Anhang

A Theorie

Die theoretischen Ausführungen im Hauptteil der Arbeit sind auf das Verständnis des Matched Filters und der Berechnung der dritten Momente bzw. der Kumulanten beschränkt geblieben. Ergänzende Darstellungen der Theorie werden in den folgenden Unterkapiteln aufgeführt. Für weitere Details sei auf die zitierte Literatur verwiesen.

A.1 Herleitung des Matched Filters

Die Theorie des Matched Filters wird in der Literatur hinreichend beschrieben [2, 43, 65, 71, 72]. Das Matched Filter soll die gewünschten Nutzsignale gut und das Rauschen möglichst schlecht übertragen. Am Eingang des Filters können zwei Situationen auftreten:

1. Das Empfangssignal $x(t)$ enthält nur die Störung $n(t)$ und wird als Hypothese H_0 bezeichnet.

$$x(t|H_0) = n(t) \tag{A.1}$$

2. Das Eingangssignal setzt sich additiv aus der Störung und dem Nachrichtenimpuls $s(t)$ zusammen und wird als Hypothese H_1 bezeichnet.

$$x(t|H_1) = n(t) + s(t) \tag{A.2}$$

Beim Ereignis H_1 soll die Ausgangsamplitude $y(t_0)$ möglichst groß und bei H_0 möglichst klein sein. Da $n(t)$ eine zufällige Störung ist, ist eine Erfüllung dieser Forderungen nur im Mittel über alle Störungen sinnvoll. Die Anwendung quadratischer Mittelwerte führt hier zu einer Lösung, die nur Kenntnisse über die Statistik der Störung bis zur zweiten Ordnung, d.h. über den linearen Mittelwert und die Autokorrelationsfunktion bzw. das Autoleistungsdichtespektrum, voraussetzt.

Die Forderungen lassen sich zusammenfassen mit der Bedingung, daß das Filter so entworfen werden soll, daß der Quotient

$$\Gamma = \frac{E\left\{y^2\left(t_0 \middle| H_1\right)\right\}}{E\left\{y^2\left(t_0 \middle| H_0\right)\right\}} \tag{A.3}$$

maximal ist.

Für den Zähler gilt mit Gleichung A.2 und die Impulsantwort $h(t)$ des Filters:

$$\begin{aligned} E\left\{y^2\left(t_0 \middle| H_1\right)\right\} = {} & E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot h(v)\cdot n(t_0-u)\cdot n(t_0-v)\cdot du\cdot dv\right\} \\ & + 2\cdot E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot h(v)\cdot n(t_0-u)\cdot s(t_0-v)\cdot du\cdot dv\right\} \\ & + E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot h(v)\cdot n(t_0-u)\cdot s(t_0-v)\cdot du\cdot dv\right\} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Mit der Voraussetzung, daß $n(t)$ stationär, $s(t)$ ein nicht zufälliges Signal, m_n der lineare Mittelwert und $s_{nn}(\tau)$ die Autokorrelation ist, folgt:

$$\begin{aligned} E\left\{y^2\left(t_0 \middle| H_1\right)\right\} = {} & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot h(v)\cdot s_{nn}(u-v)\cdot du\cdot dv \\ & + 2\cdot m_n\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot du\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} h(v)\cdot s(t_0-v)\cdot dv \\ & + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot s(t_0-u)\cdot du\right)^2 \end{aligned} \tag{A.5}$$

$$m_n = E\{n(t)\}, \qquad s_{nn} = E\{n(t)\cdot n(t+\tau)\}$$

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß das Störsignal $n(t)$ mittelwertfrei ist.

$$m_n = 0 \tag{A.6}$$

Damit entfällt der mittlere Summand der Gleichung A.5.

Im Nenner von Gleichung A.3 entfällt gegenüber dem Zähler der Beitrag von *s(t)*. Er lautet daher:

$$E\left\{y^2\left(t_0 \middle| H_0\right)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot h(v)\cdot s_{nn}(u-v)\cdot du\cdot dv \tag{A.7}$$

Der Quotient Γ läßt sich damit in folgender Form bringen:

$$\Gamma = 1 + \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot s(t_0 - u)\cdot du\right)^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot h(v)\cdot s_{nn}(u-v)\cdot du\cdot dv} \tag{A.8}$$

Die Gleichung A.8 läßt sich weiter vereinfachen, wenn $n(t)$ als weißes Rauschen angenommen wird. Dann ist

$$s_{nn}(\tau) = S_0 \cdot \delta(\tau) \tag{A.9}$$

und die Gleichung A.8 vereinfacht sich zu:

$$\Gamma = 1 + \frac{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\cdot s(t_0 - u)\cdot du\right)^2}{S_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(u)\cdot dv} \tag{A.10}$$

Mit der Ungleichung von Schwarz [47, 71] bietet sich eine Möglichkeit zur Bestimmung der optimalen Übergangsfunktion *h(t)* an. Mit dieser Gleichung kann für das Integral im Zähler des Bruches der Gleichung A.10 eine obere Schranke angegeben werden:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) \cdot s(t_0 - u) \cdot du \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(u) \cdot du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t_0 - v) \cdot dv \qquad \text{(A.11)}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn

$$h(u) = \alpha \cdot s(t_0 - u) \qquad \text{(A.12)}$$

ist. Dabei ist α ein beliebiger reeller Faktor. Wird die Gleichung A.12 in die Ungleichung A.11 eingesetzt, so gilt:

$$\Gamma \leq 1 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t_0 - u) \cdot du}{S_0} = 1 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) \cdot du}{S_0} \qquad \text{(A.13)}$$

Γ wird dann maximal, wenn in A.11 das Gleichheitszeichen gilt. Damit lautet die optimale Übergangsfunktion des Filters bei weißer Störung:

$$h_{opt}(t) = \alpha \cdot s(t_0 - t) \qquad \text{(A.14)}$$

Dies bedeutet, daß die Übergangsfunktion des signalangepaßten Filters dem gespiegelten Signalimpuls entspricht. Der Faktor α bedeutet eine frequenzunabhängige Verstärkung. Diese ist beliebig wählbar, da sie Signalimpuls und Störung in gleicher Weise beeinflußt und die Güte einer Entscheidung zwischen beiden Hypothesen nicht verändert. Bei praktischen Anwendungen kann α so bestimmt werden, daß am Filterausgang bestimmte Pegel eingehalten werden.
Ist

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega \cdot t} \cdot dt\,, \qquad \text{(A.15)}$$

die Fouriertransformierte des Signalimpulses *s(t)*, so berechnet sich der Frequenzgang des signalangepaßten Filters (Übertragungsfunktion) bei weißer Störung mit der Gleichung A.14 zu:

$$\begin{aligned} H_{opt}(\omega) &= \alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} s(t_0 - t) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \cdot dt \\ &= \alpha \cdot S^*(\omega) \cdot e^{-j\omega \cdot t_0} \end{aligned}, \tag{A.16}$$

Hierin beschreibt der Faktor $e^{-j\omega \cdot t_0}$ die Zeitverschiebung um t_0 und der konjugiert komplexe Wert von $S(\omega)$ die Spiegelung des Signalimpulses aus.

Für den Fall eines farbigen Rauschens kann die Gleichung A.8 durch A.9 nicht vereinfacht werden. Mit der Fouriertransformation der Gleichung A.8 ergibt sich folgende Gleichung.

$$\Gamma = \alpha \cdot \delta(\omega) + \frac{\left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot H(\omega) \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot d\omega \right)^2}{\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \cdot d\omega}, \tag{A.17}$$

Mit der Ungleichung von Schwarz berechnet sich die optimale Übertragungsfunktion $H(\omega)$ zu.

$$H_{opt}(\omega) = k \cdot \frac{S^*(\omega)}{S_{nn}(\omega)} \cdot e^{-j\omega \cdot t_0}, \tag{A.18}$$

Bei weißer Störung mit $S_{nn}(\omega) = S_0$ entspricht dies der Übertragungsfunktion A.16, und mit einer Rücktransformation entspricht dies der Gleichung A.14.

A.2 Momenterzeugende Funktion

Ein zentraler Begriff bei der Betrachtung von Zufallsgrößen ist der Erwartungswert [21, 55]. Der Erwartungswert berechnet sich aus einer Funktion zufälliger Größen *g(x)* mit der Wahrscheinlichkeitsdichte *f(x)* wie folgt

$$E\{g(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx \,. \tag{A.19}$$

Wird in die Gleichung (A.19)

$$g(x) = \exp(s \cdot x) \tag{A.20}$$

eingesetzt, so erhält man als Sonderfall eines Erwartungswertes die Momenterzeugende Funktion:

$$\Psi_x(s) = E\{\exp(s \cdot x(\eta))\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx \tag{A.21}$$

Aus der Entwicklung der Exponentialfunktion in einer Reihe folgt:

$$\Psi_x(s) = 1 + \cdot \sum_{n=1}^{\infty} s^n \cdot E\{x^n\} / n! = 1 + \cdot \sum_{n=1}^{\infty} s^n \cdot m_x^{(n)} / n! \,. \tag{A.22}$$

Die *n*-fache Ableitung nach *s* an der Stelle *s* = 0 ergibt dann:

$$\left. \frac{d^n \Psi_x(s)}{ds^n} \right|_{s=0} = m_x^{(n)} . \tag{A.23}$$

Eine Ausnahme stellt die Gaußverteilung dar. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte lautet:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_x} \cdot \exp\left(-\frac{\left(x - m_x^{(1)}\right)^2}{2 \cdot \sigma_x^2} \right) \tag{A.24}$$

Daraus folgt für die Momenterzeugende Funktion:

$$\Psi_x(s) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_x} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(s \cdot x) \cdot \exp\left(-\frac{\left(x - m_x^{(1)}\right)^2}{2 \cdot \sigma_x^2} \right) \cdot dx = \exp\left(\frac{\sigma_x^2 \cdot s^2}{2} + m_x^{(1)} \cdot s \right) \tag{A.25}$$

Für die erste und zweite Ableitung nach *s* an der Stelle *s* = 0 gelten:

$$\left. \frac{d\Psi_x(s)}{ds} \right|_{s=0} = \left(\sigma_x^2 \cdot s^2 + m_x^{(1)} \right) \cdot \exp\left(\frac{\sigma_x^2 \cdot s^2}{2} + m_x^{(1)} \cdot s \right) = m_x^{(1)} \tag{A.26}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\Psi_x(s)}{ds^2} \right|_{s=0} &= \left(\sigma_x^2 + \left(\sigma_x^2 \cdot s^2 + m_x^{(1)} \right)^2 \right) \cdot \exp\left(\frac{\sigma_x^2 \cdot s^2}{2} + m_x^{(1)} \cdot s \right) \\ &= \sigma_x^2 + \left(m_x^{(1)} \right)^2 = m_x^{(2)} \end{aligned} \tag{A.27}$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Gaußverteilung ist durch den linearen Mittelwert $m_x^{(1)}$ und der Varianz $\sigma_x^2 = m_x^{(2)} - \left(m_x^{(1)}\right)^2$ eindeutig bestimmt.

A.3 Kumulantenerzeugende Funktion

Der Logarithmus der Momenterzeugenden Funktion $\Psi_x(s)$ (Gleichung A.21) nennt man Kumulantenerzeugende Funktion [21, 55]:

$$\Xi_x(s) = \ln \Psi_x(s) = \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx \,. \tag{A.28}$$

Die n-te Ableitung dieser Funktion nach s an der Stelle $s = 0$ führt zu der Kumulante $k_x^{(n)}$ der Ordnung n und der Zufallsvariable $x(\eta)$. Insbesondere gelten:

$$k_x^{(1)} = \frac{d}{ds} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx \bigg|_{s=0} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx} \Bigg|_{s=0} = m_x^{(1)} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned} k_x^{(2)} &= \frac{d^2}{ds^2} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx \bigg|_{s=0} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx \right]^2}{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s \cdot x} \cdot f_x(x) \cdot dx \right]^2} \Bigg|_{s=0} \\ &= m_x^{(2)} - \left(m_x^{(1)} \right)^2 = \sigma_x^2 \end{aligned} \tag{A.30}$$

Auch für die Kumulanten der Ordnung ≥ 3 lassen sich Zusammenhänge mit den Momenten bzw. zentralen Momenten herleiten. Beispielsweise gelten für die dritte und vierte Ordnung:

$$k_x^{(3)} = m_x^{(3)} - 3 \cdot m_x^{(2)} + 2 \cdot \left(m_x^{(1)} \right)^3 \tag{A.31}$$

$$k_x^{(4)} = m_x^{(4)} - 4 \cdot m_x^{(3)} \cdot m_x^{(1)} - 3 \cdot \left(m_x^{(2)} \right)^2 + 12 \cdot m_x^{(2)} \cdot \left(m_x^{(1)} \right)^2 - 6 \cdot \left(m_x^{(1)} \right)^4 \tag{A.32}$$

Allgemein gilt, daß die Kumulante der Ordnung n aus den Momenten der Ordnung Eins bis einschließlich n bestimmt werden kann. Diese Aussage ist auch umkehrbar. Aus den Kumulanten aller Ordnungen einschließlich n läßt sich das n-te Moment berechnen. Beispielsweise gelten:

$$m_x^1 = k_x^{(1)} \tag{A.33}$$

$$m_x^{(2)} = k_x^{(2)} + \left(k_x^{(1)}\right)^2 \tag{A.34}$$

$$m_x^{(3)} = k_x^{(3)} + 3 \cdot k_x^{(2)} \cdot k_x^{(1)} + \left(k_x^{(1)}\right)^3 \tag{A.35}$$

$$m_x^{(4)} = k_x^{(4)} - 4 \cdot k_x^{(3)} \cdot k_x^{(1)} + 3 \cdot \left(k_x^{(2)}\right)^2 + 6 \cdot k_x^{(2)} \cdot \left(k_x^{(1)}\right)^2 + \left(k_x^{(1)}\right)^4 \tag{A.36}$$

Einen Sonderfall bilden die Zufallsvariablen mit Gaußdichte. Für ihre Momenterzeugende Funktion gilt:

$$\Psi_x(s) = \exp\left(\frac{\sigma_x^2 \cdot s^2}{2} \cdot m_x^{(1)} \cdot s\right). \tag{A.37}$$

Daraus resultiert die Kumulantenerzeugende Funktion einer Gaußschen Zufallsvariable:

$$\Xi_x(s) = \frac{\sigma_x^2 \cdot s^2}{2} \cdot m_x^{(1)} \cdot s\,. \tag{A.38}$$

Die Kumulanten lauten für eine Gaußverteilung:

$$k_x^{(1)} = m_x^{(1)} \tag{A.39}$$

$$k_x^{(2)} = \sigma_x^2 \tag{A.40}$$

$$k_x^{(n)} = 0 \qquad \text{für alle n} \geq 3 \tag{A.41}$$

Für eine Gaußverteilung verschwinden somit alle Kumulanten der Ordnung n ≥ 3.