

# Anhang A

## Das Verfahren der minimalen Varianz

In A.1 sei ein lineares Gleichungssystem gegeben, zu dem ein optimaler Schätzwert gesucht wird.

$$\vec{z} = \mathbf{D}\vec{x} + \vec{s} \quad (\text{A.1})$$

$\vec{z}$  ist ein gegebener Meßvektor,  $\mathbf{D}$  eine bekannte Systemmatrix und  $\vec{s}$  ein unbekannter Meßfehler.  $\vec{x}$  und  $\vec{s}$  sind unkorreliert, haben verschwindende Erwartungswerte und die Kovarianzmatrizen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{S}$ .

$$\begin{aligned} E\{\vec{x}\vec{s}^T\} &= \mathbf{0} \\ E\{\vec{x}\} &= \vec{0} \quad , \quad E\{\vec{x}\vec{x}^T\} = \mathbf{P} \\ E\{\vec{s}\} &= \vec{0} \quad , \quad E\{\vec{s}\vec{s}^T\} = \mathbf{S} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Gesucht ist ein Schätzwert  $\hat{\vec{x}}$  von  $\vec{x}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- a) Linearität
- b) Erwartungstreue
- c) Minimale Varianzen der Schätzfehler  $\hat{\vec{x}}$

Der Ansatz für den Schätzwert wird aus der Bedingung der Linearität abgeleitet.

$$\hat{\vec{x}} = g + \mathbf{G}\vec{z} \quad (\text{A.3})$$

Die Bedingung der Erwartungstreue fordert, daß der Erwartungswert von A.3 gleich dem Erwartungswert von  $\vec{x}$  ist.

$$E\{\hat{\vec{x}}\} = E\{\vec{x}\} = E\{g + \mathbf{G}\vec{z}\} \quad (\text{A.4})$$

Aus A.4 und A.3 ergibt sich für den Schätzwert folgender neuer Ansatz:

$$\hat{\vec{x}} = \mathbf{G}\vec{z}. \quad (\text{A.5})$$

$\mathbf{G}$  kann aus der Bedingung der minimalen Varianz des Schätzfehlers abgeleitet werden. Wenn die  $i$ -te Zeile von  $\mathbf{G}$  mit  $g^i$  bezeichnet wird, ergibt sich aus A.5 das Gleichungssystem in A.6.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_i &= g^i \bar{z} \\
E \{ \tilde{x}_i^2 \} &:= E \{ (x_i - \hat{x}_i)^2 \} \\
&= E \{ (x_i - g^i \bar{z})^2 \} \\
&= E \{ x_i^2 - 2x_i g^i \bar{z} + (g^i \bar{z})^2 \} \\
&= E \{ x_i^2 \} - 2E \{ x_i \bar{z}^T \} g^{iT} + g^i E \{ \bar{z} \bar{z}^T \} g^{iT}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremwertes ist, daß alle partiellen Ableitungen nach  $g^i$  verschwinden.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial g^{iT}} E \{ \tilde{x}_i^2 \} &= \vec{0}^T \\
-2E \{ x_i \bar{z}^T \} + 2g^i E \{ \bar{z} \bar{z}^T \} &= \vec{0}^T \\
\Rightarrow E \{ x_i \bar{z}^T \} - g^i E \{ \bar{z} \bar{z}^T \} &= \vec{0}^T
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Da die Bedingung in A.7 für alle  $g^i$  von  $\mathbf{G}$  gilt, kann A.7 zu

$$E \{ \bar{x} \bar{z}^T \} - \mathbf{G} E \{ \bar{z} \bar{z}^T \} = \mathbf{0} \tag{A.8}$$

umgeschrieben werden. Die hinreichende Bedingung für ein Minimum ist, daß die zweiten partiellen Ableitungen von  $E \{ \tilde{x}_i^2 \}$  nach  $g^i$  eine positiv definite Matrix bilden.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial (g^{iT})^2} E \{ \tilde{x}_i^2 \} &= \text{positivdefinit} \\
\frac{\partial^2}{\partial (g^{iT})^2} E \{ \tilde{x}_i^2 \} &= E \{ \bar{z} \bar{z}^T \} = \text{positivdefinit}
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Mit den Gleichungen in A.2 und dem System in A.1 können  $E \{ \bar{x} \bar{z}^T \}$  und  $E \{ \bar{z} \bar{z}^T \}$  mit Hilfe der bekannten Kovarianzmatrizen ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned}
E \{ \bar{x} \bar{z}^T \} &= E \{ \bar{x} (\bar{x}^T \mathbf{D}^T + \bar{s}^T) \} \\
&= E \{ \bar{x} \bar{x}^T \} \mathbf{D}^T + E \{ \bar{x} \bar{s}^T \} \\
&= \mathbf{P} \mathbf{D}^T \\
E \{ \bar{z} \bar{z}^T \} &= E \{ (\mathbf{D} \bar{x} + \bar{s}) (\bar{x}^T \mathbf{D}^T + \bar{s}^T) \} \\
&= \mathbf{D} \mathbf{P} \mathbf{D}^T + \mathbf{S}
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Mit Hilfe der Gleichungen aus A.10 kann die Gleichung A.8 umgeschrieben werden.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} \mathbf{D}^T - \mathbf{G} (\mathbf{D} \mathbf{P} \mathbf{D}^T + \mathbf{S}) &= \mathbf{0} \\
\mathbf{G} (\mathbf{D} \mathbf{P} \mathbf{D}^T + \mathbf{S}) &= \mathbf{P} \mathbf{D}^T
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$\mathbf{G}$  kann somit mit den entsprechenden Kovarianzmatrizen bestimmt werden.

$$\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{D}^T (\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{D}^T + \mathbf{S})^{-1} \quad (\text{A.12})$$

Setzt man A.12 in A.5 ein, dann erhält man die Gleichung für den linearen erwartungstreuen Schätzwert mit minimaler Varianz für das System in A.1.

$$\hat{\vec{x}} = \mathbf{P}\mathbf{D}^T (\mathbf{D}\mathbf{P}\mathbf{D}^T + \mathbf{S})^{-1} \vec{z} \quad (\text{A.13})$$

Ab hier folgt eine Diskussion über den Schätzfehler:

Formt man Gleichung A.8 um, indem man  $\vec{z}^T$  ausklammert und für  $\vec{x} - \mathbf{G}\vec{z}$  den Schätzfehler  $\tilde{\vec{x}}$  einsetzt, erhält man die Gleichung A.14.

$$E \left\{ \tilde{\vec{x}} \vec{z}^T \right\} = \mathbf{0} \quad (\text{A.14})$$

Dies bedeutet, daß der Schätzfehler  $\tilde{\vec{x}}$  orthogonal zu  $\vec{z}$  sein muß. Da  $\tilde{\vec{x}}$  und  $\vec{z}$  die Erwartung Null haben, kann man sagen, daß  $\tilde{\vec{x}}$  und  $\vec{z}$  unkorreliert sind. Aus Gleichung A.5 folgt, daß

$$\hat{\vec{x}}^T = \vec{z}^T \mathbf{G}^T$$

ist. Multipliziert man Gleichung A.14 mit  $\mathbf{G}^T$  von rechts, dann erhält man

$$E \left\{ \tilde{\vec{x}} \hat{\vec{x}}^T \right\} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.15})$$

Der Schätzfehler ist also nicht nur mit  $\vec{z}$ , sondern auch mit dem Schätzwert selbst unkorreliert. Mit Hilfe der Gleichung A.15 kann die Kovarianzmatrix des Schätzfehlers folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} E \left\{ \tilde{\vec{x}} \tilde{\vec{x}}^T \right\} &= E \left\{ \tilde{\vec{x}} (\vec{x} - \hat{\vec{x}})^T \right\} \\ &= E \left\{ \tilde{\vec{x}} \vec{x}^T \right\} - \underbrace{E \left\{ \tilde{\vec{x}} \hat{\vec{x}}^T \right\}}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} &= E \left\{ (\vec{x} - \mathbf{G}\vec{z}) \vec{x}^T \right\} \\ &= E \left\{ \vec{x} \vec{x}^T \right\} - \mathbf{G} E \left\{ \vec{z} \vec{x}^T \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

## Anhang B

# Principal Component Analysis (PCA)

Sirovich und Kirby schlugen erstmals in [85] die *Eigenbild*-Darstellung zur Charakterisierung menschlicher Gesichter vor. Sie hatten die Idee, unterschiedliche Gesichter durch eine begrenzte Anzahl von Prototypen-Gesichter zu repräsentieren. Die Prototypen-Gesichter wurden mit der Karhunen-Loève-Transformation (KLT) (Anhang C), einer Optimal-Transformation, berechnet. Da die KLT der Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren eines Vektorraums entspricht, nannten Sirovich und Kirby die Prototypen-Gesichter *Eigenpicture* (Eigenbilder). Um unterschiedliche Gesichter mit der KLT repräsentieren zu können, müssen aus einer Trainings-Datenbasis Eigenbilder, die eine Erkennung der Gesichter ermöglichen, bestimmt werden. Gesichter, die nicht in der Trainings-Datenbasis enthalten sind, können nicht erkannt werden. Reduziert man die Anzahl der Eigenbilder auf die, die mit den stärksten Eigenwerten korrespondieren, dann wird eine Verallgemeinerung erreicht, d.h. jedes beliebige Gesicht kann durch die Summe der gewichteten Eigenbilder approximiert werden. Diese Eigenvektoren werden auch Hauptkomponenten genannt und das Verfahren Hauptkomponenten-Analyse (*Principal Component Analysis* (PCA)).

Die PCA stellt ein effektives und schnelles Berechnungsverfahren für die KLT dar. Ein Bild  $f(m, n)$  stellt eine zweidimensionale ( $N \times M$ ) Matrix dar, die zu einem Vektor der Größe ( $NM \times 1$ ) umgeformt werden kann. Jedes Bild beschreibt dann einen Punkt im ( $N \times M$ )-dimensionalen Raum. Ein Ensemble von Bildern stellt folglich eine Ansammlung von Punkten in diesen Raum dar, der im folgenden als Bildraum bezeichnet wird. Bilder von Gesichtern – als Vektoren betrachtet – werden infolge ihrer Ähnlichkeiten nicht zufällig im Bildraum verteilt sein, sondern sich bevorzugt in einem bestimmten Teilbereich des Bildraums häufen. Diese Anhäufungen werden auch *Cluster* genannt und beschreiben einen Teil des Bildraums  $\mathfrak{R}^{PCA}$  aus dem gesamten Bildraum  $\mathfrak{R}^{NM}$ . Dieser Zusammenhang ist in Abb. B.1 dargestellt.

Die PCA, die eine Sub-Transformation der KLT darstellt, ermittelt aus dem Ensemble von Bildern den zugehörigen Teilraum. Ihre Transformationsmatrix  $\Phi_{PCA} \subset \Phi_{KLT}$ , in der nur die größten Eigenwerte mit korrespondierenden Eigenvektoren in der Transformationsmatrix auftauchen, ist der Transformationsmatrix aus Gleichung (C.9) analog. Zur Herleitung der PCA wird mit der Kovarianzmatrix aus der Gleichung (C.3) (Anhang C)

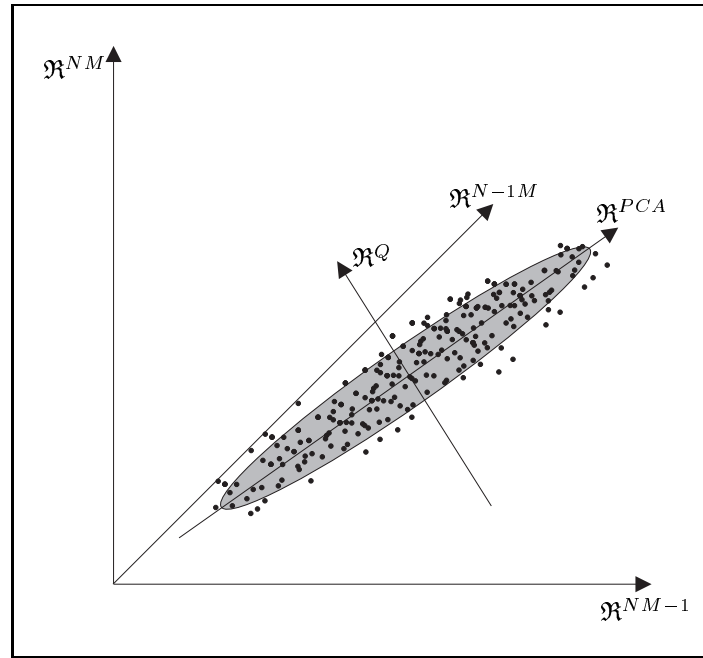


Abbildung B.1: Raum  $\mathfrak{R}^{PCA}$  eines Clusters im Raum  $\mathfrak{R}^{NM}$

begonnen.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_f &= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \vec{f}'_k \vec{f}'_k{}^T \\ &= \mathbf{A} \mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Die mittelwertfreien Vektoren, die in [99] Karikaturen genannt werden,

$$\vec{f}'_k = \vec{f}_k - \vec{\mu}_f \quad (\text{B.2})$$

werden spaltenweise in der Matrix

$$\mathbf{A} = \left[ \vec{f}'_1 \vec{f}'_2 \cdots \vec{f}'_K \right] \quad (\text{B.3})$$

angeordnet.

Die KLT stellt wie in Gleichung (C.4)) ein Eigenwertproblem dar, das aus  $NM \times NM$  Gleichungen besteht.

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T \vec{\varphi}_i = \lambda_i \vec{\varphi}_i \quad 1 \leq i \leq NM, \quad (\text{B.4})$$

Die Berechnung der  $NM$  Eigenvektoren und Eigenwerte ist erstens sehr zeitaufwendig und zweitens äußerst ineffektiv, da man nicht alle Eigenvektoren benutzen will. Um den Aufwand zu verringern, wird die Matrix  $\mathbf{L} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  der Dimension  $(M \times M) = (M \times N)(N \times M)$  eingeführt, die folgendes Eigenwertproblem definiert:

$$\mathbf{L} \vec{\psi}_i := \mathbf{A}^T \mathbf{A} \vec{\psi}_i = \nu_i \vec{\psi}_i. \quad (\text{B.5})$$

$\vec{\psi}_i$  sind die Eigenvektoren und  $\nu_i$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{L}$  mit  $1 \leq i \leq K$ . Multipliziert man Gleichung (B.5) auf beiden Seiten mit  $\mathbf{A}$ , so ergibt sich

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\vec{\psi}_i) = \nu_i(\mathbf{A}\vec{\psi}_i). \quad (\text{B.6})$$

Ein Vergleich zwischen Gleichung (B.6) und Gleichung (B.4) läßt unmittelbar erkennen, daß  $\mathbf{A}\vec{\psi}_i$  die Eigenvektoren

$$\vec{\varphi}_i = \mathbf{A}\vec{\psi}_i \quad (\text{B.7})$$

der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_f = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$  sind. Gleichung (B.7) besagt, daß der  $i$ -te Eigenvektor  $\vec{\varphi}_i$  sich aus einer Linearkombination des berechneten Eigenvektors  $\vec{\psi}_i = [\psi_{i1}\psi_{i2}\cdots\psi_{iK}]^T$  und des verwendeten Bildvektors  $\vec{f}_k$  zusammensetzt.

$$\vec{\varphi}_i = \sum_{j=1}^K \psi_{ij} \vec{f}_j \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{B.8})$$

Der Rechenaufwand wird von der Dimension  $NM$  auf  $K$ , der Größe der Trainings-Datenbasis, erheblich reduziert. In der Praxis gilt:  $K \ll NM$ .

# Anhang C

## Die Karhunen-Loève-Transformation (KLT)

Die KLT basiert auf der Extraktion der statistischen Eigenschaften eines stochastischen Signalprozesses. Die Zufallssignale können hierbei entweder das Bildsignal selbst, das als ein (*Breite* · *Höhe*)-dimensionales Zufallssignal aufgefaßt wird, oder die Merkmale eines Objektes bzw. einer Klasse von Objekten sein. Ein Bild wird bei dieser Betrachtung als eine zweidimensionale ( $M \times N$ ) Matrix angenommen. Jeder einzelne Bildpunkt ist eindeutig durch die Indizes  $(m, n)$  mit  $m \in \mathbb{Z} \cap [0, M - 1]$  und  $n \in \mathbb{Z} \cap [0, N - 1]$  gekennzeichnet. Betrachtet man Grauwertbilder, so ist jedem Bildpunkt ein Intensitätswert  $f(m, n)$  zugeordnet, der Grauwert genannt wird. Jeder Grauwert stellt eine Realisierung eines Zufallsprozesses dar.

Ausgehend von einer Trainings-Datenbasis, die sich aus Bildern einer Klasse von  $K$  Objekten  $\{f_1(m, n), f_2(m, n), \dots, f_K(m, n)\}$  zusammensetzt, wird jedes Bild  $f_k(m, n)$  als Vektor  $\vec{f}_k(l)$  dargestellt, indem alle Zeilen nacheinander zu einer einzigen Zeile mit  $l = nM + m + 1$  oder aber alle Spalten nacheinander zu einer einzigen Spalte zusammengefügt werden mit  $l = mN + n + 1$ , wobei  $l$  in dem Intervall  $l \in \mathbb{Z} \cap [0, NM]$  definiert ist.

Mit der Trainings-Datenbasis von  $K$  Objekt-Vektoren läßt sich dann die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_f = E\{(\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)(\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)^T\} \quad (\text{C.1})$$

des Zufallsprozesses schätzen. Der Mittelwert-Vektor der Trainings-Datenbasis  $\vec{\mu}_f$  in (C.1) berechnet sich nach

$$\vec{\mu}_f = E\{\vec{f}_k\} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \vec{f}_k(l). \quad (\text{C.2})$$

Damit ergibt sich für die  $(MN) \times (MN)$ -dimensionale Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_f = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)(\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)^T = \frac{1}{M} \left[ \sum_{k=1}^K \vec{f}_k \vec{f}_k^T \right] - \vec{\mu}_f \vec{\mu}_f^T. \quad (\text{C.3})$$

Die KLT stellt sich im Prinzip als Lösung eines *Eigenwertproblems* dar. Dazu betrachtet man die Eigenwert-Gleichung

$$\mathbf{C}_f \vec{\varphi}_i = \lambda_i \vec{\varphi}_i \quad \text{für } i = 1, \dots, MN \quad (\text{C.4})$$

mit  $\vec{\varphi}_i$  als dem  $i$ -ten Eigenvektor und  $\lambda_i$  als dem  $i$ -ten Eigenwert der Kovarianzmatrix. Gleichung (C.4) wird in

$$(\mathbf{C}_f - \lambda_i \mathbf{I}) \vec{\varphi}_i = 0 \quad (\text{C.5})$$

umgeformt, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix ist. Zur Berechnung der  $MN$  Eigenwerte  $\lambda_i$  der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_f$ , muß die sogenannte *charakteristische Gleichung*

$$\mathbf{D} := |\mathbf{C}_f - \lambda_i \mathbf{I}| \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{C.6})$$

gelöst werden, wobei  $\mathbf{D}$  die Determinante ist. Ordnet man die sich dabei ergebenden Eigenwerte in der Reihenfolge  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{MN}$ , so lassen sich die zugehörigen Eigenvektoren  $\vec{\varphi}_i$  durch Einsetzen der Eigenwerte in die Gleichung (C.5) bestimmen. Die Eigenvektoren, die neben dem Realteil auch komplexe Anteile haben können, bilden eine orthonormale Basis.

$$\vec{\varphi}_i^{*T} \vec{\varphi}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

$\vec{\varphi}_i^{*T}$  stellt den konjugiert komplexen und transponierten (transjugierten) Eigenvektor von  $\vec{\varphi}_i$  dar. Setzt man die Eigenvektoren  $\vec{\varphi}_i$  zu einer (Transformations-)Matrix

$$\Phi = \begin{bmatrix} \leftarrow & \vec{\varphi}_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \vec{\varphi}_2 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & \vec{\varphi}_{MN} & \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1,MN} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2,MN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \varphi_{MN,1} & \varphi_{MN,2} & \cdots & \varphi_{MN,MN} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

zusammen, in der ein Element  $\varphi_{ij}$  hier das  $j$ -te Element des  $i$ -ten Eigenvektors ist, dann läßt sich die Karhunen-Loève-Transformation definieren als

$$\vec{g} := \Phi(\vec{f} - \vec{\mu}_f). \quad (\text{C.9})$$

Gleichung (C.9) läßt sich als lineare Abbildung des mittelwertfreien Bildvektors  $\vec{f}(l) - \vec{\mu}_f$  in den neuen Bildvektor  $\vec{g}(l)$  interpretieren. Aus Gleichung (C.9) ist unmittelbar ersichtlich, daß der Erwartungswert von  $\vec{g}$  gleich Null ist.

$$E\{\vec{g}(l)\} = \vec{\mu}_g = 0 \quad (\text{C.10})$$

Die Gleichung (C.4) stellt  $M \cdot N$  Gleichungen dar und kann durch die Einführung der Diagonalmatrix  $\Lambda$  der Eigenwerte

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{NM} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

in Matrix-Schreibweise

$$\mathbf{C}_f \Phi^{*T} = \Phi^{*T} \Lambda \quad (\text{C.12})$$



gebracht werden. Da  $\Phi$  ein orthonormales Funktionensystem darstellt, gilt dann  $\Phi^{-1} = \Phi^T$  und

$$\Phi^{*T} \Phi = \mathbf{I}. \quad (\text{C.13})$$

Daraus folgt

$$\Phi \mathbf{C}_f \Phi^{*T} = \Lambda. \quad (\text{C.14})$$

Berechnet man die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_g$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_g &= E\{\vec{g}_k \vec{g}_k^{*T}\} \\ &= E\{\Phi(\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)(\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)^T \Phi^{*T}\} \\ &= \Phi E\{(\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)(\vec{f}_k - \vec{\mu}_f)^T\} \Phi^{*T} \\ &= \Phi \mathbf{C}_f \Phi^{*T} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

und vergleicht das Ergebnis mit Gleichung (C.14), so erkennt man, daß die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_g$  mit der Diagonalmatrix der Eigenwerte übereinstimmt.

$$\mathbf{C}_g = \Lambda \quad (\text{C.16})$$

Hieraus folgt die wichtige Eigenschaft der KLT, daß die Elemente von  $\vec{g}$  unkorreliert sind, jedoch die Varianz des  $i$ -ten Elements von  $\vec{g}$  gleich dem Eigenwert  $\lambda_i$  ist.

Die Inverse KLT oder Rücktransformation ergibt aus der Gleichung (C.10) und der Bedingung (C.14)

$$\vec{f} = \Phi^{*T} \vec{g} + \vec{\mu}_f. \quad (\text{C.17})$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Karhunen-Loève-Transformation ist, daß bei der Reduktion der Dimensionen von  $\vec{g}$  auf  $\vec{g}_P$ , wobei  $\vec{g}_P$  mit den ersten  $P$  Elementen von  $\vec{g}$  identisch ist,  $\vec{f}$  durch  $\vec{g}_P$  im Sinne des minimalen mittleren quadratischen Fehlers optimal angenähert werden kann. Dies entspricht einer Beschränkung auf diejenigen  $P$  Eigenvektoren bei der Bildung von  $\Phi$ , die den größten Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_P$  entsprechen.