erreicht werden, den Durchbruch aber brachte erst der perfekte Absorber, englisch Perfectly Matched Layer, kurz PML genannt [25, 34]. Dieser soll wegen seiner exzellenten Eigenschaften sowohl in der Ausbreitungssimulation als auch in der Antennensimulation zum Einsatz kommen. Nach einigen einleitenden Erläuterungen werden die PML–Gleichungen in diesem Kapitel mit Feldoperatoren geschrieben, dann separiert und so der zweidimensionalen Ausbreitungssimulation zugänglich gemacht.

3.4.1 Der perfekte Absorber im kontinuierlichen Raum

Inspiriert durch Absorber–Pyramiden in Antennenmeßräumen kann man versuchen, auch in der Simulationstechnik mit ausgedehnten verlustbehafteten Bereichen als ABCs zu arbeiten.
Im Falle senkrechten Welleneinfalls aus einem Luftgebiet auf einen mit elektrischen und magnetischen Verlusten behafteten Halbraum mit den Materialparametern $\mu_0, \sigma, \varepsilon_0$ und κ ergibt sich als Reflexionsfaktor

$$
\begin{aligned}
S_{11,\perp} &= \frac{Z_\mathrm{F} - Z_{\mathrm{F},0}}{Z_\mathrm{F} + Z_{\mathrm{F},0}}, \\
Z_{\mathrm{F},0} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \\
Z_\mathrm{F} &= \sqrt{\frac{\mathrm{j}\,\omega\,\mu_0 + \sigma}{\mathrm{j}\,\omega\,\varepsilon_0 + \kappa}} = Z_{\mathrm{F},0}\sqrt{\frac{1 - \mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega\,\mu_0}}{1 - \mathrm{j}\dfrac{\kappa}{\omega\,\varepsilon_0}}},
\end{aligned}
\tag{3.4.1}
$$

mit den Feldwellenimpedanzen Z_F und $Z_{\mathrm{F},0}$.
Vollständige Reflexionsfreiheit $S_{11,\perp} = 0$ erreicht man frequenzunabhängig bei $Z_\mathrm{F} = Z_{\mathrm{F},0}$, also bei

$$
\frac{\kappa}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\mu} = \alpha. \tag{3.4.2}
$$

Der Absorptionskoeffizient α ist der Kehrwert der elektrischen Relaxationszeit $\tau_{\mathrm{E}} = \varepsilon/\kappa$ und der magnetischen Relaxationszeit $\tau_{\mathrm{M}} = \mu/\sigma$ [35, Seite 7.26].

Im Falle beliebigen Einfalls einer ebenen Welle aus einem Luftbereich auf einen verlustbehafteten Halbraum gilt dies nicht mehr. Die Reflexionsfreiheit kann aber durch einen Kunstgriff gerettet werden, indem alle Feldkomponenten in zwei Anteile aufgeteilt werden [34]. Beispielsweise wird $H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t)$ in die Teilkomponenten $H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t)_{\mathrm{x_y}}(\mathbf{x},t)$ und $H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t)_{\mathrm{x_z}}(\mathbf{x},t)$ aufgespalten mit $H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t) = H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t)_{\mathrm{x_y}}(\mathbf{x},t) + H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t)_{\mathrm{x_z}}(\mathbf{x},t)$. Die Teilkomponente mit dem Subindex y bzw. z gehört dabei zu dem Anteil der Welle, der sich in y bzw. z–Richtung ausbreitet. Ein Absorber z.B. am Rand $y = 0$ würde dann anisotrop $H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t)_{\mathrm{x_y}}(\mathbf{x},t)$ mit Verlusten belegen, $H_{\mathrm{x}}(\mathbf{x},t)_{\mathrm{x_z}}(\mathbf{x},t)$ jedoch nicht. So werden die senktrecht zum Absorber einfallenden Anteile der Welle absorbiert, ohne sich tangential zum Absorber ausbreitende Wellenanteile zu beeinflussen.

Die Maxwellgleichungen lauten im Frequenzbereich für quellfreie verlustbehaftete Medien im Falle ebener Wellen $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}e^{\mathrm{j}k_{\mathrm{x}}x+k_{\mathrm{y}}y+k_{\mathrm{z}}z}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x},t) = \mathbf{H}e^{\mathrm{j}k_{\mathrm{x}}x+k_{\mathrm{y}}y+k_{\mathrm{z}}z}$ und unter Berücksichtigung von (3.4.2)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{j}\omega\,\varepsilon\,(1-\mathrm{j}\frac{\alpha}{\omega})\mathbf{E} &= \mathrm{j}\begin{pmatrix} 0 & -k_{\mathrm{z}} & k_{\mathrm{y}} \\ k_{\mathrm{z}} & 0 & -k_{\mathrm{x}} \\ -k_{\mathrm{y}} & k_{\mathrm{x}} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{H}, \\
\mathrm{j}\omega\,\mu\,(1-\mathrm{j}\frac{\alpha}{\omega})\mathbf{H} &= -\mathrm{j}\begin{pmatrix} 0 & -k_{\mathrm{z}} & k_{\mathrm{y}} \\ k_{\mathrm{z}} & 0 & -k_{\mathrm{x}} \\ -k_{\mathrm{y}} & k_{\mathrm{x}} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{E}.
\end{aligned}
\tag{3.4.3}
$$

Nach der erwähnten Aufteilung der Feldkomponenten ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathrm{j}\omega\varepsilon\,\mathbf{dg}\begin{pmatrix} \check{\alpha}_{\mathrm{y}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{z}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{z}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{x}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{x}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{y}} \end{pmatrix}\mathbf{E}^{\mathrm{VI}} &= \mathrm{j}\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{\mathrm{y}} \\ 0 & -k_{\mathrm{z}} & 0 \\ k_{\mathrm{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\mathrm{x}} \\ 0 & k_{\mathrm{x}} & 0 \\ -k_{\mathrm{y}} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}\mathbf{H}^{\mathrm{VI}}, \\
\mathrm{j}\omega\mu\,\mathbf{dg}\begin{pmatrix} \check{\alpha}_{\mathrm{y}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{z}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{z}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{x}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{x}} \\ \check{\alpha}_{\mathrm{y}} \end{pmatrix}\mathbf{H}^{\mathrm{VI}} &= -\mathrm{j}\begin{pmatrix} 0 & 0 & k_{\mathrm{y}} \\ 0 & -k_{\mathrm{z}} & 0 \\ k_{\mathrm{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\mathrm{x}} \\ 0 & k_{\mathrm{x}} & 0 \\ -k_{\mathrm{y}} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}\mathbf{E}^{\mathrm{VI}}
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{dg}\begin{pmatrix}\breve{\alpha}_\mathrm{y}\\ \breve{\alpha}_\mathrm{z}\\ \breve{\alpha}_\mathrm{z}\\ \breve{\alpha}_\mathrm{x}\\ \breve{\alpha}_\mathrm{x}\\ \breve{\alpha}_\mathrm{y}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1-\mathrm{j}\frac{\alpha_\mathrm{y}}{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-\mathrm{j}\frac{\alpha_\mathrm{z}}{\omega} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\mathrm{j}\frac{\alpha_\mathrm{z}}{\omega} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\mathrm{j}\frac{\alpha_\mathrm{x}}{\omega} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\mathrm{j}\frac{\alpha_\mathrm{x}}{\omega} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\mathrm{j}\frac{\alpha_\mathrm{y}}{\omega}\end{pmatrix},\\
\mathbf{E}^{\mathrm{VI}} &= \begin{pmatrix}E_{\mathrm{x_y}}\\ E_{\mathrm{x_z}}\\ E_{\mathrm{y_z}}\\ E_{\mathrm{y_x}}\\ E_{\mathrm{z_x}}\\ E_{\mathrm{z_y}}\end{pmatrix}, \mathbf{H}^{\mathrm{VI}} = \begin{pmatrix}H_{\mathrm{x_y}}\\ H_{\mathrm{x_z}}\\ H_{\mathrm{y_z}}\\ H_{\mathrm{y_x}}\\ H_{\mathrm{z_x}}\\ H_{\mathrm{z_y}}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.4.5}
$$

Es fällt auf, daß in die rechten Seiten von (3.4.5) nur die Summen der Teilkomponenten eingehen.

Im Ortsbereich hängt der Absorptionskoeffizient α_x nur von der x–Koordinate, α_y nur von y und α_z nur von z ab. Soll also ein dreidimensionaler Würfel $x \in \mathbb{R}^3$, $0 < x, y, z < d$ mit absorbierenden Rändern der Dicke a versehen werden, so wird beispielsweise bei $x \in]0, a[\cup]d-a, d[$ der Absorptionskoeffizient $\alpha_\mathrm{x} \neq 0$ gesetzt. In den Kanten des Würfels sind dann immer zwei Absorptionskoeffizienten von Null verschieden, in den Ecken alle drei.

Da für die Betrachtung hier zunächst der Halbraum $x > 0$ absorbierend sein soll, wählt man $\alpha_\mathrm{y} = 0$ und $\alpha_\mathrm{z} = 0$ und α_x konstant für $x > 0$.

Aussage 3.4 *Sind zwei Absorptionskoeffizienten gleich, braucht die Aufteilung der auf ihren Abhängigkeitsrichtungen senkrechten Feldkomponenten nicht zu erfolgen, da nach (3.4.5) in diesem Fall die nach außen einzig relevante Summe der Teilkomponenten wieder der entsprechenden Maxwellschen Gleichung gehorcht. Sind alle Absorptionskoeffizienten gleich, so ist (3.4.5) nach außen äquivalent zu den Maxwellschen Gleichungen.*

3.4.2 Reflexionsfreiheit einer ebenen Grenzschicht beim perfekten Absorber

Nun soll die Reflexionsfreiheit der Grenzschicht bei $x = 0$ gezeigt werden. Dazu müssen in beiden Halbräumen Feldtypen mit gleichem k_y und k_z untersucht werden, die die Grenzschichtbedingungen bei $x = 0$ erfüllen.

Zur Berechnung der Feldtypen wird (3.4.5) durch Elimination von $\mathbf{E}^{\mathrm{VI}}$ in die Eigenwertgleichung

(3.4.6)
$$\omega^2\mu\varepsilon\,\mathbf{H}^{\mathrm{VI}} = -\left[\mathbf{dg}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1/\check{\alpha}_{\mathrm{x}}\\1/\check{\alpha}_{\mathrm{x}}\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&k_{\mathrm{y}}\\0&-k_{\mathrm{z}}&0\\k_{\mathrm{z}}&0&0\\0&0&-k_{\mathrm{x}}\\0&k_{\mathrm{x}}&0\\-k_{\mathrm{y}}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,1\,0\,0\,0\,0\\0\,0\,1\,1\,0\,0\\0\,0\,0\,0\,1\,1\end{pmatrix}\right]^2\mathbf{H}^{\mathrm{VI}}$$

umgeformt[17]. Eigenwerte sind $\omega^2\mu\varepsilon = 0$ und

$$\begin{aligned}\omega^2\mu\varepsilon &= \frac{k_{\mathrm{x}}^2}{\check{\alpha}_{\mathrm{x}}{}^2}+k_{\mathrm{y}}^2+k_{\mathrm{z}}^2,\\ &= \left(\frac{k_{\mathrm{x}}}{1-\mathrm{j}\dfrac{\alpha_{\mathrm{x}}}{\omega}}\right)^2+k_{\mathrm{y}}^2+k_{\mathrm{z}}^2.\end{aligned}\tag{3.4.7}$$

Wir betrachten nun ω, k_{y} und k_{z} als von der im luftgefüllten Halbraum $x < 0$ einfallenden Welle vorgegeben. Dort wird wegen $\check{\alpha}_{\mathrm{x}} = 1$

$$k_{\mathrm{x}}^2\big|_{x<0} = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 - k_{\mathrm{y}}^2 - k_{\mathrm{z}}^2.\tag{3.4.8}$$

Dies ist dieselbe Relation, die die Maxwellschen Gleichungen für Luftbereiche liefern.

Gleichung (3.4.2) läßt es zu, für $x > 0$ die Materialparameter $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\mu = \mu_0$ zu setzen. Dann ist

$$\left(\frac{k_{\mathrm{x}}|_{x>0}}{\check{\alpha}_{\mathrm{x}}}\right)^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 - k_{\mathrm{y}}^2 - k_{\mathrm{z}}^2\tag{3.4.9}$$

und so

$$k_{\mathrm{x}}|_{x>0} = \pm\,\check{\alpha}_{\mathrm{x}}k_{\mathrm{x}}|_{x<0}\,.\tag{3.4.10}$$

Hier gilt das positive Vorzeichen, da die Wellen sich in beiden Halbräumen gleichgerichtet ausbreiten sollen.

[17] Bemerkenswert ist, daß $\check{\alpha}_{\mathrm{x}}$ noch von ω abhängt.

Der genannte Eigenwert ist doppelt, somit gibt es zwei linear unabhängige zugehörige Eigenvektoren, die bei allgemeinem $\check{\alpha}_x$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_1^{\mathrm{VI}} &= H_1 \left(k_y \frac{k_x}{\check{\alpha}_x},\ 0\ , -k_z^2, -\left(\frac{k_x}{\check{\alpha}_x}\right)^2,\ 0\ , k_y k_z \right)^{\mathrm{T}}, \\
\mathbf{H}_2^{\mathrm{VI}} &= H_2 \left(-k_y^2\ , -k_z^2,\ 0\ ,\ k_y \frac{k_x}{\check{\alpha}_x}\ , k_z \frac{k_x}{\check{\alpha}_x},\ 0 \right)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{3.4.11}
$$

sind. Die Wellenzahl k_x tritt hier nur im Quotienten mit $\check{\alpha}_x$ auf. Diese Eigenschaft gilt auch für die zugehörigen und mittels (3.4.5) ableitbaren (Die Diagonalmatrix in (3.4.5) ist gerade so beschaffen, daß die Multiplikation der rechten Seite von (3.4.5) mit der inversen derselben die angesprochenen Quotienten erzeugt) Eigenvektoren der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}_1^{\mathrm{VI}}$ und $\mathbf{E}_2^{\mathrm{VI}}$.

Die Wellenzahl k_x und die Absorption $\check{\alpha}_x$ sind die einzigen in (3.4.5) auftretenden Parameter, die sich in den betrachteten Halbräumen unterscheiden. In allen ausbreitungsfähigen Feldtypen tritt, wie gezeigt, nur der Quotient aus beiden auf. Dieser ist in beiden Halbräumen gleich. Damit sind auf beiden Seiten der Grenzschicht dieselben Feldtypen ausbreitungsfähig. Bei $x = 0$ können alle Grenzbedingungen[18] erfüllt werden, ohne eine reflektierte Welle ansetzen zu müssen. Somit ist der Übergang als generell reflexionsfrei identifiziert, da jede einfallende Welle nach den hier betrachteten ebenen Wellen entwickelt werden kann.

3.4.3 Diskretisierung des perfekten Absorbers

Vergleicht man die Maxwellschen Gleichungen (3.4.3) mit dem Yee–Schema (3.2.12), so kann in Analogie zu den erfolgten Umformungen (3.4.5) sofort dis-

[18] Es verblüfft zunächst, daß auch die Normalkomponenten des elektromagnetischen Feldes stetig sind. Da aber auf beiden Seiten der Grenzschicht die Materialparameter μ und ε gleich sind und die Leitfähigkeiten sich anisotrop nur auf die tangentialen Feldkomponenten auswirken, ist dies richtig.

kret als

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathrm{VI}} &= \mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{\alpha_y^-}{\alpha_y^+} \\ \frac{\alpha_z^-}{\alpha_z^+} \\ \frac{\alpha_z^-}{\alpha_z^+} \\ \frac{\alpha_x^-}{\alpha_x^+} \\ \frac{\alpha_x^-}{\alpha_x^+} \\ \frac{\alpha_y^-}{\alpha_y^+} \end{pmatrix} \bar{\mathfrak{t}}\mathbf{E}^{\mathrm{VI}} + \frac{\Delta_t}{\Delta_x \varepsilon_0}\, \mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_y^+} \\ \frac{1}{\alpha_z^+} \\ \frac{1}{\alpha_z^+} \\ \frac{1}{\alpha_x^+} \\ \frac{1}{\alpha_x^+} \\ \frac{1}{\alpha_y^+} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{VI}} \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1 \end{pmatrix} \bar{\mathfrak{t}}\mathbf{H}^{\mathrm{VI}} \\
\mathbf{H}^{\mathrm{VI}} &= \mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{\alpha_y^-}{\alpha_y^+} \\ \frac{\alpha_z^-}{\alpha_z^+} \\ \frac{\alpha_z^-}{\alpha_z^+} \\ \frac{\alpha_x^-}{\alpha_x^+} \\ \frac{\alpha_x^-}{\alpha_x^+} \\ \frac{\alpha_y^-}{\alpha_y^+} \end{pmatrix} \bar{\mathfrak{t}}\mathbf{H}^{\mathrm{VI}} + \frac{\Delta_t}{\Delta_x \mu_0}\, \mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_y^+} \\ \frac{1}{\alpha_z^+} \\ \frac{1}{\alpha_z^+} \\ \frac{1}{\alpha_x^+} \\ \frac{1}{\alpha_x^+} \\ \frac{1}{\alpha_y^+} \end{pmatrix} \mathbf{r}^{\mathrm{VI}} \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1 \end{pmatrix} \mathbf{E}^{\mathrm{VI}}
\end{aligned}
\tag{3.4.12}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\alpha^+ &= 1 + \tfrac{\Delta_t}{2}\alpha, \\
\alpha^- &= 1 - \tfrac{\Delta_t}{2}\alpha, \\
\mathbf{r}^{\mathrm{VI}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\mathfrak{y} \\ 0 & \mathfrak{z}-1 & 0 \\ 1-\mathfrak{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{x}-1 \\ 0 & 1-\mathfrak{x} & 0 \\ \mathfrak{y}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{3.4.13}
$$

$$
\bar{\mathbf{r}}^{\mathrm{VI}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\bar{\mathfrak{y}} \\ 0 & \bar{\mathfrak{z}}-1 & 0 \\ 1-\bar{\mathfrak{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathfrak{x}}-1 \\ 0 & 1-\bar{\mathfrak{x}} & 0 \\ \bar{\mathfrak{y}}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

angegeben werden. An dieser Stelle wird nochmals darauf hingewiesen, daß der Absorptionskoeffizient α_x nur von der x–Koordinate, α_y nur von y und α_z nur von z abhängt.

Auch der diskrete perfekte Absorber für den zweidimensionalen Fall läßt sich analog zum zweidimensionalen Yee–Schema gewinnen. Dazu ist lediglich $\mathbf{r}^\mathrm{VI}$ durch $\mathbf{r}_2^\mathrm{VI}$ bzw. $\overline{\mathbf{r}}^\mathrm{VI}$ durch $\overline{\mathbf{r}}_2^\mathrm{VI}$ zu ersetzen mit

$$\mathbf{r}_2^\mathrm{VI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\mathfrak{y} \\ 0 & \tilde{K}_\mathrm{z} & 0 \\ -\tilde{K}_\mathrm{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{x}-1 \\ 0 & 1-\mathfrak{x} & 0 \\ \mathfrak{y}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{r}}_2^\mathrm{VI} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\overline{\mathfrak{y}} \\ 0 & \tilde{K}_\mathrm{z} & 0 \\ -\tilde{K}_\mathrm{z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathfrak{x}}-1 \\ 0 & 1-\overline{\mathfrak{x}} & 0 \\ \overline{\mathfrak{y}}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4.14}$$

ferner ist immer $\alpha_\mathrm{z} = 0$.

Aussage 3.5 *Problematisch ist die in (3.4.12) nicht spezifizierte Diskretisierung der Ortsabhängigkeit der Absorptionskoeffizienten. Wählt man in gleicher Weise wie beim Yee–Schema (3.2.12) die Mittelwertbildung und betrachtet nochmals Bild 3.1, so wird offensichtlich, daß die magnetischen Materialparameter in einem anderem Gitter diskretisiert werden als die elektrischen. Dies ist eine anschauliche Erklärung dafür, daß der diskrete perfekte Absorber* ***nicht*** *völlig reflexionsfrei arbeitet, weil es stets einen Bereich der Ausdehnung $\Delta_\mathrm{x}/2$ gibt, in dem (3.4.2) nicht gilt.*

In dieser Arbeit wird auf die angesprochene Mittelwertbildung verzichtet. Die Absorptionskoeffizienten werden statt dessen jeweils punktuell an dieselbe Stelle wie die zugehörige Feldkomponente auf der linken Seite von (3.4.12) interpretiert.

Die in Aussage 3.5 angesprochenen Reflexionen werden in der Praxis dadurch fast eliminiert, daß man den jeweiligen Absorptionskoeffizienten über die Tiefe der absorbierenden Schicht langsam ansteigen läßt.

Meist [25] geschieht dies in der Form

$$\alpha_{\mathrm{x}}(x) = \alpha_{\max} \left(\frac{x - x_0}{d} \right)^n , \tag{3.4.15}$$

dabei ist x_0 die x–Koordinate der Grenzschicht des eigentlichen Feldraums mit dem absorbierenden Medium, d die Dicke der absorbierenden Schicht , $\alpha_{\max}$ der maximale Absorptionskoeffizient und n die Ordnung der Anstiegsfunktion. Für α_{y} und im dreidimensionalen Fall α_{z} gilt Entsprechendes.

3.4.4 Genauigkeitsuntersuchung des diskreten perfekten Absorbers

Bild 3.7 zeigt eine Teststruktur, mit deren Hilfe der perfekte Absorber quantitativ im eingeschwungenen Zustand bei $f = 1{,}8$ GHz untersucht wird. Die Zellgröße beträgt $\Delta_{\mathrm{x}} = 7$ mm. Entlang der eingezeichneten Kurve c werden Amplituden– und Phasenfehler in bezug auf einen perfekten Absorber mit der Schichtdicke $D = 25$, der diskreten Absorptionszahl $\Delta_{\mathrm{t}}\alpha = 4$ und dem Exponenten $n = 2$ bestimmt. In einer Testreihe wurden zu einer vorgegebenen Schichtdicke $D \in \{5, 10, 15\}$ die Parameter $\Delta_{\mathrm{t}}\alpha \in \{1, 2, .., 7\}$ und $n \in \{1, 2, .., 6\}$ für den besten maximalen relativen Amplitudenfehler der z–Komponente der elektrischen Feldestärke entlang der Kurve c ermittelt. In Tabelle 3.1 sind die Ergebnisse der Testreihe zusammengestellt.

Schon bei einer Schichtdicke von $D = 5$ ist der Fehler sehr klein. Wählt man 10 oder mehr Elemente als Schichtdicke, so können die durch den perfekten Absorber enstehenden Fehler mit Sicherheit gegenüber anderen Diskretisierungsfehlern vernachlässigt werden.

Die Untersuchung wurde mit ausbreitungsfähigen Wellenfeldern durchgeführt. Damit ist die Genauigkeit des perfekten Absorbers unbekannt, wenn er im Nahfeld eines Streuers postiert ist. Dieser Fall läßt sich schlecht allgemein untersuchen und ist daher zu vermeiden.

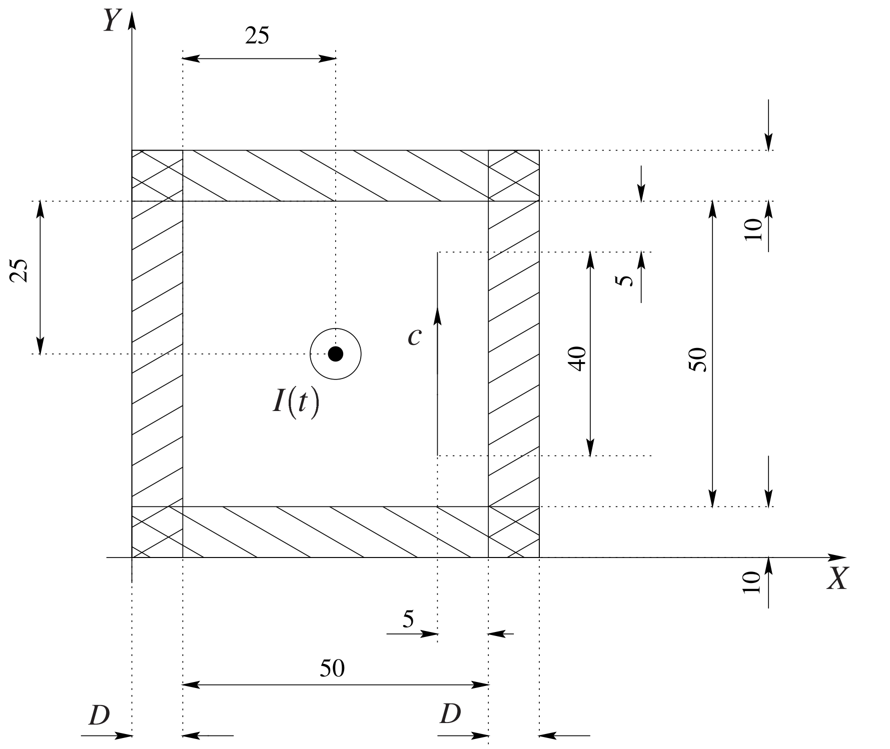

Bild 3.7. Teststruktur für den perfekten Absorber. Absorbierendes Material ist schraffiert, alle Zahlenangaben sind Zellanzahlen.

k_z	D	$\Delta_t\alpha$	n	Amplitudenfehler $F_{A,r}$	Phasenfehler F_P
0/m	5	5	2,0	$7{,}12 \cdot 10^{-4}$	$8{,}56 \cdot 10^{-4}$
30/m	5	5	2,0	$7{,}09 \cdot 10^{-4}$	$8{,}59 \cdot 10^{-4}$
0/m	10	7	4,0	$2{,}09 \cdot 10^{-5}$	$9{,}56 \cdot 10^{-6}$
30/m	10	7	4,0	$1{,}96 \cdot 10^{-5}$	$8{,}16 \cdot 10^{-6}$
0/m	15	1	2,0	$1{,}63 \cdot 10^{-6}$	$1{,}17 \cdot 10^{-5}$
30/m	15	1	2,0	$1{,}92 \cdot 10^{-6}$	$1{,}15 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 3.1. Ergebnisse der Testreihe für den perfekten Absorber nach Bild 3.7. Bei vorgegebener Schichtdicke D und transversaler Wellenzahl k_z ergibt sich für die angegebenen Parameter diskrete Absorptionszahl $\Delta_t\alpha \in \{1, 2, .., 7\}$ und Exponent $n \in \{1, 2, .., 6\}$ der maximale relative Amplitudenfehler $F_{A,r}$ der z–Komponente der elektrischen Feldstärke entlang der Kurve c. Der maximale absolute Phasenfehler im Bogenmaß ist F_P.

3.5 Stabilität, Dispersion und Genauigkeit

Stabilitäts– und Dispersionsuntersuchungen des Yee–Schemas für homogene isotrope verlustfreie Medien sind in [28, 36, 37] zu finden. Da diese Untersuchungen aber mit dem hier vorgestellten Kalkül auf der Ebene der Diskreten Wellengleichung besonders effektiv gestaltet werden können, soll an dieser Stelle auf Stabilität und Dispersion in homogenen quellenfreien Gebieten eingegangen werden. Hierbei fällt dem (schwach) verlustbehafteten Fall besonderes Augenmerk zu. Dieser tritt bei der Behandlung von Gebäudewänden auf, wo das Verhältnis der Wellenlänge zur Zellgröße besonders kritisch ist und somit zu untersuchungswürdigen Diskretisierungsfehlern führt.

Aussage 3.6 *Die zweidimensional ebenen Wellenfunktionen* $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)}$ *mit den diskreten Wellenzahlen* K_x, K_y *und der diskreten Kreisfrequenz* Ω *sind Eigenfunktionen der in der DWG verwendeten Feldoperatoren. Die Gesamtheit dieser Felder bildet räumlich ein vollständiges Funktionensystem, das z. B. bei der diskreten Fouriertransformation eingesetzt wird.*

Somit genügt es, für Stabilitäts– und Dispersionsuntersuchungen die genannten Felder zu betrachten, da die Anfangsbedingungen stets in eine Reihe von zweidimensional ebenen Wellenfeldern entwickelt werden können.

3.5.1 Stabilität und zeitliche Genauigkeit des Ausbreitungssimulationsverfahrens in homogenen quellenfreien verlustbehafteten Gebieten

Es ist

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{x}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)} &= \mathrm{e}^{+\mathrm{j}K_\mathrm{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)},\\
\overline{\mathfrak{x}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}K_\mathrm{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)},\\
\mathfrak{y}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)} &= \mathrm{e}^{+\mathrm{j}K_\mathrm{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)},\\
\overline{\mathfrak{y}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}K_\mathrm{y}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)},\\
\mathfrak{t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)} &= \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\Omega}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)},\\
\overline{\mathfrak{t}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)} &= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(K_\mathrm{x}X+K_\mathrm{y}Y+\Omega T)}.
\end{aligned} \tag{3.5.1}
$$

Setzt man die zweidimensional ebenen Wellenfelder in (3.3.6) ein, so ergibt sich mittels Substitution der Feldoperatoren durch ihre Eigenwerte

$$\begin{aligned}(3.5.2)\quad &\left[\boldsymbol{\sigma}^{-}\boldsymbol{\varkappa}^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}-\left(\boldsymbol{\sigma}^{-}\boldsymbol{\varkappa}^{+}+\boldsymbol{\varkappa}^{-}\boldsymbol{\sigma}^{+}\right)+\boldsymbol{\sigma}^{+}\boldsymbol{\varkappa}^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right]= \\ &\qquad V_{\mathrm{ph}}^{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}K_{\mathrm{x}}}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}K_{\mathrm{x}}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}K_{\mathrm{y}}}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}K_{\mathrm{y}}}-4-\tilde{K}_{\mathrm{z}}^{2}\right)= \\ &\qquad\qquad -V_{\mathrm{ph}}^{2}(4\sin^{2}(\tfrac{1}{2}K_{\mathrm{x}})+4\sin^{2}(\tfrac{1}{2}K_{\mathrm{y}})+\tilde{K}_{\mathrm{z}}^{2})=-\tilde{\Omega}^{2}.\end{aligned}$$

Dies ist die Dispersionsrelation im verlustbehafteten Fall mit der diskreten Phasengeschwindigkeit

$$(3.5.3)\qquad V_{\mathrm{ph}}=\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\Delta_{\mathrm{x}}\sqrt{\tilde{\mu}\,\tilde{\varepsilon}}}.$$

Stabilität herrscht bei einer Schrittverstärkung $|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}|\leq 1$, wobei gilt

(3.5.4)

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}=\frac{2\,(1-\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}})-\tilde{\Omega}^{2}\pm\sqrt{\left(2\,(1-\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}})-\tilde{\Omega}^{2}\right)^{2}+4\,(\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^{2}+\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{2}-\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{2}-1)}}{1+\overline{\boldsymbol{\sigma}}+\overline{\boldsymbol{\varkappa}}+\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}}}$$

mit $\overline{\boldsymbol{\varkappa}}=1-\boldsymbol{\varkappa}^{-}=\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ und $\overline{\boldsymbol{\sigma}}=1-\boldsymbol{\sigma}^{-}=\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$.
Ist der Term

$$(3.5.5)\qquad D=\left(2\,(1-\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}})-\tilde{\Omega}^{2}\right)^{2}+4\,(\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^{2}+\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{2}-\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^{2}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{2}-1)$$

unter der Wurzel negativ d. h. $\tilde{\Omega}^{2}\in I_1$ mit

(3.5.6)

$$I_1=\left]2-2\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}}-2\sqrt{(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{2}-1)\,(\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^{2}-1)},2-2\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}}+2\sqrt{(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{2}-1)\,(\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^{2}-1)}\right[,$$

so wird die Schrittverstärkung

$$(3.5.7)\qquad |\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}|=\sqrt{\frac{(1-\overline{\boldsymbol{\sigma}})\,(1-\overline{\boldsymbol{\varkappa}})}{(1+\overline{\boldsymbol{\sigma}})\,(1+\overline{\boldsymbol{\varkappa}})}}\quad\leq 1,$$

ist er positiv, so wird $|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}|\leq 1$, wenn $\tilde{\Omega}^{2}\in I_2=[-4\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}},4]$.

Stabilität herrscht also bei

$$\begin{aligned} &\tilde{\Omega}^2 \in (I_1 \cup I_2), \\ &\tilde{\Omega}^2 < \max\left(4, 2 - 2\overline{\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\sigma}} + 2\sqrt{\left(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^2 - 1\right)\left(\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^2 - 1\right)}\right). \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Im verlustlosen Fall ergibt sich aus (3.5.2) die bekannte [36] Dispersionsrelation

$$\sin^2(\frac{1}{2}\Omega) = V_{\text{ph}}^2\left(\sin^2(\frac{1}{2}K_{\text{x}}) + \sin^2(\frac{1}{2}K_{\text{y}}) + \frac{\tilde{K}_{\text{z}}}{2}^2\right), \tag{3.5.9}$$

die auch einprägsam als

$$\tilde{\Omega}^2 = V_{\text{ph}}^2(\tilde{K}_{\text{x}}^2 + \tilde{K}_{\text{y}}^2 + \tilde{K}_{\text{z}}^2) \tag{3.5.10}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= 2\sin(\frac{1}{2}\Omega), \\ \tilde{K}_{\text{x}} &= 2\sin(\frac{1}{2}K_{\text{x}}), \\ \tilde{K}_{\text{y}} &= 2\sin(\frac{1}{2}K_{\text{y}}) \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

geschrieben werden kann. Das Stabilitätskriterium wird dann

$$4 \geq V_{\text{ph}}^2\,(8 + \tilde{K}_{\text{z}}^2). \tag{3.5.12}$$

Die Erfüllung von (3.5.12) stellt im verlustlosen und im verlustbehafteten Fall stabiles Verhalten der DWG sicher, da (3.5.8) dann in jedem Fall erfüllt ist.

Gleichung (3.5.7) ermöglicht zusätzlich noch eine Aussage über die Genauigkeit der Verlustbehandlung bei räumlich ungedämpften aber zeitlich gedämpften Wellen. Im kontinuierlichen verlustbehafteten Medium liefert eine Analyse der dann gültigen Wellengleichung im Frequenz– und Spektralbereich

$$\omega^2\mu\varepsilon - \mathrm{j}\omega\,(\mu\kappa + \varepsilon\sigma) - \kappa\sigma = k_{\text{x}}^2 + k_{\text{y}}^2 + k_{\text{z}}^2 \tag{3.5.13}$$

mit komplexer Kreisfrequenz ω. So wird die Schrittverstärkung im Kontinuierlichen

$$\begin{aligned} |\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}|_{\text{k}} = |\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\Delta_{\text{t}}}| &= \mathrm{e}^{-\mathtt{Im}(\omega)\Delta_{\text{t}}} \\ &= \mathrm{e}^{-\overline{\boldsymbol{\sigma}}-\overline{\boldsymbol{\varkappa}}} \\ &= \mathrm{e}^{-\overline{\boldsymbol{\sigma}}}\mathrm{e}^{-\overline{\boldsymbol{\varkappa}}}. \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Nach (3.5.7) ist in der diskreten Näherung

(3.5.15) $$|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}| = \sqrt{\frac{(1-\overline{\boldsymbol{\sigma}})}{(1+\overline{\boldsymbol{\sigma}})}}\sqrt{\frac{(1-\overline{\boldsymbol{\varkappa}})}{(1+\overline{\boldsymbol{\varkappa}})}},$$

hier hängt also die Schrittverstärkung ebenfalls nur von Materialparametern und der zeitlichen Schrittweite Δ_{t} ab.

Zur Fehlerabschätzung kommt der relative Fehler $F_{\mathrm{r}} = \sqrt{\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)}/\mathrm{e}^{-\zeta} - 1$, $\zeta \in \mathbb{R}^+$ der Einzelfaktoren zum Zuge. Eine Reihenentwicklung liefert $F_{\mathrm{r}} \approx -\frac{1}{3}\zeta^3$, der relative Gesamtfehler der Schrittverstärkung $|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}|$ ist somit etwa $-\frac{1}{3}(\overline{\boldsymbol{\varkappa}}^3 + \overline{\boldsymbol{\sigma}}^3)$.

3.5.2 Dispersion in homogenen quellenfreien verlustbehafteten Gebieten

Der interessante Fall der zeitlich ungedämpften, räumlich abklingenden Wellen in verlustbehafteten Medien ist allgemein analytisch nur schwer zu untersuchen. Daher beschränkt sich diese Arbeit auf Wellen mit gleicher Ausbreitungs– und Dämpfungsrichtung[19] , wobei nur die Ausbreitung in $\mathcal{E}_{\mathrm{x}}$–Richtung (0°) und $(\mathcal{E}_{\mathrm{x}} + \mathcal{E}_{\mathrm{y}})$–Richtung (45°) untersucht wird. Im verlustlosen Fall treten die Extremwerte des Fehlers gerade in diesen Richtungen auf [37].

Dann wird aus (3.5.2)

(3.5.16)
$$\boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{\varkappa}^-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega} - \left(\boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{\varkappa}^+ + \boldsymbol{\varkappa}^-\boldsymbol{\sigma}^+\right) + \boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{\varkappa}^+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega} = -V_{\mathrm{ph}}^2(4a^2\sin^2[\frac{1}{2a}K] + \tilde{K}_{\mathrm{z}}^2)$$

mit $a = 1$ bei 0° und $a = \sqrt{2}$ im 45°–Fall.

Mit $\arcsin(\sqrt{\zeta}) = -\mathrm{j}\ln(\pm\sqrt{1-\zeta} \pm \mathrm{j}\sqrt{\zeta})$, $\zeta \in \mathbb{C}$ läßt sich (3.5.16) bei gegebenem Ω stets nach der komplexen Wellenzahl K auflösen,

(3.5.17)
$$K = 2a\arcsin\sqrt{-\frac{1}{4a^2}\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{\varkappa}^-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega} - (\boldsymbol{\sigma}^-\boldsymbol{\varkappa}^+ + \boldsymbol{\varkappa}^-\boldsymbol{\sigma}^+) + \boldsymbol{\sigma}^+\boldsymbol{\varkappa}^+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}}{V_{\mathrm{ph}}^2} + \tilde{K}_{\mathrm{z}}^2\right]}.$$

[19]Die Ausbreitungsrichtung ist hierbei die Richtung des Realteils des komplexen Wellenvektors, die Dämpfungsrichtung die Richtung seines Imaginärteils.

Im verlustlosen Fall ist die Verfahrensdispersion an der Stabilitätsgrenze minimal [37], daher wird hier nur

$$V_{\mathrm{ph}} = \sqrt{\frac{4}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\tilde{K}_{\mathrm{z}}^2+8)}} \tag{3.5.18}$$

betrachtet, damit Luftbereiche stabil sind und dort günstige Verfahrensbedingungen herrschen.
Ferner sollen nur elektrische Verluste berücksichtigt werden, somit ist

$$K = 2a \arcsin \sqrt{-\frac{1}{4a^2}\left[\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\tilde{K}_{\mathrm{z}}^2+8)}{4}\left(\varkappa^{-}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega} - 2 + \varkappa^{+}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega}\right) + \tilde{K}_{\mathrm{z}}^2\right]} \tag{3.5.19}$$

die auszuwertende Dispersionsrelation.
Kontinuierliche Analyse mittels (3.5.13) ergibt als Vergleichsrelation

$$K_{\mathrm{k}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\tilde{K}_{\mathrm{z}}^2+8)}{4}\left(\Omega^2 - 2\mathrm{j}\,\Omega\,\overline{\varkappa}\right) - \tilde{K}_{\mathrm{z}}^2}. \tag{3.5.20}$$

Die Diagramme 3.1 bis 3.4 zeigen den Betrag des relativen Fehlers[20] der komplexen diskreten Wellenzahl K in Abhängigkeit der Frequenz f in der Praxis. Die Zellgröße Δ_{x} nimmt dabei für die Ausbreitungssimulation bis 2 GHz den Wert von 7 mm an. Parameter ist die Wellenzahl k_{z} von k_{z} = 0 bis k_{z} = 30 /m.

Sieht man von der unmittelbaren Umgebung der jeweiligen Grenzfrequenz ab, so bleibt der Fehler für Frequenzen bis 2 GHz im Luftbereich unter 0,3 %, in Kalkstein unter 15 %.

Die Diagramme 3.5 und 3.6 zeigen den Betrag des relativen Fehlers der komplexen diskreten Wellenzahl K in Abhängigkeit der Frequenz f für k_{z} = 30 /m und Ausbreitung in $\mathcal{E}_{\mathrm{x}}$–Richtung. Dies ist der kritischste Fall. Als Parameter ist die Zellgröße Δ_{x} aufgetragen.

Bei einer Zellgröße von $\Delta_{\mathrm{x}} = 10$ mm liegt der Fehler im Luftbereich um 3 % und ist somit tolerabel, in Kalkstein wird er mit bis zu 70 % zu groß. Fordert man einen Fehler unter 10 %, so muß mit $\Delta_{\mathrm{x}} \leq 6$ mm gerechnet werden.

Da die Zellgröße zur dritten Potenz in den Rechenaufwand eingeht, ist eine weiter Untersuchung relevanter Simulationsergebnisse wie z. B. Reflexionsfaktoren

[20] In Diagramm 3.1 verschwindet der Fehler für k_{z}=0, das Verfahren arbeitet dann dispersionsfrei in 45°–Richtung.

zweidimensional ebener Wellen an verlustbehafteten ebenen Grenzschichten erforderlich, um die Zellen so groß wie möglich wählen zu können.
Die genannte Untersuchung erfolgt im nächsten Abschnitt.

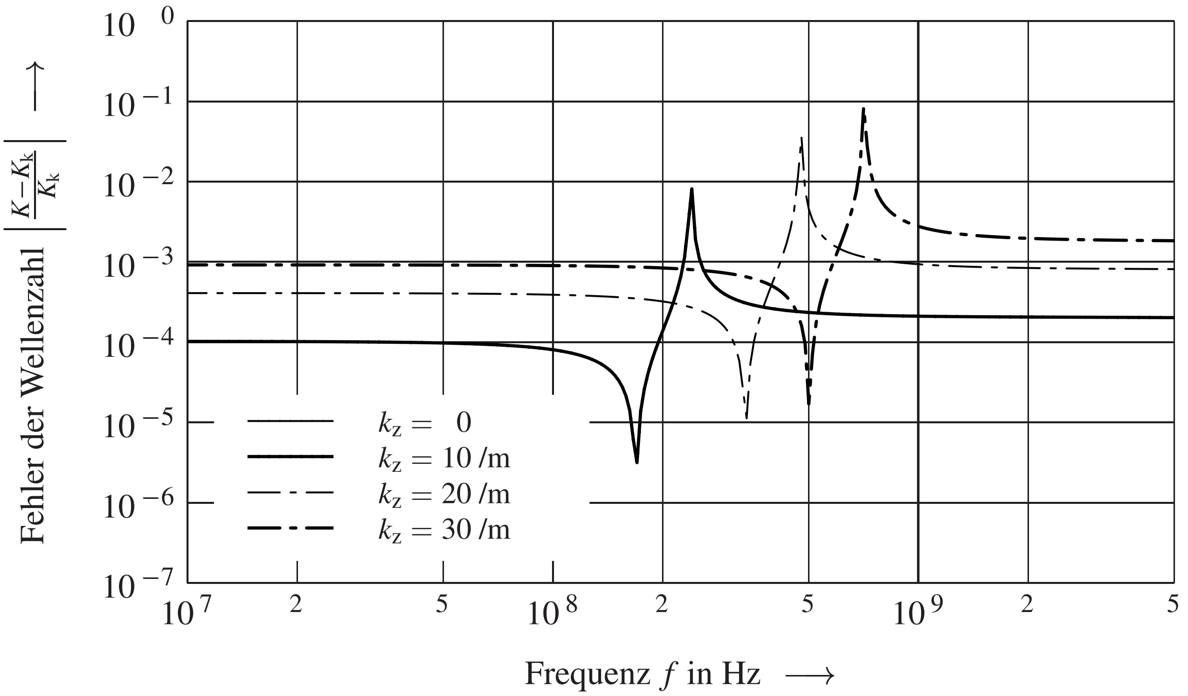

Diagramm 3.1. Frequenzabhängiger Betrag des relativen Fehlers der komplexen diskreten Wellenzahl im verlustlosen Fall für Ausbreitung in $\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y$–Richtung ($\varepsilon_r = 1$, $\Delta_x = 7$ mm).

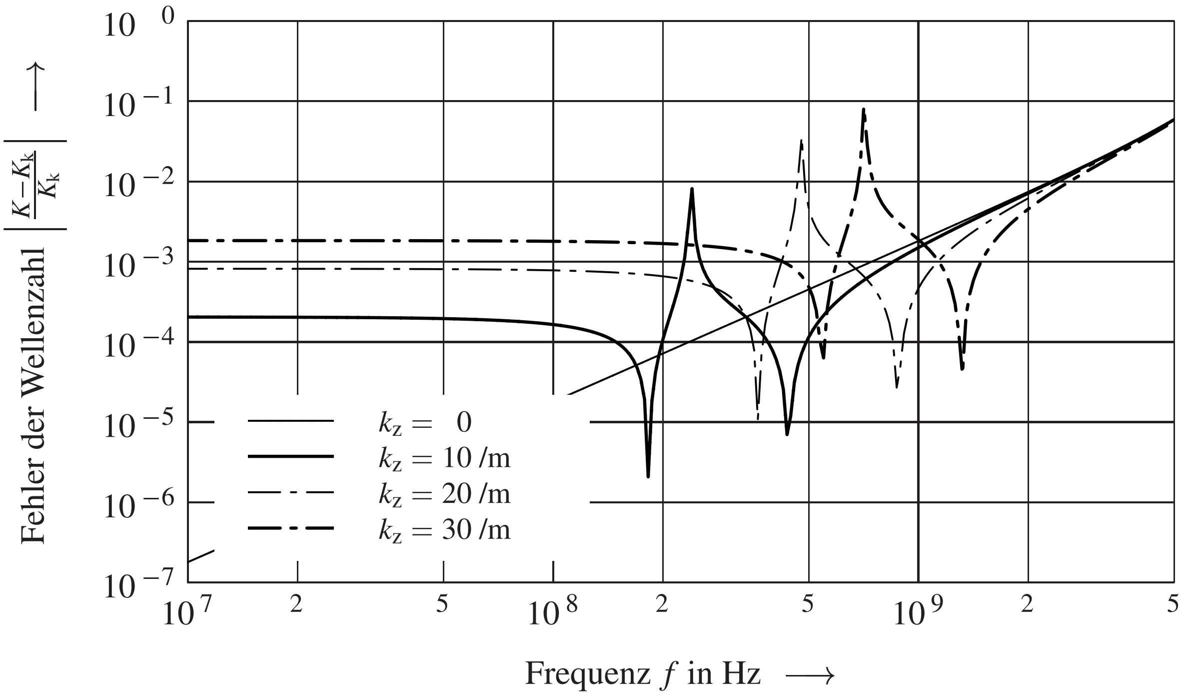

Diagramm 3.2. Frequenzabhängiger Betrag des relativen Fehlers der komplexen diskreten Wellenzahl im verlustlosen Fall für Ausbreitung in $\mathcal{E}_x$–Richtung ($\varepsilon_r = 1$, $\Delta_x = 7$ mm).

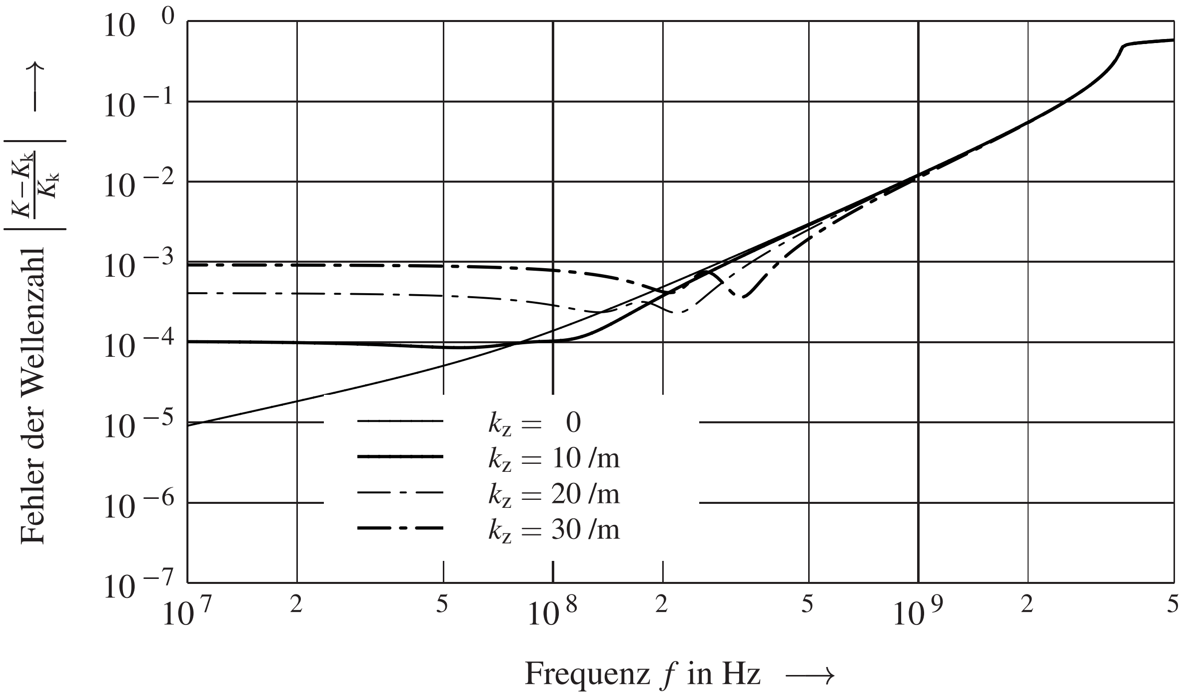

Diagramm 3.3. Frequenzabhängiger Betrag des relativen Fehlers der komplexen diskreten Wellenzahl in Kalkstein für Ausbreitung in $\mathcal{E}_x$+$\mathcal{E}_y$–Richtung ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m, $\Delta_x = 7$ mm).

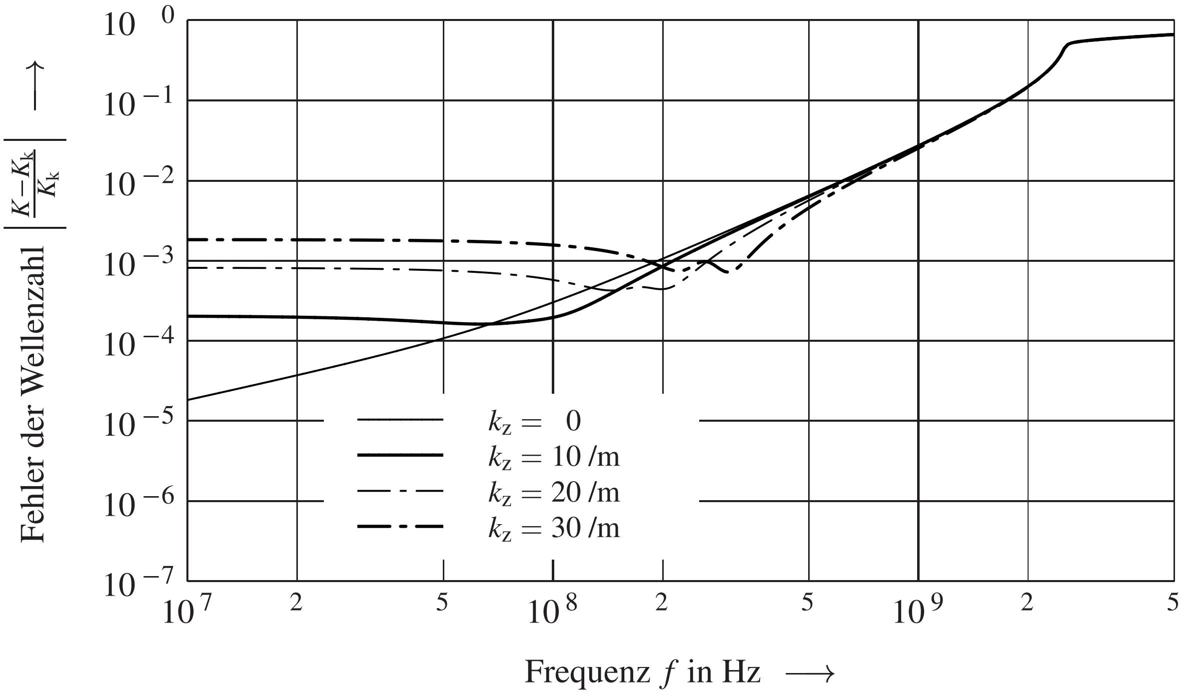

Diagramm 3.4. Frequenzabhängiger Betrag des relativen Fehlers der komplexen diskreten Wellenzahl in Kalkstein für Ausbreitung in $\mathcal{E}_x$–Richtung ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m, $\Delta_x = 7$ mm).

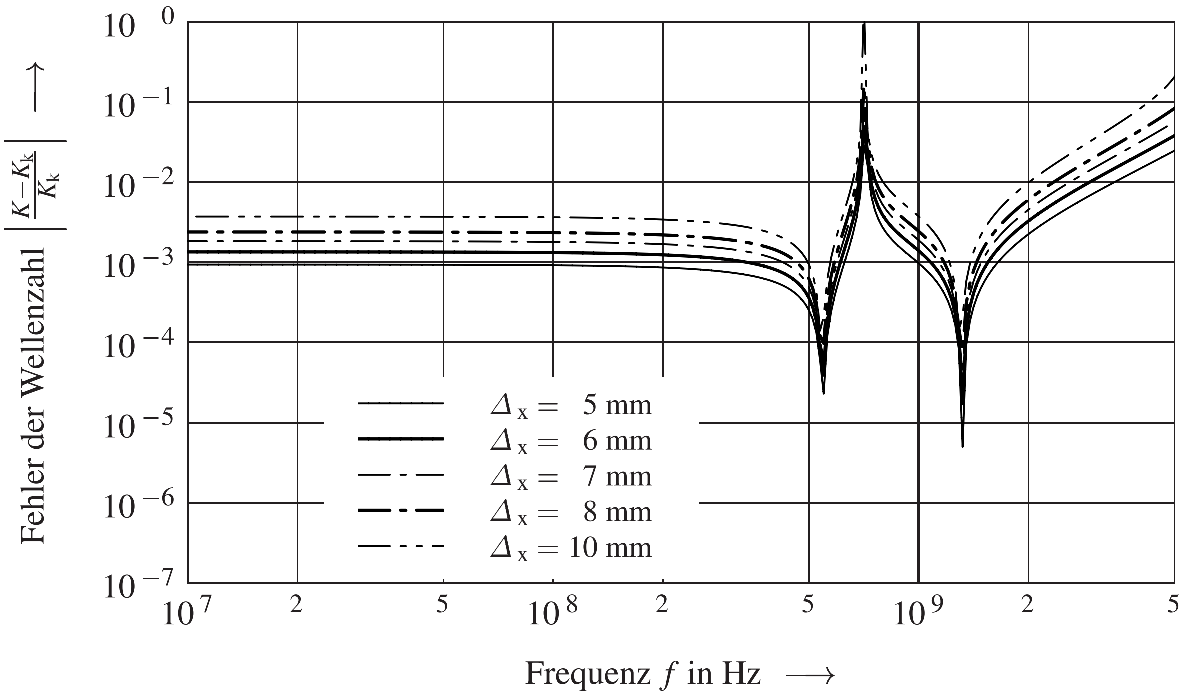

Diagramm 3.5. Frequenzabhängiger Betrag des relativen Fehlers der komplexen diskreten Wellenzahl im verlustlosen Fall für Ausbreitung in $\mathcal{E}_x$–Richtung ($\varepsilon_r = 1$, k_z = 30 /m).

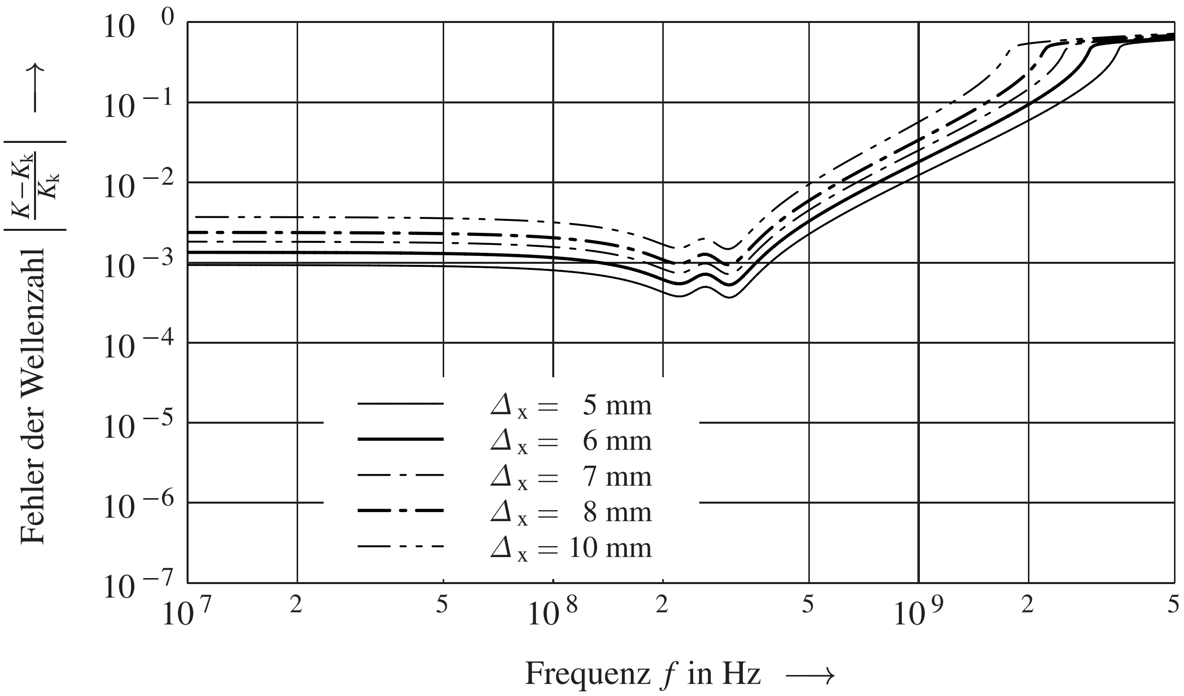

Diagramm 3.6. Frequenzabhängiger Betrag des relativen Fehlers der komplexen diskreten Wellenzahl in Kalkstein für Ausbreitung in $\mathcal{E}_x$–Richtung ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m, k_z = 30 /m).

3.5.3 Untersuchung der Genauigkeit des simulierten Reflexionsfaktors praxisnaher Diskontinuitäten

Um die Zellen für gegebene Genauigkeitsansprüche maximal groß wählen zu können, wird hier die Genauigkeit der Ausbreitungssimulation für den Fall einer Grenzschicht zwischen Luft und Kalkstein untersucht. Berechnet wird der absolute Fehler des Betrages des Reflexionsfaktors der genannten Struktur.

Aussage 3.7 *Um eine beliebige eindimensionale Schichtstruktur behandeln zu können, genügt eine eindimensionale FDTD–Simulation mit fester diskreter Wellenzahl $\tilde{K}_\mathrm{y}$ in y–Richtung. Damit lassen sich zweidimensional ebene Wellen mit beliebigem Einfallswinkel erfassen.*

Die Herleitung des eindimensionalen FDTD–Verfahrens geschieht einfacherweise mit Substitution der Feldoperatoren $\mathfrak{y}$ und $\overline{\mathfrak{y}}$ durch ihre Eigenwerte in (3.2.25)

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{K}_\mathrm{z} & -\tilde{K}_\mathrm{y} \\ -\tilde{K}_\mathrm{z} & 0 & \mathfrak{x}-1 \\ \tilde{K}_\mathrm{y} & 1-\mathfrak{x} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{K}_\mathrm{z} & -\tilde{K}_\mathrm{y} \\ -\tilde{K}_\mathrm{z} & 0 & \overline{\mathfrak{x}}-1 \\ \tilde{K}_\mathrm{y} & 1-\overline{\mathfrak{x}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5.21}$$

Die Gleichung (3.2.24) wird dann durch Ersatz von $\mathbf{r}_2$ durch $\mathbf{r}_1$ bzw. $\overline{\mathbf{r}}_2$ durch $\overline{\mathbf{r}}_1$ zu einem eindimensionalen FDTD–Schema.

Höhere Moden ($\tilde{K}_\mathrm{z} \neq 0$) und Moden mit schrägem Welleneinfall ($\tilde{K}_\mathrm{y} \neq 0$) besitzen eine Grenzfrequenz, unterhalb der sie nicht ausbreitungsfähig sind. Bei Zeitbereichssimulationen läßt es sich nur schlecht vermeiden, auch nicht ausbreitungsfähige Anteile anzuregen. Dies stört bei der eigentlichen Ausbreitungssimulation wenig.

Hier aber bereitet die genannte Tatsache Schwierigkeiten bei der zeitlichen Trennung von hin– rücklaufender Welle. Daher ist es geschickt, die eindimensionale Simulation im Frequenzbereich durchzuführen. Dazu wird in (3.2.24) $\mathfrak{t}$ durch $e^{\mathrm{j}\Omega}$ und $\overline{\mathfrak{t}}$ durch $e^{-\mathrm{j}\Omega}$ ersetzt. Es entsteht ein lineares Gleichungssystem, dessen Systemmatrix eine Bandstruktur mit kleiner Bandbreite aufweist.

Absorbierende Randbedingungen lassen sich im Frequenzbereich sehr einfach mit Hilfe der im letzten Unterabschnitt diskutierten Dispersionsrelation darstellen. Diese funktionieren auch im verlustbehafteten Fall.

Die Diagramme 3.7 bis 3.9 zeigen den Fehler des genannten Reflexionsfaktors in Abhängigkeit der Frequenz mit der Zellgröße als Parameter.

Die Bezugsebene liegt 2 m vor der Grenzschicht, daher tritt in Diagramm 3.8 und 3.9 ein Hochpaßcharakter zutage. In Diagramm 3.7 läßt sich weiterhin erkennen, daß das untersuchte Verfahren die Ordnung zwei besitzt. Eine Verzehnfachung der Frequenz verhundertfacht den Fehler.

Der absolute Fehler des Reflexionsfaktors liegt auch bei höheren Moden und schrägem Welleneinfall klar unter 10 %, wenn die Zellen kleiner als 1 cm sind.

Die Diagramme 3.7 bis 3.9 zeigen den frequenzabhängigen Reflexionsfaktor einer typischen Kalksteinwand bei verschiedenen Zellgrößen. Auch hier stellt bei Frequenzen bis 2 GHz eine Zellgröße von 7 mm einen guten Kompromiß in der Abwägung von Rechenaufwand und Diskretisierungsfehler dar.

Zur endgültigen Bewertung ist in den Diagrammen 3.10 und 3.11 nochmals der absolute Fehler des Reflexionsfaktors einer typischen Kalksteinwand in Abhängigkeit des Einfallswinkels bei einer Frequenz von 1,8 GHz aufgetragen. Hier liegt der maximale absolute Fehler bei einer Zellgröße von 7 mm knapp über 10 %.

Aussage 3.8 *In der Ausbreitungssimulation entsteht der Hauptanteil des Diskretisierungsfehlers in Objekten mit kleiner Phasengeschwindigkeit, speziell in hochpermittiven Gebäudewänden. Numerische Experimente legen es nahe, den Fehler hauptsächlich der Verfahrensdispersion anzulasten. Reflexionsfaktoren, in die die Verfahrensdispersion eingeht, werden um ungefähr eine Größenordnung ungenauer ermittelt als solche, bei denen dies nicht der Fall ist.*

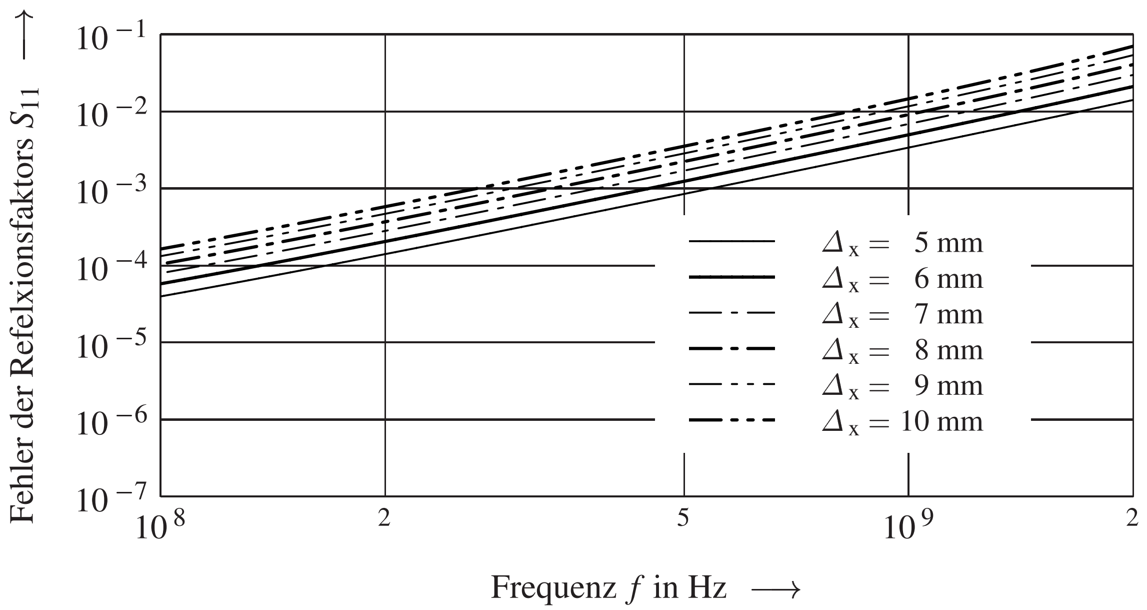

Diagramm 3.7. Frequenzabhängiger Betrag des absoluten Fehlers des Reflexionsfaktors S_{11} einer Welle mit den transversalen Wellenzahlen $k_y = 0$ und $k_z = 0$ an einer Grenzschicht zwischen Luft und Kalkstein ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m).

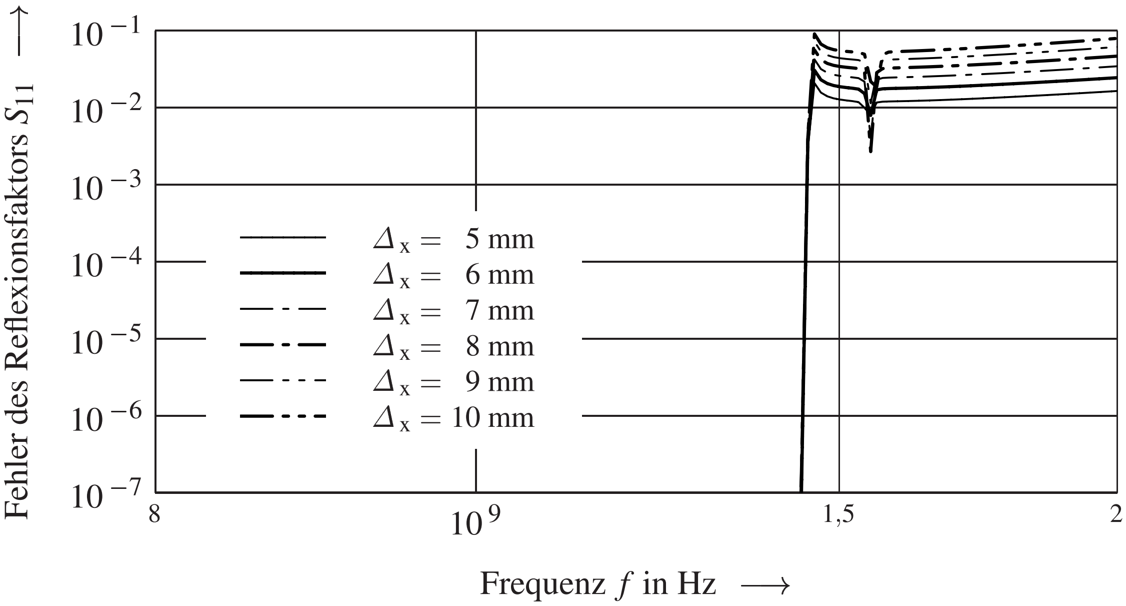

Diagramm 3.8. Frequenzabhängiger Betrag des absoluten Fehlers des Reflexionsfaktors S_{11} einer Welle mit den transversalen Wellenzahlen $k_y = 0$ und $k_z = 30$/m an einer Grenzschicht zwischen Luft und Kalkstein ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m).

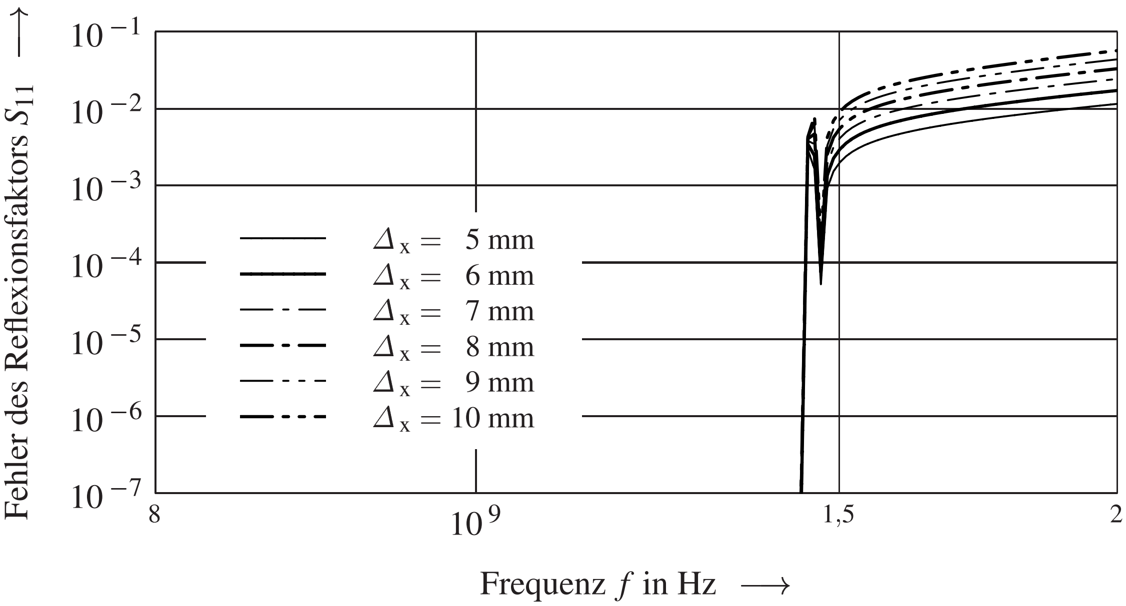

Diagramm 3.9. Frequenzabhängiger Betrag des absoluten Fehlers des Reflexionsfaktors S_{11} einer Welle mit den transversalen Wellenzahlen $k_y = 30$/m und $k_z = 0$ an einer Grenzschicht zwischen Luft und Kalkstein ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m).

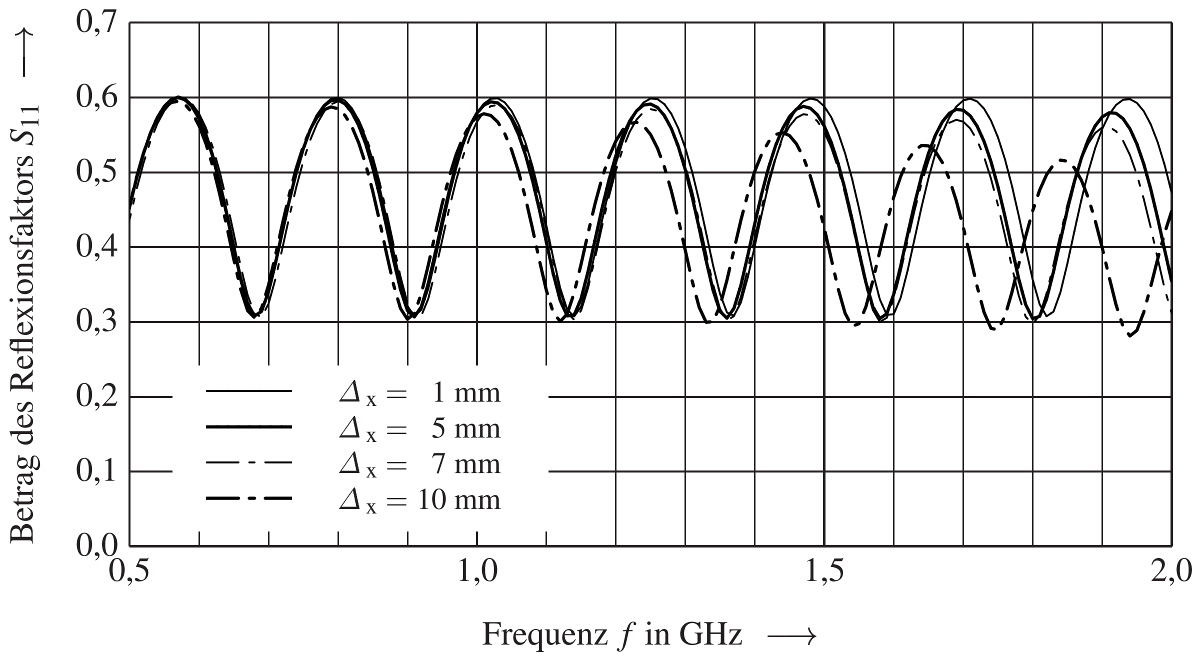

Diagramm 3.10. Frequenzabhängiger Reflexionsfaktor $|S_{11}|$ einer Welle mit den transversalen Wellenzahlen $k_y = 0$ und $k_z = 0$ an einer 24 cm dicken Wand aus Kalkstein ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m).

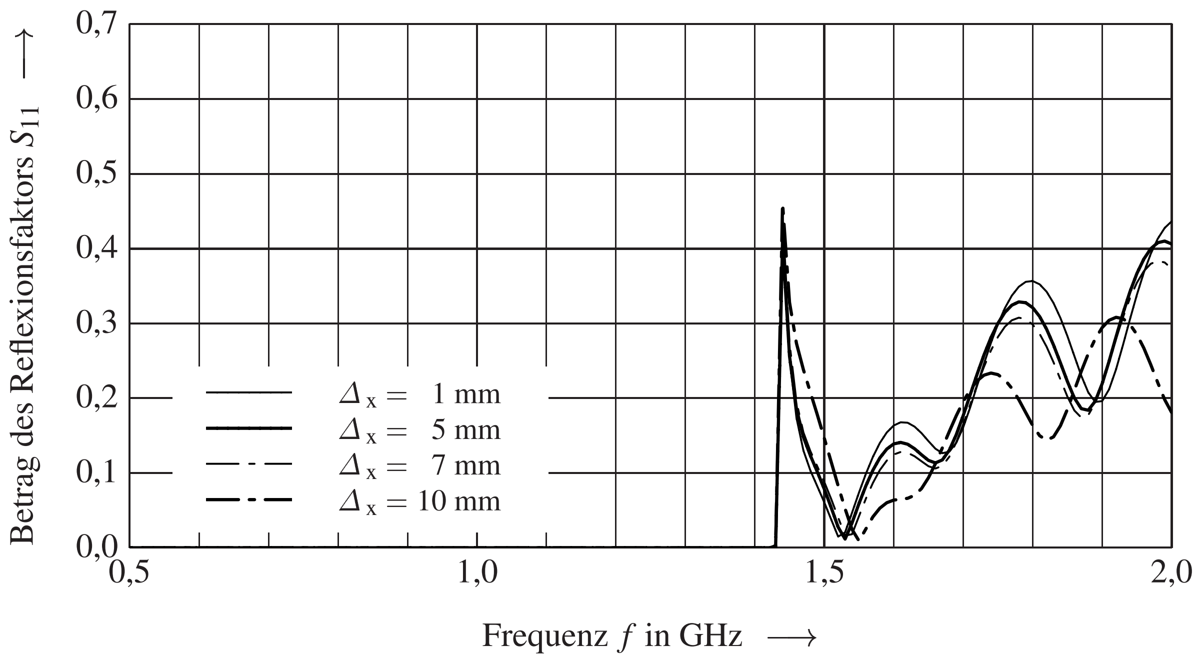

Diagramm 3.11. Frequenzabhängiger Betrag des Reflexionsfaktor $|S_{11}|$ einer Welle mit den transversalen Wellenzahlen $k_y = 0$ und $k_z = 30$/m an einer 24 cm dicken Wand aus Kalkstein ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m).

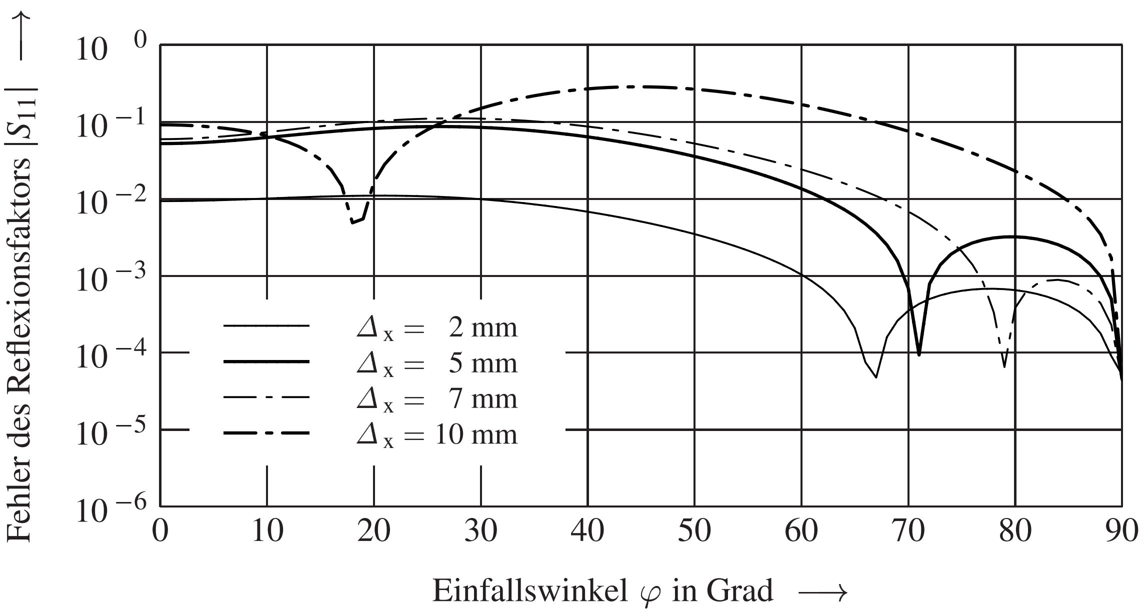

Diagramm 3.12. Absoluter Fehler des Reflexionsfaktors $|S_{11}|$ einer Welle mit der transversalen Wellenzahl $k_z = 0$ an einer 24 cm dicken Wand aus Kalkstein ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m) in Abhängigkeit des Einfallswinkels.

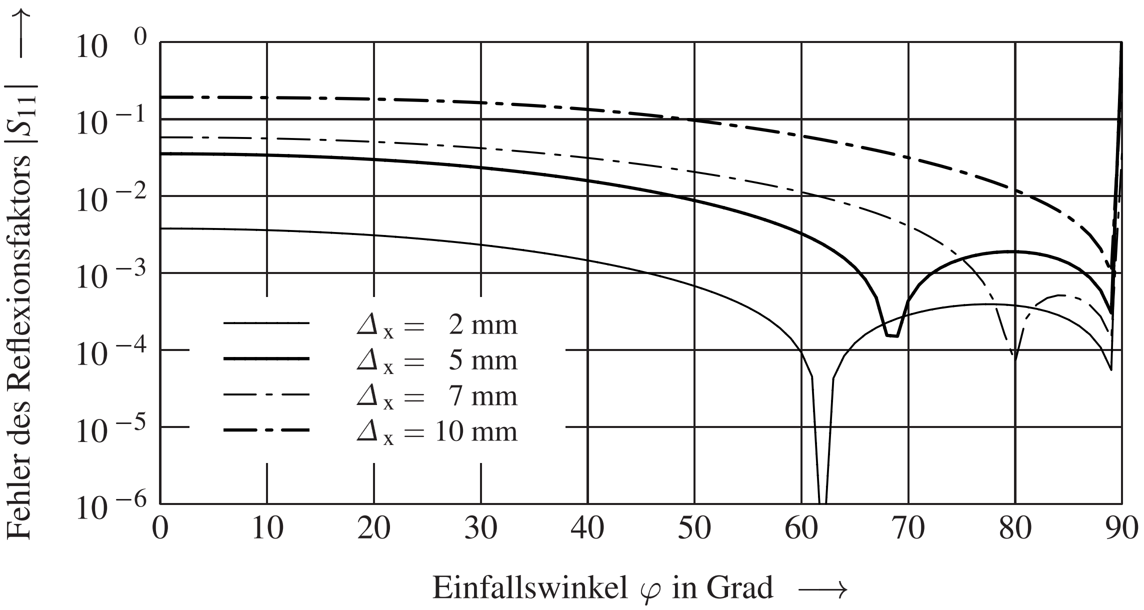

Diagramm 3.13. Absoluter Fehler des Reflexionsfaktors $|S_{11}|$ einer Welle mit der transversalen Wellenzahl $k_z = 30$/m an einer 24 cm dicken Wand aus Kalkstein ($\varepsilon_r = 7,51$, $\kappa = 0,028$ S/m) in Abhängigkeit des Einfallswinkels.

3.6 Anregung und Feldauswertung

In Abschnitt 2.4 wurden die Schnittstellen der Ausbreitungssimulation bereits spezifiziert.

3.6.1 Anregung des Ausbreitungsverfahrens durch einen konzentrierten Strom

Die konzentrierte Ersatzstromdichte der Sendeantenne wird zwecks Diskretisierung durch eine Stromdichte realisiert, die nur eine z–Komponente besitzt und eine komplette zweidimensionale H–Untergitterzelle ausfüllt. Somit erfolgt die Anregung über eine einzige Feldkomponente der diskreten Stromdichte. Die Sendeantennenposition muß daher der Position der z–Komponente des elektrischen Feldes im zweidimensionalen Gitter entsprechen.

Zur direkten Ermittlung der modalen Übertragungsfunktion $h_\mathrm{p}(\omega, k_\mathrm{z})$ müßte man mit einem zeitlichen Diracimpuls anregen. Dieser eignet sich aber nur sehr schlecht zur Anregung eines FDTD–Verfahrens, da er gerade bei $\tilde{K}_\mathrm{z} \neq 0$ eigentlich uninteressante Anteile enthält, die nicht oder nur mit geringer Gruppengeschwindigkeit ausbreitungsfähig sind und deshalb im Feldraum nur langsam abklingen. Aus diesem Grund wird bei der Anregung meist mit bandbegrenzten Signalen gearbeitet, die außerdem sehr sanft anklingen. Dies ist wünschenswert, da nicht ab $t = -\infty$ simuliert werden kann und das zeitliche „Abschneiden” der Anregung die Bandbreite wieder erhöht.

Üblich [28] sind Anregungsfunktionen in Form eines verzögert einsetzenden Gaußimpulses

$$i_\mathrm{s}(t) = i_{\mathrm{s},0}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right)^2} \tag{3.6.1}$$

mit der Fouriertransformierten

$$i_\mathrm{s}(\omega) = t_1\sqrt{\pi}\,i_{\mathrm{s},0}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\omega t_1}{2}\right)^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega t_0}. \tag{3.6.2}$$

Da im Rahmen der Ausbreitungssimulation Bandpaßsignale interessieren, wird hier ein modulierter Gaußimpuls

$$i_\mathrm{s}(t) = i_{\mathrm{s},0}\,\sin\left(\omega_0(t-t_0)\right)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{t-t_0}{t_1}\right)^2} \tag{3.6.3}$$

mit der Fouriertransformierten

$$i_{\mathrm{s}}(\omega) = -\tfrac{1}{2}\mathrm{j}\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\,t_0}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4}} - \mathrm{e}^{-\frac{(\omega+\omega_0)^2}{4}}\right) \tag{3.6.4}$$

verwendet. Diese Anregungsfunktion besitzt keinen Anteil bei $\omega = 0$. Aus der Antwort des Ausbreitungssystems auf das Bandpaßsignal läßt sich im Frequenzbereich leicht die Impulsantwort des bandbegrenzten Systems ermitteln.

3.6.2 Feldauswertung für das Ausbreitungsverfahren

Im Rahmen der Ausbreitungssimulation ist, wie gesagt, nur $E_{\mathrm{z}}(X,Y,T)$ in der Umgebung der Empfangsantenne interessant. Soll jedoch für weitere Analysen ein komplettes Teilfeld verwendet werden, so ist es sinnvoll, durch Interpolation elektrische und magnetische Feldkomponenten am gleichen Ort und zur selben Zeit zur Verfügung zu haben.

Die Interpolation geschieht in zwei Stufen. Zunächst werden diskrete Felder $\check{\mathbf{E}}(X,Y,T)$ und $\check{\mathbf{H}}(X,Y,T)$ definiert, bei denen alle Feldkomponenten in Raum und Zeit an gleiche Stellen interpretiert werden. Es ist

(3.6.5)

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{E}}(X,Y,T) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\overline{\mathfrak{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 1+\overline{\mathfrak{y}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}(X,Y,T), \\
\check{\mathbf{H}}(X,Y,T) &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2+2\overline{\mathfrak{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 2+2\overline{\mathfrak{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\overline{\mathfrak{x}}+\overline{\mathfrak{y}}+\overline{\mathfrak{x}\mathfrak{y}} \end{pmatrix} (1+\overline{\mathfrak{t}})\,\mathbf{H}(X,Y,T).
\end{aligned}$$

Diese Felder werden dann beispielsweise durch lineare Interpolation in kontinuierliche überführt.

Der zweistufige Interpolationsprozeß bietet den Vorteil, daß z.B. für Testzwecke Poyntingvektoren und Energiedichten auf der Ebene der interpolierten diskreten Felder berechnet werden können.

3.7 Erweiterungsmöglichkeiten der Ausbreitungssimulation

3.7.1 Lokale Verfahrensverfeinerungen

Ein bemerkenswertes Ergebnis aus den Abschnitten 3.5.2 und 3.5.3 ist, daß nach Aussage 3.8 die Verfahrensdispersion den größten Anteil am Diskretisierungsfehler liefert. Daher ist es naheliegend, diesen durch lokale Gitterverfeinerungen oder allgemeiner lokale Verfahrensverfeinerungen in hochpermittiven Gebieten zu vermindern. Mehrere Arten von lokalen Verfahrensverfeinerungen kommen in Frage, sind aber aus verschiedenen Gründen nicht eingesetzt worden.

Gitterverzerrungen Gitterverzerrungen sind einfach zu implementieren und daher die am häufigsten verwendeten Gitterverfeinerungen [38]. Meist werden gerade Gitterlinien verwendet und nur ihr Abstand variiert. Das Yee–Verfahren verliert an den Diskontinuitäten an Fehlerordnung, daher sind fein gestufte Gitterverfeinerungen üblich. Gitterverzerrungen eignen sich nicht gut für die Ausbreitungssimulation. Mit Feinstufung sind sie wegen der vielen Streuer zu aufwendig, ohne werden Phantomreflexionen an den Diskontinuitäten auftreten.

Lokale Gitterverfeinerungen Lokale Gitterverfeinerungen für das Yee–Verfahren sind in der Literatur häufig diskutiert worden [39, 40], kommen wegen Stabilitätsproblemen und aufwendiger Implementierung hier aber nicht zum Zuge.

Punktweise Elimination In Gebieten, die mit der diskreten Wellengleichung behandelt werden, können bis zu 50 % der Zellen näherungsweise eliminiert werden [41]. Die Näherung wird für große Wellenlängen immer besser, daher wäre es denkbar, für die Ausbreitungssimulation zunächst sehr fein zu diskretisieren und dann im Luftbereich Zellen zu löschen. Leider ist das Verfahren zur Zeit nur für $k_z = 0$ stabil und daher nicht allgemein einsetzbar.

Ordnungserhöhung Prinzipiell stehen für die räumliche Diskretisierung der Wellengleichung auch andere Operatoren zur Verfügung als der räumliche 5–Punkt Operator der diskreten Wellengleichung [42, Kapitel 7.1.2.9.3]. Diese Operatoren erhöhen die Verfahrensordnung, indem sie räumlich mehr Punkte mit einbeziehen. In der Ausbreitungssimulation könnten sie in Gebieten mit hoher Permittivität und in Bereichen hoher zu erwartender Feldkrümmung eingesetzt werden. Dabei werden recht große Zellen verwendet bei entsprechend geringer räumlicher Auflösung der Materialparameter. Dies sollte Aussage 3.8 zufolge zunächst nicht von allzu großem Nachteil sein, stellt aber doch ein bedeutendes Problem dar. Zeitbereichsmomentenmethoden [43] umgehen dieses Problem durch direkte Einbeziehung der Materialeigenschaften in den Operator, sind jedoch noch zu wenig entwickelt und erprobt und außerdem noch zu aufwendig, um derzeit in der Ausbreitungssimulation um Einsatz zu gelangen.

3.7.2 Verbesserte Behandlung von Decke und Boden in Stahlbeton–Bauweise

Dielektrische Eigenschaften von Decke und Boden eines Stockwerks lassen sich in die Ausbreitungssimulation einbringen, ohne das Simulationsverfahren abändern zu müssen [44]. Dazu wird mit einem verbesserten Modell, welches nicht direkt in das hier vorgestellten Zeitbereichsverfahren eingebracht werden kann, eine einfache Gebäudewand simuliert. Die Simulationsparameter des Zeitbereichsverfahrens $\mu(\mathbf{X})$, $\varepsilon(\mathbf{X})$, $\kappa(\mathbf{X})$ und $\sigma(\mathbf{X})$ und k_z werden dann derart modifiziert, daß eine gute Übereinstimmung mit dem verbesserten Modell erzielt wird.

Bild 3.8 zeigt die im verbesserten Modell eingebrachte Schichtstruktur. Der Un-

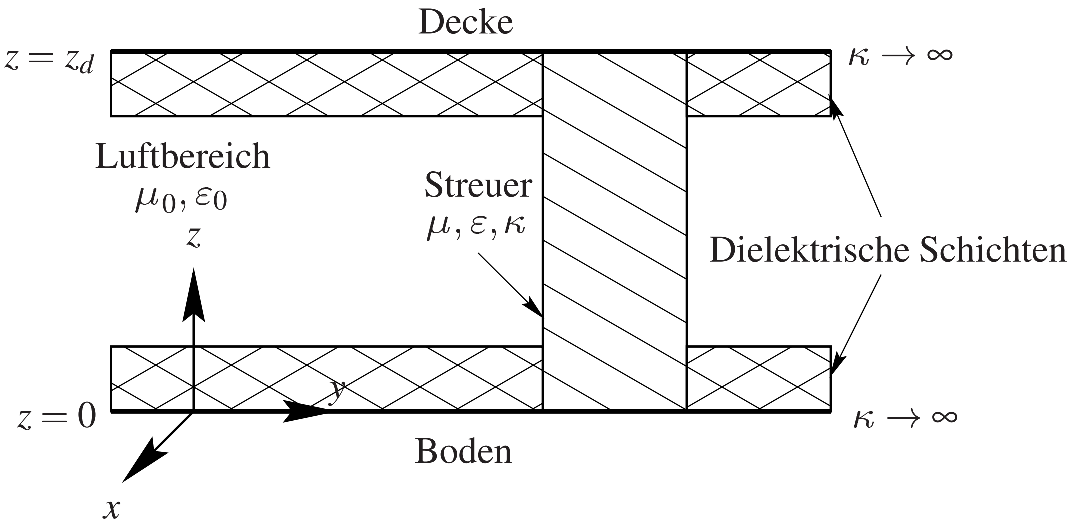

Bild 3.8. Verbessertes Modell zur Berücksichtigung dielektrischer Eigenschaften von Decke und Boden in Stahlbetonbauweise.

terschied zu dem in Bild 2.2 gezeigten zweidimensionalen Gebäude besteht in den dielektrischen Schichten auf Decke und Boden, die als Betonschichten auf einer Stahlarmierung interpretiert werden können.

Die in [44] quantifizierten Verbesserungen durch die genannte Modifikation der Simulationsparameter fallen nur bei Moden hoher Ordnungszahl ins Gewicht und sind auch dann nur moderat. Deshalb wurde das hier angesprochene Verfahren in der Ausbreitungssimulation nicht eingesetzt.

3.7.3 Anbindung von GO/UTD Verfahren zur Berücksichtigung externer Streuer und Antennen

Weist die nähere und weitere Gebäudeumgebung Streuer, Sende– und/oder Empfangsantennen auf, die in die Funkkanalsimulation einbezogen werden sollen, so sind diese vorteilhaft mit den Methoden der Strahlenoptik (siehe Abschnitt 1.4.3) zu behandeln. Außerhalb von Gebäuden sind diese Verfahren wegen der großen Streuerausdehnung auch für Frequenzen von einem bis zwei Gigahertz ausreichend genau, bestens erprobt und in vielen Varianten verfügbar [11, Kapitel 4].

Aussage 3.9 *Strahlenoptischen Methoden arbeiten bei der Kopplungsberechnung von Streuern meist mit Fernfeldentwicklungen in Kugelwellen, die jeweils das Feld in einem bestimmten Raumbereich abdecken. Die Anbindung der multimodalen Zeitbereichsmethoden an strahlenoptische Simulatoren erfolgt daher zweckmäßig über Ein– beziehungsweise Auskopplung von räumlich begrenzten Kugelwellen.*

Unter Voraussetzung von Rückwirkungsfreiheit lassen sich so externe Sende– und Empfangsantennen genau beschreiben. An externen Streuern im Nahbereich des Gebäudes tritt jedoch Modenkonversion auf. Diese muß unberücksichtigt bleiben, weil aus Speicherplatzgründen nicht alle Moden zugleich simulierbar sind. Weit entfernte Streuer werden zwar von allen Moden angeregt, wirken jedoch über näherungsweise ebene Wellenfelder nur auf den Mode mit $k_z = 0$ zurück[21]. Sie können deshalb gut einbezogen werden.

3.7.3.1 Auskopplung von Wellenanteilen zur Verwendung in strahlenoptischen Simulationsverfahren

Dem Auskopplungsverfahren liegt eine Nahfeld zu Fernfeldtransformation ähnlich der aus Abschnitt 4.5.3 zugrunde. Nach dem erweiterten Huygensschen Prinzip [14, Kapitel 1.14] werden auf dem Rand ∂G des dreidimensionalen Simulationsgebietes G mit dem nach außen gerichteten Flächennormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ zeitabhängige elektrische Ersatzflächenstromdichten $\mathbf{J}_\mathrm{F}(\mathbf{x},t)$ und magnetische Ersatzflächenstromdichten $\mathbf{M}_\mathrm{F}(\mathbf{x},t)$ mit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_\mathrm{F}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{n}\times\mathbf{H}(\mathbf{x},t),\\
\mathbf{M}_\mathrm{F}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}
\end{aligned}
\tag{3.7.1}
$$

[21] Die Rückstreuung über die Oberseite der Decke und die Unterseite des Bodens wird vernachlässigt.

eingeführt. Das Feld der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ und das der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$ ist, wie in Abschnitt 2.4 beschrieben, aus den verschiedenen Moden zusammengesetzt. Ferner ist die Beschränkung der Ersatzstromdichten auf den Bereich $z \in]0, z_\mathrm{d}[$ zu beachten.

Aus den Ersatzflächenstromdichten können nach [14, Kapitel 1.7] das elektrische Vektorpotential $\mathbf{F}_\mathrm{v}(\mathbf{x},t)$ und das magnetische Vektorpotential $\mathbf{A}_\mathrm{v}(\mathbf{x},t)$ in Fernfeldnäherung im Zeitbereich als

$$(3.7.2)\qquad \begin{aligned} \mathbf{A}_\mathrm{v}(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\int\limits_{\partial G} \mathbf{J}_\mathrm{F}\left(\mathbf{x}', t + \frac{\cos\big(\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{x}')\big)|\mathbf{x}'|}{c_0} - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right) d\mathbf{A}', \\ \mathbf{F}_\mathrm{v}(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}\int\limits_{\partial G} \mathbf{M}_\mathrm{F}\left(\mathbf{x}', t + \frac{\cos\big(\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{x}')\big)|\mathbf{x}'|}{c_0} - \frac{|\mathbf{x}|}{c_0}\right) d\mathbf{A}' \end{aligned}$$

berechnet werden. In Kugelkoordinaten (r,θ,φ) läßt sich damit direkt das zeitabhängige elektromagnetische Fernfeld zu

$$(3.7.3)\qquad \begin{aligned} E_\theta(\mathbf{x},t) &= Z_{\mathrm{F},0}H_\varphi(\mathbf{x},t) &&= -\mu_0\,\partial_t A_{\mathrm{v},\theta}(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c_0}\partial_t F_{\mathrm{v},\varphi}(\mathbf{x},t), \\ E_\varphi(\mathbf{x},t) &= -Z_{\mathrm{F},0}H_\theta(\mathbf{x},t) &&= -\mu_0\,\partial_t A_{\mathrm{v},\varphi}(\mathbf{x},t) + \frac{1}{c_0}\partial_t F_{\mathrm{v},\theta}(\mathbf{x},t) \end{aligned}$$

ermitteln. Dabei ist $Z_{\mathrm{F},0}$ der Feldwellenwiderstand des Vakuums und c_0 die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Meist interessiert nur die Abstrahlung in wenige Richtungen, wenn z. B. eine Empfangsantenne außerhalb des Gebäudes postiert ist und zusätzlich zum direkten Ausbreitungsweg nur ein weiterer mit Einfachreflexion am Erdboden berücksichtigt werden soll. Dann braucht das Fernfeld zur Anbindung an die strahlenoptische Simulation nur für sehr wenige feste Raumrichtungen ermittelt zu werden. In der Umgebung einer solchen festen Raumrichtung $\mathbf{x}_0/|\mathbf{x}_0|$ gilt

$$(3.7.4)\qquad \cos\big(\measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{x}')\big) \approx \cos\big(\measuredangle(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}')\big).$$

Die Gleichungen (3.7.2) liefern dann Kugelwellensegmente, die eine problemlose strahlenoptische Verwendung des Fernfeldes ermöglichen.

Für die Auswertung von (3.7.2) kommen die interpolierten diskreten Felder aus (3.6.5) zum Einsatz. Die Repräsentativwerte werden als Stützstellen für ein numerisches Integrationsverfahren verwendet.

3.7.3.2 Einkopplung von extern erzeugten elektromagnetischen Feldern

Elektromagnetische Felder $\mathbf{F}_{\mathrm{a}}$, deren Quellen sich außerhalb des Gebäudes befinden, werden mit Ersatzflächenstromdichten $\mathbf{J}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{M}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x},t)$ mit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{n}\times\mathbf{H}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t), \\
\mathbf{M}_{\mathrm{F}}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t)\times\mathbf{n}
\end{aligned}
\tag{3.7.5}
$$

angeregt. Der Flächennormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$ zeigt diesmal ins Simulationsgebiet G hinein. Die anregenden Felder $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{H}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t)$ werden *ohne* Berücksichtigung des Gebäudes ermittelt, die Interpretation hierzu ist zu der bei der Behandlung der Empfangsantenne in Abschnitt 2.2 äquivalent.

Im Falle der Ankopplung an ein strahlenoptisches Simulationsverfahren sind die Felder $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{H}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t)$ aus zeitabhängigen Kugelwellensegmenten zusammengesetzt.

3.7.3.3 Diskrete Realisierung der Ein– und Auskopplung

In der Ausbreitungssimulation wird das eigentliche Simulationsgebiet mit einer Freiraumschicht und diese wiederum mit dem perfekten Absorber umgeben. Die Ein– und Auskopplung von Wellenfeldern geschieht nach Bild 3.9 in der Freiraumschicht. Zur Einkopplung externer Felder wird dem separierten Yee–Schema (3.2.24) ein Term zur Berücksichtigung magnetischer Stromdichten hinzugefügt. Im vorliegenden verlustfreien Fall wird dann nach Einführung diskreter Flächenstromdichten (3.2.24) zu

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\Delta_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\,\bar{\mathbf{r}}_2\,\bar{\mathfrak{t}}\mathbf{H}(X,Y,T) + \bar{\mathfrak{t}}\mathbf{E}(X,Y,T) \\
&\quad - \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\Delta_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\varepsilon}}\,\bar{\mathfrak{t}}\mathbf{J}_{\mathrm{F}}(X,Y,T), \\
\mathbf{H}(X,Y,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\Delta_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\mu}}\,\mathbf{r}_2\,\mathbf{E}(X,Y,T) + \bar{\mathfrak{t}}\mathbf{H}(X,Y,T) \\
&\quad - \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\Delta_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\mu}}\,\mathbf{M}_{\mathrm{F}}(X,Y,T).
\end{aligned}
\tag{3.7.6}
$$

Dabei wird die diskrete elektrische Flächenstromdichte $\mathbf{J}_{\mathrm{F}}(X,Y,T)$ an die Stelle

$$
\mathbf{Z}_{\mathbf{J}_{\mathrm{F}}}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \Delta_{\mathrm{x}}/2\,\mathcal{E}_{\mathrm{x}} \\ \Delta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \Delta_{\mathrm{x}}/2\,\mathcal{E}_{\mathrm{y}} \\ \Delta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \Delta_{\mathrm{x}}/2\,\mathcal{E}_{\mathrm{z}} \end{pmatrix}
\tag{3.7.7}
$$

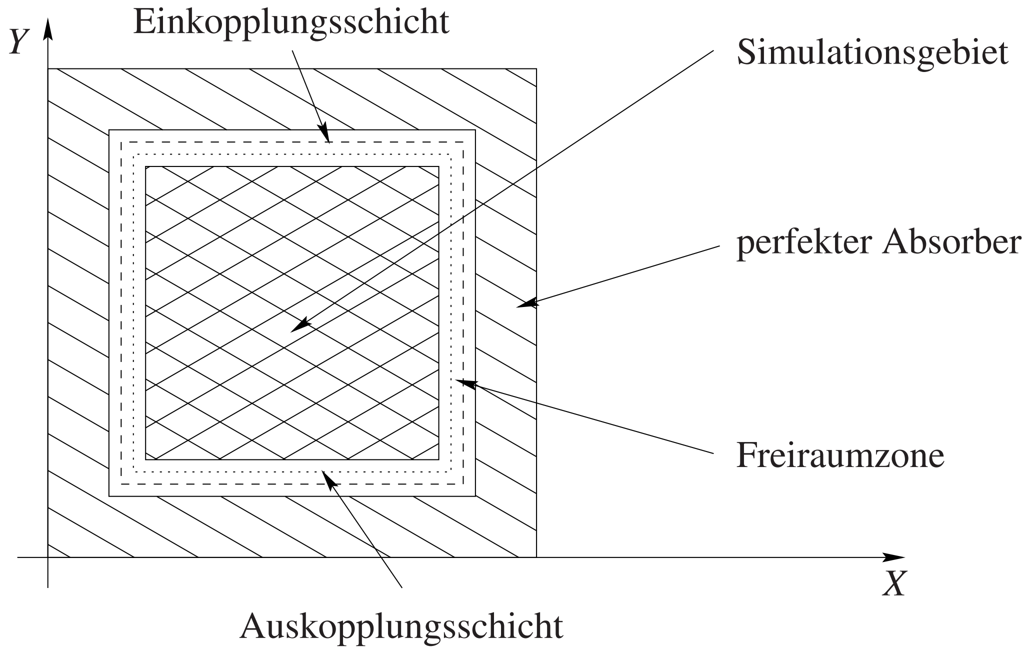

Bild 3.9. Simulationsanordnung zur bidirektionalen Ankopplung externer Felder.

interpretiert. Die diskrete magnetische Flächenstromdichte $\mathbf{M}_{\mathrm{F}}(X,Y,T)$ liegt bei

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{M}_{\mathrm{F}}}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \Delta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \Delta_{\mathrm{x}}/2\,(\mathcal{E}_{\mathrm{y}}+\mathcal{E}_{\mathrm{z}}) \\ \Delta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \Delta_{\mathrm{x}}/2\,(\mathcal{E}_{\mathrm{z}}+\mathcal{E}_{\mathrm{x}}) \\ \Delta_{\mathrm{x}}\mathbf{X} & + & \Delta_{\mathrm{x}}/2\,(\mathcal{E}_{\mathrm{x}}+\mathcal{E}_{\mathrm{y}}) \end{pmatrix}. \tag{3.7.8}$$

Zeitlich liegen $\mathbf{J}_{\mathrm{F}}(X,Y,T)$ und $\mathbf{H}(X,Y,T)$ sowie $\mathbf{M}_{\mathrm{F}}(X,Y,T)$ und $\mathbf{E}(X,Y,T)$ gleich.
Die Flächenstromdichten werden aus den kontinuierlichen Feldern $\mathbf{E}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t)$ und $\mathbf{H}_{\mathrm{a}}(\mathbf{x},t)$ nach Anwendung von (3.7.5) durch Abtastung gewonnen.

Kapitel 4
Zeitbereichsverfahren zur Simulation rotationssymmetrischer Antennen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Herleitung von Zeitbereichsverfahren zur Simulation rotationssymmetrischer Antennen, vgl. [45]. Vorgehensweise und Formalismus sind dabei so eng an Kapitel 3 angelehnt, daß hier eine sehr knappe Darstellung gewählt werden kann.

4.1 Ein zweidimensionales FDTD–Verfahren zur Behandlung rotationssymmetrischer Antennen

4.1.1 Das dreidimensionale rotationssymmetrische FDTD–Schema

Zunächst wird ein dreidimensionales FDTD–Verfahren für die Antennensimulation mit Verlusten durch elektrische und magnetische Leitfähigkeiten hergeleitet. Dabei wird ein kontinuierliches Zylinderkoordinatensystem $\mathbf{x} = (\varrho, \varphi, z)$ und dessen diskretes Pendant $\mathbf{X} = (P, \Phi, Z)$ zugrunde gelegt. Bild 4.1 zeigt die Einheitszelle des rotationssymmetrischen FDTD–Verfahrens. Die Zellausdehnung ist Δ_{x} in ϱ und z–Richtung sowie Δ_{φ} in φ–Richtung.
Bei $P = 0$ ist die Einheitszelle, wie in Bild 4.2 dargestellt, entartet[1]. Dort verschwinden $H_{\varrho}(\mathbf{X}, T)$ und $E_{\varphi}(\mathbf{X}, T)$; $E_{\mathrm{z}}(\mathbf{X}, T)$ ist in allen Zellen gleich. Für diesen Fall steht im folgenden die jeweils obere Alternative in den geschweiften Klammern.

[1] Ein anderes rotationssymmetrisches Verfahren kann generiert werden, indem man die örtlichen Positionen des elektrischen und des magnetischen Feldes vertauscht. Die beiden Verfahren sind, im Gegensatz zum kartesischen Fall, verschieden.

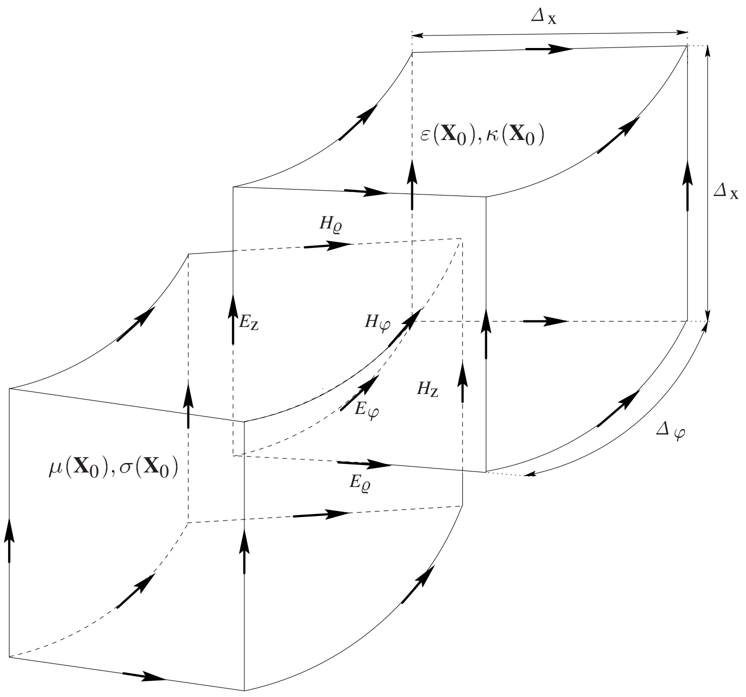

Bild 4.1. Die Einheitszelle des rotationssymmetrischen FDTD–Gitters.

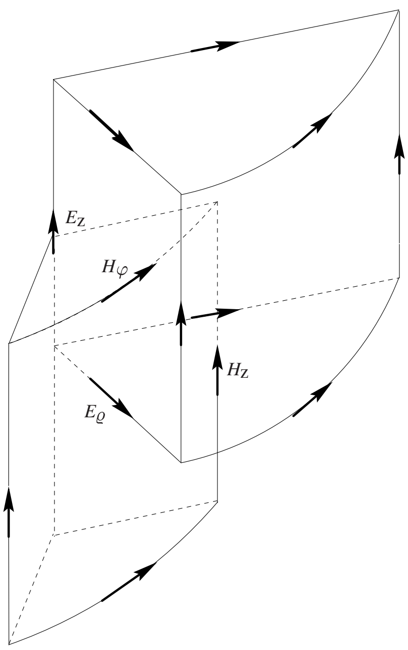

Bild 4.2. Entartete Einheitszelle bei $P = 0$.

Das dreidimensionale rotationssymmetrische FDTD–Schema lautet

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{X},T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\boldsymbol{\varkappa}^{+}\Delta_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,\bar{\mathbf{p}}\,\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{H}(\mathbf{X},T)+\frac{\boldsymbol{\varkappa}^{-}}{\boldsymbol{\varkappa}^{+}}\quad\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{E}(\mathbf{X},T) \\
&\qquad -\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\boldsymbol{\varkappa}^{+}}\frac{1}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\,\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{J}(\mathbf{X},T), \\
\mathbf{H}(\mathbf{X},T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\boldsymbol{\sigma}^{+}\Delta_{\mathrm{x}}}\frac{1}{\tilde{\mu}}\,\mathbf{p}\,\mathbf{E}(\mathbf{X},T)+\frac{\boldsymbol{\sigma}^{-}}{\boldsymbol{\sigma}^{+}}\quad\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{H}(\mathbf{X},T)
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varkappa}^{+} &= 1+\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}, & \boldsymbol{\varkappa}^{-} &= 1-\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \\
\boldsymbol{\sigma}^{+} &= 1+\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\tilde{\mu}}, & \boldsymbol{\sigma}^{-} &= 1-\frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\tilde{\mu}}.
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

Ferner ist

(4.1.3)

$$
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{pmatrix}
1+\bar{\mathfrak{z}}+\bar{\mathfrak{f}}+\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{f}} & 0 & 0 \\
0 & \left\{\begin{matrix} 0 \\ 1+\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{z}}+\overline{\mathfrak{r}\mathfrak{z}} \end{matrix}\right\} & 0 \\
0 & 0 & \left\{\begin{matrix} \frac{4}{[\Phi]}\sum\limits_{l=1}^{[\Phi]}\mathfrak{f}^{l} \\ \frac{4P+1}{4P}(1+\bar{\mathfrak{f}})+\frac{4P-1}{4P}(\bar{\mathfrak{r}}+\bar{\mathfrak{r}}\bar{\mathfrak{f}}) \end{matrix}\right\}
\end{pmatrix}\frac{\varepsilon}{4},
$$

und

(4.1.4)

$$
\tilde{\mu} = \begin{pmatrix}
\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1+\mathfrak{z}+\mathfrak{f}+\mathfrak{z}\mathfrak{f} \end{matrix}\right\} & 0 & 0 \\
0 & 1+\mathfrak{r}+\mathfrak{z}+\mathfrak{r}\mathfrak{z} & 0 \\
0 & 0 & \left\{\begin{matrix} (1+\mathfrak{f})+3(\mathfrak{r}+\mathfrak{r}\mathfrak{f}) \\ \frac{4P+1}{4P+4}(1+\mathfrak{f})+\frac{4P+3}{4P+4}(\mathfrak{r}+\mathfrak{r}\mathfrak{f}) \end{matrix}\right\}
\end{pmatrix}\frac{\mu}{4}.
$$

Die Rotationsoperatormatrizen des rotationssymmetrischen Verfahrens sind

$$
(4.1.5)\quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 & \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathfrak{z}-1 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{P\,\Delta_{\varphi}}(1-\mathfrak{f}) \end{Bmatrix} \\ 1-\mathfrak{z} & 0 & \mathfrak{r}-1 \\ \begin{Bmatrix} \frac{4}{\Delta_{\varphi}}(\mathfrak{f}-1) \\ \frac{2}{(P+2)\Delta_{\varphi}}(\mathfrak{f}-1) \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} -4\mathfrak{r} \\ \frac{P}{P+1}-\mathfrak{r} \end{Bmatrix} & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
(4.1.6)\quad \overline{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathfrak{z}}-1 & \begin{Bmatrix} \frac{1}{\Delta_{\varphi}}(1-\bar{\mathfrak{f}}) \\ \frac{2}{(P+2)\Delta_{\varphi}}(1-\bar{\mathfrak{f}}) \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ 1-\bar{\mathfrak{z}} \end{Bmatrix} & 0 & \bar{\mathfrak{r}}-1 \\ \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{P\,\Delta_{\varphi}}(\bar{\mathfrak{f}}-1) \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} \frac{4}{[\Phi]}\sum_{l=1}^{[\Phi]}\mathfrak{f}^{l} \\ \frac{2P+1}{2P}-\frac{2P-1}{2P}\bar{\mathfrak{r}} \end{Bmatrix} & 0 \end{pmatrix}.
$$

Dabei stellen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$ die Feldoperatoren für Verschiebung in P bzw. Φ–Richtung dar, $\bar{\mathfrak{r}}$ und $\bar{\mathfrak{f}}$ sind ihre Inversen. Die diskreten Leitfähigkeitsmatrizen $\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}$ und $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ werden analog zu $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ bzw. $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ berechnet.

Die diskreten Felder sind zyklisch in Φ, das heißt

$$
(4.1.7)\qquad \mathfrak{f}^{[\Phi]}\mathbf{H}(\mathbf{X},T) = \mathbf{H}(\mathbf{X},T),\ \mathfrak{f}^{[\Phi]}\mathbf{E}(\mathbf{X},T) = \mathbf{E}(\mathbf{X},T).
$$

Dasselbe gilt für die Materialparameter und mit $\bar{\mathfrak{f}}$. Die Zellanzahl in Φ–Richtung ist $[\Phi] = 2\pi/\Delta_{\varphi}$.

4.1.2 Separation des rotationssymmetrischen Verfahrens

Aussage 4.1 *Das dreidimensionale rotationssymmetrische Schema ist nicht besonders effektiv, da der Zeitschritt vergleichsweise klein gewählt werden muß.*

Dieser orientiert sich an der Länge der kürzesten Gitterkante, die in den Einheitszellen bei $P = 0$ auftritt[2] *und deren Länge proportional zu $\Delta_{\mathrm{x}}\Delta_{\varphi}$ ist, also zur räumlichen Auflösung im Quadrat.*

Bei nicht vom Azimut Φ abhängigen Materialverteilungen, beispielsweise bei rotationssymmetrischen Antennen, wird dies durch Absepararieren der Azimutabhängigkeit der Felder deutlich entschärft. Dabei entsteht ein zweidimensionales Verfahren, welches auch durch die eingesparte Simulationsdimension deutlich an Effektivität gewinnt[3].
Der Separationsansatz ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},T) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mathbf{E}(P,Z,T), \tag{4.1.8}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{X},T) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \mathbf{H}(P,Z,T),$$

$$\begin{aligned} s &= \sin(\nu\,[\Delta_{\varphi}\,(\Phi + \frac{1}{2}) + \varphi_0]), \\ c &= \cos(\nu\,[\Delta_{\varphi}\,\Phi + \varphi_0]). \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Dabei wird die elektrische Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{X},T)$ wie $\mathbf{E}(\mathbf{X},T)$ behandelt; der Drehwinkel φ_0 kann beliebig gewählt werden.
Es ist

$$\begin{aligned} (1-\mathfrak{f})\,c &= -2\sin(\frac{1}{2}\nu\Delta_{\varphi})\,s, \\ (1-\bar{\mathfrak{f}})\,s &= 2\sin(\frac{1}{2}\nu\Delta_{\varphi})\,c \\ &= \Delta_{\varphi}\tilde{K}_{\varphi,\nu}\,c \\ &\approx \Delta_{\varphi}\,\nu\,c \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

[2] Werden z. B. bei rein koaxialen Anordnungen nur Zellen ab $P = P_0$ simuliert, entschärft sich der angesprochene Sachverhalt etwas.

[3] Gegebenenfalls kann eine echt dreidimensionale Feldverteilung bei rotationssymmetrischer Anordnung dann wieder aus verschiedenen zweidimensionalen Lösungen zusammengesetzt werden.

und

$$
\text{(4.1.11)} \qquad
\begin{aligned}
&\left(\sum_{l=1}^{[\Phi]} \mathfrak{f}^{l}\right) c = 2\{-\nu\}^{0}[\Phi]\, c, \\
&\{\zeta\}^{n} = \begin{cases} 0 & , \quad \zeta < 0 \\ 1/2\,\zeta^{n} & , \quad \zeta = 0 \\ \zeta^{n} & , \quad \zeta > 0 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Damit werden die zweidimensionalen Rotationsmatrizen

$$
\text{(4.1.12)} \qquad
\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix}
0 & \left\{\begin{matrix} 0 \\ \mathfrak{z}-1 \end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{P}\tilde{K}_{\varphi,\nu} \end{matrix}\right\} \\
1-\mathfrak{z} & 0 & \mathfrak{r}-1 \\
\left\{\begin{matrix} 4\quad \tilde{K}_{\varphi,\nu} \\ \frac{2}{(P+2)}\tilde{K}_{\varphi,\nu} \end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix} -4\mathfrak{r} \\ \frac{P}{P+1} - \mathfrak{r} \end{matrix}\right\} & 0
\end{pmatrix},
$$

$$
\text{(4.1.13)} \qquad
\overline{\mathbf{p}}_2 = \begin{pmatrix}
0 & \overline{\mathfrak{z}}-1 & \left\{\begin{matrix} \tilde{K}_{\varphi,\nu} \\ \frac{2}{(P+2)}\tilde{K}_{\varphi,\nu} \end{matrix}\right\} \\
\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1-\overline{\mathfrak{z}} \end{matrix}\right\} & 0 & \overline{\mathfrak{r}}-1 \\
\left\{\begin{matrix} 0 \\ -\frac{1}{\Delta_{\varphi}}\tilde{K}_{\varphi,\nu} \end{matrix}\right\} & \left\{\begin{matrix} 8\{-\nu\}^{0} \\ \frac{2P+1}{2P} - \frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}} \end{matrix}\right\} & 0
\end{pmatrix}.
$$

Nun ist das rotationssymmetrische Verfahren separiert. Da Δ_{φ} nicht mehr explizit auftritt, ist die Stabilität des zweidimensionalen Schemas nur noch von der azimutalen Wellenzahl $\tilde{K}_{\varphi,\nu}$ und von Δ_{x} abhängig. Nach (4.1.10) hängt $\tilde{K}_{\varphi,\nu}$ bei kleinem Δ_{φ} kaum von Δ_{φ} ab, daher sinkt der maximal zulässige Zeitschritt jetzt nur noch linear mit der Auflösung.

Von diesem Punkt an beschränkt sich das vorliegende Kapitel auf den Fall $\nu = 0$. In bezug auf die Antennensimulation werden damit Antennen ausgeschlossen,

die mit höheren Rundhohlleitermoden arbeiten. Solche werden beispielsweise bei Rechteckhohlleiterspeisung angeregt [46]. Die wichtigen Antennen der Funkkanalmeßtechnik, Dipolantennen und koaxial gespeiste rotationssymmetrische Antennen, werden aber weiter voll erfaßt.
Bei $\nu = 0$ ist

$$\mathbf{p}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \mathfrak{z} - 1 \end{matrix} \right\} & 0 \\ 1 - \mathfrak{z} & 0 & \mathfrak{r} - 1 \\ 0 & \left\{ \begin{matrix} -4\mathfrak{r} \\ \frac{P}{P+1} - \mathfrak{r} \end{matrix} \right\} & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1.14}$$

und

$$\overline{\mathbf{p}}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mathfrak{z}} - 1 & 0 \\ \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 1 - \overline{\mathfrak{z}} \end{matrix} \right\} & 0 & \overline{\mathfrak{r}} - 1 \\ 0 & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ \frac{2P+1}{2P} - \frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}} \end{matrix} \right\} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.15}$$

Die Feldkomponententripel

$$(E_\varrho^0(P,Z,T), E_z^0(P,Z,T), H_\varphi^0(P,Z,T))$$

und

$$(E_\varphi^0(P,Z,T), H_\varrho^0(P,Z,T), H_z^0(P,Z,T))$$

sind jetzt voneinander entkoppelt. Für die angesprochenen relevanten Antennentypen ist nur

$$(E_\varrho^0(P,Z,T), E_z^0(P,Z,T), H_\varphi^0(P,Z,T))$$

interessant, da diese Komponentenkombination gerade dem Grundtyp der Koaxialleitung sowie der Anregung der Dipolantenne entspricht.

4.2 Die Diskrete Wellengleichung zur vereinfachten Behandlung homogener Gebiete in rotationssymmetrischen Feldproblemen

In Abschnitt 3.3 wurde für das kartesische FDTD–Verfahren ein verbessertes Schema in homogenen Gebieten hergeleitet. Dies kann analog auch im rotationssymmetrischen Fall erfolgen. Bei $\nu = 0$ und $P \neq 0$ ist in homogenen verlust– und quellfreien Medien[4]

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{t}-1)(1-\overline{\mathfrak{t}})\,\mathbf{E}(P,Z,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}^2}{\Delta_{\mathrm{x}}^2\mu\varepsilon}\overline{\mathbf{p}}_2^0\,\mathbf{p}_2^0\,\mathbf{E}(P,Z,T), \\
(\mathfrak{t}-1)(1-\overline{\mathfrak{t}})\,\mathbf{H}(P,Z,T) &= \frac{\Delta_{\mathrm{t}}^2}{\Delta_{\mathrm{x}}^2\mu\varepsilon}\mathbf{p}_2^0\,\overline{\mathbf{p}}_2^0\,\mathbf{H}(P,Z,T).
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Es gilt

$$\mathbf{p}_2^0\,\overline{\mathbf{p}}_2^0 = \begin{pmatrix} (\mathfrak{z}-1)(1-\overline{\mathfrak{z}}) & 0 & (\mathfrak{z}-1)(\overline{\mathfrak{r}}-1) \\ 0 & \frac{2P+3}{2P+2}\mathfrak{r}+\frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}}+\mathfrak{z}+\overline{\mathfrak{z}}-2-\frac{2P+1}{P(2P+2)} & 0 \\ \left(\frac{P}{P+1}-\mathfrak{r}\right)(1-\overline{\mathfrak{z}}) & 0 & \left(\frac{P}{P+1}-\mathfrak{r}\right)(\overline{\mathfrak{r}}-1) \end{pmatrix}, \tag{4.2.2}$$

$$\overline{\mathbf{p}}_2^0\,\mathbf{p}_2^0 = \begin{pmatrix} (\overline{\mathfrak{z}}-1)(1-\mathfrak{z}) & 0 & (\overline{\mathfrak{z}}-1)(\mathfrak{r}-1) \\ 0 & \mathfrak{r}+\frac{P-1}{P}\overline{\mathfrak{r}}+\mathfrak{z}+\overline{\mathfrak{z}}-\frac{2P-1}{P+1}-2 & 0 \\ \left(\frac{2P+1}{2P}-\frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}}\right)(1-\mathfrak{z}) & 0 & \left(\frac{2P+1}{2P}-\frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}}\right)(\mathfrak{r}-1) \end{pmatrix}. \tag{4.2.3}$$

Die φ–Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes sind also entkoppelt. Die rotationssymmetrischen Diskreten Wellengleichungen sind da-

[4]Die Herleitung in diesem Abschnitt funktioniert auch im inhomogenen verlustbehafteten Fall. Bei rotationssymmetrischen Antennensimulationen treten dielektrische Verluste und Diskontinuitäten der Materialparameter nur in der räumlich kleinen Anschlußleitung auf. Da ferner eine Schnittstelle zum rotationssymmetrischen Schema für Anregung und Feldauswertung sowieso benötigt wird, wird hier die einfachere und kürzere Darstellung für die Diskrete Wellengleichung im homogenen verlustlosen Fall bevorzugt.

mit

(4.2.4)

$$(\mathfrak{t}-1)\,(1-\overline{\mathfrak{t}})\,E_\varphi^0(P,Z,T)=\frac{\Delta_\mathrm{t}^2}{\Delta_\mathrm{x}^2\mu\varepsilon}\left(\mathfrak{r}+\frac{P-1}{P}\overline{\mathfrak{r}}+\mathfrak{z}+\overline{\mathfrak{z}}-\frac{2P-1}{P+1}-2\right)E_\varphi^0(P,Z,T),$$

$$(\mathfrak{t}-1)\,(1-\overline{\mathfrak{t}})\,H_\varphi^0(P,Z,T)=\frac{\Delta_\mathrm{t}^2}{\Delta_\mathrm{x}^2\mu\varepsilon}\left(\frac{2P+3}{2P+2}\mathfrak{r}+\frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}}+\mathfrak{z}+\overline{\mathfrak{z}}-2-\frac{2P+1}{P\,(2P+2)}\right)H_\varphi^0(P,Z,T),$$

wobei wie gesagt nur die Gleichung für $H_\varphi^0(P,Z,T)$ bei den hier interessanten rotationssymmetrischen Antennen benötigt wird.

4.2.1 Hybride Verbindung beider Verfahren

Die Verbindung der rotationssymmetrischen Diskreten Wellengleichungen mit dem rotationssymmetrischen FDTD–Schema zu einem Hybrid erfolgt exakt in der gleichen Weise wie die Verbindung der kartesischen Pendants in Abschnitt 3.3.2. Dabei gilt die Komponentenzuordnung

$$(x, y, z) \quad \rightleftarrows \quad (Z, P, \Phi).$$

Die Ersparnis an Computerspeicherplatz liegt bei ca. 33 %, die Rechenzeitersparnis fällt längst nicht so sehr ins Gewicht wie im kartesischen Fall.

4.3 Der perfekte Absorber in rotationssymmetrischen Feldproblemen

Es ist naheliegend, den perfekten Absorber auch in rotationssymmetrischen Feldproblemen in einer Anordnung nach Bild 4.3 zu verwenden. Die eigentliche Antennenanordnung ist in positiver radialer Richtung und in positiver und negativer Z–Richtung mit einer perfekt absorbierenden Schicht abgesumpft. Unmittelbar neben den absorbierenden Schichten können zeitabhängige elektromagnetische Felder abgegriffen werden, beispielsweise für die Nahfeld–zu–Fernfeldtransformation aus Abschnitt 4.5.3. Der eigentliche Antennenbereich ist also von einer Freiraumschicht umgeben, die Antennenzuleitung kann jedoch ggf. in den Absorber bei $Z = 0$ hineinragen. Hier werden dann rücklaufende Wellen in der Zuleitung absorbiert.

Aussage 4.2 *Soll die Antennenstruktur fein aufgelöst und der Rechenaufwand in Grenzen gehalten werden, so müssen die Absorber im Nahfeld der Antenne z.B. im Abstand von einer Wellenlänge postiert werden.*

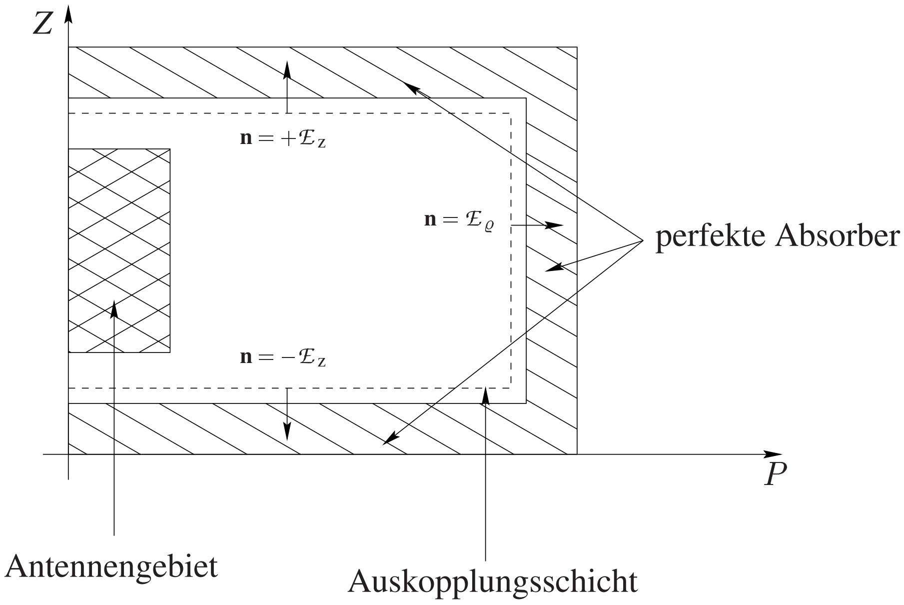

Bild 4.3. Anordnung zur Simulation eines rotationssymmetrischen Antennenproblems mit perfekt absorbierenden Schichten.

In diesem Abschnitt wird zunächst der rotationssymmetrische perfekte Absorber im kontinuierlichen Fall untersucht. Danach wird er diskretisiert und die diskrete Version für den kritischen Fall radialen Welleneinfalls einem Praxistest unterzogen. Dabei wird stets der Fall des azimutunabhängigen elektromagnetischen Feldes ($\nu = 0$) mit den Feldkomponenten $E^0_\varphi(P,Z,T)$, $H^0_\varrho(P,Z,T)$ und $H^0_z(P,Z,T)$ untersucht.

4.3.1 Der kontinuierliche rotationssymmetrische perfekte Absorber

Aussage 4.3 *Der perfekte Absorber arbeitet bei radial einfallenden Zylinderwellen auch im kontinuierlichen Fall nicht reflexionsfrei. Er kann dennoch zur Absorption radial einfallender Zylinderwellen verwendet werden, wenn er*

- *mindestens eine Wellenlänge von der Symmetrieachse entfernt ist und*
- *mit im Vergleich zum kartesischen Fall kleiner Absorptionszahl arbeitet.*

Der Absorber für die Radialrichtung arbeitet dann deutlich schlechter als sein kartesisches Pendant, aber doch zufriedenstellend. In Z–Richtung funktioniert der perfekte Absorber auch bei rotationssymmetrischen Problemen tadellos.

Im Falle der Unabhängigkeit des elektromagnetischen Feldes von der z–Koordinate und von der φ–Koordinate sind im homogenen Medium homogene TEM–Zylinderwellen

$$
\begin{aligned}
E_\varrho(\varrho) &= 0, \\
H_\varphi(\varrho) &= C_\mathrm{H} H_1^{(2)}(k_\varrho \varrho), \\
E_\mathrm{z}(\varrho) &= \frac{k_\varrho}{\mathrm{j}\omega\varepsilon+\kappa} C_\mathrm{H} H_0^{(2)}(k_\varrho \varrho) \\
&= \mathrm{j} Z_\mathrm{F} \, C_\mathrm{H} H_0^{(2)}(k_\varrho \varrho).
\end{aligned}
\tag{4.3.1}
$$

Lösungen der Maxwellschen Gleichungen im Frequenzbereich [14, Kapitel 8.1]. Hierbei ist C_H eine beliebige Konstante.

Ferner ist

$$
k_\varrho = \sqrt{-(\mathrm{j}\omega\varepsilon+\kappa)(\mathrm{j}\omega\mu+\sigma)},
$$

$$
Z_\mathrm{F} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu+\sigma}{\mathrm{j}\omega\varepsilon+\kappa}}.
\tag{4.3.2}
$$

$$
H_n^{(1/2)}(\varrho) = J_n(\varrho) \pm \mathrm{j} Y_n(\varrho),
$$

sind die Hankelfunktionen n–ter Ordnung, die nach innen bzw. außen laufende Zylinderwellen beschreiben.

Soll eine Grenzschicht bei $\varrho = \varrho_0$ für homogene Zylinderwellen reflexionsfrei sein, so muß

$$
\lim_{\substack{\varrho\to\varrho_0 \\ \varrho<\varrho_0}} \frac{E_\mathrm{z}(\varrho)}{H_\varphi(\varrho)} = \lim_{\substack{\varrho\to\varrho_0 \\ \varrho>\varrho_0}} \frac{E_\mathrm{z}(\varrho)}{H_\varphi(\varrho)}
\tag{4.3.3}
$$

und damit

$$
Z_{\mathrm{F,l}} \frac{H_0^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{l}}\varrho_0)}{H_1^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{l}}\varrho_0)} = Z_{\mathrm{F,r}} \frac{H_0^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{r}}\varrho_0)}{H_1^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{r}}\varrho_0)},
\tag{4.3.4}
$$

wobei die Buchstaben l bzw. r das Gebiet links bzw. rechts der Grenzschicht indizieren. Im Gegensatz zu (3.4.2) ist diese Bedingung orts– und vor allem über die radiale Wellenzahl k_ϱ frequenzabhängig. Der kontinuierliche perfekte Absorber ist damit im rotationssymmetrischen Fall als nicht generell reflexionsfrei identifiziert.

Für große $k_\varrho \varrho_0$ konvergiert (4.3.4) jedoch gegen (3.4.2).

Eine Analyse [5] liefert als Reflexionsfaktor S_{11} der Grenzschicht zwischen einem Luftbereich und dem perfekten Absorber mit der Absorption α bei rein radialem Welleneinfall

(4.3.5)
$$S_{11} = \frac{\left(H_1^{(2)}(k_{\varrho,1}\varrho_0)\,H_0^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{r}}\varrho_0) - H_1^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{r}}\varrho_0)\,H_0^{(2)}(k_{\varrho,1}\varrho_0)\right) H_0^{(1)}(k_{\varrho,1}\varrho_0)}{\left(H_0^{(1)}(k_{\varrho,1}\varrho_0)\,H_1^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{r}}\varrho_0) - H_0^{(2)}(k_{\varrho,\mathrm{r}}\varrho_0)H_1^{(1)}(k_{\varrho,1}\varrho_0)\right) H_0^{(2)}(k_{\varrho,1}\varrho_0)},$$

$$|S_{11}| \approx \frac{16\,\varrho_0\,\alpha\,c_0}{\sqrt{\begin{array}{l} 4096\,\omega^4\varrho_0{}^4 + 1024\,\omega^2\varrho_0{}^3\alpha\,c_0 - 384\,\omega^2\varrho_0{}^2c_0{}^2 \\ +64\,\varrho_0{}^2\alpha^2c_0{}^2 - 48\,\varrho_0\,\alpha\,c_0{}^3 + 9\,c_0{}^4 + 4096\,\omega^2\varrho_0{}^4\alpha^2 \end{array}}}$$

mit $\frac{\kappa}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\mu} = \alpha$ und der Vakkumlichtgeschwindigkeit c_0. Die angegebene Näherung für den Betrag des Reflexionsfaktors wurde unter Verwendung der asymptotischen Entwicklungen [47, Kapitel 21.8]

(4.3.6)
$$\begin{array}{rcl} H_0^{(1/2)}(\zeta) & \approx & \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\zeta-\pi/4)}\left(1\mp\mathrm{j}\,\frac{1}{8}\,\zeta\right), \\ H_1^{(1/2)}(\zeta) & \approx & \mp\mathrm{j}\sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\zeta-\pi/4)}\left(1\pm\mathrm{j}\,\frac{3}{8}\,\zeta\right) \end{array}$$

für $\zeta \in \mathbb{C}$ großen Betrages ermittelt. Sie kann als „Faustformel" erfahrungsgemäß in der Praxis stets angewendet werden.

4.3.2 Diskretisierung des rotationssymmetrischen perfekten Absorbers

Analog zu der Vorgehensweise beim kartesischen Problem in Abschnitt 3.4.3 erfolgt hier eine Aufteilung der $H_\varphi^0(P,Z,T)$–Feldkomponente.

Es ist

(4.3.7)
$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{\alpha_z^-}{\alpha_z^+} \\ \frac{\alpha_\varrho^-}{\alpha_\varrho^+} \end{pmatrix} \bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{E}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T) + \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\Delta_{\mathrm{x}}\varepsilon_0}\,\mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_z^+} \\ \frac{1}{\alpha_\varrho^+} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{p}}_2^{\mathrm{II}}\bar{\mathfrak{t}}\,\mathbf{H}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T), \\ \mathbf{H}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T) &= \mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{\alpha_z^-}{\alpha_z^+} \\ \frac{\alpha_\varrho^-}{\alpha_\varrho^+} \end{pmatrix} \mathfrak{t}\,\mathbf{H}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T) + \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{\Delta_{\mathrm{x}}\mu_0}\mathbf{dg}\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_z^+} \\ \frac{1}{\alpha_\varrho^+} \end{pmatrix} \mathbf{p}_2^{\mathrm{II}}\,\mathbf{E}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T) \end{aligned}$$

[5] Der Reflexionsfaktor S_{11} ist hier als Verhältnis der linksseitigen hin– und rücklaufenden Wellenanteile (bezogen auf die elektrische Feldstärke) an Stelle ϱ_0 zu verstehen.

mit

$$\alpha^{+} = 1 + \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\alpha,$$

$$\alpha^{-} = 1 - \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2}\alpha,$$

(4.3.8)

$$\mathbf{H}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T) = \Big(H^{0}_{\varphi_{\mathrm{z}}}(P,Z,T) \;\; H^{0}_{\varphi_{\varrho}}(P,Z,T) \Big)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{E}^{\mathrm{II}}(\mathbf{X},T) = \big(\; E^{0}_{\varrho}(P,Z,T) \quad E^{0}_{\mathrm{z}}(P,Z,T) \; \big)^{\mathrm{T}}.$$

Die Indizes der Absorptionskoeffizienten entsprechen wieder den Abhängigkeitsrichtungen.

Die Rotationsoperatormatrizen des rotationssymmetrischen Verfahrens $\mathbf{p}_2^{\mathrm{II}}$ und $\overline{\mathbf{p}}_2^{\mathrm{II}}$ lauten

(4.3.9)

$$\mathbf{p}_2^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 1-\mathfrak{z} & 0 \\ 0 & \mathfrak{r}-1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\mathbf{p}}_2^{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{z}}-1 & \overline{\mathfrak{z}}-1 \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ \frac{2P+1}{2P} - \frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}} \end{matrix} \right\} & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ \frac{2P+1}{2P} - \frac{2P-1}{2P}\overline{\mathfrak{r}} \end{matrix} \right\} \end{pmatrix},$$

wobei wieder die obere Alternative in den geschweiften Klammern für den entarteten Fall $P = 0$ steht.

4.3.3 Quantitative Untersuchung des rotationssymmetrischen perfekten Absorbers

In der Praxis sollen hybride rotationssymmetrische Zeitbereichsverfahren eingesetzt werden, um Antennen beispielsweise im Frequenzbereich von 1,6 GHz bis 2,0 GHz zu simulieren. Damit auch die Antennenzuleitung fein genug aufgelöst ist, wird eine Zellgröße $\Delta_{\mathrm{x}} = 0,2$ mm angenommen. Um den kritischen Radialabsorber bei mittlerem Rechenzeitaufwand außerhalb des Nahfeldes positionieren zu können, sei die Radialdiskretisierung $[P] = 700$ Elemente. Der

Absorber soll ferner nicht dicker als $D = 100$ Elemente sein.
Eine grobe Abschätzung der benötigten Absorption ist

$$e^{-\frac{\alpha}{c_0} D \Delta_{\mathrm{x}}} < 10^{-3}, \tag{4.3.10}$$

damit wird bei $V_{\mathrm{ph}} = c_0 \Delta_{\mathrm{t}} / \Delta_{\mathrm{x}} = 1/2$

$$\alpha \Delta_{\mathrm{t}} > \frac{7}{2D} \approx 0,035. \tag{4.3.11}$$

Im diskreten Fall soll die Absorption wieder sanft mit

$$\alpha(\varrho) = \alpha_{\max} \left(\frac{\varrho - \varrho_0}{d} \right)^n \tag{4.3.12}$$

bei $d = D\Delta_{\mathrm{x}}$ ansteigen.
Diagramm 4.1 zeigt den frequenzabhängigen Betrag des Reflexionsfaktors S_{11} der Grenzschicht zwischen einem Luftbereich und einem kontinuierlichen perfekten Absorber bei unterschiedlichen Absorptionskoeffizienten α. Die Daten wurden mit Gleichung (4.3.5) berechnet[6].
Es fällt auf, daß sich der Reflexionsfaktor im interessanten Frequenzbereich kaum vom Absorptionskoeffizienten beeinflussen läßt. Er liegt immer knapp unter 5 %. Nur mit unverhältnismäßig hohem Aufwand (die Grenzschicht liegt bei $P = 2000$, der Absorptionskoeffizient ist ab $D \approx 300$ Elemente realistisch) kann er auf etwas über 1 % gedrückt werden. Erst bei hohen Frequenzen ab ca. 5 GHz sind größere Unterschiede bemerkbar.
Beim diskreten perfekten Absorber liegt der Fall ähnlich. Diagramm 4.2 zeigt den frequenzabhängigen Betrag des Reflexionsfaktors S_{11} der genannten Struktur mit $[P] = 700$ in Abhängigkeit verschiedener Parameter.

Aussage 4.4 *Die Eigenschaften des diskreten rotationssymmetrischen perfekten Absorbers sind im interessanten Frequenzbereich (relativ kleine Frequenzen in bezug auf die Diskretisierung) nur sehr wenig von dessen Parametern abhängig. In der Praxis ist so ein Reflexionsfaktor von knapp unter 3 % zu erreichen. Erst bei hohen Frequenzen macht sich der Parametereinfluß bemerkbar, dort liefern dicke Absorber mit kleinen Absorptionskoeffizienten Reflexionsfaktoren klar unter* 10^{-3}.

Mit Abstrahlbedingungen [45] lassen sich nach Diagramm 4.2 deutlich geringere Reflexionsfaktoren erreichen. Leider liefern damit konstruierte absorbierende

[6] Die exakte Formel wurde verwendet. Bei den hier gewählten Parametern ist der Unterschied zur Näherungsformel ab $f = 1$ GHz nicht sichtbar.

Wände nur bei radialem Welleneinfall brauchbare Ergebnisse, während der hier vorgestellte perfekte Absorber auch bei schrägem Welleneinfall funktioniert.

Die Untersuchungen im diskreten Fall wurden wie in Abschnitt 3.5.3 mit einem eindimensionalen Verfahren durchgeführt. Die Simulationen wurden im Zeitbereich durchgeführt und abgebrochen, bevor die reflektierte Welle in der größeren Referenzstruktur den Meßpunkt erreicht.

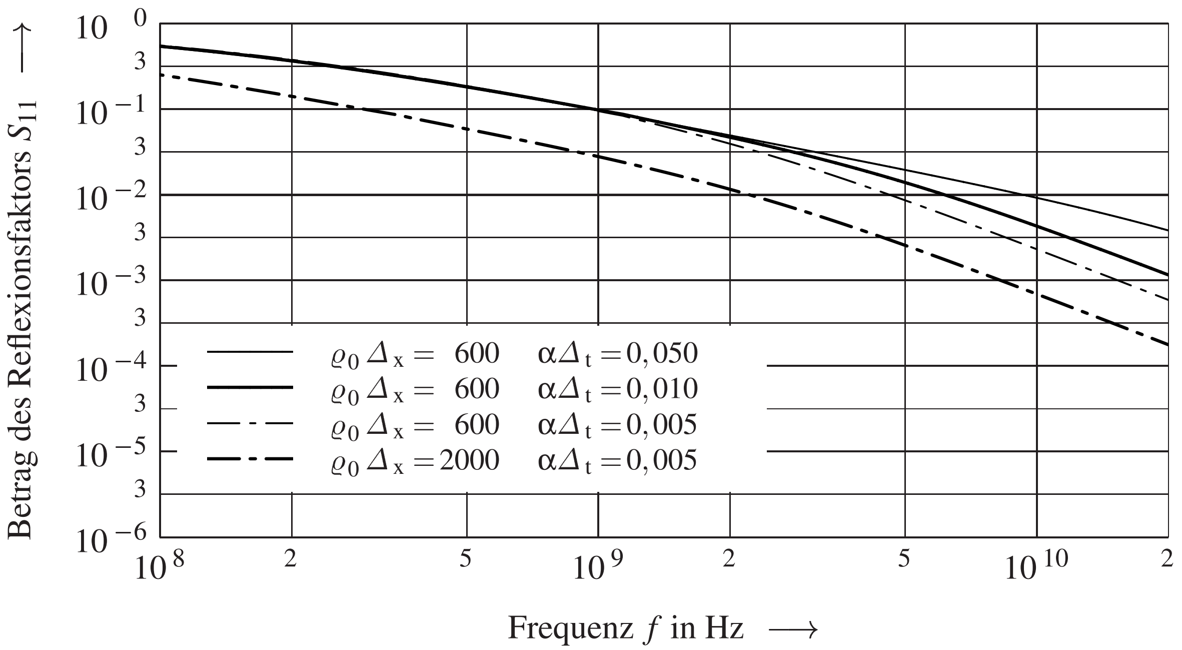

Diagramm 4.1. Frequenzabhängiger Betrag des Reflexionsfaktors S_{11} der Grenzschicht zwischen einem Luftbereich und einem kontinuierlichen rotationssymmetrischen perfekten Absorber im Falle rein radialen Welleneinfalls.

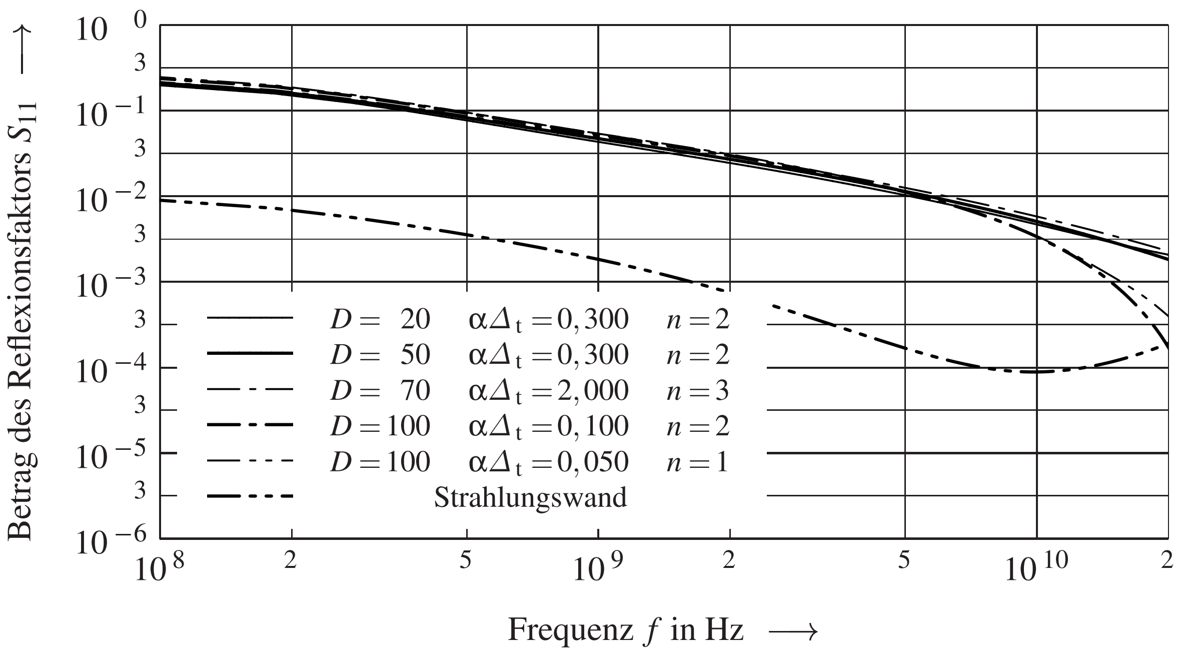

Diagramm 4.2. Frequenzabhängiger Betrag des Reflexionsfaktors S_{11} von diskreten rotationssymmetrischen perfekten Absorbern im Falle rein radialen Welleneinfalls. Die radiale Zellanzahl ist $[P] = 700$, die Zellgröße $\Delta_x = 0,2$ mm. In der Legende steht α als Abkürzung für α_{max} aus (4.3.12).

4.4 Stabilität und Dispersion des rotationssymmetrischen Verfahrens

Aussage 4.5 *Das rotationssymmetrische Zeitbereichsverfahren läßt sich nur schlecht analytisch untersuchen. Hauptgrund ist, daß für das aus (4.2.4) zu gewinnende diskrete Pendant der Besselschen Differentialgleichung keine analytische Lösung bekannt ist.*

Krummlinige FDTD–Verfahren werden daher meist empirisch untersucht. Für die Stabilitätsbetrachtung gilt im Zweidimensionalen grob [45]

$$\Delta_{\mathrm{t}} < \frac{1}{c_0} \min\left(\frac{A}{l}\right). \tag{4.4.1}$$

Dabei ist A die Zellfläche und l die maximale Zellausdehnung. Bei Rechteckgittern ist die maximale Zellausdehnung die Flächendiagonale.

In der Praxis hat sich beim rotationssymmetrischen Gitter $V_{\mathrm{ph}} = c_0 \Delta_{\mathrm{t}} / \Delta_{\mathrm{x}} = 1/2$ als in jedem Fall stabil bewährt.

Die Dispersionsrelation läßt sich auch nicht geschlossen angeben. Sie bereitet bei der Antennensimulation aber auch keine Schwierigkeiten, da wegen der Antennenzuleitung immer sehr fein aufgelöst wird.

4.5 Anregung und Auskopplung im Sendebetrieb

In diesem Abschnitt wird auf die Problematik der Feldanregung und Auskopplung relevanter Größen bei koaxial gespeisten Antennen und bei drahtgespeisten Antennen (z.B. der klassischen Dipolantenne) eingegangen. Wie in Abschnitt 2.4 vorgegeben, wird dabei zwischen Sende– und Empfangsbetrieb streng unterschieden.

Ziel der Simulation der Sendeantenne ist, wie in Abschnitt 2.4 beschrieben, die Ermittlung eines äquivalenten Stromfadens.

Zunächst muß dazu im rotationssymmetrischen Zeibereichsschema die Speisestelle der Antenne angemessen angeregt werden. An dieser Stelle können auch Daten ausgekoppelt werden, um den Antenneneingang elektrisch zu charakterisieren. Zusätzlich wird nach Bild 4.3 das zeitabhängige elektromagnetische Feld auf dem kompletten Rand des eigentlichen Simulationsgebiets aufgezeichnet. Mit diesen Daten läßt sich dann im Frequenzbereich eine Nahfeld–zu–Fernfeldtransformation durchführen (Abschnitt 4.5.3).

4.5.1 Anregung für koaxial gespeiste Antennen

Bild 4.4 zeigt die zur Anregung und Auskopplung von Wellenanteilen in einer Koaxialleitung verwendete rotationssymmetrische Simulationsstruktur. Die Ko-

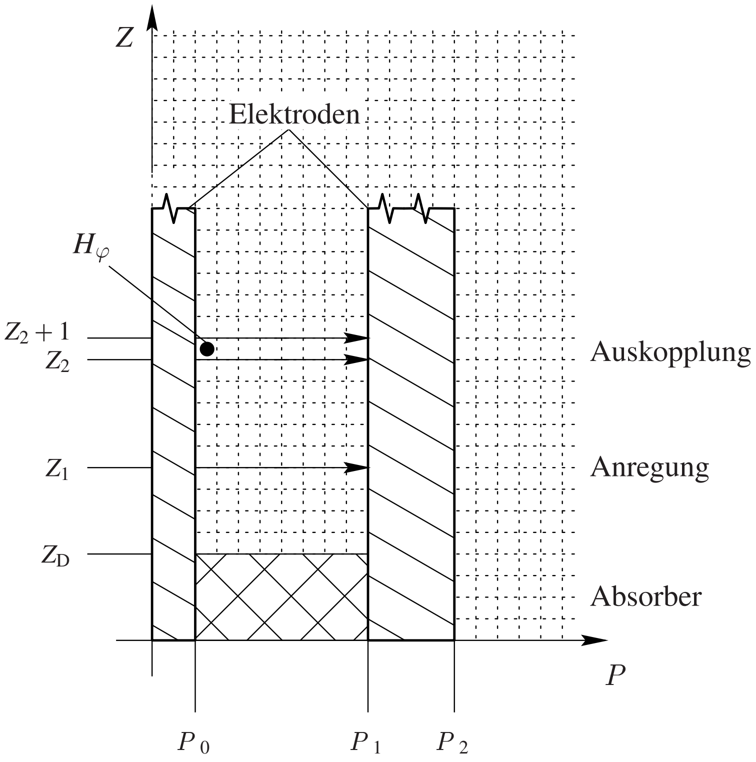

Bild 4.4. Anordnung zur koaxialen Anregung und Auskopplung.

axialleitung besitzt den Innenradius $\Delta_{\mathrm{x}} P_0$ und den Außenradius $\Delta_{\mathrm{x}} P_1$, wobei die Elektroden durch Nullsetzen der diskreten elektrischen Feldstärke realisiert werden. Der perfekte Absorber im Bereich $Z \in [0, Z_{\mathrm{D}}]$ dient als Wellensumpf für die rücklaufende Welle.

Auf dem eingezeichneten Anregungsweg bei $Z = Z_1$ wird eine radiale diskrete elektrische Stromdichte $J^0_\varrho(P, Z, T)$ eingeprägt, die örtlich dem Verlauf des elektrischen Feldes des Grundtyps der kontinuierlichen Koaxialleitung nachempfunden ist. Es gilt bei $Z = Z_1$

$$J^0_\varrho(P, Z, T) = J_0 \, \frac{1}{P + 1/2} \, \sin\left(\omega_0 \Delta_{\mathrm{t}} (T - T_0)\right) \, \mathrm{e}^{-\left(\frac{T - T_0}{T_1}\right)^2}, \tag{4.5.1}$$

zeitlich ist dies ein modulierter Gaußimpuls wie in Abschnitt 3.6.1.

Zur Auskopplung werden zunächst die elektrische Spannung und die elektrische Stromstärke bei $z = (Z_2 + 1/2)\, \Delta_{\mathrm{x}}$ ermittelt. Die Stromstärke ist $i(T) = \oint \mathbf{H} \, d\mathbf{s}$

und so

$$i(T) = \pi(2P_0+1)\Delta_x\, H_\varphi^0(P,Z,T)\big|_{P=P_0, Z=Z_2}. \tag{4.5.2}$$

Die Spannung $u(T)$ wird durch Summation der Radialkomponenten des elektrischen Feldes und anschließende Mittelung gewonnen. Es ist bei $Z = Z_2$

$$u(T) = \frac{\Delta_x}{2}(\mathfrak{z}+1)\sum_{P=P_0}^{P_1-1} E_\varrho^0(P,Z,T). \tag{4.5.3}$$

Meist wird eine Aufteilung der Leitungswelle in einen hin– und einen rücklaufenden Anteil gewünscht. Bei großem Abstand der Auskopplungsstelle zur nächsten Diskontinuität und kurzem Anregungsimpuls können die Anteile zeitlich getrennt werden. Die Anregung enthält dann allerdings erhebliche Anteile bei hohen Frequenzen, diese können schon kurze Leitungsdiskontinuitäten zur Resonanz bringen und so verhindern, daß die Felder schnell genug abklingen.

Hier wird daher ein elektrodynamischer Richtkoppler verwendet, um mit niederfrequenten Anregungen arbeiten zu können. Dieser geht von reinen kontinuierlichen Grundtypen in der Koaxialleitung aus.

Es ist

$$\begin{aligned} u(T) &= u_h(T) + u_r(T), \\ i(T) &= Z_l\,(u_h(T) - u_r(T)), \\ Z_l &= \frac{Z_F}{2\pi}\ln\frac{P_1}{P_0} \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

und somit

$$\begin{aligned} u_h(T) &= \frac{1}{2}\left(u(T) + Z_l\, i(T)\right), \\ u_r(T) &= \frac{1}{2}\left(u(T) - Z_l\, i(T)\right). \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

In einer Testrechnung wurde die Koppeldämpfung des elektrodynamischen Richtkopplers in einer luftgefüllten Koaxialleitung untersucht, die beidseitig abgesumpft ist. Diagramm 4.3 gibt die Ergebnisse wieder. Offensichtlich arbeitet die koaxiale Ein– und Auskopplung für alle praktischen Zwecke genau genug. Im Detail ist zu erkennen, daß der elektrodynamische Richtkoppler bei großem P_1 etwas genauer wird. Dies ist auf die bessere Übereinstimmung des kontinuierlichen und des diskreten koaxialen Grundwellentyps bei feinerer Auflösung zurückzuführen.

4.5.2 Anregung bei drahtgespeisten Antennen

Bei drahtgespeisten Antennen werden als Torgrößen am Antenneneingang keine Wellengrößen, sondern eine elektrische Spannung und eine Stromstärke definiert. Bild 4.5 zeigt die zur Anregung einer drahtgespeisten Antenne mit dem diskreten Radius P_1 der Anschlußdrähte verwendete Anordnung. Bei (P_0, Z_0)

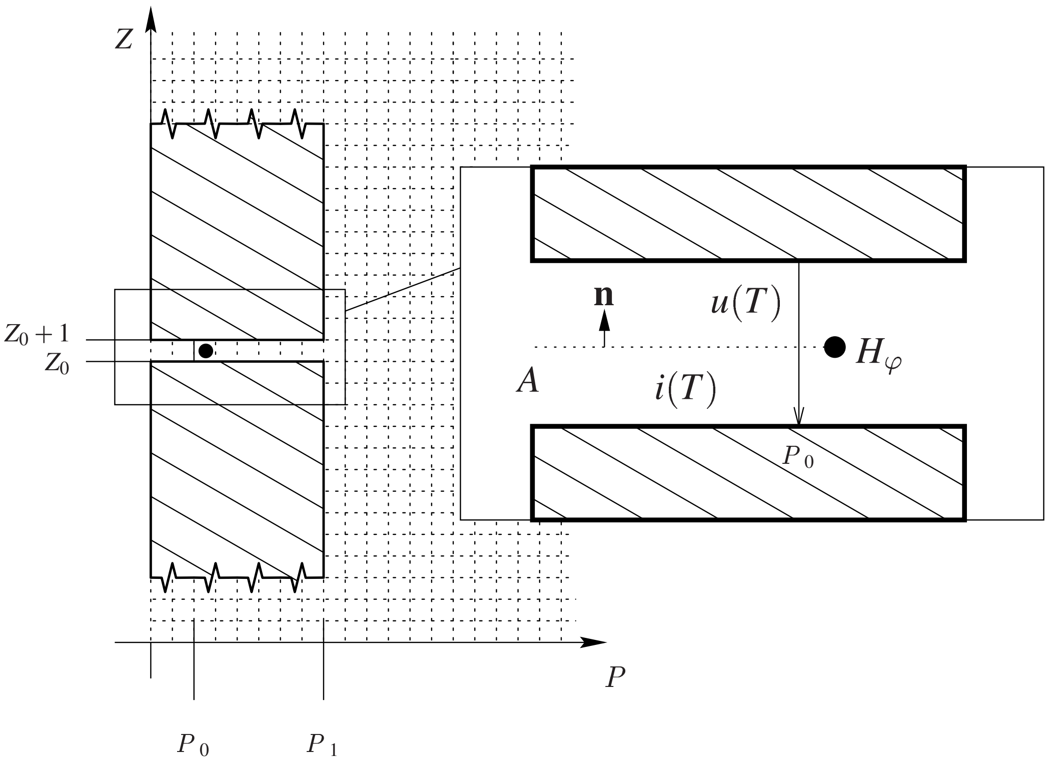

Bild 4.5. Anordnung zur Anregung und Auskopplung bei Drahtantennen.

wird über die z–Komponente der elektrischen Feldstärke eine Spannung $u(T)$ eingeprägt. Die Zeitabhängigkeit entspricht dabei wieder einem modulierten Gaußimpuls.

Die Stromstärke $i(T)$ wird über das magnetische Feld ausgekoppelt mit

$$i(T) = \pi(2P_0+1)\Delta_{\mathrm{x}}\ H^0_\varphi(P,Z,T)\big|_{P=P_0, Z=Z_1}\,. \tag{4.5.6}$$

Aussage 4.6 *Bei der magnetfeldbasierten Ermittlung der Torstromstärke $i(T)$ von drahtgespeisten Antennen wird eine Verschiebungsstromstärke mit gemessen. Bei einem Abgriffradius $P_0 = 0$ ist dies nicht der Fall, der kapazitive Einfluß des Drahtanschlusses wird voll erfaßt. Wird am Drahtradius P_1 abgegriffen, so bleibt die Kapazität des Anschlußspalts außen vor.*

Diagramm 4.4 zeigt zur Illustration Simulationsergebnisse für einen unendlich ausgedehnten Drahtdipol mit $P_1 = 5$. Die Zellgröße ist $\Delta_x = 0,2$mm bei einer Zellanzahl von 200×200 Elementen. Mit Hilfe der hier beschriebenen Technik wurde die Eingangsadmittanz berechnet, wobei die Auskopplung zur Stromberechnung einmal bei $P_0 = 0$ und einmal bei $P_0 = P_1$ erfolgte. Die Differenz der Imaginärteile beider Admittanzen entspricht offensichtlich in sehr guter Näherung der Admittanz eines Kondensators der Kapazität $C = 160$ fF. Über die Plattenkondensatorformel ergibt sich für den Anregungsspalt eine Kapazität von 139 fF. Zieht man Streueffekte mit in Betracht, so ist die Übereinstimmung gut.

Interessant ist diese Betrachtung für den Literaturdatenvergleich von Eingangsimpedanzen von Dipolantennen in Abschnitt 5.1.3. Die beispielsweise in [48, Kapitel 2.2] verwendeten Dünndrahtmodelle vernachlässigen nämlich implizit die Spaltkapazität. Deshalb muß die Auskopplung der Stromstärke für diesen Zweck außen erfolgen.

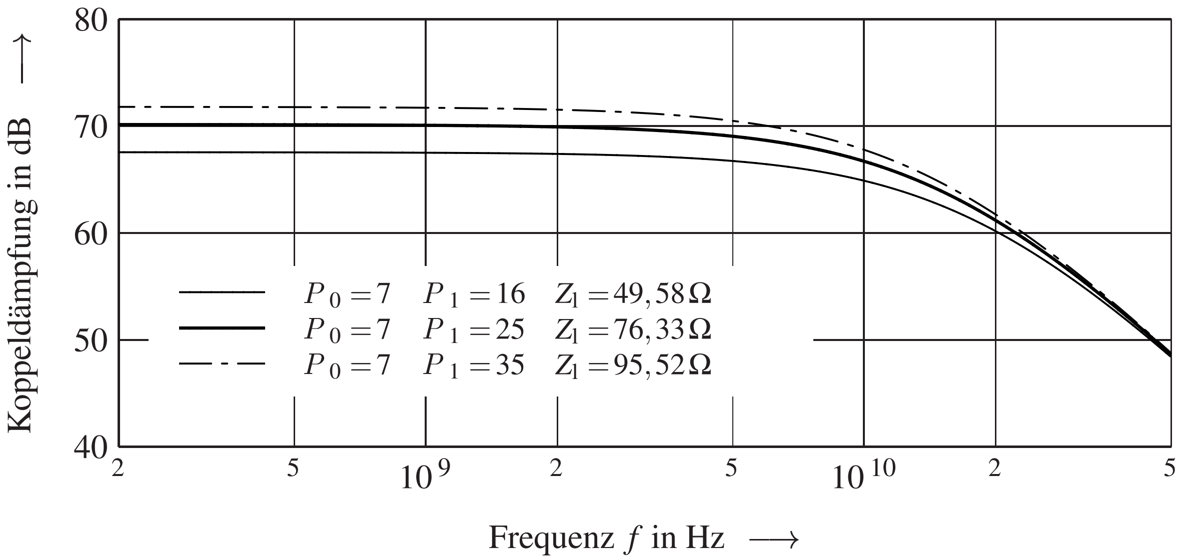

Diagramm 4.3. Frequenzabhängiger Betrag der Koppeldämpfung des elektrodynamischen Richtkopplers für verschiedene Koaxialleitungen bei einer Zellgröße von $\Delta_{\mathrm{x}} = 0{,}2$ mm. Die Axialabsorber sind $D = 20$ Elemente stark, die maximale diskrete Absorption ist $\alpha_{\max}\Delta_{\mathrm{t}} = 6$, der Exponent $n = 4$. Der Reflexionsfaktor der Absorber ist im ganzen Frequenzbereich kleiner als 10^{-5}.

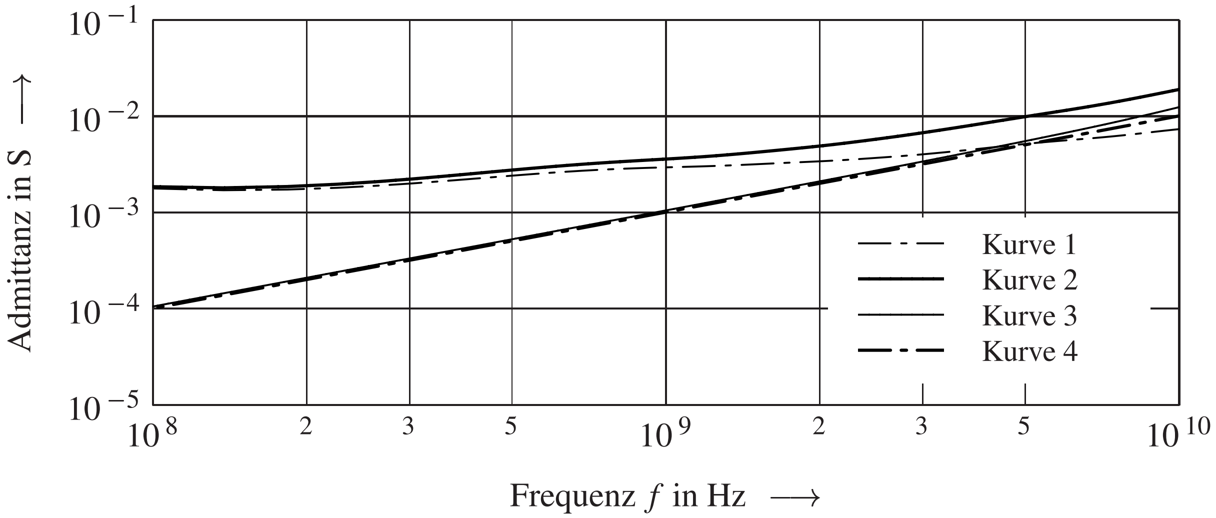

Diagramm 4.4. Simulierte frequenzabhängige Eingangsadmittanz des unendlich ausgedehnten Drahtdipols mit dem diskreten Radius $P_1 = 5$ bei $\Delta_{\mathrm{x}} = 0{,}2$ mm. Kurve 1 zeigt den Betrag der Eingangsadmittanz, wobei der Strom $i(T)$ bei $P_0 = 0$ abgegriffen wurde. Für Kurve 2 wurde bei $P_0 = P_1$ abgegriffen. Kurve 3 zeigt die Differenz der Imaginärteile der Admittanzen beider Anordnungen, Kurve 4 zum Vergleich die Admittanz eines Kondensators der Kapazität $C = 160$ fF.

4.5.3 Die Nahfeld–zu–Fernfeldtransformation

Der Weg zur Ermittlung des äquivalenten Stromfadens nach Abschnitt 2.4.1 führt über das Fernfeld der Antenne. Dieses geschieht ähnlich wie im kartesischen Fall (Abschnitt 3.7.3.1 bis 3.7.3.3) über eine Feldauskopplung am Rand des Simulationsgebiets mit anschließender Ermittlung von Ersatzflächenstromdichten nebst Integration zur Fernfeldberechnung.

Zur Feldauswertung wird wie in Abschnitt 3.7.3.1 mit interpolierten diskreten Feldern gearbeitet, bei denen alle Feldkomponenten in den Zellursprung interpretiert werden. Es ist

$$\begin{pmatrix} \check{E}^0_\varrho(P,Z,T) \\ \check{E}^0_{\mathrm{z}}(P,Z,T) \\ \check{H}^0_\varphi(P,Z,T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\bar{\mathfrak{r}})\,E^0_\varrho(P,Z,T) \\ E^0_{\mathrm{z}}(P,Z,T) \\ \frac{1}{8}(1+\bar{\mathfrak{t}})\,(1+\bar{\mathfrak{z}})\,(1+\bar{\mathfrak{r}})\,H^0_\varphi(P,Z,T) \end{pmatrix} \tag{4.5.7}$$

das interpolierte Feld.

Zur Ermittlung des äquivalenten Stromfadens wird das Fernfeld im Frequenzbereich benötigt. Mit Hilfe der Diskreten Fouriertransformation ist

$$\begin{pmatrix} \check{\mathbf{J}}^0_{\mathrm{F}}(P,Z,\omega) \\ \check{\mathbf{M}}^0_{\mathrm{F}}(P,Z,\omega) \end{pmatrix} = \Delta_{\mathrm{t}} \sum_T \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\Delta_{\mathrm{t}}T} \begin{pmatrix} \check{\mathbf{J}}^0_{\mathrm{F}}(P,Z,T) \\ \check{\mathbf{M}}^0_{\mathrm{F}}(P,Z,T) \end{pmatrix}, \tag{4.5.8}$$

wobei die Richtungen der Flächennormaleneinheitsvektoren **n** Bild 4.3 zu entnehmen sind.

Die aus den Ersatzflächenstromdichten zu berechnenden Vektorpotentiale $\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},\omega)$ und $\mathbf{F}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},\omega)$ sind ähnlich wie in (3.7.2)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},\omega) \\ \mathbf{F}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sum_{(P,Z)^{\mathrm{T}}\in\partial G} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|} \begin{pmatrix} \check{\mathbf{J}}^0_{\mathrm{F}}(P,Z,\omega) \\ \check{\mathbf{M}}^0_{\mathrm{F}}(P,Z,\omega) \end{pmatrix} P\,\Delta^2_{\mathrm{x}} d\varphi. \tag{4.5.9}$$

Dabei ist ∂G der Rand des Simulationsgebiets, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \Delta_{\mathrm{x}}\,(P\cos\varphi, P\sin\varphi, Z)^{\mathrm{T}}$ ist der Abstandsvektor vom Quellpunkt zum Aufpunkt. Das Integral über den Rand des Simulationsgebiets ist dabei mit Hilfe der Trapezregel diskretisiert worden.

Die Integrale in (4.5.9) können in Fernfeldnäherung analytisch ausgewertet werden[7].

[7] Es ist $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\zeta\cos\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = \mathrm{j}2\pi J_1(\zeta)$, $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\zeta\cos\varphi}\,d\varphi = 2\pi J_0(\zeta)$ und $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\zeta\cos\varphi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$.

Es ist in Fernfeldnäherung [14, Kapitel 1.7]

(4.5.10)

$$\mathbf{H}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},\omega) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},\omega)$$

$$|\mathbf{r}| \approx r - \Delta_{\mathrm{x}} P\cos\varphi\sin\theta - \Delta_{\mathrm{x}} Z\cos\theta \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},\omega) \approx \frac{\mathbf{e}_{\alpha}}{2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 r}}{r}\cdot \sum_{(P,Z)^{\mathrm{T}}\in\partial G} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 Z\Delta_{\mathrm{x}}\cos\theta} \begin{pmatrix} k_0 J_1(k_0 P\,\Delta_{\mathrm{x}}\sin\theta)\cos\theta \\ \omega\,\varepsilon_0 J_1(k_0 P\,\Delta_{\mathrm{x}}\sin\theta) \\ \mathrm{j}k_0 J_0(k_0 P\,\Delta_{\mathrm{x}}\sin\theta)\,\sin\theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \check{J}^0_{\mathrm{F},\varrho}(P,Z,\omega) \\ \check{M}^0_{\mathrm{F},\varphi}(P,Z,\omega) \\ \check{J}^0_{\mathrm{F,z}}(P,Z,\omega) \end{pmatrix} P\,\Delta_{\mathrm{x}}^2 .$$

Dabei liegt ein in Kugelkoordinatensystem $\mathbf{x} = (r,\theta,\alpha)^{\mathrm{T}}$ zugrunde[8]. Bild 4.6 zeigt den Integrationsweg für die Nahfeld zu Fernfeldtransformation. Die Ele-

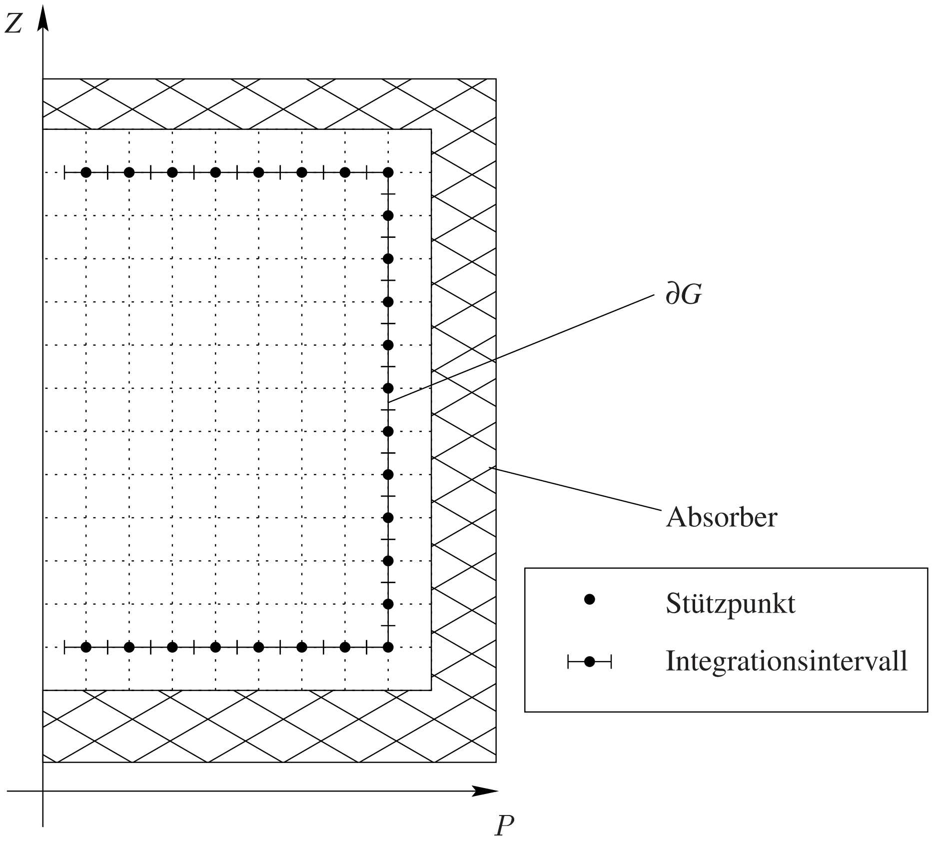

Bild 4.6. Auskopplung und Integrationsweg für die Nahfeld–zu–Fernfeldtransformation.

[8]Seine Ursprungslage auf der z–Achse kann in (4.5.10) ggf. mittels Ersatz von Z durch $Z - Z_0$ berücksichtigt werden.

mente bei $P = 0$ liefern keinen Beitrag und sind daher nicht eingezeichnet. Die Ecken des Integrationsweges werden wie eingezeichnet mit halblangen Integrationsintervallen behandelt, dies kann in (4.5.10) näherungsweise durch Halbierung der entsprechenden Ersatzflächenstromdichten realisiert werden.

4.6 Anregung und Auskopplung im Empfangsbetrieb

Nach Abschnitt 2.2 ist es Ziel der Empfangsantennensimulation, aus dem ohne Empfangsantenne vorhandenen elektromagnetischen Primärfeld in Form einer ebenen Welle $\mathbf{F}_\mathrm{p}(\mathbf{x},t)$ die antenntypabhängig definierte Ausgangsgröße $y(t)$ zu bestimmen.

Die Empfangsantennensimulation bezieht sich ausschließlich auf das elektromagnetische Sekundärfeld $\mathbf{F}_\mathrm{s}(\mathbf{x},t)$, daß sich mit dem Primärfeld zum Gesamtfeld überlagert.

Beide Feldanteile erfüllen näherungsweise die Maxwellschen Gleichungen. Die Randbedingungen werden aber nur vom Gesamtfeld erfüllt. Damit gilt bei vorgegebenem elektrischem Primärfeld $\mathbf{E}_\mathrm{p}(\mathbf{x},t)$ auf Metalloberflächen mit dem Flächennormaleneinheitsvektor $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\times(\mathbf{E}_\mathrm{p}(\mathbf{x},t)+\mathbf{E}_\mathrm{s}(\mathbf{x},t)) &= 0, \\ \mathbf{n}\times\mathbf{E}_\mathrm{s}(\mathbf{x},t) &= -\mathbf{n}\times\mathbf{E}_\mathrm{p}(\mathbf{x},t). \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Die Anregung des Empfangsproblems erfolgt also über die durch das Primärfeld vorgegebenen Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes auf Metalloberflächen.

Die Anpassung des kartesisch vorliegenden Primärfeldes an die Zylindersymmetrie der Antennensimulation erfolgt über eine azimutale Mittelwertbildung.

Zugrunde liegt eine vollständige trigonometrische Fourierentwicklung des Primärfeldes über den Azimut. Die Fourieranteile können laut Separationsansatz dann aber getrennt simuliert werden, so daß für die Auskopplung bei drahtgespeisten und koaxial gespeisten Antennen[9] wieder nur der azimutunabhängige Anteil interessiert. Dieser ist aber gerade über die genannte Mittelwertbildung zu ermitteln.

Bei der Auskopplung ist an sich das Gesamtfeld zu behandeln. Da Antennen aber gerade so beschaffen sind, daß die elektromagnetische Sekundärfeldenergie zur Auskoppelstelle geführt wird bzw. dort konzentriert wird, ist das Sekundärfeld an der Auskoppelstelle in der Praxis um Größenordnungen stärker

[9] Wenn nur der Grundtyp ausbreitungsfähig ist, oder nur dieser ausgekoppelt wird.

als das Primärfeld. Deshalb kann letzteres in sehr guter Näherung unberücksichtigt bleiben.

Die Auskopplung selbst geht dann für drahtgespeiste und koaxial gespeiste Antennen verschieden vonstatten. Sie entspricht im koaxialen Fall exakt der Auskopplung der rücklaufenden Welle im Sendebetrieb wie in Abschnitt 4.5.1.

Bei drahtgespeisten Antennen wird auch wie im Sendebetrieb (Abschnitt 4.5.2) verfahren, nur daß mit $u(T) = 0$ angeregt wird. Der ausgekoppelte Strom ist dann der Kurzschlußstrom der Empfangsantenne. Das komplette Ersatzschaltbild der Empfangsantenne ist dann eine Ersatzstromquelle mit der Kurzschlußstromstärke $i(T)$, die Innenadmittanz wird aus den Torgrößen der Sendesimulation gewonnen.

Kapitel 5
Anwendungsaspekte und Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel werden Beispielprobleme diskutiert, wobei die Verifikation der Simulationsergebnisse anhand von Meßergebnissen eine wichtige Rolle spielt. Aber auch besondere Simulationsdetails und die Ergebnisinterpretation stehen im Vordergrund.

Zunächst werden Simulationsergebnisse für verschiedene rotationssymmetrische Antennen präsentiert. Es folgen Anwendungsbeispiele für die komplette Simulation des Gebäudefunkkanals.

5.1 Simulation rotationssymmetrischer Antennen

5.1.1 Eine Disconeantenne für das 1800 MHz–Band

Bild 5.1 zeigt den Längsschnitt einer Disconeantenne für Funkkanalmessungen im 1800 MHz–Band. Da diese Antenne die Sende– und Empfangsantenne bei den im Verlauf dieses Kapitels untersuchten Beispielfunkkanälen darstellt, ist sie besonders interessant.

Wie fast alle koaxial gespeisten Antennen besteht sie prinzipiell aus einem Koaxialkabel, dessen Ende in je ein abstrahlendes Metallteil für Innen– und Außenleiter mündet. Sie wird oft für breitbandige Funkkanalmessungen verwendet.

Die Zeitbereichssimulation erfolgte in einem Gitter von 700 mal 700 Zellen mit einer Kantenlänge von 0,2 mm. Der Antennenkegel wurde mit einer Treppenstufennäherung dem Gitter angepaßt. Weitere Simulationsparameter entnimmt man Tabelle 5.1.

Simulationsparameter					
Ortsauflösung		0,2 mm	Zeitschritt		333,3 fs
Seitenlänge (Zellen)		700	Zeitschrittzahl		20000
Radialabsorber			Axialabsorber		
Dicke (Zellen)		50	Dicke (Zellen)		10
$\alpha_{max} \Delta_t$		0,3	$\alpha_{max} \Delta_t$		4,0
Exponent	n	2,0	Exponent	n	2,0

Tabelle 5.1. Simulationsparameter für die Disconeantenne.

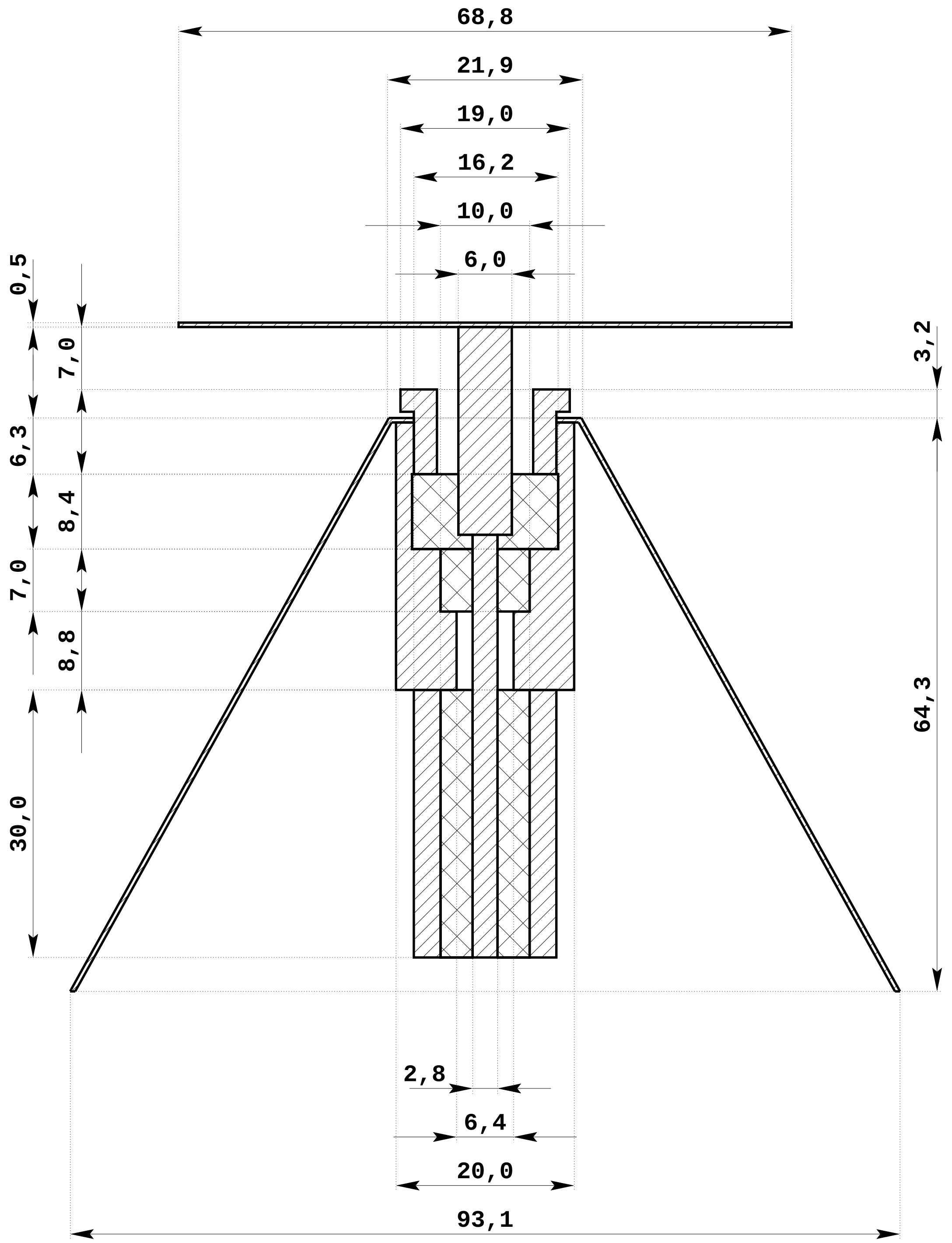

Bild 5.1. Längsschnitt einer Disconeantenne für Funkkanalmessungen im 1800 MHz–Band. Kreuzschraffierte schraffierte Gebiete sind mit Teflon ($\varepsilon_r = 2,3$) gefüllt, einfach schraffierte Gebiete sind Metallteile. Das Ende der Zuleitung ($Z_L = 50\,\Omega$) in der Zeichnung ist die Bezugsebene. Die eingetragenen Maße verstehen sich in mm.

Angeregt wurde in der Koaxialleitung mit einem sinusförmig modulierten Gaußimpuls. Die Modulationsfrequenz beträgt 5000 MHz, die Bandbreite ebenfalls 5000 MHz. Bei der nicht ganz unkritischen Wahl dieser Anregungsparameter ist folgendes zu beachten:

- Im interessanten Frequenzbereich muß das Anregungssignal genügend stark sein.
- Sehr niederfrequente Anteile im Anregungsspektrum stören, da sie nur langsam abklingen.
- Ein Gleichanteil lädt die Antenne elektrostatisch auf, durch die begrenzte Simulationsdauer verfälscht dies mit der diskreten Fouriertransformation gewonnene Ergebnisse bei niedrigen Frequenzen.
- Hochfrequente Anteile regen höhere Koaxialmoden an. So bilden sich unerwünschte Resonanzen in Verdickungen der Koaxialleitung aus und klingen nur langsam ab.

Ansonsten ist eine größtmögliche Bandbreite wünschenswert, da sie die Simulationsdauer kurz hält und außerdem eventuell die effektorientierte zeitliche Auftrennung der Ergebnissignale ermöglicht.

Der Eingangsreflexionsfaktor der Disconeantenne Zunächst wird der Eingangsreflexionsfaktor der Disconeantenne untersucht. Hin– und rücklaufende Welle des koaxialen Grundtyps wurden mit dem elektrodynamischen Richtkoppler aus Abschnitt 4.5.1 als Zeitreihen ermittelt. Die diskrete Fouriertransformation liefert dann unmittelbar den gewünschten Reflexionsfaktor.

Vergleichsmessungen erfolgten mit einem Netzwerkanalysator der Firma Hewlett Packard, das verwendete Modell eignet sich für Frequenzen bis 3 GHz. Eine OSL–Kalibrierung wurde mit einem Kit mit 3,5 mm–Verbindern durchgeführt. Da der Antennenstecker in N–Technik ausgeführt ist, mußte ein Adapter zwischengeschaltet werden, somit ist die Festlegung der Bezugsebene mit einer Ungenauigkeit von ca. 10 mm behaftet. Außerdem ist mit einer nicht herauskalibrierten Betragsungenauigkeit von maximal 1 dB bei höheren Frequenzen zu rechnen.

Die Diagramme 5.1 und 5.2 zeigen Betrag und Phase des berechneten Eingangsreflexionsfaktors der Disconeantenne im Meßdatenvergleich.

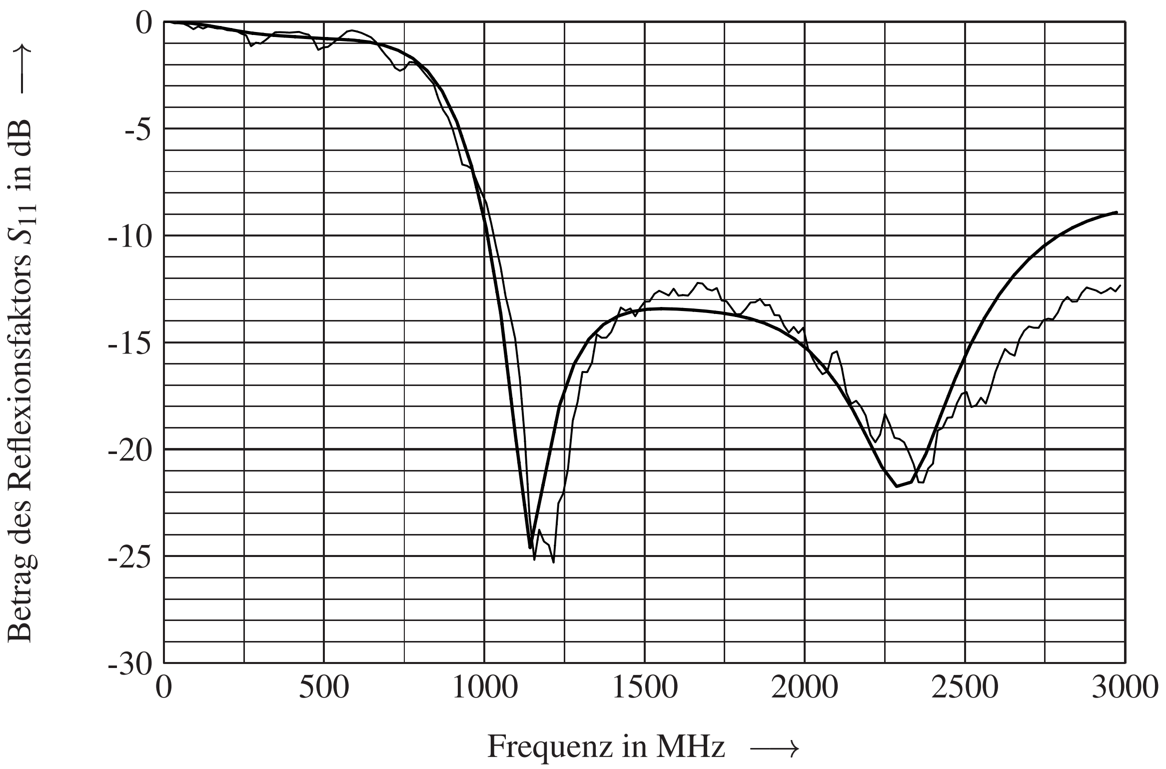

Diagramm 5.1. Berechneter frequenzabhängiger Betrag des Reflexionsfaktors S_{11} der Disconeantenne im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

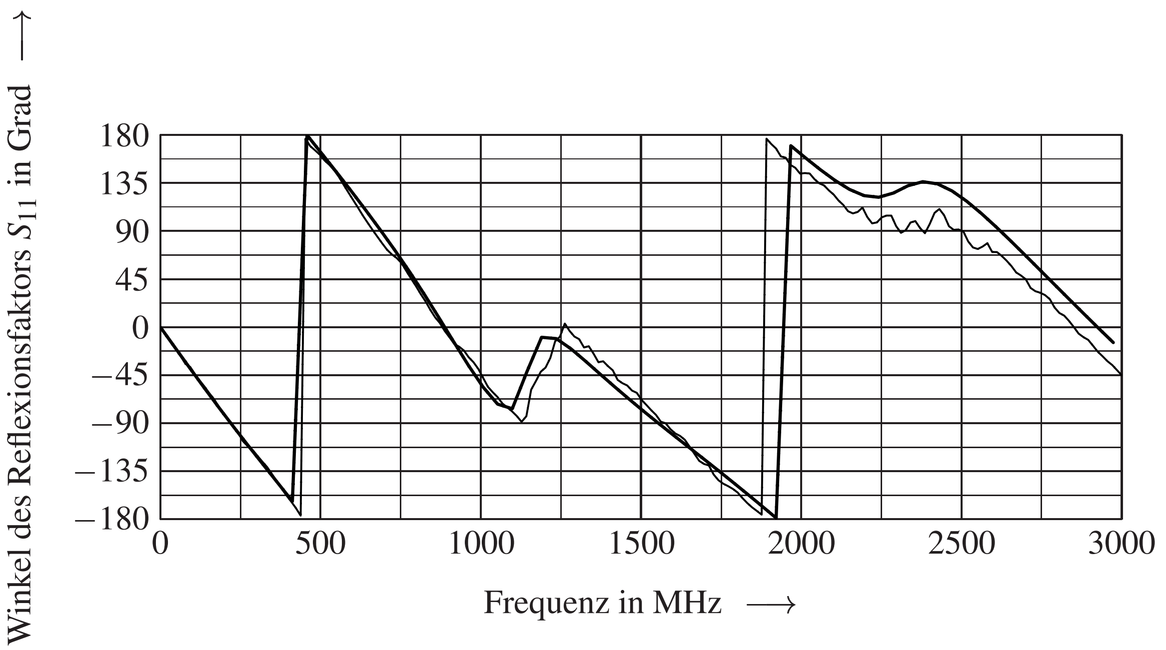

Diagramm 5.2. Berechneter frequenzabhängiger Winkel des Reflexionsfaktors S_{11} der Disconeantenne im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

Messung und Rechnung stimmen sehr gut miteinander überein. Nennenswerte Abweichungen zeigen sich nur bei Frequenzen über 2300 MHz, also außerhalb des Betriebsbereiches der Antenne.

Im Betragsspektrum fallen zwei Resonanzstellen auf, eine bei ca. 1150 MHz und eine bei ca. 2300 MHz. Diese begrenzen das Betriebsband der Antenne. Die untere Resonanz rührt wahrscheinlich vom Konus her, eine grobe Überschlagsrechnung mit einer stehenden Viertelwelle auf der Konuslänge ergibt eine Resonanz bei 1000 MHz. Eine stehende Halbwelle auf dem Durchmesser der Antennenscheibe verursacht eine Resonanz bei 2200 MHz, was gut mit der beobachteten oberen Resonanz übereinstimmt. In einem Frequenzbereich von 1500 MHz bis 2000 MHz variiert der simulierte Eingangsreflexionsfaktor der Antenne um weniger als 2 dB. Sie ist also tatsächlich gut als Breitbandantenne bei einer Bandmittenfrequenz von 1800 MHz einsetzbar.

Die Abstrahleigenschaften der Disconeantenne Zur Berechnung der Strahlungsleistungsdichte der Disconeantenne im Sendebetrieb wird wieder in der Koaxialleitung angeregt. Auch die übrigen Simulationsparameter entsprechen denen aus dem vorigen Abschnitt.

Mit der in Abschnitt 4.5.3 beschriebenen Nahfeld–zu–Fernfeldtransformation sind die Strahlungsdiagramme aus diesem Abschnitt berechnet worden. Meßergebnisse der Abstrahleigenschaften der Disconeantenne lagen leider nicht vor, die Verifikation der Nahfeld–zu–Fernfeldtransformation erfolgt daher erst in Abschnitt 5.1.2.

Die Diagramme 5.3 und 5.4 zeigen die Verteilung der Strahlungsleistung der Disconeantenne über dem Elevationswinkel θ bei verschiedenen Frequenzen. Es fällt auf, daß sich das Strahlungsmaximum mit der Frequenz recht stark verändert. Es schwenkt im Bereich von 1000 MHz bis 2250 MHz um immerhin 45 Grad. Der maximale Strahlungsleistungsbetrag bleibt dagegen bis auf 2 dB konstant.

Die Disconeantenne im Empfangsbetrieb In der Simulation des Empfangsbetriebs wird über das elektrische Feld auf Metalloberflächen angeregt. Ansonsten entsprechen die Simulationsparameter genau denen des Sendebetriebs.

Diagramm 5.5 zeigt die Frequenzabhängigkeit der relativen Empfindlichkeit[1] der Disconeantenne auf eine senkrecht zur Antennenachse einfallende ebene elektromagnetische Welle. Auffallend ist, daß im Betriebsband die Empfindlichkeit

[1]Unter der relativen Empfangsempfindlichkeit wird hier das Verhältnis der Spannung der auslaufenden Welle in der Zuleitung der Empfangsantenne zur elektrischen Feldstärke der einfallenden ebenen Welle verstanden.

mit der Frequenz abnimmt. Maximale Empfindlichkeit wird bei der ersten Resonanz erreicht, die zweite Resonanz spiegelt sich interessanterweise nicht im Empfindlichkeitsspektrum wider.
In Diagramm 5.6 ist die relative Empfindlichkeit der Disconeantenne auf ebene elektromagnetische Wellen, die aus verschiedenen Richtungen einfallen, bei diversen Frequenzen dargestellt. Das Empfindlichkeitsmaximum schwenkt hier fast nicht mit der Frequenz, im Bereich von 1000 MHz bis 2250 MHz liegt jedoch eine ausgeprägte Empfindlichkeitsschwankung von ca. 8 dB vor.
Die Simulationsdauer betrug ca. 1,5 Stunden für den Sendebetrieb, die Empfangssimulation ist aufwendiger und benötigt ca. 2,5 Stunden je Einfallswinkel der ebenen Welle. Für die Simulationen wurde ein schneller Personalcomputer mit 200 MHz Taktfrequenz verwendet. Es konnten ca. 85 % aller Feldkomponenten mit der Diskreten Wellengleichung behandelt werden.

5.1.2 Eine koaxial gespeiste Monopolantenne für Frequenzen von 800 bis 1200 MHz

Bild 5.2 zeigt den Längsschnitt einer koaxial gespeisten Monopolantenne für Funkkanalmessungen im Bereich von 800 bis 1200 MHz. Diese Antenne wurde an der ETH in Zürich entwickelt [49], Meßdaten für den Eingangsreflexionsfaktor und die Abstrahlcharakteristik liegen vor.
Bis auf die Orts– und somit die Zeitauflösung entsprechen die Simulationsparameter denen der Disconeantenne. Die Ortsauflösung ist 0,5 mm, der Zeitschritt 833 fs.
Diagramm 5.7 zeigt Berechnungsergebnisse und Meßergebnisse für den Betrag des Eingangsreflexionsfaktors der Monopolantenne. Auch hier ist die Übereinstimmung von Rechnung und Messung gut. Zwei Resonanzstellen, hier schwieriger quantitativ zuzuordnen, begrenzen wieder das Einsatzband.
In Diagramm 5.8 sind Rechenergebnisse und Ergebnisse zweier Messungen für die Abstrahlcharakteristik bei 1500 MHz dargestellt. Die Übereinstimmung ist sehr gut.
Die Diagramme 5.9 und 5.10 zeigen nochmals die Abstrahlcharakteristik der Monopolantenne in Abhängigkeit des Elevationswinkels θ für verschiedene Frequenzen. Das Maximum ist hier wesentlich frequenzunabhängiger als bei der Disconeantenne. Die Intensität des Maximums ändert sich mit der Frequenz um etwas mehr als 2 dB. Auffällig ist jedoch die für Meßzwecke ungewöhnliche Lage des Abstrahlungsmaximums: Die Antenne strahlt unter einem Winkel von ca. 45 Grad gegen die Horizontale nach oben.

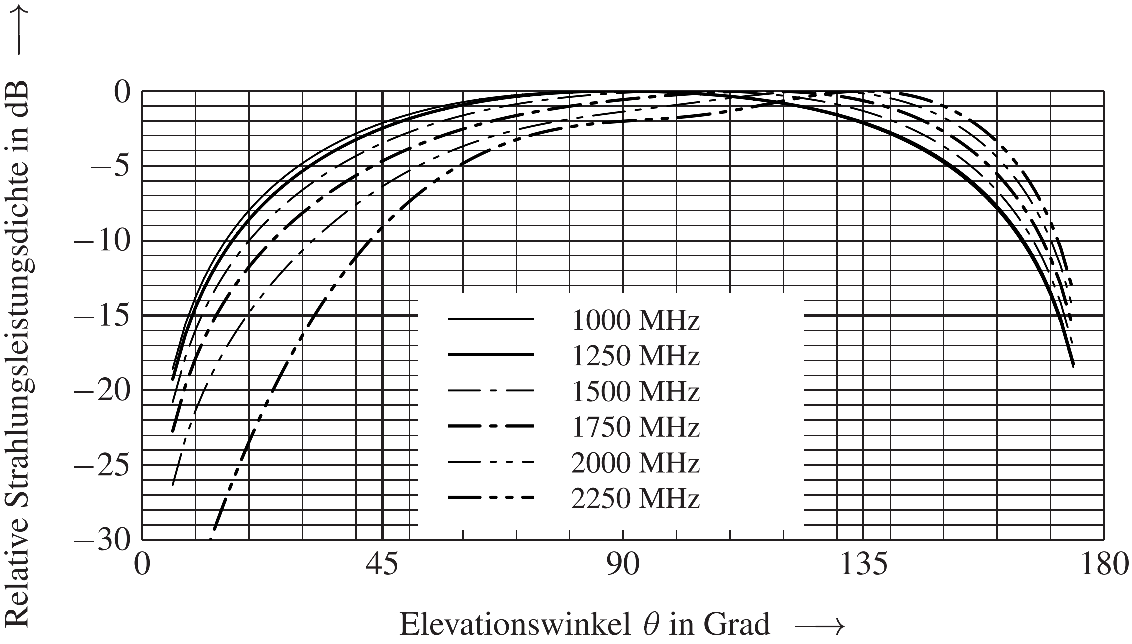

Diagramm 5.3. Berechnete relative Strahlungsleistungsdichte der Disconeantenne in Abhängigkeit des Elevationswinkels θ bei verschiedenen Frequenzen. Bezugswert der logarithmischen Darstellung ist das jeweilige Maximum bei gleicher Frequenz.

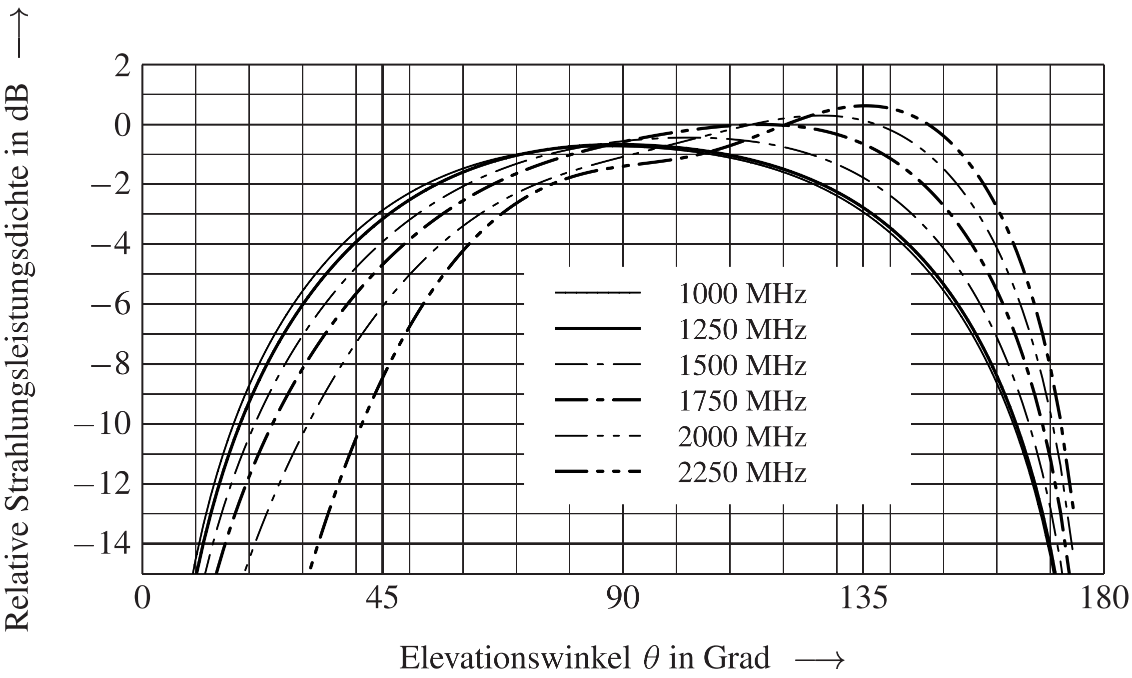

Diagramm 5.4. Berechnete relative Strahlungsleistungsdichte der Disconeantenne in Abhängigkeit des Elevationswinkels θ bei verschiedenen Frequenzen. Bezugswert der logarithmischen Darstellung ist das Maximum bei 1750 MHz, d. h. alle Kurven sind gleich normiert.

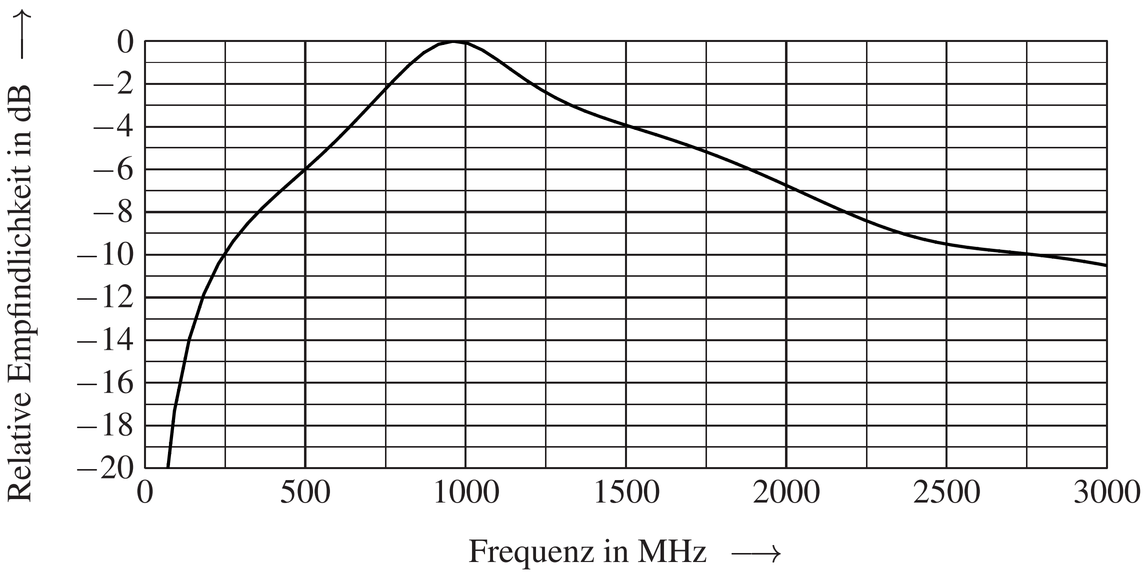

Diagramm 5.5. Berechnete relative Empfangsempfindlichkeit (siehe Text) der Disconeantenne in Abhängigkeit der Frequenz bei Anregung mit einer senkrecht zur Antennenachse einfallenden ebenen Welle. Bezugswert der logarithmischen Darstellung ist das Maximum.

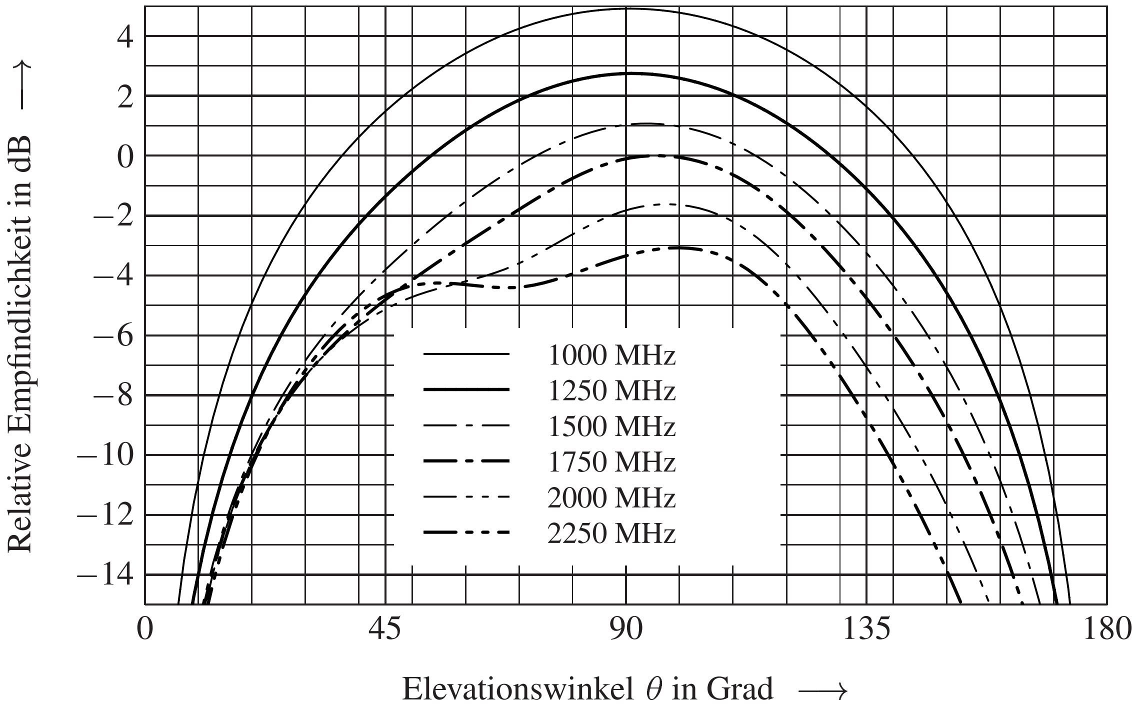

Diagramm 5.6. Berechnete relative Empfangsempfindlichkeit der Disconeantenne in Abhängigkeit des Elevationswinkels θ des Wellenvektors der einfallenden ebenen Welle bei verschiedenen Frequenzen. Bezugswert der logarithmischen Darstellung ist das Maximum bei 1750 MHz, d. h. alle Kurven sind gleich normiert.

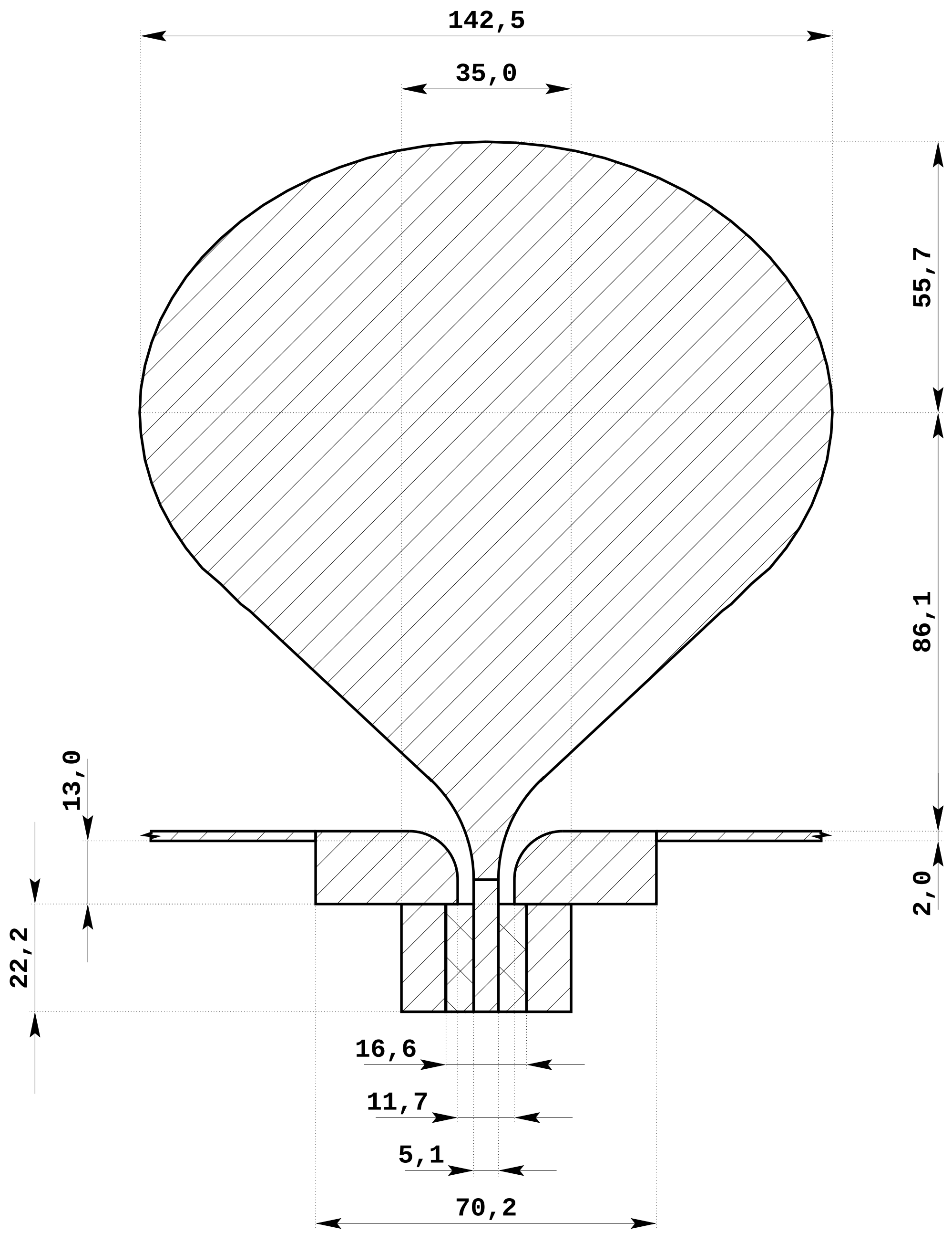

Bild 5.2. Längsschnitt einer koaxial gespeisten Monopolantenne für Funkkanalmessungen im Bereich von 800 bis 1200 MHz. Kreuzschraffierte Gebiete sind mit Teflon ($\varepsilon_r = 2,3$) gefüllt, einfach schraffierte Gebiete sind Metallteile. Das Ende der Zuleitung ($Z_\mathrm{L} = 50\,\Omega$) in der Zeichnung ist die Bezugsebene. Der Masseteller hat einen Durchmesser von 500 mm. Die Maßangaben sind in mm.

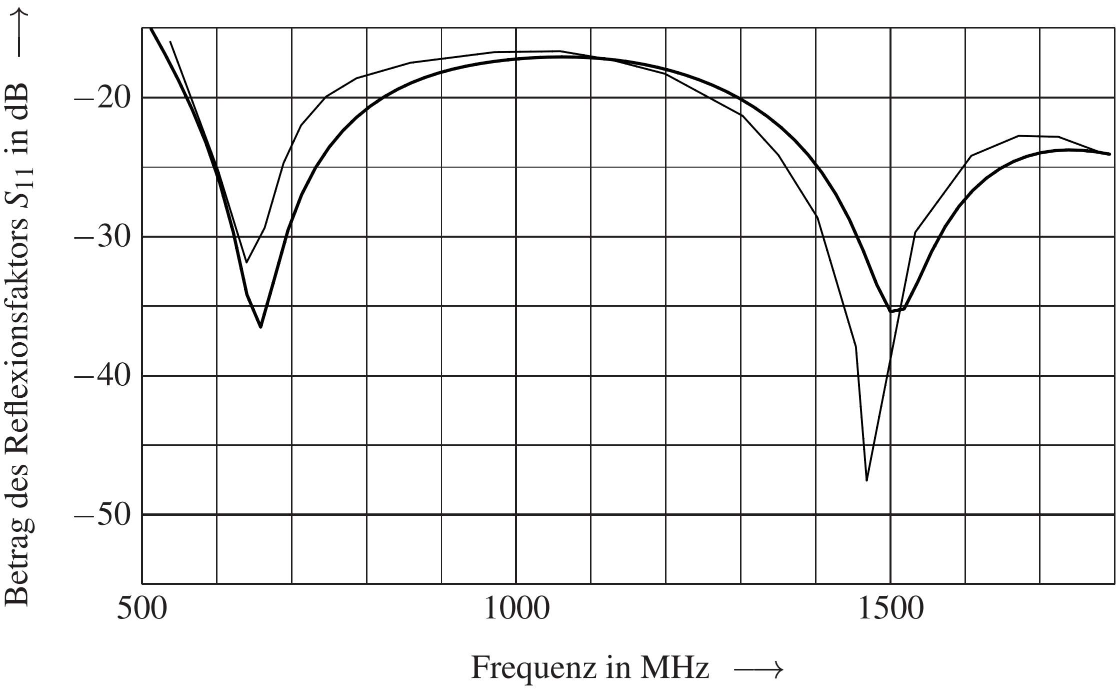

Diagramm 5.7. Berechneter frequenzabhängiger Betrag des Reflexionsfaktors S_{11} der Monopolantenne im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

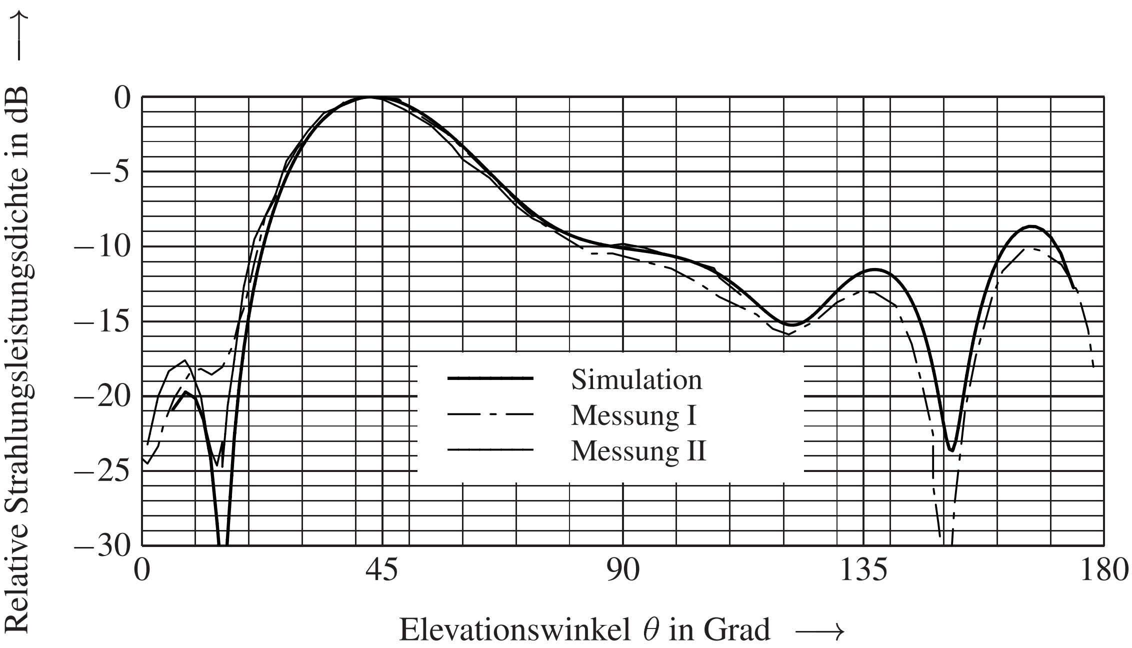

Diagramm 5.8. Berechnete und gemessene relative Strahlungsleistungsdichte der Monopolantenne in Abhängigkeit des Elevationswinkels θ bei 1500 MHz. Bezugswert der logarithmischen Darstellung ist das jeweilige Maximum.

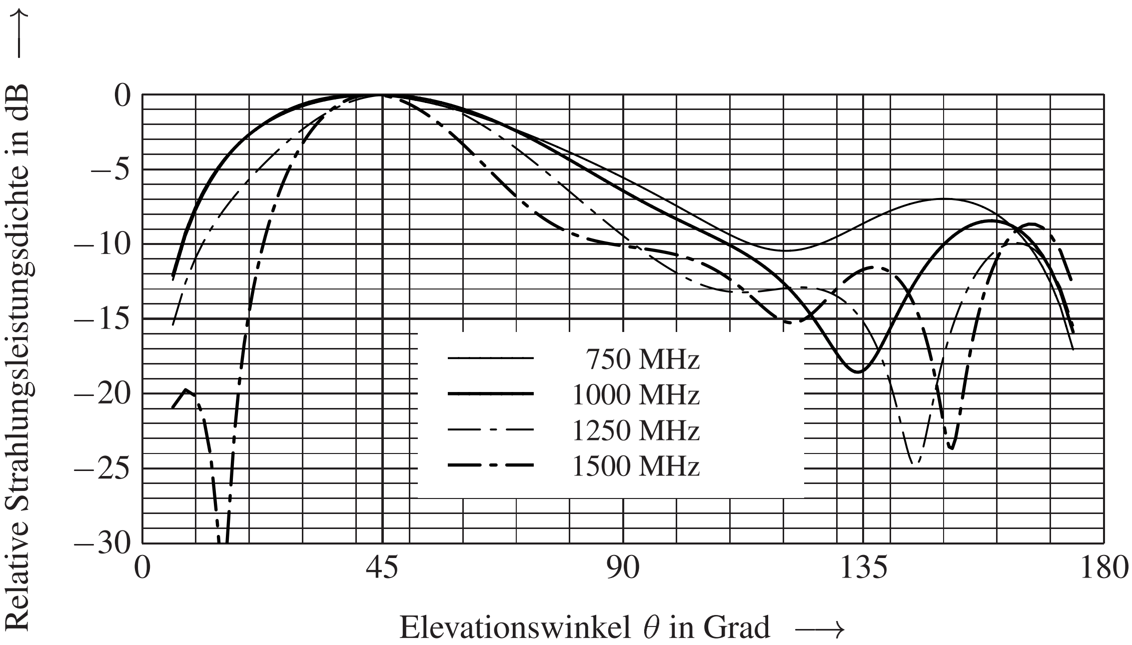

Diagramm 5.9. Berechnete relative Strahlungsleistungsdichte der Monopolantenne in Abhängigkeit des Elevationswinkels θ bei verschiedenen Frequenzen. Bezugswert der logarithmischen Darstellung ist das jeweilige Maximum bei gleicher Frequenz.

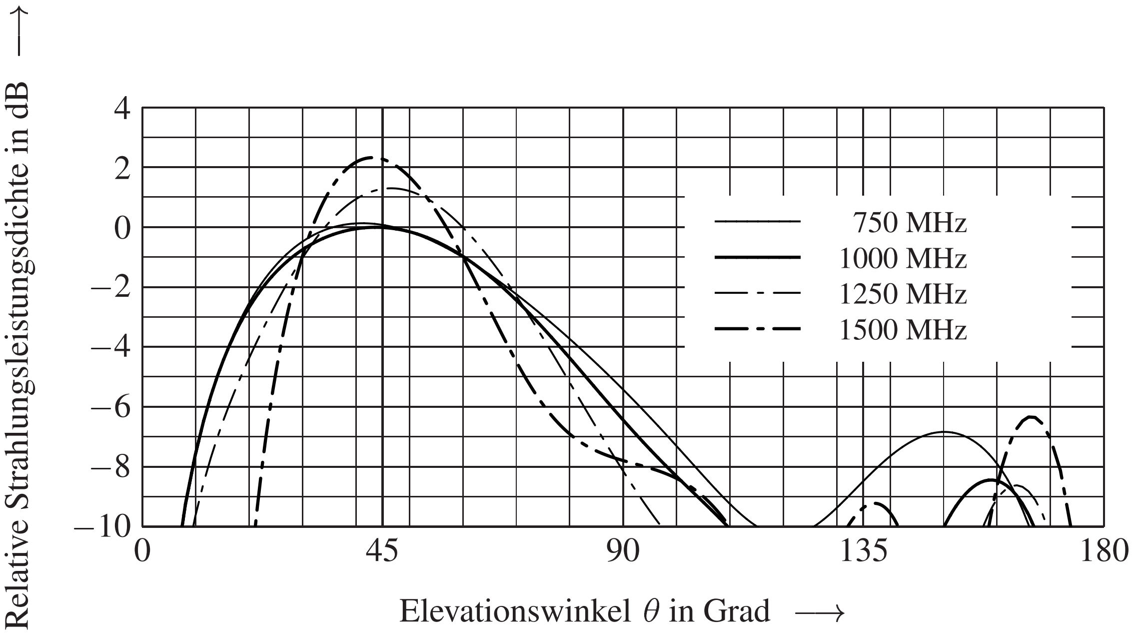

Diagramm 5.10. Berechnete relative Strahlungsleistungsdichte der Monopolantenne in Abhängigkeit des Elevationswinkels θ bei verschiedenen Frequenzen. Bezugswert der logarithmischen Darstellung ist das Maximum bei 1000 MHz, d. h. alle Kurven sind gleich normiert.

5.1.3 Dipolantennen zur Verifikation der Empfangssimulation

Hier soll nun das Empfangsantennensimulationsverfahren anhand von Dipolantennen verifiziert werden. Dieser Antennentyp wurde ausgewählt, da als Referenz hierfür ein einfaches Stromentwicklungsverfahren aus Anhang A zur Verfügung steht.

Die Diagramme 5.11 und 5.12 zeigen dazu zunächst den simulierten Fußpunktwiderstand verschiedener Dipolantennen im Vergleich zu den Ergebnissen des Stromentwicklungsverfahrens. Die Simulationsparameter des Zeitbereichsverfahrens entsprechen dabei denen der Disconeantenne aus Tabelle 5.1.

Die Übereinstimmung ist gut. Die vorhandenen Abweichungen rühren hauptsächlich von der schlechten Modellierung der Antennenenden im Referenzverfahren her. Bei den Parallelresonanzen tritt nämlich beim Referenzverfahren eine Art Verschiebung nach höheren Frequenzen hin auf. Die Antenne erscheint im Rahmen der Stromentwicklungsmethode also kürzer, was gut zur Vernachlässigung der Antennenendkapazität paßt.

Diagramm 5.13 zeigt die Empfindlichkeit des Kurzschlußstroms[2]von Dipolantennen verschiedener Längen auf eine senkrecht zur Antennenachse einfallende ebene Welle im Vergleich zu Referenzergebnissen.

Die erste Serienresonanz stimmt auch hier hervorragend überein, erst bei höheren Frequenzen unterscheiden sich die beiden Modelle in der Resonanzstärke. Numerische Experimente ergaben, daß bei der Stromentwicklungsmethode die höheren Resonanzen sehr stark von den Simulationsparametern abhängen, daher ist hier der Zeitbereichsmethode mehr Vertrauen zu schenken.

In Diagramm 5.14 ist die Empfindlichkeit der Dipolantennen auf eine unter einem Winkel von 45° zur Antennenachse einfallende ebene Welle im Vergleich zu Referenzergebnissen zu sehen. Die Welle ist dabei so polarisiert, daß der elektrische Feldvektor in der von der Antennenachse und dem Wellenvektor aufgespannten Ebene liegt. Bezugsgröße ist der Scheitelwert der elektrischen Feldstärke.

Hier stimmt auch die zweite Resonanzstelle gut mit den Referenzergebnissen überein.

[2]Die Empfindlichkeit des Kurzschlußstroms der Dipolantenne ist das Verhältnis desselben zur elektrischen Feldstärke der einfallenden ebenen Welle. Einheit: Am/V

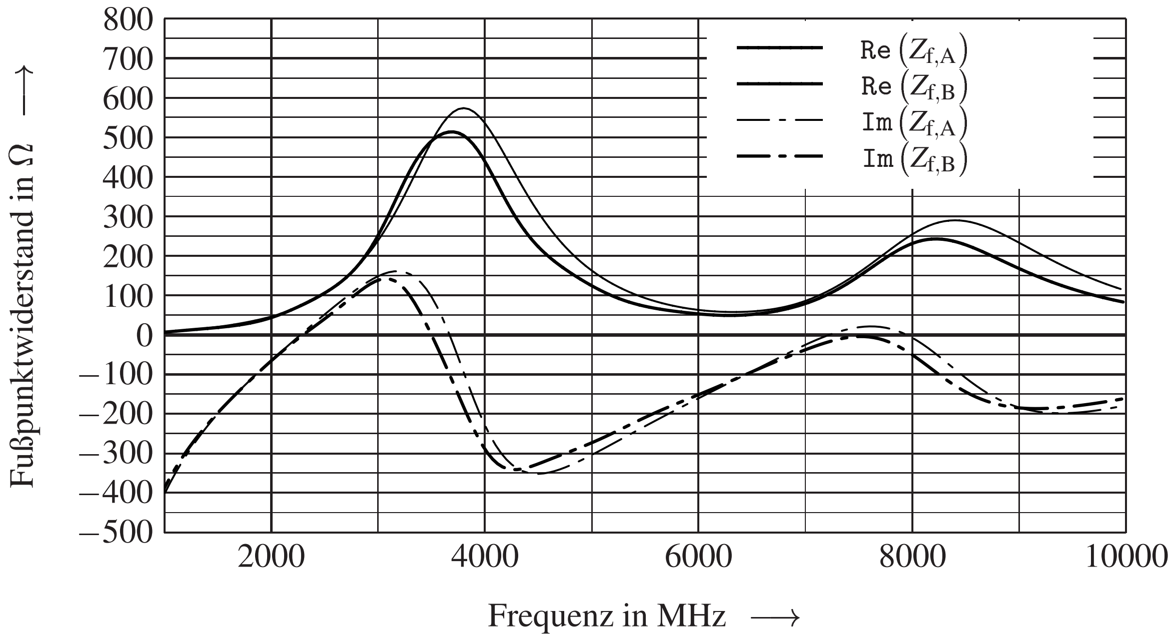

Diagramm 5.11. Simulierter Fußpunktwiderstand $Z_{\mathrm{f,A}}$ einer Dipolantenne der Länge $l = 60$ mm mit dem Radius $a = 0,8$ mm im Vergleich zu den Ergebnissen des Stromentwicklungsverfahrens $Z_{\mathrm{f,B}}$ aus Anhang A. Die Simulationsparameter entsprechen denen der Disconeantenne aus Tabelle 5.1

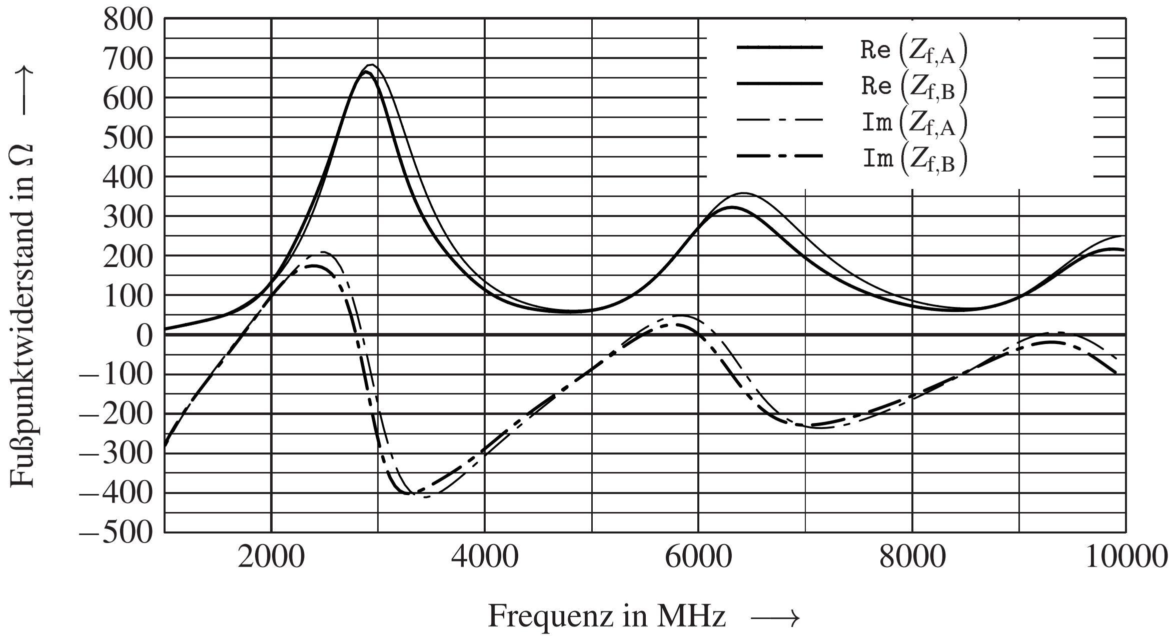

Diagramm 5.12. Simulierter Fußpunktwiderstand $Z_{\mathrm{f,A}}$ einer Dipolantenne der Länge $l = 80$ mm mit dem Radius $a = 0,8$ mm im Vergleich zu den Ergebnissen des Stromentwicklungsverfahrens $Z_{\mathrm{f,B}}$ aus Anhang A. Die Simulationsparameter entsprechen denen der Disconeantenne aus Tabelle 5.1

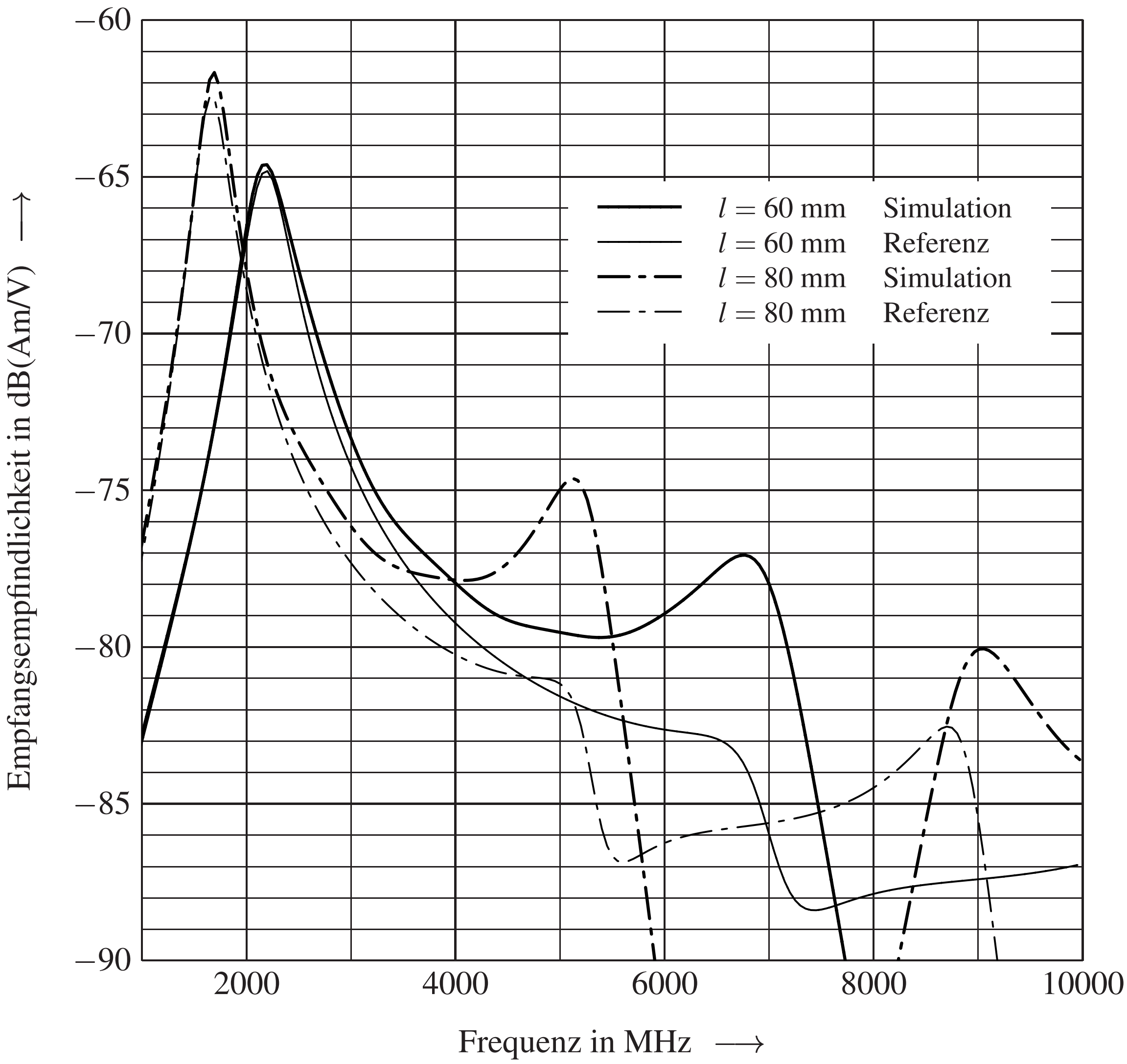

Diagramm 5.13. Simulierte Empfindlichkeit des Kurzschlußstroms (s. Text) von Dipolantennen verschiedener Längen l mit dem Radius $a = 0,8$ mm auf eine senkrecht zur Antennenachse einfallende ebene Welle mit elektrischer Feldstärke in Richtung der Antennenachse. Bezugsgröße ist der Scheitelwertzeiger der elektrischen Feldstärke. Als Referenz dienen Ergebnisse des Stromentwicklungsverfahrens aus Anhang A. Die Simulationsparameter entsprechen denen der Disconeantenne aus Tabelle 5.1

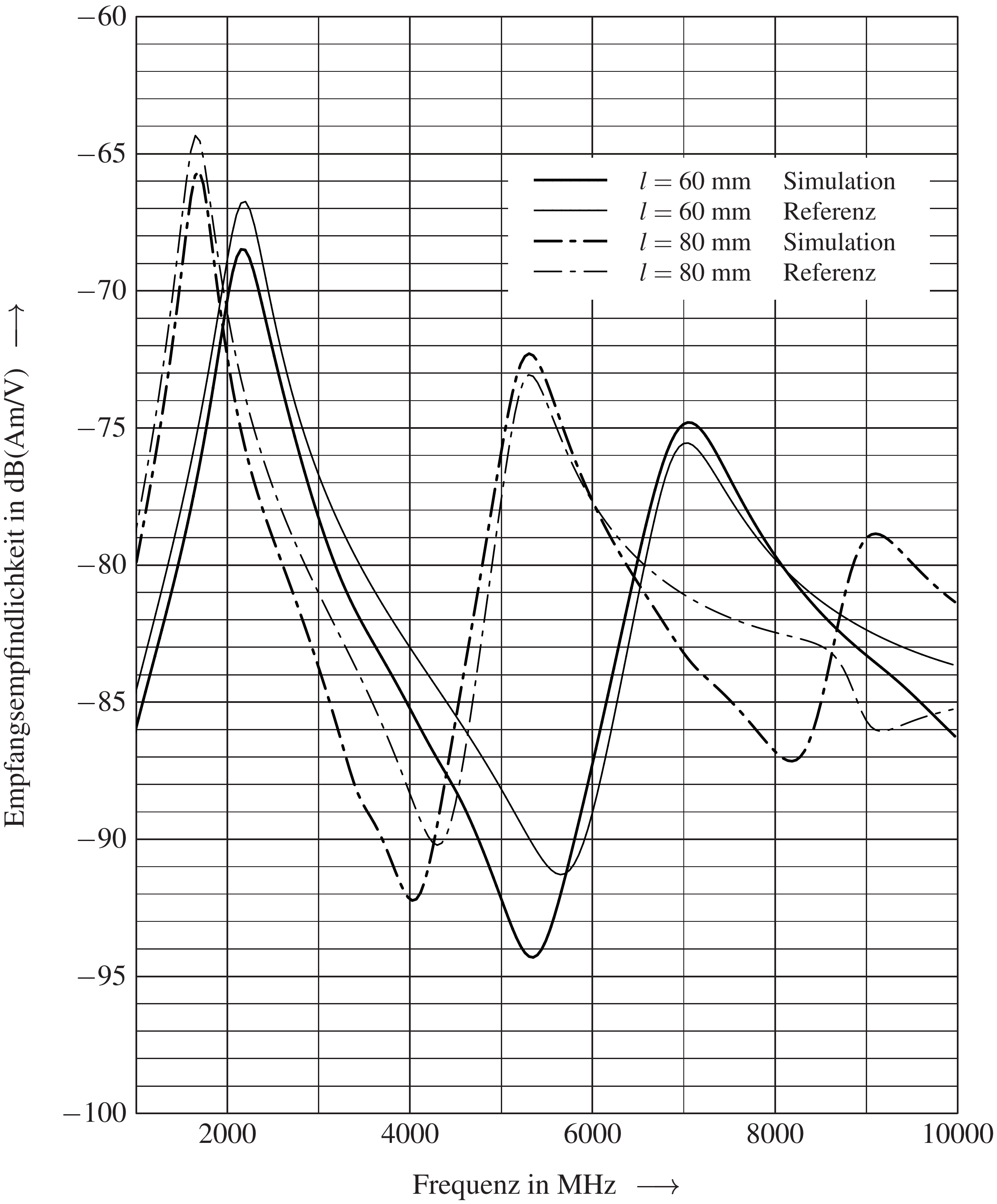

Diagramm 5.14. Simulierte Empfindlichkeit des Kurzschlußstroms von Dipolantennen verschiedener Längen l mit dem Radius $a = 0,8$ mm auf eine im Winkel von 45° zur Antennenachse einfallende ebene Welle.

5.2 Simulationen zur beispielhaften Berechnung von Kanalimpulsantworten in verschiedenen Testszenarien

In diesem Abschnitt soll die Funkkanalsimulation als Ganzes, wie in Kapitel 2 beschrieben, an zwei Testgebäuden erprobt werden. Als Sende– und Empfangsantenne wurde dabei jeweils eine Disconeantenne aus Abschnitt 5.1.1 eingesetzt. Referenzmessungen wurden als Zweitormessungen mit einem Netzwerkanalysator durchgeführt.

5.2.1 Gebäude des IMST in Kamp–Lintfort

Bild 5.3 zeigt den Grundriß der linken Seite des ersten Obergeschosses der Instituts für Mobil– und Satellitenfunktechnik (IMST) in Kamp–Lintfort.

Die Positionen der Antennen sind mit schwarz gefüllten Kreisen markiert. Sende– und Empfangsantenne wurden in einer Höhe von ca. 1,54 m auf Stativen montiert. Die Sendeantenne befand sich in unmittelbarer Nähe (ca. 2 m Kabellänge) des Netzwerkanalysators, die Empfangsantenne war über ein 10 m langes Koaxialkabel mit demselben verbunden.

Die Simulationsparameter entnimmt man Tabelle 5.2. Berücksichtigt wurden die in Bild 5.3 ausgefüllten Metallteile mit Ausnahme der Zwischenwandbefestigungen. Hohlräume in den Zwischenwänden sowie in den Doppelglasfenstern wurden mit erfaßt. Die Türen wurden mit realistischen Öffnungswinkeln simuliert.

Simulationsparameter					
Ortsauflösung		8 mm	Zeitschritt, $\tilde{K}_z = 0$		18,64 ps
Simulationsgebiet		31 x 13 m^2	Simulationsdauer		250 ns
Absorber			Anregung		
Dicke (Zellen)		15	Modulationsfrequenz		1800 MHz
$\alpha_{max}\Delta_t$		6	Bandbreite (-20 dB)		1000 MHz
Exponent	n	4			
Materialparameter					
Material	ε_r	κ	Material	ε_r	κ
Beton	9,0	0,090 S/m	Gipskarton	6,0	0,060 S/m
Glas	6,0	0,005 S/m	Holz	5,0	0,006 S/m

Tabelle 5.2. Simulationsparameter für das erste Testgebäude.

Die Stützwerte der transversalen Wellenzahl k_z wurden im Winkelraster von 5° bei Bandmittenfrequenz gewählt. Es konnten ca. 92 % der Feldkomponenten mit der schnellen Diskreten Wellengleichung behandelt werden. Die Simulationen erforderten für eine transversale Wellenzahl $k_z = 0$ ungefähr eine Rechenzeit von 360 CPU–Minuten, bei $k_z \neq 0$ wurden 960 Minuten je Stützwert von $\tilde{K}_z$ benötigt. Hierbei wurde ein moderner Computer mit einer Alpha–CPU der Firma Digital eingesetzt. Die Taktfrequenz beträgt 366 MHz.

Die Messungen erfolgten wieder mit dem Netzwerkanalysator aus Abschnitt 5.1.1. Für das Herauskalibrieren der insgesamt ungefähr 12 m langen Verbindungskabel wurde nicht auf die Kalibrierungssoftware des NWA zurückgegriffen. Statt dessen erfolgte eine einfache Durchgangskalibrierung, die nur die Kabeldämpfung und die Verzögerung berücksichtigt. Die ebenfalls ausgemessenen Reflexionen an den Verbindungsstellen blieben unberücksichtigt, da sie bei Messungen des Transmissionsfaktors kaum ins Gewicht fallen.

Diagramm 5.15 zeigt den frequenzabhängigen Betrag des Transmissionsfaktors des Funkkanals für Empfangsposition 2 im Vergleich zwischen Messung und Rechnung. Die Übereinstimmung ist sehr gut, wenn man bedenkt, wie kritisch der Funkkanal von kleinsten Ungenauigkeiten der Gebäudegeometrie bzw. den Antennenpositionen abhängt.

Diesen als Fast Fading bekannten Sachverhalt illustriert Diagramm 5.16, in dem im Umkreis von nur 16 mm von Empfangsposition 2 verschiedene berechnete Transmissionsfaktorverläufe gezeigt werden. Auffällig ist, daß bei manchen Frequenzen der Transmissionsfaktor nur um ± 2 dB variiert, bei anderen jedoch um fast ± 15 dB.

Diagramm 5.17 zeigt den Vergleich der aufwendigen Simulationstechnik mit der vereinfachten, die mit nur einer Stützstelle der transversalen Wellenzahl auskommt. Der Unterschied ist hier minimal. Zu beachten ist jedoch, daß die vereinfachte Methode wegen des verwendeten Extrapolationsverfahrens nur relativ schmalbandige Ergebnisse liefern kann.

In Diagramm 5.18 ist der Transmissionsfaktor für Empfangsposition 2 breitbandig zu sehen. Davon ausgehend wurde die Basisbandkanalimpulsantwort in Diagramm 5.19 berechnet. Die Bandbreite von 1000 MHz impliziert eine Zeitauflösung in der Größenordnung von 1 ns. Gut zu sehen ist die zeitliche Verzögerung, mit der der erste Impuls eintrifft sowie verschieden starke Echos. Diagramm 5.20 zeigt die Basisbandkanalimpulsantwort für Empfangsposition 7.

Diagramm 5.21 und 5.22 zeigen Meßdatenvergleiche für die Empfangspositionen 3 und 7. Hier ist die Übereinstimmung nicht so gut wie bei Empfangsposition 2. Beachtet man aber, wie kritisch die Datenerfassung ist, so sind die Ergebnisse doch befriedigend.

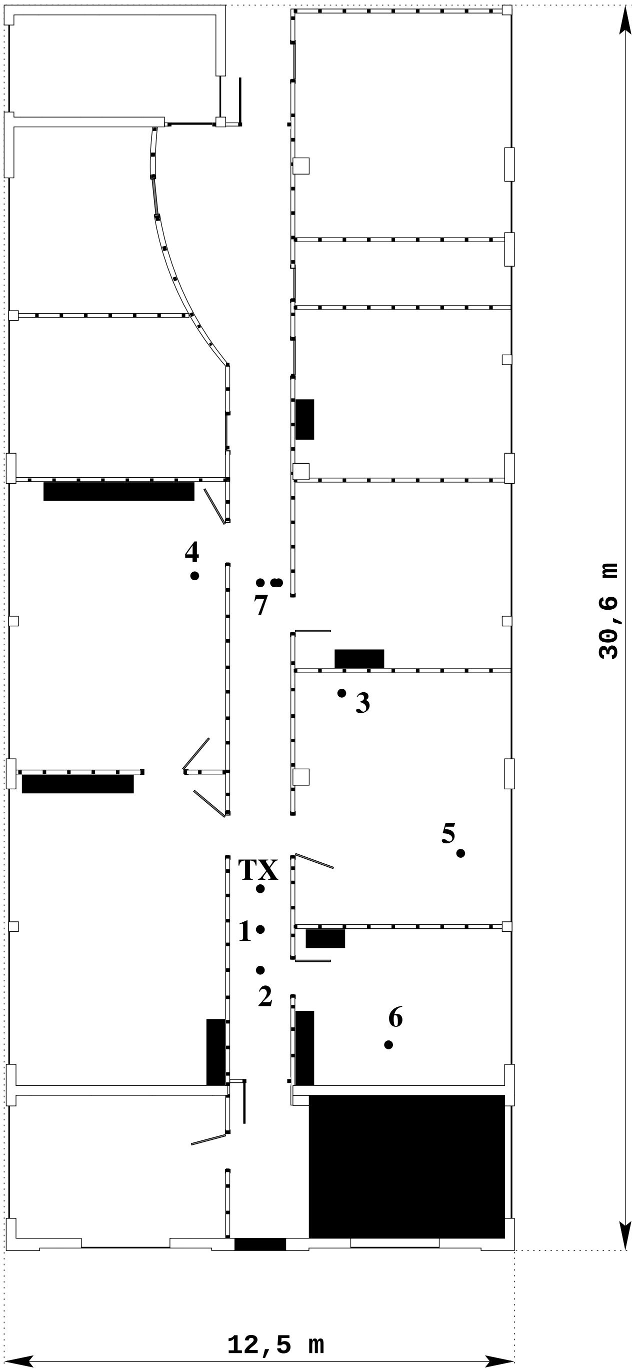

Bild 5.3. Grundriß einer Etage des Instituts für Mobil– und Satellitentechnik in Kamp–Lintfort. Metallteile (Schränke, Türzagen, Zwischenwandbefestigungen und der Faraday–Käfig) sind schwarz ausgefüllt. Die verschiedenen Antennenpositionen sind eingezeichnet und beschriftet.

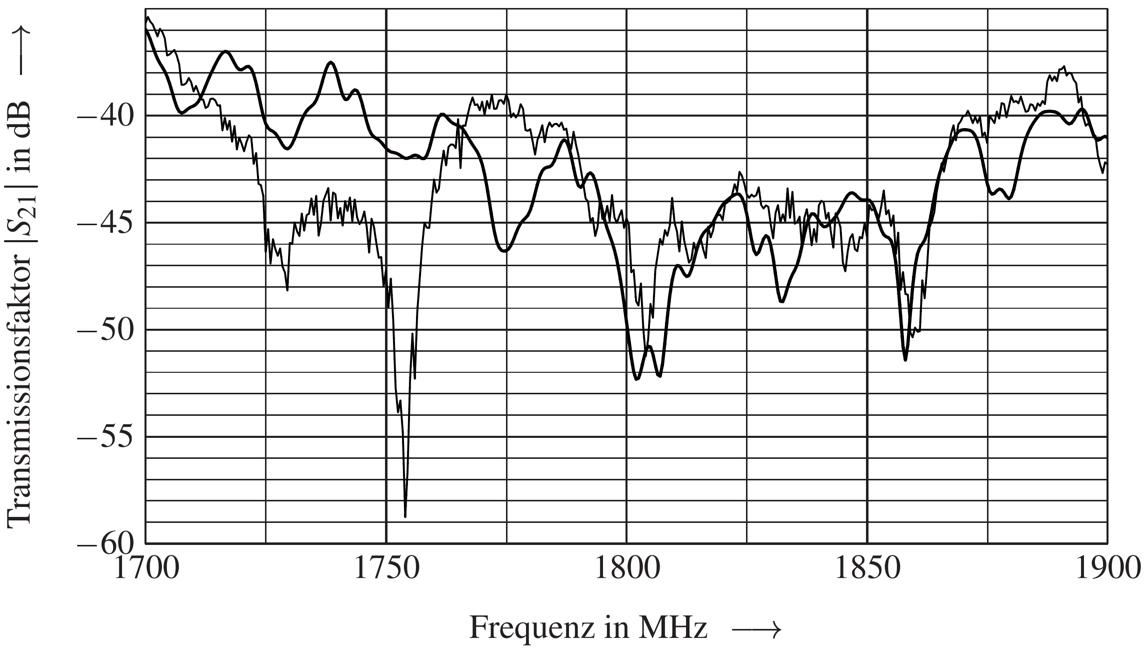

Diagramm 5.15. Berechneter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals für Empfangsposition 2 im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

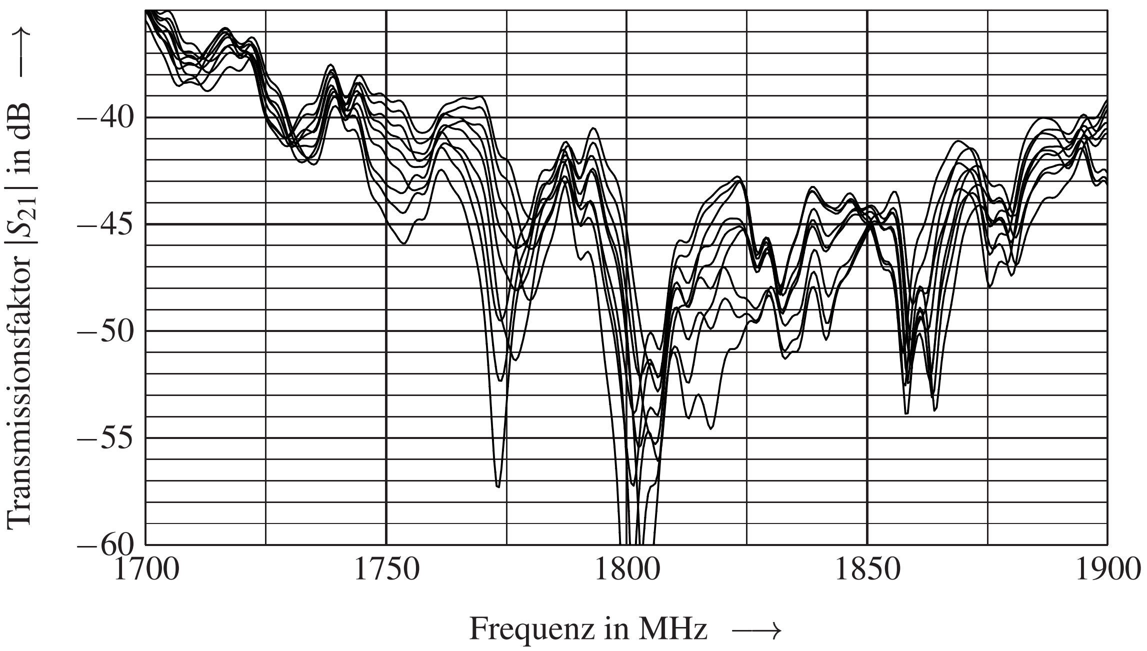

Diagramm 5.16. Simulierter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals in der Umgebung von Empfangsposition 2 zur Veranschaulichung des Fast Fading. Die Positionsvariation beträgt ±16 mm in Richtung der Koordinatenachsen.

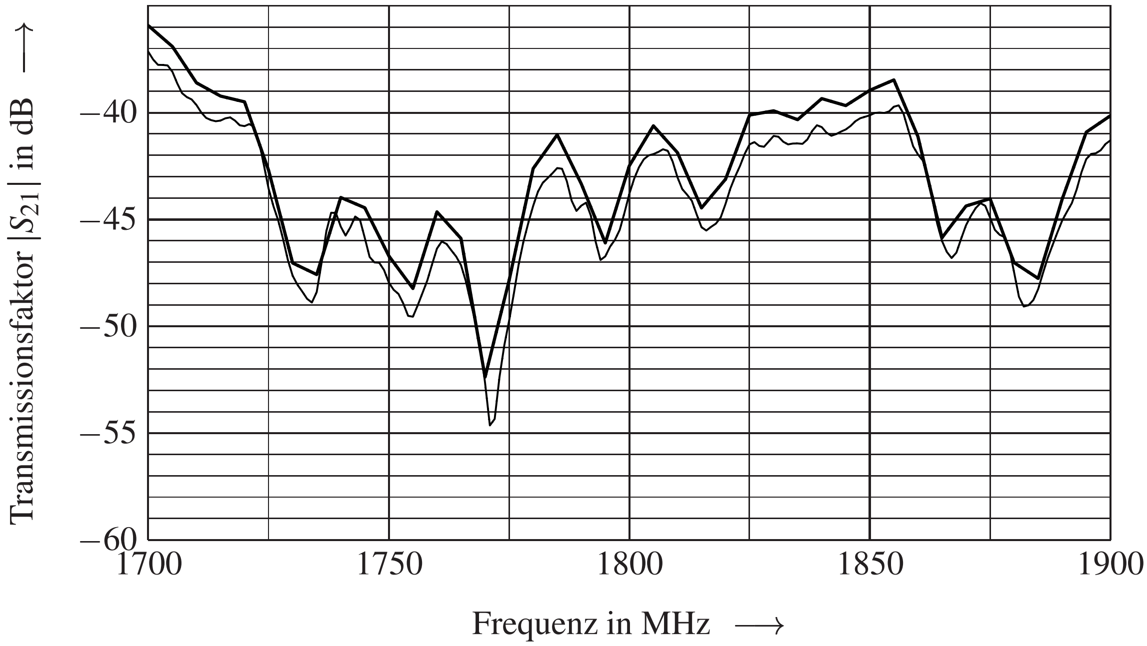

Diagramm 5.17. Simulierter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals in der Nähe von Empfangsposition 2. Die dünn ausgezogene Kurve wurde mit dem vereinfachten Simulationsverfahren mit nur einer Stützstelle bei $k_z = 0$ ermittelt.

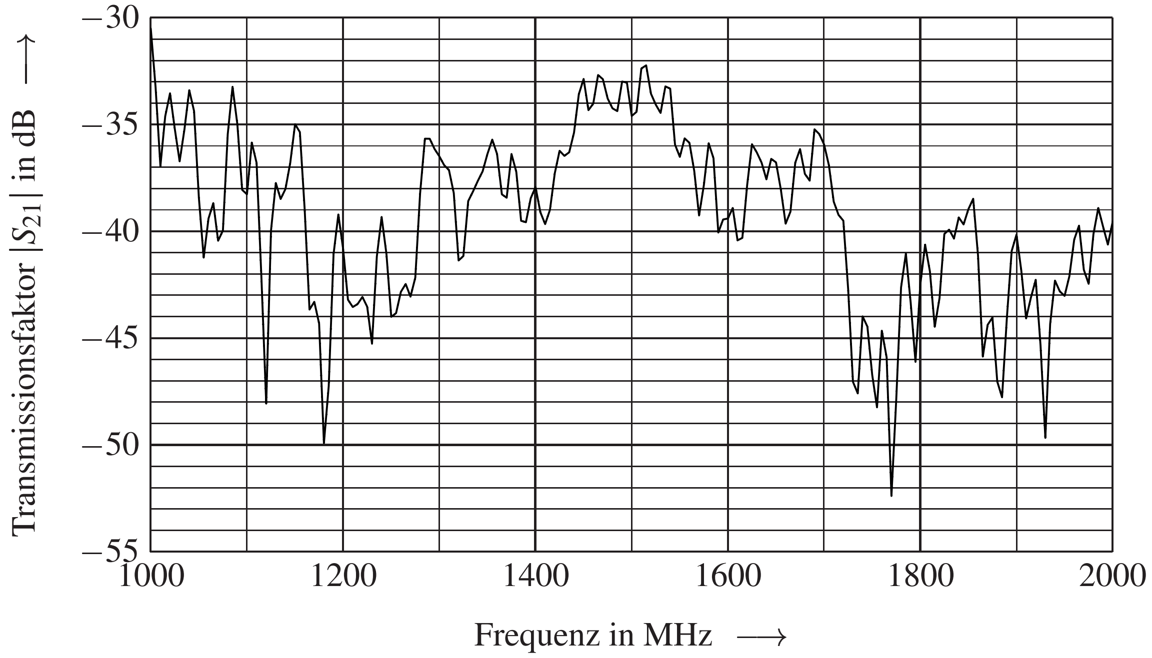

Diagramm 5.18. Breitbandig simulierter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals in der Nähe von Empfangsposition 2.

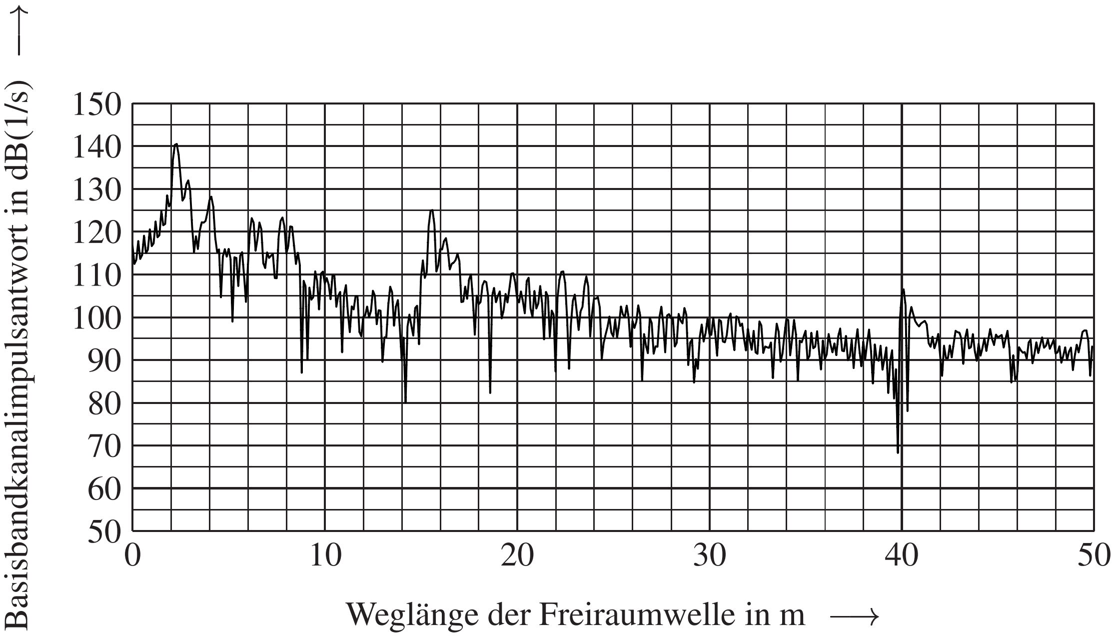

Diagramm 5.19. Zeitabhängiger Betrag der Basisbandkanalimpulsantwort (Einheit 1/s) mit einer Trägerfrequenz von 1800 MHz in der Nähe von Empfangsposition 2. Als unabhängige Veränderliche ist nicht die Zeit selbst, sondern der Weg aufgetragen, den eine Freiraumwelle in der jeweiligen Zeit zurücklegt.

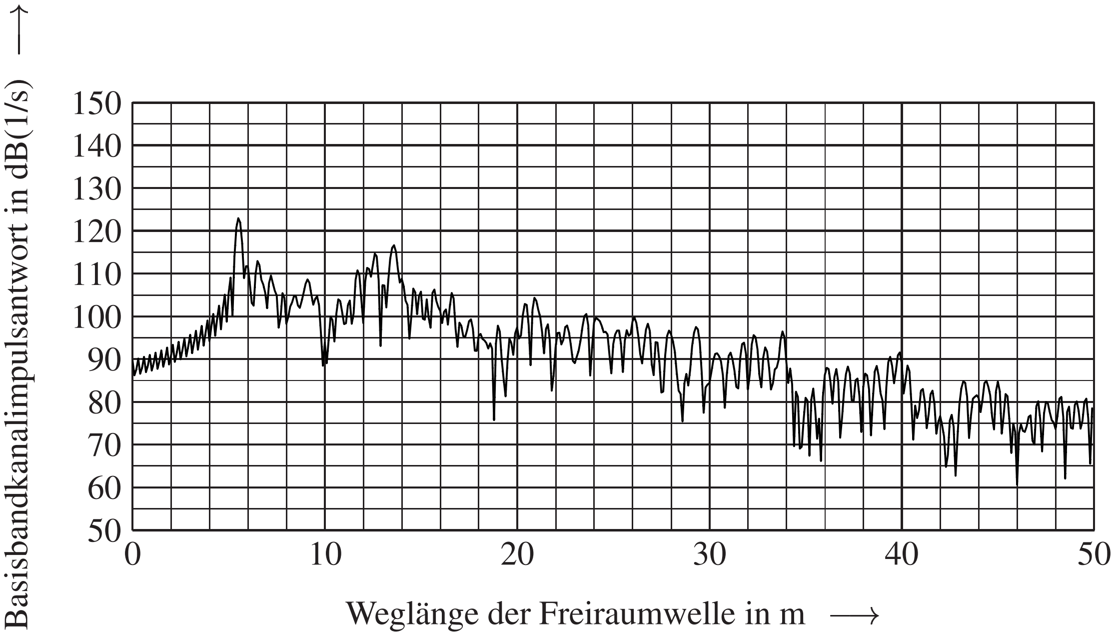

Diagramm 5.20. Zeitabhängiger Betrag der Basisbandkanalimpulsantwort (Einheit 1/s) mit einer Trägerfrequenz von 1800 MHz in der Nähe von Empfangsposition 3. Als unabhängige Veränderliche ist nicht die Zeit selbst, sondern der Weg aufgetragen, den eine Freiraumwelle in der jeweiligen Zeit zurücklegt.

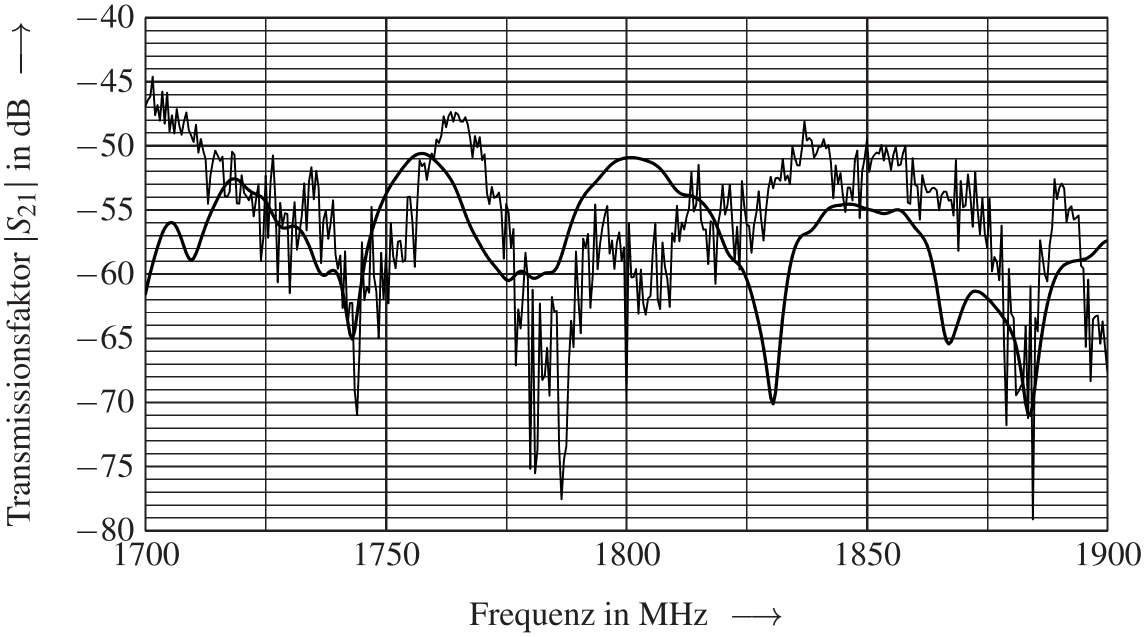

Diagramm 5.21. Berechneter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals für Empfangsposition 3 im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

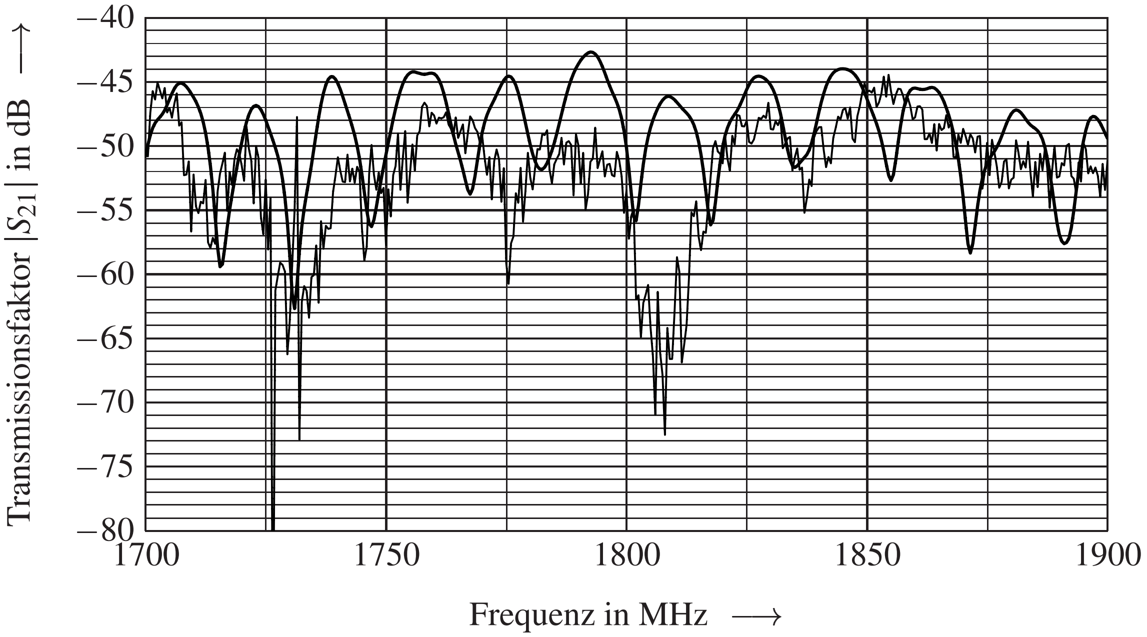

Diagramm 5.22. Berechneter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals für Empfangsposition 7 im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

5.2.2 Korridor eines alten Laborgebäudes

Als zweites Testszenario soll hier noch der Korridor eines alten Laborgebäudes nach Bild 5.4 in Kamp–Lintfort betrachtet werden.

Die Vergleichsmessungen erfolgten wieder mit den Disconeantennen. Tabelle 5.3 entnimmt man die Simulationsparameter. Die Diagramme 5.23 und 5.24

Simulationsparameter					
Ortsauflösung		8 mm	Zeitschritt, $\tilde{K}_z = 0$		18,64 ps
Simulationsgebiet		21 x 5,5 m^2	Simulationsdauer		250 ns
Absorber			Anregung		
Dicke (Zellen)		15	Modulationsfrequenz		1800 MHz
$\alpha_{max} \Delta_t$		6	Bandbreite (-20 dB)		1000 MHz
Exponent	n	4			
Materialparameter					
Material	ε_r	κ	Material	ε_r	κ
Stein	7,51	0,028 S/m	Holz	5,0	0,006 S/m

Tabelle 5.3. Simulationsparameter für das zweite Testgebäude.

zeigen den frequenzabhängigen Betrag des Transmissionsfaktors aus Rechnung und Messung für zwei Empfangspositionen. Die Übereinstimmung ist gut. Bei Empfangsposition 2 ist die Simulationskurve gegenüber den Meßergebnissen jedoch signifikant um knapp 4 dB nach unten verschoben.

5.3 Abschließende Bewertung der Simulationsergebnisse

Rotationssymmetrische Antennen, speziell Dipolantenne, Disconeantenne und koaxial gespeiste Monopolantennen, lassen sich mit den hier vorgestellten Zeitbereichsmethoden hervorragend berechnen. Sowohl im Sende– als auch im Empfangsbetrieb konnte das Simulationsverfahren verifiziert werden. Signifikante Abweichungen waren nicht zu beobachten.

Der Rechenaufwand für den Sendebetrieb ist moderat, mit zwei bis drei CPU–Stunden lassen sich genaue Ergebnisse auf handelsüblichen Kleincomputern erzielen. Für die Empfangssimulation ist für jeden Einfallswinkel eine solche Simulation erforderlich, was zu einer Verzehnfachung der Rechenzeit gegenüber dem Sendebetrieb bei sinnvoller Winkelabtastung führt.

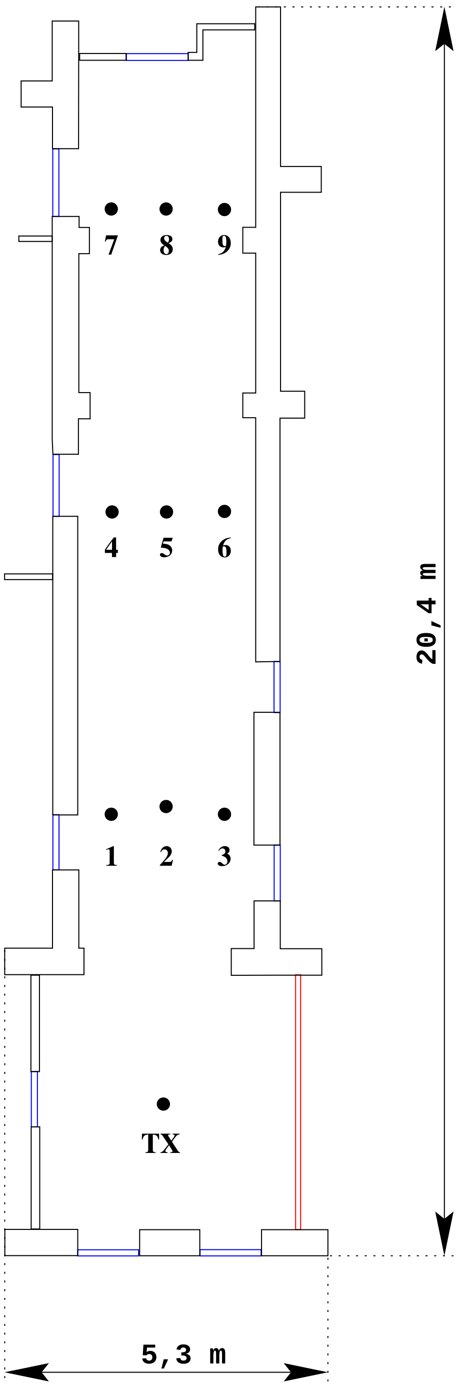

Bild 5.4. Grundriß eines Korridors in einem alten Laborgebäude in Kamp–Lintfort. Die verschiedenen Antennenpositionen sind eingezeichnet und beschriftet.

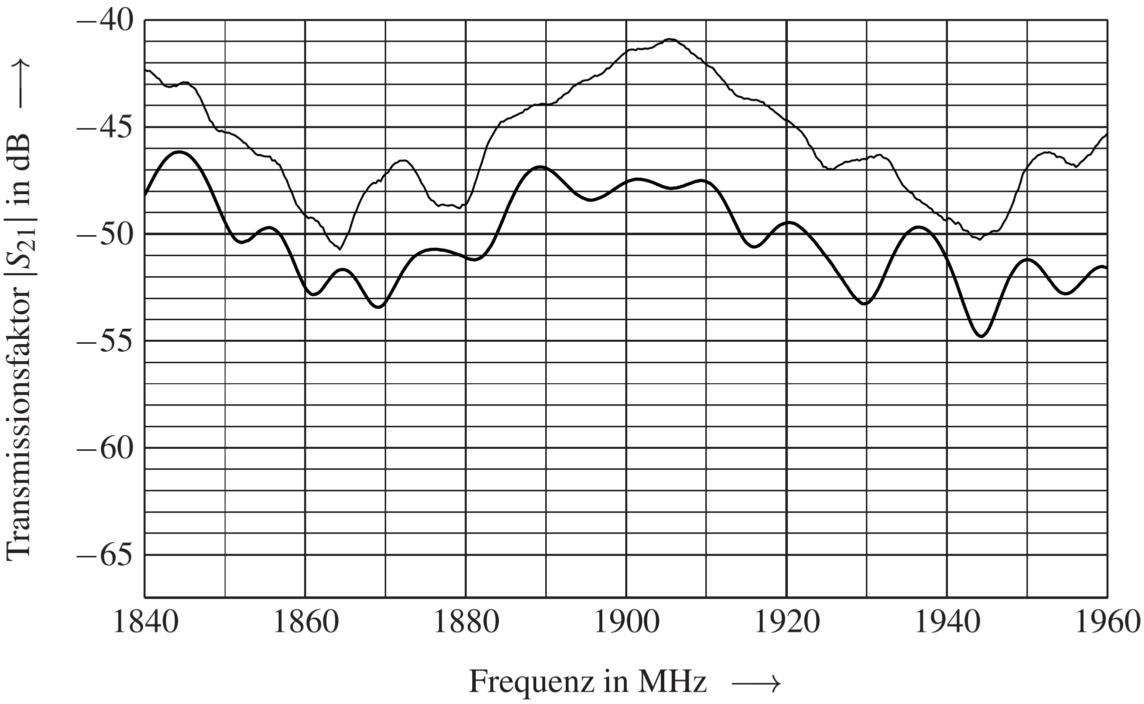

Diagramm 5.23. Berechneter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals für Empfangsposition 2 im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

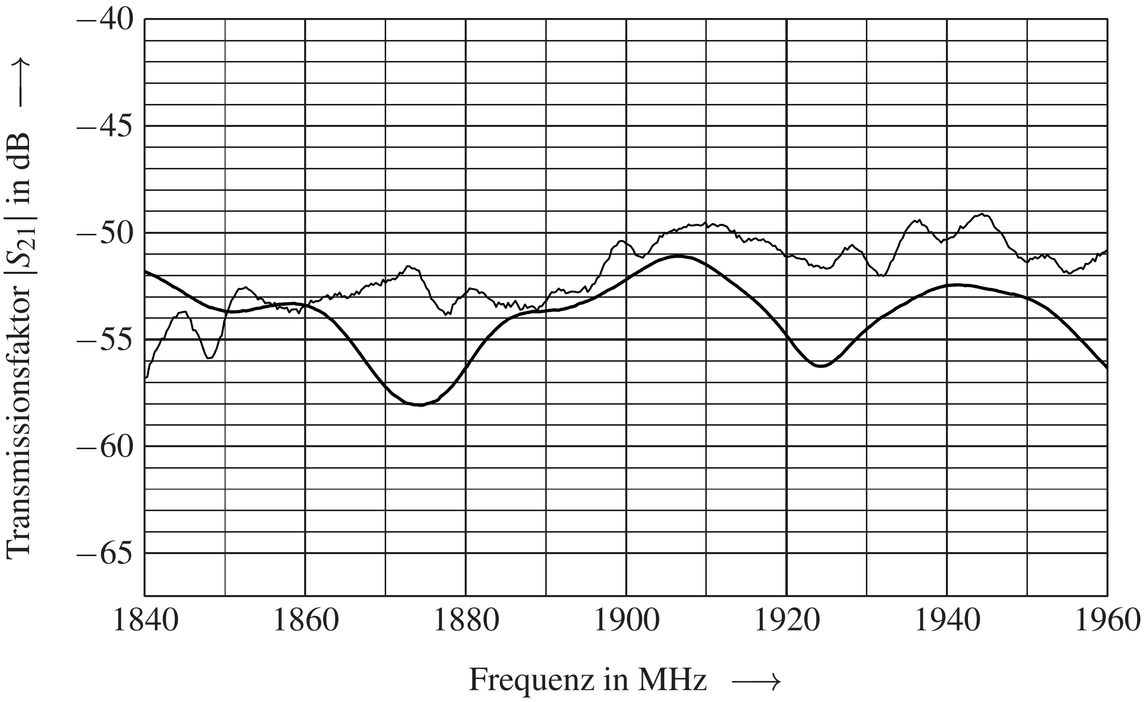

Diagramm 5.24. Berechneter frequenzabhängiger Betrag des Transmissionsfaktors S_{21} des Funkkanals für Empfangsposition 8 im Vergleich zu Meßergebnissen. Die simulierte Kurve ist breit dargestellt.

In zwei Testszenarien wurde die komplette Funkkanalsimulation verifiziert. Im konkreten Verwendungsfall muß mit einer Abweichung von $\pm$ 5 dB beim Transmissionsfaktor gerechnet werden, unabhängig davon, ob das aufwendige oder das vereinfachte Simulationsverfahren verwendet wird.

Für eine Installationsplanung von Funkanlagen ist diese Genauigkeit aber durchaus ausreichend. In diesem Anwendungsfall wird man das schnelle vereinfachte Verfahren, das mit einer Stützstelle der transversalen Wellenzahl $k_z = 0$ auskommt, bevorzugen. Die Rechenzeit hierfür liegt für typische Gebäude zwischen drei bis sieben Stunden je Sendeposition, also durchaus im praktikablen Bereich.

Sollen Transmissionsfaktoren in einem breiten Frequenzband berechnet werden, so muß das aufwendige Kanalsimulationsverfahren eingesetzt werden. Hiermit lassen sich zeitlich sehr fein aufgelöste Kanalimpulsantworten bestimmen. Die Anwendung hierfür ist hauptsächlich in der Geräte– und Softwareentwicklung zu sehen.

Kapitel 6
Zusammenfassung und Ausblick

Der Funkkanal im Gebäude wird definiert und seine Berechnung in Antennen– und Ausbreitungsproblem aufgeteilt. Rotationssymmetrische Sende– und Empfangsantennen können so unabhängig vom Ausbreitungsproblem simuliert werden. Die Schnittstellen zur Ausbreitungssimulation sind

- eine konzentrierte Ersatzstromstärke für die Sendeantenne und
- die elektrische Feldstärke in Richtung der Empfangsantennenachse, welche sich ohne Empfangsantenne in der Ausbreitungssimulation ergibt.

Für die Antennen– und Ausbreitungssimulation wird je ein hybrides Zeitbereichsverfahren vorgestellt. Homogene Gebiete werden dabei mit der schnellen Diskreten Wellengleichung behandelt, Diskontinuitäten jedoch mit dem langsamer arbeitenden Yee–Schema diskretisiert.
Die Verfahren werden unter Verwendung diskreter Feldoperatoren hergeleitet und in bezug auf Dispersion und Genauigkeit untersucht. Absorbierende Randbedingungen in Gestalt des perfekten Absorbers werden eingeführt und analysiert.
Zur Verifikation der Antennensimulationsverfahren wurden Simulationen für Dipolantennen, eine Disconeantenne und eine koaxial gespeiste Monopolantenne durchgeführt und mit Meßdaten bzw. im Fall der Dipolantenne mit Ergebnissen eines anderen Simulationsverfahrens verglichen. Die Übereinstimmung ist sehr gut. Auch wegen der kurzen Rechenzeiten ist der Antennensimulator in vollem Umfang in der Praxis einsetzbar.
In zwei Testszenarien wurden Transmissionsfaktoren von Funkkanälen in Gebäuden berechnet und Meßergebnissen gegenübergestellt. Die Übereinstimmung ist im Rahmen der für diese kritischen Simulationen zu erwartenden Genauigkeit gut. Mit der vereinfachten Version des Funkkanalsimulators können somit bei moderater Rechenzeit recht genaue Vorhersagen über Funkkanäle in konkreten Gebäuden gemacht werden, die aufwendigere Version gestattet die Berechnung von Kanalimpulsantworten mit sehr hoher Zeitauflösung, wie sie in Forschung und Entwicklung benötigt werden.
In Zukunft werden Zeitbereichssimulationen für Funkkanäle, wie die hier vorgestellten, immer attraktiver werden, besonders dann, wenn erwartungsgemäß

die in der Vergangenheit beobachtete Leistungssteigerung bei Kleincomputern anhält. Doch auch mit heutigen Computern werden angemessen kurze Rechenzeiten bei sehr guten Ergebnissen erreicht, dies gilt besonders für die Antennensimulation.

Anhang A

Eine Stromentwicklungsverfahren zur näherungsweisen Berechnung von Drahtantennen

Zur Verifikation des Antennensimulators werden Empfangscharakteristiken von rotationssymmetrischen Beispielantennen benötigt. Diese sind in der Literatur rar. Daher wird in diesem Kapitel ein einfaches Berechnungsverfahren für Drahtantennen vorgestellt, das unter anderem Vergleichsdaten für den Empfangsbetrieb liefern kann [19].

Bild A.1 zeigt die dazu verwendete Ersatzanordnung. Ein konzentrierter Strom

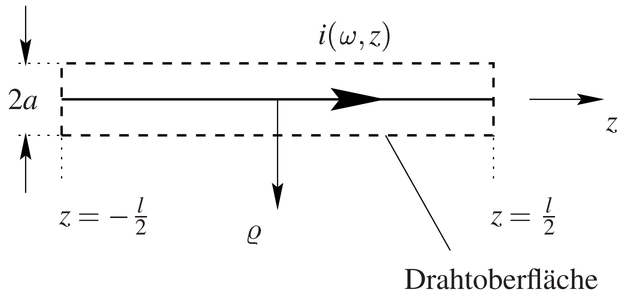

Bild A.1. Dipolantenne der Länge l mit dem Radius a. Dargestellt ist die felderzeugende konzentrierte Ersatzstromstärke und die Drahtoberfläche.

$i(z, \omega)$ erzeugt das elektromagnetische Sekundärfeld, welches im Empfangsbetrieb zusammen mit dem einfallenden Primärfeld auf der ebenfalls dargestellten Drahtoberfläche die Randbedingungen erfüllt. Der Antennenspalt wird erst später in das Modell eingebunden.

Die zunächst unbekannte Ersatzstromstärke erzeugt ein elektromagnetisches Feld mit dem magnetischen Vektorpotential

$$\text{(A.1)} \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 \sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}}}{\sqrt{\varrho^2 + (z-z')^2}} \, i(z', \omega) dz' \, \mathbf{e}_{\mathrm{z}},$$

wobei ein Zylinderkoordinatensystem $\mathbf{x} = (\varrho, \varphi, z)^{\mathrm{T}}$ benutzt wird und $k_0 = \omega / c_0$ gilt.

Mittels

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x},\omega) &= \operatorname{rot} \mathbf{A}_\mathrm{v}(\mathbf{x},\omega), \\ \mathbf{E}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{A}_\mathrm{v}(\mathbf{x},\omega), \\ E_\mathrm{z}(\mathbf{x},\omega) &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}(k_0^2+\partial_\mathrm{z}^2) A_\mathrm{z}(\mathbf{x},\omega) \end{aligned} \tag{A.2}$$

läßt sich nun das erforderliche magnetische Vektorpotential auf der Drahtoberfläche[1] bestimmen. Es besteht aus drei additiv zu überlagernden Teilfeldern.

1. Der Anteil

$$A_1(a,z,\omega) = -\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{u_0(\omega)}{Z_{\mathrm{F},0}} \sin(k_0|z|) \tag{A.3}$$

wird durch die elektrische Feldstärke $E_{\mathrm{z},1}(z,\omega) = u_0(\omega)\delta(z)$ im Antennenspalt bei $z=0$ erzeugt. Die Torspannung $u_0(\omega)$ wird im Sendebetrieb als Anregung verwendet.

2. Im Empfangsbetrieb wird der Anteil

$$A_2(a,z,\omega) = -\frac{\mathrm{j}\,E_0(\omega,\theta)}{Z_{\mathrm{F},0}\,k_0 \sin(\theta)} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\cos(\theta)\,z} \tag{A.4}$$

durch eine unter dem Winkel θ einfallende ebene Welle mit dem elektrischen Feld

$$E_\mathrm{z}(\mathbf{x},\omega,\theta) = E_0(\omega,\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0(\sin(\theta)x-\cos(\theta)z)} \tag{A.5}$$

hervorgerufen.

3. Das Teilfeld

$$A_3(a,z,\omega) = c_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z} + c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \tag{A.6}$$

erzeugt wegen (A.2) kein tangentiales elektrisches Feld auf dem hier betrachteten Teil der Drahtoberfläche. Die Koeffizienten c_1 und c_2 sind zunächst unbekannt.

[1] Die Deckelflächen können nicht berücksichtigt werden.

Somit ist

$$\text{(A.7)}\quad \frac{1}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}\,i(z',\omega)dz' = -\frac{\mathrm{j}}{2}\frac{u_0(\omega)}{Z_{\mathrm{F},0}}\sin(k_0|z|)-\frac{\mathrm{j}E_0(\omega,\theta)}{Z_{\mathrm{F},0}\,k_0\sin(\theta)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0\cos\theta z} + c_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_0 z}+c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z}$$

die Integralgleichung für die ortsabhängige Ersatzstromstärke $i(z,\omega)$.

Aussage A.1 *Die Koeffizienten c_1 und c_2 werden bestimmt, indem das Verschwinden der Ersatzstromstärke $i(z,\omega)$ an den Antennenenden gefordert wird. Damit ist eine Ladungsansammlung an den Antennenenden in diesem Modell explizit ausgeschlossen.*

Gleichung (A.7) wird numerisch gelöst. Dazu wird der Antennenbereich $z\in]-l/2,l/2[$ in N Teilintervalle zergliedert. Die Unbekannten sind dann die Stromstärken an den Intervallgrenzen, in den Intervallen selbst wird linear interpoliert. In Abhängigkeit der Unbekannten wird mit einer Gauß–Legendre–Quadratur das magnetische Vektorpotential an $M>N$ Stützpunkten auf der Drahtoberfläche bestimmt. So entsteht ein überdeterminiertes lineares Gleichungssystem

$$\text{(A.8)}\qquad \mathbf{M}(\omega)\cdot\mathbf{i}(\omega)=\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\omega)$$

mit der Systemmatrix $\mathbf{M}(\omega)\in\mathbb{R}^{M\times(N+1)}$. Dies wird im Sinne des kleinsten Fehlerquadrates gelöst, wenn

$$\text{(A.9)}\qquad \partial_{i_\nu}\Big([\mathbf{M}(\omega)\cdot\mathbf{i}(\omega)-\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\omega)]^{\mathrm{T}}\cdot[\mathbf{M}(\omega)\cdot\mathbf{i}(\omega)-\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\omega)]\Big)=0$$

für alle ν erfüllt ist. Es ergibt sich

$$\text{(A.10)}\qquad \begin{aligned}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\omega)\cdot[\mathbf{M}(\omega)\cdot\mathbf{i}(\omega)-\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\omega)]&=0\\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\omega)\cdot\mathbf{M}(\omega)\cdot\mathbf{i}(\omega)&=\mathbf{M}^{\mathrm{T}}(\omega)\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\omega)\end{aligned}$$

als zu erfüllendes lineares Gleichungssystem mit quadratischer Systemmatrix.

Simulationsergebnisse sind

1. der Fußpunktwiderstand $Z_{\mathrm{f}}=u_0(\omega)/i(z=0,\omega)$ ohne einfallende Welle und

2. die Empfangsempfindlichkeit $i(z = 0, \omega)/E_0(\omega, \theta)$ bei $u_0(\omega) = 0$, das ist der Kurzschlußstrom der Antenne bezogen auf die elektrische Feldstärke des einfallenden Feldes.

In der Praxis hat sich die Testpunktzahl $M = 4N$ bewährt, wobei $N = 24$ Teilintervalle eine gute Wahl darstellt.

Literaturverzeichnis

[1] McQuiddy, D. N.; Wassel, J. W.; Lagrange, J. B.; Wissemann, W. R.: Monolithic microwave integrated circuits: An historical perspective. In: *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **MTT-32** (1984), S. 997–1008

[2] Hashemi, H.: The indoor radio propagation channel. In: *Proceedings of the IEEE* **81** (1993), S. 943–968

[3] Kreuzgruber, P.; Unterberger, P.; Gahleitner, R.: A ray splitting model for indoor radio propagation associated with complex geometries. In: *43rd IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, S. 227–230, IEEE New York, NY, USA, 1993

[4] MacLellan, J.; Lam, S.; Lee, X.: Residental indoor RF channel characterization. In: *43rd IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, S. 210–213, IEEE New York, NY, USA, 1993

[5] Murch, R. D.; Sau, J. H. M.; Cheung, K. W.: Improved empirical modeling for indoor propagation prediction. In: *45th IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, S. 439–443, IEEE New York, NY, USA, 1995

[6] Steward, K. A.; Labedz, G. P.; Sohrabi, K.: Wideband channel measurements at 900 MHz. In: *45th IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, S. 236–240, IEEE New York, NY, USA, 1995

[7] Sheikh, A. U.; Handforth, M.; Abdi, M.: Indoor mobile radio channel at 946 MHz: Measurements and modelling. In: *43rd IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, S. 73–76, IEEE New York, NY, USA, 1993

[8] Bartolome, P.; Vallejo, G.: Site measurements for installation of an indoor radio communication system. In: *43rd IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, S. 57–60, IEEE New York, NY, USA, 1993

[9] Born, M.; Wolf, E.: *Principles of Optics*. Oxford, England: Pergamon Press, 1965

[10] McNamara, D. A.; Pistorius, C. W. I.; Malherbe, J. A. G.: *The Uniform Geometrical Theory of Diffraction*. Norwood, MA, USA: Artech House, 1990

[11] Cichon, D. J.: *Strahlenoptische Modellierung der Wellenausbreitung in urbanen Mikro– und Pikofunkzellen*. Dissertation, Fakultät für Elektrotechnik der Universität Fridericiana Karlsruhe, 1994

[12] Sommerfeld, A.: *Elektrodynamik, Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. III*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig K. G., 1964

[13] WOLFF, I.: *Maxwellschen Theorie, Grundlagen und Anwendungen*. Berlin: Springer Verlag, 1997

[14] UNGER, H. G.: *Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik*. Heidelberg: Dr. Alfred Hütting Verlag, 1981

[15] SCHRÖDER, W.: *Ein Randintegralverfahren zur quasi–statischen und elektromagnetischen Analyse allgemeiner längshomogener Wellenleiterstrukturen*. Dissertation, Fachbereich Elektrotechnik der Universität – Gesamthochschule – Duisburg, 1993

[16] LU, Y. E.: Site precise radio wave propagation simulations by time domain finite difference methods. In: *43rd IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, (Secaucus, NJ, USA), S. 875–878, IEEE New York, NY, USA, 1993

[17] YANG, G.; LI, S.; LEE, J.; PAHLAVAN, K.: Computer simulation of indoor radio propagation. In: *IEEE International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications Proceedings*, S. 10–14, 1993

[18] LAUER, A.; BAHR, A.; WOLFF, I.: FDTD simulations of indoor propagation. In: *44th IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, (Stockholm), S. 883–886, IEEE New York, NY, USA, 1994

[19] LAUER, A.; BAHR, A.; WOLFF, I.: Multi–mode FDTD simulations of indoor propagation including antenna properties. In: *45th IEEE Vehicular Technology Conference Proceedings*, (Chicago), S. 454–458, IEEE New York, NY, USA, 1995

[20] YEE, K. S.: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. In: *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **AP-14** (1966), S. 302–307

[21] ZHANG, X.; MEI, K. K.: Time-domain finite difference approach to the calculation of the frequency-dependent characteristics of microstrip discontinuities. In: *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **MTT-36** (1988), S. 1775–1787

[22] BAHR, A.; LAUER, A.; WOLFF, I.: An efficient source formulation for the analysis of microwave circuits using the FDTD. In: *IEEE AP-S Symposium Digest*, (Newport Beach), S. 244–246, 1995

[23] BAHR, A.; PAN, S.-G.; LAUER, A.; WOLFF, I.: Comparison of different antennas for portable telephones at GSM frequencies including the body effect. In: *PIERS Progress in Electromagnetic Research Symposium Proceedings*, (Noordwijk), S. 148, 1994

[24] COLLIN, R. E.: Equivalent line current for cylindrical dipole antennas and its asymptotic behavior. In: *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **AP-32** (1984), S. 200–204

[25] BERENGER, J. P.: A perfectly matched layer for the absorption of elektromagnetic waves. In: *Journal of Computational Physics* **114** (1994), S. 185–200

[26] REINHARDT, F.; SOEDER, H.: *dtv–Atlas zur Mathematik*. München: Deutscher Taschenbuchverlag GmbH & Co. K. G., 1987

[27] LUCK, H.: Vorlesung Grundlagen der Nachrichtentechnik 2. Gehalten an der Universität–Gesamthochschule Duisburg im Jahr 1990

[28] RITTWEGER, M.: *Simulation transienter elektrodynamischer Ausbreitungsphänomene zur Analyse der Übertragungseigenschaften von Systemen der Mikro- und Millimeterwellentechnik*. Dissertation, Universität–Gesamthochschule Duisburg, 1992

[29] HOLLAND, R.: Finite difference time domain (FDTD) analysis of magnetic diffusion. In: *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **EMC-36** (1994), S. 32–39

[30] CRUMP, R.: persönliche Mitteilungen über die Ergebnisse numerischer Experimente mit eindimensionalen FDTD Verfahren unter Verwendung verschiedener Verlustalgorithmen.

[31] BRONSTEIN, I. N.: *Taschenbuch der Mathematik, Ergänzende Kapitel*. Thun und Frankfurt am Main: Harri Deutsch, 1986

[32] MOORE, T. G.; BLASCHAK, J. G.; TAFLOVE, A.; KRIEGSMANN, G. A.: Theory and application of radiation boundary operators. In: *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **AP-36** (1988), S. 1797–1811

[33] MUR, G.: Absorbing boundary conditions for the finite–difference approximation of the time–domain electromagnetic–field equations. In: *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **EMC-23** (1981), S. 377–382

[34] KATZ, D. S.; THIELE, E. T.; TAFLOVE, A.: Validation and extension to three dimensions of the Berenger PML absorbing boundary conditions for FD–TD meshes. In: *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.* **MGW-4** (1994), S. 268–270

[35] HEIME, K.: *Vorlesungsskriptum Festkörperelektronik*. Universität–Gesamthochschule Duisburg, 1985

[36] HOFSCHEN, S.: *Analyse planarer Wellenleiter und MMIC–Komponenten mit der Methode der zweidimensionalen Finiten–Differenzen im Zeitbereich*. Dissertation, Universität–Gesamthochschule Duisburg, 1996

[37] KIM, I. S.; HOEFER, W. J. R.: Numerical dispersion characteristics and stability factor for the TD–FD method. In: *Electron. Lett.* **26** (1990), S. 485–487

[38] WALTER, M.: Anwendung der TLM Methode auf längsperiodische Leitungsstrukturen der Mikrowellen– und Millimeterwellentechnik. Diplomarbeit, Universität–Gesamthochschule Duisburg, 1996

[39] ARNEY, D. C.; FLAHERTY, J. E.: An adaptive local mesh refinement method for time-dependent partial differential equations. In: *Applied Numerical Mathematics* **5** (1989), S. 257–274

[40] PRESCOTT, D. T.; SHULEY, N. V.: A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique. In: *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.* **MGW-2** (1992), S. 434–436

[41] LAUER, A.; BAHR, A.; WOLFF, I.: Hybrid FDTD simulations of rib–waveguides. In: *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Digest*, (San Francisco), S. 589–592, 1996

[42] BRONSTEIN, I. N.: *Taschenbuch der Mathematik*. Thun und Frankfurt am Main: Harri Deutsch, 1986

[43] WERTHEN, M.; WOLFF, I.: A novel wavelet based time domain approach. In: *IEEE Microwave and Guided Wave Lett.* **MGW-6** (1996), S. 438–440

[44] ROETT, T.: Parameterberechnung für 2 1/2–dimensionale Ausbreitungssimulationen von Funkwellen in Gebäuden. Diplomarbeit, Universität–Gesamthochschule Duisburg, 1996

[45] FUSCO, M.: FDTD algorithm in curvilinear coordinates. In: *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **AP-38** (1990), S. 76–89

[46] RITTWEGER, M.: persönliche Mitteilungen

[47] KORN, G. A.; KORN, T. M.: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York, London: McGraw–Hill, Inc., 1961

[48] KING, R. W. P.; MACK, R. B.; SANDLER, S. S.: *Arrays of Cylindrical Dipoles*. Cambridge University Press, 1968

[49] ZOLLINGER, E.: Antennas for wideband radio channel measurements. In: *COST 231 5th Management Commetee Meeting*, S. 1–13, 1990

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

Im folgenden sind Symbole und Formelzeichen aus der vorliegenden Arbeit kapitelweise aufgelistet. Innerhalb eines Kapitels ist die Ordnung alphabetisch. Vektoren und Matrizen werden durch Fettdruck hervorgehoben, komplexe Größen sind nicht explizit gekennzeichnet, diskrete Größen werden mit Großbuchstaben bezeichnet. Ist die zugehörige kontinuierliche Größe bereits aufgeführt, wird die diskrete Größe nicht gesondert angegeben. Ausschließlich lokal verwendete Symbole, wie beispielsweise Zählindizes, sind nicht in jedem Fall aufgeführt. Funktionen können auch mit anderen unabhängigen Veränderlichen verwendet werden, als hier angegeben.

Kapitel 1

$\alpha_k(t)$	Zeitabhängiger Dämpfungskoeffizient für den Term k des diskreten Kanalmodells
$\delta(t)$	Einheit 1/s, zeitabhängige Diracsche Deltafunktion
ζ	Reelle Hilfsvariable
$\mathcal{F}$	Den nichtlinearen zeitvarianten Funkkanal beschreibender Operator
G_ν	Funkgerät mit der fortlaufenden Nummer ν
G_s	Als Störer aufgefaßtes Funkgerät
$\mathbf{h}(t,\tau)$	Matrixwertige Impulsantwort des linearen zeitvarianten Funkkanals
$\mathbf{h}(\tau)$	Matrixwertige Impulsantwort des linearen zeitinvarianten Funkkanals
$h(\tau)$	Impulsantwort des skalaren linearen zeitinvarianten Funkkanals
$h_{\mu,\nu}(\tau)$	Komponente der matrixwertigen Impulsantwort des linearen zeitinvarianten Funkkanals
$\tilde{\mathbf{h}}(\tau)$	Matrixwertige Impulsantwort des linearen zeitinvarianten Basisbandkanals
$\tilde{h}(\omega)$	Fouriertransformierte der skalaren zeitinvarianten Basisbandkanalimpulsantwort
$\tilde{h}(0)$	Empfangsstärke

n	Anzahl der Funkgeräte
$n(t)$	Additive zeitabhängige Störgröße
$\mathrm{si}(\zeta)$	$= \int_0^\zeta sin(x)/x dx$
t	Einheit s, Zeit
τ	Einheit s, Zeit
$\tau_k(t)$	Einheit s, zeitabhängige Verzögerungszeit für den Term k des diskreten Kanalmodells
$\Theta_k(t)$	Zeitabhängige Phasenverschiebung für den Term k des diskreten Kanalmodells
$\mathbf{x}(t)$	Zeitabhängiger Eingangsvektor des Funkkanals
$\tilde{\mathbf{x}}(t)$	Zeitabhängiger Eingangsvektor des Basisbandkanals
$x_\mathrm{s}(t)$	Additive zeitabhängige Störgröße, als Eingangsgröße aufgefaßt
$\mathbf{y}(t)$	Zeitabhängiger Ausgangssvektor des Funkkanals
$\tilde{\mathbf{y}}(t)$	Zeitabhängiger Ausgangssvektor des Basisbandkanals
ω	Einheit 1/s, Kreisfrequenz, Unabhängige Variable der Bildfunktionen der zeitlichen Fouriertransformation
ω_0	Trägerkreisfrequenz
ω_g	Tiefpaßgrenzkreisfrequenz im Basisbandkanal

Kapitel 2

$\mathbf{A}_\mathrm{v}(\mathbf{x},t)$	Einheit A, magnetisches Vektorpotential
C	Spektrale Erweiterung des äquivalenten Stromfadens
c_0	$= 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, Einheit m/s, Vakuumlichtgeschwindigkeit
c_ν	Koeffizient für den Spiegelstrom ν
Δ_{k_z}	Schrittweite bei der numerischen Integration über die transversale Wellenzahl
$\mathbf{d}_\varphi$	Drehmatrix für eine Drehung um die z–Achse mit dem Drehwinkel φ
ε	Einheit As/(Vm), Permittivität
ε_0	$\approx 8,85418782$ As/Vm, elektrische Feldkonstante
$\varepsilon(\mathbf{x})$	Räumliche Verteilung der Permittivität
$\mathbf{e}_\mathrm{x}, \mathbf{e}_\mathrm{y}, \mathbf{e}_\mathrm{z}$	Einheitsvektoren in den kartesischen Koordinatenrichtungen
$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$	Einheit V/m, Vektorfeld der elektrischen Feldstärke

$\mathbf{E}_{\varphi=0}$	Elektrischer Feldvektor einer in x–Richtung auf die Empfangsantenne einfallenden ebenen Welle bei $x=0$
$\{\zeta\}^n$	Heavisidefunktion zu ζ^n
$\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$	$=\left(\mathbf{E}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t),\mathbf{H}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t)\right)^{\mathrm{T}}$, Elektromagnetisches Vektorfeld
$\mathbf{F}_{\mathrm{P}}(\mathbf{x},t)$	Elektromagnetisches Primärfeld ohne Empfangsantenne
$\mathbf{F}_{\mathrm{S}}(\mathbf{x},t)$	Elektromagnetisches Sekundärfeld, von der Empfangsantenne erzeugt
$\mathbf{F}_{\mathrm{v}}(\mathbf{x},t)$	Einheit V, elektrisches Vektorpotential
$\mathbf{H}(\mathbf{x},t)$	Einheit A/m, Vektorfeld der magnetischen Feldstärke
$\mathbf{H}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},\omega)$	Einheit A/m, Fernfeld der Sendeantenne im Vakuum
$H_n^{(1/2)}(\varrho)$	$=J_n(\varrho)\pm \mathrm{j}\,Y_n(\varrho)$, Hankelfunktionen als komplexe Summe von Bessel– und Neumannfunktionen
$h_{\mathrm{x}}(k_{\mathrm{z}},\omega)$	Übertragungsfunktion der Sendeantenne
$h_{\mathrm{y}}(k_{\mathrm{z}},\omega)$	Übertragungsfunktion der Empfangsantenne
$h_{\mathrm{p}}(k_{\mathrm{z}},\omega)$	Einheit V/(Am), mit der Ausbreitungssimulation ermittelte Übertragungsfunktion
$h_{\mathrm{E}}(k)$	Abkürzung in der Erläuterung des Interpolationsverfahrens für die modale Übertragungsfunktion
$i_{\mathrm{s}}(z,t)$	Einheit A, konzentrierte elektrische Ersatzstromstärke der Sendeantenne (äquivalenter Stromfaden)
$\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{x},t)$	Einheit A/m, Vektorfeld der elektrischen Flächenstromdichte
$\mathbf{J}_{\mathrm{f,s}}(\mathbf{x},t)$	Vektorfeld der elektrischen Ersatzflächenstromdichte der Sendeantenne
$\mathbf{J}_{\mathrm{f,s,0}}(\mathbf{x},t)$	Vektorfeld der elektrischen Flächenstromdichte auf der Sendeantenne im Vakuum
$\mathbf{J}_{\mathrm{f,e}}(\mathbf{x},t)$	Vektorfeld der elektrischen Ersatzflächenstromdichte der Empfangsantenne
$\mathbf{J}_{\mathrm{f,e,0}}(\mathbf{x},t)$	Vektorfeld der elektrischen Flächenstromdichte auf der Empfangsantenne im Vakuum
κ	Einheit A/(Vm), elektrische Leitfähigkeit
$\kappa(\mathbf{x})$	Räumliche Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit
k	Einheit 1/m, Wellenzahl
k_0	Wellenzahl im Vakuum bei Trägerfrequenz
k_{z}	Transversale Wellenzahl
$\tilde{k}_{\mathrm{z}}$	Modifizierte transversale Wellenzahl

l	Einheit m, Zellgröße des Simulationsverfahrens
L	Einheit m, größte Ausdehnung des Gebäudes
λ_0	Einheit m, Freiraumwellenlänge bei Trägerfrequenz
μ	Einheit Vs/(Am), Permeablilität
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7}\mathrm{Vs}/(\mathrm{Am})$, magnetische Feldkonstante
$\mu(\mathbf{x})$	Räumliche Verteilung der Permeablilität
$\mathbf{M}_\mathrm{F}(\mathbf{x},t)$	Einheit V/m, magnetische Flächenstromdichte
$\mathbf{r}$	Einheit m, Abstandsvektor vom Quellpunkt zum Aufpunkt
ϱ	Einheit m, Abstand vom Aufpunkt zum Quellpunkt
σ	Einheit V/(Am), magnetische Leitfähigkeit
T	Als Hochindex: Transposition eines Vektors oder einer Matrix
v	Verhältnis der größten Ausdehnung des Gebäudes zur Zellgröße
$w(\varphi, k_\mathrm{z}, \omega)$	Anteil des auf die Empfangsantenne einfallenden Primärfeldes
x, y, z	kartesische Koordinaten
$\mathbf{x} = (x, y, z)^\mathrm{T}$	Ortsvektor im kartesischen Koordinatensystem
$\mathbf{x} = (r, \theta, \alpha)^\mathrm{T}$	Ortsvektor im Kugelkoordinatensystem
$\mathbf{x}_\mathrm{e}$	Ortsvektor der Empfangsantennenmitte.
$y_0(t)$	Ausgangsgröße der Empfangsantenne im Vakuum
$y_{\varphi=0}$	Ausgangsgröße der Empfangsantenne im Vakuum bei Anregung mit einer sich in x–Richtung ausbreitenden ebenen Welle
z_d	Einheit m, Stockwerkshöhe

Kapitel 3

α	Einheit 1/s, Absorptionskoeffizient
α_max	Maximaler Absorptionskoeffizient
$\breve{\alpha} = 1 - \mathrm{j}\alpha/\omega$	Absorptionskoeffizient
$\alpha^\pm = 1 \pm \alpha\Delta_\mathrm{t}/2$	Abkürzung
$A, \partial A$	Einheit m^2 bzw. m, Integrationsfläche bzw. ihr Rand
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	Beispielmatrizen
a	Einheit m, Dicke der absorbierenden Schicht, Winkelfaktor
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$	Beliebige diskrete Feldoperatoren

$\tilde{a}$	Diagonalmatrix zu $a \in \{\mu, \varepsilon, \kappa, \sigma\}$
c_1, c_2, c_3, c_4, c_5	Konstanten zur Abkürzung
$\partial_x, \partial_y, \partial_z$	Einheit 1/m, Operatoren für räumliche partielle Ableitungen
∂_t	Einheit 1/s, Operator für die partielle Ableitung nach der Zeit
$\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}$	Einheit s, Zeitschritt
$\mathit{\Delta}_{\mathrm{x}}$	Einheit m, Gitterkonstante im diskreten Feldraum
d	Einheit m, Kantenlänge des Beispielsimulationsgebietes
div	Einheit 1/m, Divergenzoperator
dg	Operator, der einem Vektor eineindeutig eine Diagonalmatrix zuordnet
$\mathcal{E}_{\mathrm{x}}, \mathcal{E}_{\mathrm{y}}, \mathcal{E}_{\mathrm{z}}$	Diskrete Einheitsvektoren
$\check{\mathbf{E}}(X, Y, T)$	Interpoliertes elektrisches Feld
ε_{r}	Permittivitätszahl
f	Einheit Hz, Frequenz
$F_{\mathrm{A,r}}$	Relativer Amplitudenfehler
F_{r}	Relativer Fehler
F_{P}	Absoluter Phasenfehler
$\check{\mathbf{H}}(X, Y, T)$	Interpoliertes magnetisches Feld
I	Reelles Intervall
$\mathtt{Im}()$	Operator für die Imaginärteilbildung
IV	Hochindex für das elektromagnetische Feld mit geteilten Komponenten
$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$	Einheit A/m, Eingeprägtes Feld der elektrischen Stromdichte
$\boldsymbol{\varkappa}^{\pm}$	$= 1 \pm \frac{\mathit{\Delta}_{\mathrm{t}}}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$, Abkürzung
$\overline{\boldsymbol{\varkappa}} = 1 - \boldsymbol{\varkappa}^{-}$	Abkürzung
$k_{\mathrm{x}}, k_{\mathrm{y}}$	Einheit 1/m, Wellenzahlen
K	Diskrete Wellenzahl
$\tilde{K}_{\mathrm{z}}$	Modifizierte diskrete transversale Wellenzahl
μ_{r}	Permeabilitätszahl
n	Absorptionsexponent
$\mathbb{O}$	Menge der Feldoperatoren
$\tilde{\mathit{\Omega}}$	Modifizierte diskrete Kreisfrequenz
$\mathbf{r}, \overline{\mathbf{r}}$	Diskrete Rotationsoperatoren

$\mathbf{r}_2, \overline{\mathbf{r}}_2$	Zweidimensionale diskrete Rotationsoperatoren
$\mathbf{r}_1, \overline{\mathbf{r}}_1$	Eindimensionale diskrete Rotationsoperatoren
$\hat{\mathbf{r}}$	Dualer Tensor zu $\mathbf{r}$ im dreidimensionalen euklidischen Raum
rot	Einheit 1/m, Rotationsoperator
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathtt{Re}\,()$	Operator für die Realteilbildung
$\boldsymbol{\sigma}^{\pm}$	$= 1 \pm \frac{\Delta_{\mathrm{t}}}{2} \frac{\tilde{\boldsymbol{\varkappa}}}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}$, Abkürzung
$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = 1 - \boldsymbol{\sigma}^{-}$	Abkürzung
S_{11}	Reflexionsfaktor
$\mathfrak{t}, \overline{\mathfrak{t}}$	Diskreter Feldoperator für die zeitliche Verschiebung und seine Inverse
$\mathfrak{t}^{-} = (1 - \overline{\mathfrak{t}})$	Diskreter Zeitdifferenzoperator
$\mathfrak{t}^{+} = (1 + \overline{\mathfrak{t}})$	Diskreter Mittelwertoperator
t_0, t_1	Einheit s, Zeitparameter des Gaußimpulses
T	Diskrete Zeit
τ_{E}	Einheit s, elektrische Relaxationszeit
τ_{M}	Einheit s, magnetische Relaxationszeit
V_{ph}	Diskrete Phasengeschwindigkeit
$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$	Diskrete Feldoperatoren für die räumliche Verschiebung in x, y bzw. z–Richtung
$\overline{\mathfrak{x}}, \overline{\mathfrak{y}}, \overline{\mathfrak{z}}$	Inverse diskrete Feldoperatoren für die räumliche Verschiebung
$\mathbf{X} = (X, Y, Z)^{\mathrm{T}}$	Diskreter Ortsvektor
$\mathbf{X}_0$	Ortsvektor des Ursprungs der Beispielzelle
z_d	Einheit m, Deckenhöhe
Z	Räumliche Zuordnungsabbildung der Repräsentativwerte
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
Z_{F}	Einheit Ω, Feldwellenwiderstand
$Z_{\mathrm{F},0} = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$	$\approx 120\pi\ \Omega$, Feldwellenwiderstand des Vakuums

Kapitel 4

A	Einheit m^2, Zellfläche
C	Einheit F, Kapazität
Δ_{φ}	Winkelschritt
$i, i_{\mathrm{h/r}}$	Einheit A, elektrische Stromstärke, Stromstärke der hinlaufenden/rücklaufenden Welle
II	Hochindex für das elektromagnetische Feld mit geteilten Komponenten
k_{ϱ}	Einheit 1/m, radiale Wellenzahl
$\tilde{K}_{\varphi,\nu}$	Modifizierte diskrete Wellenzahl in azimutaler Richtung
l	Einheit m, Maximale Zellausdehnung
l, r	Index für die linke bzw. rechte Seite der Grenzschicht
$[\Phi]$	Zahl der Zellen in azimutaler Richtung
$\mathbf{n}$	Flächennormaleneinheitsvektor
ν	Azimutale Separationskonstante
$\mathbf{p}, \overline{\mathbf{p}}$	Diskrete Rotationsoperatoren für das rotationssymmetrische FDTD Verfahren
ϱ_0	Einheit m, Grenzschichtradius
P_0, P_1	diskreter Innen– bzw. Außenradius der Koaxialleitung
$[P]$	Zahl der Zellen in radialer Richtung
$\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, \mathfrak{z}, \overline{\mathfrak{r}}, \overline{\mathfrak{f}}, \overline{\mathfrak{z}}$	Diskrete Feldoperatoren zur räumlichen Verschiebung im Zylinderkoordinatensystem
s, c	Abkürzungen für Sinus– und Kosinusterme
$u, u_{\mathrm{h/r}}$	Einheit V, elektrische Spannung, Spannung der hinlaufenden/rücklaufenden Welle
$\mathbf{x} = (\varrho, \varphi, z)$	Zylinderkoordinatensystem
$\mathbf{X} = (P, \Phi, Z)$	Diskretes Zylinderkoordinatensystem
Z_{l}	Einheit Ω, Wellenwiderstand der Antennenzuleitung
$Z_1, Z_2 \ldots$	Diverse Axialkoordinaten in verschiedenen Antennenanordnungen

Kapitel 5

$\mathrm{dB}(\mathrm{Einheit})$	$= 20\log\left(\frac{\text{Größe}}{\text{Einheit}}\right)$
l	Einheit m, Gesamtlänge einer Dipolantenne
r	Einheit m, Antennenradius
Z_{F}	Einheit Ω, Fußpunktwiderstand einer Dipolantenne

Anhang A

a	Einheit m, Antennenradius
$\mathbf{A}_{\mathrm{v}}(\omega)$	Einheit A, rechte Seite des überdeterminierten linearen Gleichungssystems
c_1, c_2	Einheit A, unbekannte Koeffizienten
$\delta(z)$	Einheit 1/m, örtliche Diracsche Deltafunktion
$E_0(\omega, \theta)$	Einheit V/m, elektrische Feldstärke der einfallenden ebenen Welle im Empfangsbetrieb
$i(z, \omega)$	Einheit A, Konzentrierte Ersatzstromdichte der Drahtantenne
$\mathbf{i}(\omega)$	Einheit A, Vektor der unbekannten Stromstärken
l	Einheit m, Gesamtlänge der Drahtantenne
M	Zahl der Testpunkte
$\mathbf{M}(\omega)$	Systemmatrix des überdeterminierten linearen Gleichungssystems
N	Zahl der Stromentwicklungsintervalle
$u_0(\omega)$	Einheit V, Torspannung im Spalt der Drahtantenne

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Andreas Lauer
Geburtstag	15.12.1966
Geburtsort	Duisburg

Schulausbildung

1973-1977	Grundschule in Duisburg
1977-1986	Albert Einstein Gymnasium in Duisburg

Universitäre Ausbildung

1986-1992	Studium der Elektrotechnik in Duisburg, Studienrichtung Informationstechnik, Studienschwerpunkt Kommunikationstechnik

Berufsweg

1986-1992	Praktika bei der Bayer–AG in Krefeld und der ArguMens Mikrowellenelektronik GmbH in Duisburg
1988-1992	studentische Hilfskraft bei der ArguMens Mikrowellenelektronik GmbH in Duisburg
1990	Dreimonatiges Praktikum für ArguMens in den Vereinigten Staaten von Amerika
seit 1992	Wissenschaftlicher Angestellter im Fachgebiet Allgemeine und Theoretische Elektrotechnik an der Gerhard–Mercator–Universität – Gesamthochschule Duisburg