

## 6 Zweidimensionale Systeme

In der Simulation granularer Systeme wählt man bevorzugt eine zweidimensionale Repräsentation des dreidimensionalen Problems. Geläufige Beispiele sind die zweidimensionale rotierende Trommel [9, 14, 23], der zweidimensionale Rohrfluss [89, 78] oder die Kraftnetzwerke in zweidimensionalen granularen Packungen [82, 81]. Die Reduzierung der Raumdimension bedeutet vor Allem eine effizientere Berechenbarkeit: Einige Simulationsmethoden eignen sich besonders für die zweidimensionale Geometrie [8, 81, 28, 58] und sind nur schwer auf drei Dimensionen zu erweitern. Andere Simulationsmethoden, wie z.B. die Molekulardynamik, bereiten konzeptionell keine Probleme bei der Anwendung in drei Dimensionen, jedoch steigt der Rechenzeitbedarf rapide an.

Auch wir werden im Folgenden nur noch zweidimensionale Systeme betrachten. Da wir letztendlich an dem Verhalten des dreidimensionalen Systems interessiert sind, ist es notwendig zu klären, inwieweit die zweidimensionale Beschreibung die dreidimensionale Realität abbildet. Die Reduktion auf zwei Dimensionen ist ein erprobtes Verfahren in der Theorie der ungeladenen granularen Materie. Zweidimensionale Ergebnisse des Rohrflusses beispielsweise können durch geeignete Skalierungsfaktoren gut auf drei Dimensionen übertragen werden [17]. Auch die Kollisionskühlung ungeladener Materie wurde hauptsächlich in zwei Dimensionen untersucht [64, 68, 21]. Wir gehen davon aus, dass auch im Fall der Kollisionskühlung geladener granularer Materie eine geeignete Umsetzung zweidimensionaler Ergebnisse auf drei Dimensionen existiert und sich das zweidimensionale System als einfachere Repräsentation der Wirklichkeit eignet. Während die Umsetzung der rein granularen Eigenschaften in dem von uns gewählten Modell mit dem Ersetzen der Kugeln durch Scheiben „intuitiv“ ist, muss die Umsetzung der Coulombwechselwirkung in zwei Dimensionen genauer betrachtet werden.

## 6.1 Kollisionskühlung in zwei Dimensionen

### 6.1.1 Coulombwechselwirkung

Das Gesetz der Coulombkraft zwischen zwei geladenen Teilchen ist empirisch für drei Dimensionen aufgestellt worden, und da noch kein Physiker *Flatland*<sup>1</sup> betreten hat, kann man über die Wechselwirkung geladener Teilchen in zwei Dimensionen nur spekulieren. Für das geladene granulare System sind zwei verschiedene zweidimensionale Coulombpotentiale [35] möglich:

$$\Phi_{2d} = \frac{q^2}{r} \quad (6.1)$$

und

$$\Phi_{2d}^* = -q^2 \ln \frac{r}{L} \quad . \quad (6.2)$$

Möglichkeit (6.1) ist die bekannte dreidimensionale Abhängigkeit. Ein System mit derartiger Coulombwechselwirkung entspricht einem zweidimensionalen Untersystem des dreidimensionalen Raumes. Etwa einem hohlen Quader, dessen Dicke sehr klein verglichen mit der Höhe und Breite ist. Die Teilchen bewegen sich in ihm quasi-zweidimensional, die elektrische Wechselwirkung zwischen ihnen fällt aber weiterhin mit  $1/r$  ab. Ein weiteres Beispiel für ein solches System sind zweidimensionale Elektronenmonolagen auf der Oberfläche flüssigen Heliums [55, 104, 36], die auch über das dreidimensionale Coulombpotential wechselwirken. Gleichung (6.2) gibt das Coulombpotential in einem wahren zweidimensionalen System wieder: Diese Beziehung ist die Lösung der zweidimensionalen Poisson Gleichung.  $L$  ist als Normierungslänge beliebig, wird jedoch im Allgemeinen als die Systemlänge gewählt. Ein System unendlich langer, paralleler Stäbe zeigt eine Coulombwechselwirkung gemäß Gleichung (6.2). Diese Form wird auch im zweidimensionalen One Component Plasma [19, 16] benutzt.

### 6.1.2 Kinetische Theorie

Im Folgenden wollen wir noch keine spezielle Form der Coulombwechselwirkung wählen, sondern die zweidimensionale Dissipationsrate entsprechend Abschnitt 4.1 für das verdünnte zweidimensionale System berechnen.

Wiederum müssen zwei kollidierende Teilchen zunächst eine Energiebarriere  $E_q$  überwinden, die den maximalen Stoßparameter wie in Gleichung (4.2) reduziert. Nur wird nicht über ein *Stoßvolumen*, sondern über eine *Stoßfläche* integriert.

---

<sup>1</sup>In seinem 1884 erschienenen Roman „Flatland“ beschreibt Edwin A. Abbott [2] die Welt zweidimensionaler Lebewesen.

Das heißt, wenn wir nun analog zu (4.3) die Kollisionsfrequenz berechnen, ergibt sich

$$f = 2n \int_{u \geq u_0} d^2u u b_{\max} p(\mathbf{u}) \quad , \quad (6.3)$$

wobei  $\mathbf{u}$  die zweidimensionale Relativgeschwindigkeit ist.  $u_0 = \sqrt{E_q/m}$  ist wieder die minimale Relativgeschwindigkeit, für die ein Stoß gerade noch möglich ist, und  $n = N/L^2$  ist die Anzahldichte im zweidimensionalen System. Die Verteilung  $p(\mathbf{u})$  sei eine Gaußverteilung mit:

$$\langle u^2 \rangle = 4T \quad . \quad (6.4)$$

Hier ist  $T$  die zweidimensionale granulare Temperatur gemäß Gl. (1.2). Man erhält so für die Stoßrate pro Volumeneinheit im verdünnten zweidimensionalen System:

$$\dot{N}_g = \sqrt{\pi} n^2 d \sqrt{T} \cdot \exp\left(-\frac{E_q}{m T}\right) \quad (6.5)$$

und äquivalent ergibt sich die Dissipationsrate zu:

$$\gamma = \sqrt{\pi} n^2 d m (1 - e_n^2) T^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_q}{m T}\right) \quad . \quad (6.6)$$

Ein Vergleich mit Gl. (4.5) und Gl. (4.12) des dreidimensionalen Systems zeigt die gemeinsame Struktur der dreidimensionalen und zweidimensionalen Lösungen.

Durch den Limes  $E_q/m T \rightarrow 0$  erhalten wir die Dissipationsrate pro Flächeneinheit für das ungeladene verdünnte System in zwei Dimensionen [53, 54]:

$$\gamma_0^{2d} = \sqrt{\pi} n^2 d m (1 - e_n^2) T^{3/2} \quad . \quad (6.7)$$

Hier muss entsprechend die Dissipationsrate für Systeme endlicher Dichte mit der radialen Verteilungsfunktion des zweidimensionalen Harte-Kugel Gases am Kontaktpunkt erweitert werden. Die Dissipationsrate für das dichte System ist also:

$$\gamma = \gamma_0^{2d} \cdot g_{\text{hs}}^{2d}(\nu) \quad , \quad (6.8)$$

wobei laut Henderson [41]

$$g_{\text{hs}}^{2d}(\nu) = \frac{1 - \frac{7}{16}\nu}{(1 - \nu)^2} \quad (6.9)$$

mit der zweidimensionalen Packungsdichte  $\nu = \pi d^2 n/4$  gegeben ist.

### 6.1.3 Coulombbarriere

Für die Dissipationsrate (6.6) hatten wir noch keine Annahme über die konkrete Form der Coulombwechselwirkung gemacht. Mit dem Wissen über die Abhängigkeit der Coulombbarriere von der Packungsdichte im dreidimensionalen System

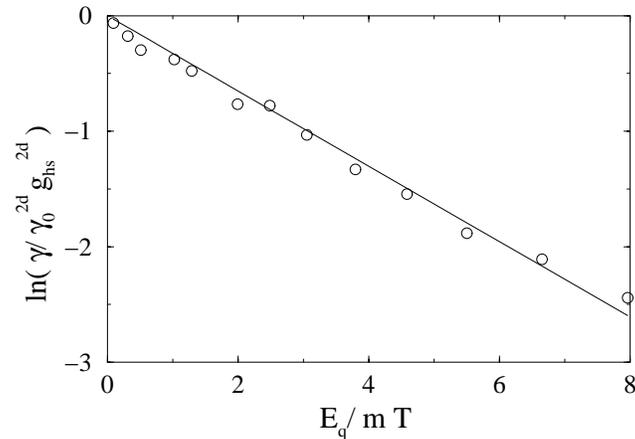


Abbildung 6.1: Arrheniusauftragung der Dissipationsrate für ein zweidimensionales System geladener Teilchen, die gemäß Gl. (6.1) wechselwirken. Das System hat die Packungsdichte  $\nu = 0.16$ . Die Ausgleichsgerade gibt die Steigung  $-0.33$  an.

erwarten wir, dass auch hier eine effektive Energiebarriere  $E_{\text{eff}}$  existiert, die in guter Näherung nur von der Packungsdichte abhängt.

Im Folgenden soll die Reduzierung der Coulombabstoßung von der Packungsdichte für die beiden möglichen Coulombpotentiale (6.1) und (6.2) untersucht werden. Hierfür machen wir Computersimulationen in periodischen Systemen der Fläche  $L^2$ . Mit den Gleichungen (6.6) – (6.8) erhält man wieder die Beziehungsgleichung für die effektive Coulombbarriere:

$$\gamma = \gamma_0^{2d} \cdot g_{hs}^{2d}(\nu) \cdot \exp\left(-\frac{E_{\text{eff}}}{m T}\right) \quad (6.10)$$

Dementsprechend lässt sich  $E_{\text{eff}}$  erneut aus Arrheniusauftragungen bestimmen. Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen diese für ein System der Packungsdichte  $\nu = 0.16$  für jeweils beide Potentialtypen. Während die Arrheniusauftragung für das Potential gemäß Gleichung (6.1) in guter Näherung linear ist, zeigt das logarithmische Potential eine deutliche Krümmung nach oben. Das bedeutet, dass hier die effektive Energiebarriere eine Temperaturabhängigkeit zeigt. Die Ausgleichsgeraden jedoch haben bei dieser Packungsdichte beinahe gleiche Steigungen.

Um die Abhängigkeit der effektiven Energiebarriere von der Packungsdichte zu bestimmen, haben wir wiederum Systeme verschiedener Dichte simuliert und jeweils per Arrheniusauftragung das Verhältnis  $E_{\text{eff}}/E_q$  bestimmt. In zwei Dimensionen erwarten wir eine Abhängigkeit von  $\nu^{1/2}$ , da hier der typische Nachbarabstand mit  $n^{-1/2}$  skaliert und somit  $E_{\text{eff}}$  von  $d/n^{-1/2}$  oder  $\nu^{1/2}$  abhängen wird. Abbildung 6.3 zeigt einen Vergleich der bekannten dreidimensionalen Ergebnisse

## 6.1 Kollisionskühlung in zwei Dimensionen

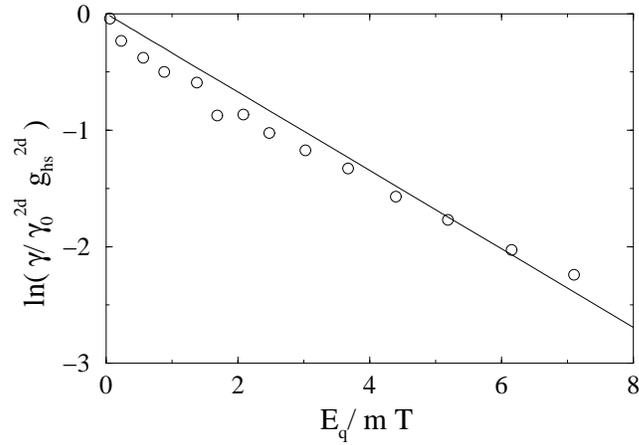


Abbildung 6.2: Dieselbe Auftragung wie in Abbildung 6.1. Hier wechselwirken die Teilchen gemäß Gl. (6.2). Die Packungsdichte ist  $\nu = 0.16$ . Die Ausgleichsgerade hat eine Steigung von  $-0.34$ .

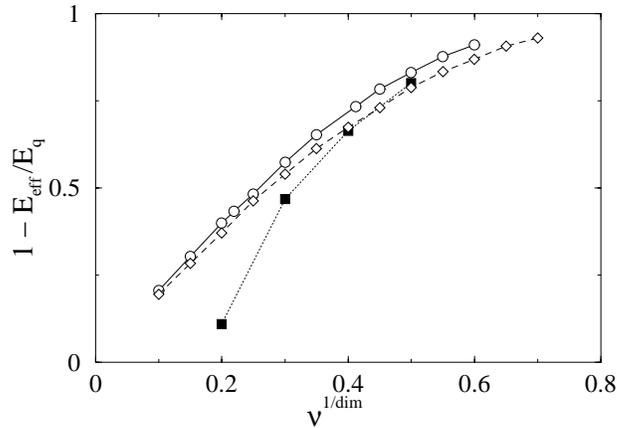


Abbildung 6.3: Abhängigkeit der effektiven Energiebarriere gegenüber der Packungsdichte in verschiedenen Dimensionen. Die Kreise wiederholen die dreidimensionalen Ergebnisse von Abbildung 4.6, die Rauten geben zweidimensionale Simulationen gemäß Gl. (6.1) und die Quadrate gemäß Gl. (6.2) wieder.

(gegen  $\nu^{1/3}$ ) mit den zweidimensionalen (gegen  $\nu^{1/2}$ ). Man sieht, dass die Simulationen mit dem  $1/r$ -Potential wie erwartet für kleiner werdende Packungsdichten effektive Energiebarrieren zeigen, die denen des dreidimensionalen Systems immer ähnlicher werden. Für höhere Packungsdichten wird die Abweichung allerdings größer.

Die Simulationen mit dem logarithmischen Potential zeigen jedoch ein vollkommen unerwartetes Verhalten, da hier der verdünnte Limes  $E_{\text{eff}} \rightarrow E_{\text{q}}$  offenbar nicht erreicht wird. Zu diesem Zeitpunkt ist der Grund für dieses Verhalten des logarithmischen Systems nicht ganz klar. Bei der Simulation wurde jedoch bemerkt, dass ein wesentlich kleinerer Zeitschritt benötigt wurde, um ein logarithmisches System mit  $e_n = 1$  stabil (d.h. bei konstanter Energie) zu halten als bei einem vergleichbaren System, das über Gl. (6.1) wechselwirkt. Dies liegt daran, dass die Wechselwirkungen gemäß  $\ln r/L$  sehr langsam divergieren. Anzumerken ist außerdem, dass in dem periodischen System mit logarithmischem Potential die Kräfte nur mit  $1/r$  abklingen, d.h. die Kraft auf ein Teilchen ist nur noch bedingt konvergent. Somit scheint auch nicht ausgeschlossen, dass die endliche Systemgröße dieses Verhalten verursacht (engl. *finite size effect*) und wesentlich mehr Teilchen bei gleicher Dichte simuliert werden müssen, was zusammen mit der Reduzierung der Zeitschrittweite die Systeme mit einem logarithmischen Potential extrem rechenzeitaufwendig macht.

Für eine Computersimulation bietet sich also das Potential gemäß Gleichung (6.1) eher an. Die Auswirkungen der Packungsdichte sind für verdünnte Systeme gleich der im dreidimensionalen System. Für hohe Packungsdichten wird die Abweichung allerdings größer. Dies liegt daran, dass in zwei Dimensionen nicht mehr die Nahordnung realisiert werden kann, die die Form von  $E_{\text{eff}}(\nu)$  in drei Dimensionen bestimmt. Mit einer äquivalenten Diskussion kann auch in zwei Dimensionen die Reduktion der effektiven Energiebarriere über das Verhältnis des Durchmessers  $d$  und des typischen Nachbarabstandes  $\ell$  approximiert werden:

$$E_{\text{eff}}/E_{\text{q}} = \left(1 - \frac{d}{\ell}\right)^2 . \quad (6.11)$$

Abbildung 6.4 zeigt noch einmal einzeln die Ergebnisse für das zweidimensionale System mit dem  $1/r$ -Potential. Zusätzlich ist der Verlauf von  $E_{\text{eff}}(\nu)$  gemäß Gleichung (6.11) für verschiedene Nahordnungen aufgetragen. Die Abhängigkeit von  $d/\ell$  von der Packungsdichte ist für eine Nahordnung im Dreiecksgitter und im quadratischen Gitter in Tabelle 6.1 gegeben. Die simulierten Werte stimmen sehr gut mit Gleichung (6.11) für die Nahordnung entsprechend eines Dreiecksgitters überein.

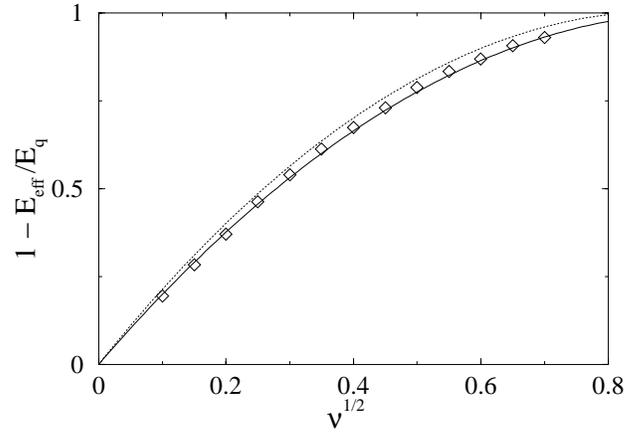


Abbildung 6.4: Verlauf der effektiven Energiebarriere des zweidimensionalen Systems mit dem Coulombpotential (6.1). Die durchgezogene Kurve gibt Gl. (6.11) entsprechend der Nahordnung eines Dreiecksgitters wieder. Die gepunktete für ein Quadratgitter.

Struktur	$d/\ell$	$\nu_{\max}$
Dreiecksgitter	$(2\sqrt{3}/\pi)^{1/2} \nu^{1/2} \approx 1.05 \nu^{1/2}$	0.91
Quadratgitter	$(2/\sqrt{\pi}) \nu^{1/2} \approx 1.13 \nu^{1/2}$	0.79

Tabelle 6.1: Verhältnis von  $d/\ell$  für zweidimensionale Nahordnungen.  $\nu_{\max}$  gibt die maximal mögliche Packungsdichte der jeweiligen Gitterstrukturen an.

## 6.2 Ladungsverteilungen

In diesem Kapitel wollen wir die Kollisionskühlung für monopolare Ladungsverteilungen untersuchen, bei denen nicht alle Teilchen dieselbe elektrische Ladung tragen. Eine nichtsinguläre Ladungsverteilung entspricht eher den real auftretenden Problemen, wobei die exakte Form der Verteilung vom jeweiligen Prozess der Ladungserzeugung abhängt. Im Folgenden sollen zwei spezielle Verteilungen betrachtet werden, deren Verhalten dann Aufschluss über beliebige andere geben wird: die *bimonopolare* Verteilung, bei der nur zwei Ladungsgrößen vorkommen, die beide dasselbe Vorzeichen tragen, und eine Gaußverteilung der Ladungen.

### 6.2.1 Bimonopolare Verteilung

Eine bimonopolare Verteilung wird beschrieben durch zwei Teilchensorten, die sich nur durch die Ladungen unterscheiden:

$$q_1 > q_2 > 0 \quad , \quad (6.12)$$

wobei die Teilchensorten in der Anzahl  $N_1$  und  $N_2$  vorkommen sollen. Aufgrund der unterschiedlichen Paarkonstellationen existieren drei unterschiedliche Energiebarrieren:

$$E_q^{11} = \frac{q_1^2}{d} \quad > \quad E_q^{12} = \frac{q_1 q_2}{d} \quad > \quad E_q^{22} = \frac{q_2^2}{d} \quad . \quad (6.13)$$

Für den Fall hoher Temperaturen  $T \gg E_q^{11}/m$  verhält sich das System als wären die Teilchen nicht geladen. Findet hier ein Stoß statt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein  $1 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 2$  oder  $2 \rightarrow 2$  Stoß ist, gegeben durch:

$$p^{11} = \frac{N_1^2}{N^2}, \quad p^{22} = \frac{N_2^2}{N^2}, \quad p^{12} = 1 - \frac{N_1^2 + N_2^2}{N^2} \quad (6.14)$$

für große  $N_1$  und  $N_2$ .

Separieren wir jetzt die gesamte Dissipationsrate in die Anteile für die jeweiligen Paarkonstellationen, so erhalten wir für das System unendlich hoher Temperatur:

$$\gamma^{11} = \gamma_0^{2d} \cdot g_{\text{hs}}^{2d} \cdot p^{11}, \quad \gamma^{12} = \gamma_0^{2d} \cdot g_{\text{hs}}^{2d} \cdot p^{12}, \quad \gamma^{22} = \gamma_0^{2d} \cdot g_{\text{hs}}^{2d} \cdot p^{22} \quad , \quad (6.15)$$

wobei  $\gamma_0^{2d}$  die Dissipationsrate gemäß Gl. (6.7) für  $N = N_1 + N_2$  Teilchen ist.

Um die Dissipationsrate auf den Bereich geringerer Temperaturen zu erweitern, müssen wir Aussagen über die Coulombabstoßung im bimonopolaren Gas machen. Auch hier werden die Energiebarrieren (6.13) effektiv erniedrigt. Wir nehmen

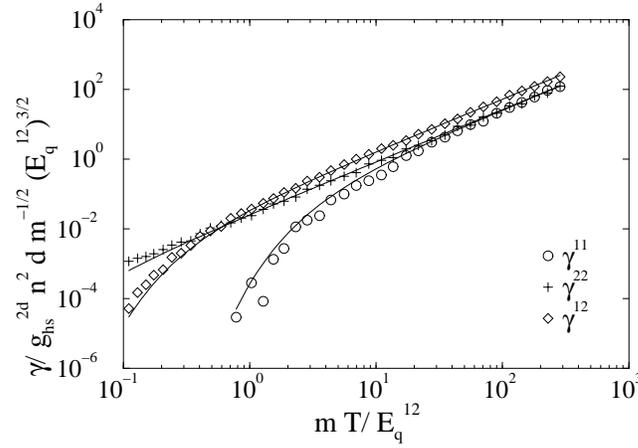


Abbildung 6.5: Doppeltlogarithmische Auftragung der einzelnen Dissipationsraten. Die Normierung der Achsen wurde entsprechend Abbildung 4.2 vorgenommen, wobei  $E_q$  durch  $E_q^{12}$  ersetzt wurde. Die Symbole geben die gemessenen Dissipationsraten wieder, die Kurven den Verlauf gemäß Gleichung (6.17).

an, dass die Reduzierung der effektiven Energiebarriere für eine Paarkonstellation anteilmäßig genauso stark ist, wie in einem monopolen System gleicher Packungsdichte mit nur einer Ladungsgröße, also:

$$\frac{E_{\text{eff}}^\alpha(\nu)}{E_q^\alpha} = \frac{E_{\text{eff}}(\nu)}{E_q} \quad , \quad (6.16)$$

wobei  $\alpha = 11, 12, 22$  die Paarkonstellation angibt. Mit der Abhängigkeit für  $E_{\text{eff}}(\nu)/E_q$  gemäß Gl. (6.11). So erhalten wir dann die partiellen Dissipationsraten:

$$\gamma^\alpha = \gamma_0^{2d} \cdot g_{\text{hs}}^{2d} \cdot p^\alpha \cdot \exp\left(-\frac{E_q^\alpha E_{\text{eff}}(\nu)}{E_q m T}\right) \quad , \quad (6.17)$$

unter der Voraussetzung, dass die granulare Temperatur  $T$  für beide Teilchensorten identisch ist. Der tatsächliche Wert von  $E_q$  b.z.w.  $E_{\text{eff}}$  des Referenzsystems interessiert nicht, da nur der Quotient eingeht.

Zum Testen dieser Annahmen wurde ein bimonopolares System mit  $N = 512$  simuliert. Hierbei waren die zwei Ladungsorten gleichmäßig verteilt,  $N_1 = N_2 = N/2$ , und die Ladungsgrößen waren  $q_1 = 10 \cdot q_2$ . Die Packungsdichte des Systems war  $\nu = 0.09$ , was laut Abbildung 6.4 einem Wert von  $E_{\text{eff}}/E_q = 0.46$  entspricht. Der Restitutionskoeffizient war  $e_n = 0.97$ . Die granularen Temperaturen der beiden Teilchensorten wurden zu jedem Zeitpunkt (im Rahmen des Rauschens) als vollkommen gleich gemessen, was die oben gemachte Annahme bestätigt. Abbildung 6.5 zeigt die Ergebnisse. Man erkennt, dass der Bereich hoher Temperaturen

korrekt beschrieben wird und alle drei Dissipationsraten linear mit  $T^{3/2}$  verlaufen, wobei laut Gl. (6.14) und (6.15) die Rate  $\gamma^{12}$  doppelt so groß ist wie die beiden anderen. Für niedrige Temperaturen bricht zuerst  $\gamma^{11}$  weg, da zwischen diesen Paaren die Energiebarriere am größten ist. Es folgt  $\gamma^{12}$ , und  $\gamma^{22}$  schließlich verlässt für die dargestellten Temperaturen den linearen Bereich nicht.

Der theoretische Verlauf stimmt für große Temperaturen gut mit den gemessenen Werten überein. Es zeigen sich aber Abweichungen sobald die jeweiligen Quotienten  $E_{\text{eff}}^\alpha/mT$  größer werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Theorie für  $\gamma^{11}$  zu große Werte voraussagt, während die für  $\gamma^{12}$  und  $\gamma^{22}$  vorausgesagten zu niedrig sind. Dies bedeutet, dass  $E_{\text{eff}}^{11}$  zu niedrig und die anderen effektiven Energiebarrieren zu hoch eingeschätzt wurden. So wird klar, dass die einfache Abschätzung (6.16) die effektiven Coulombbarrieren nicht vollständig beschreibt. Dort setzen wir indirekt voraus, dass die Reduktion durch eine Nahordnung von Teilchen gleicher Ladung wie die der Kollisionspartner (oder deren geometrisches Mittel bei  $\gamma^{12}$ ) geleistet wird. Tatsächlich werden sich in der Nachbarschaft kollidierender Teilchen aber immer Teilchen beiderlei Ladungsgröße aufhalten und eine lokale Gitterstruktur wird durch die unterschiedliche Ladung der beteiligten Teilchen gestört. Die Größe des Molekularfelds der Nachbarpartikel hängt von der Ladung dieser Teilchen ab. Wenn man also für  $E_{\text{eff}}^{11}$  alle Nachbarpartikel als mit  $q_1$  geladen annimmt, überschätzt man das Molekularfeld und damit unterschätzt man die effektive Energiebarriere, was den Verlauf der Kurve für  $\gamma^{11}$  erklärt. Äquivalent unterschätzen wir für  $\gamma^{22}$  den Einfluss des Molekularfelds, was erklärt, dass die theoretische Kurve die gemessenen Werte unterbietet. Um die Dissipationsraten exakter zu bestimmen, müsste eine genauere Untersuchung des Molekularfeldes der einzelnen Kollisionspartner vorgenommen werden, worauf wir aber an dieser Stelle verzichten möchten.

Ein weiteres interessantes Phänomen zeigt die Gesamtdissipationsrate:

$$\gamma = \gamma^{11} + \gamma^{22} + \gamma^{12} \quad , \quad (6.18)$$

aufgetragen in Abbildung 6.6.

Wie bereits in Abbildung 6.5 zu sehen, klingen  $\gamma^{11}$  und  $\gamma^{12}$  für tiefere Temperaturen schneller ab als  $\gamma^{22}$ , so dass für tiefe Temperaturen die Gesamtdissipationsrate vollkommen durch  $\gamma^{22}$  bestimmt wird. In der Auftragung verläuft  $\gamma$  deshalb zwischen zwei Geraden mit den Steigungen  $T^{3/2}$ : Die erste gibt den Grenzfall hoher Temperaturen an, wo  $\gamma$  entsprechend Gl. (6.8) verläuft. Die untere Gerade entspricht der Dissipationsrate  $\gamma^{22}$ , wenn die elektrische Ladung der Teilchensorte 2 keine Rolle spielen würde. Man sieht, dass die Gesamtdissipationsrate einen Übergang von der einen Geraden zur anderen vollzieht, wobei sie für tiefer werdende Temperaturen schließlich aufgrund der Coulombabstoßung auch die untere Gerade verlassen wird. Das Verhalten der Dissipationsrate ist also für Systeme mit verschiedenen Ladungsgrößen äußerst facettenreich. Für endliche Tempera-

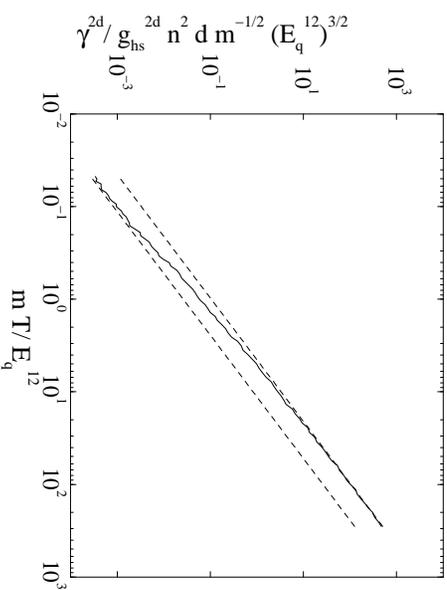


Abbildung 6.6: Skalierete Dissipationsrate gegen die skalierete granulare Temperatur. Die gestrichelten Geraden geben die ungeladenen Grenzfälle (6.8) (oben) und  $\gamma^{22}$  gemäß (6.15) (unten) an.

turen stellt sich die Dissipationsrate zwischen zwei  $T^{3/2}$  Bereichen ein, wobei die Breite dieser Aufspaltung durch das Verhältnis  $N^2/N_2^2$  gegeben ist.

Das Verhalten der Dissipationsrate in einem bimonopolar geladenen System erinnert an die Ladungsträgerkonzentration in einem dotierten Halbleiter: Für niedrige Temperaturen wird diese durch die sog. *Störstellenreserve* bestimmt. Im Bereich mittlerer Temperaturen, der *Störstellenerschöpfung*, beobachtet man eine von der Temperatur unabhängige Ladungsträgerkonzentration. Steigt die Temperatur weiter an, setzt schließlich der *intrinsische Bereich* der Ladungsträgerkonzentration ein, bei dem Elektronen aus dem Valenzband des Halbleiters in das Leitungsband angeregt werden. Man könnte hier das erste Abweichen der Dissipationsrate vom  $T^{3/2}$ -Verhalten mit der Störstellenreserve gleichsetzen. Der für niedrige Temperaturen folgende Bereich mit  $T^{3/2}$  Steigung würde dann der Störstellenerschöpfung entsprechen. Für sehr niedrige Temperaturen (in der Abbildung nicht dargestellt) würde der Einfluss der Ladung sich auch bei den  $2 \rightarrow 2$  Stößen bemerkbar machen, was dann dem Bereich der intrinsischen Leitung entsprechen würde.

## 6.2.2 Gaußverteilung der Ladung

Als zweite weitere monopolare Ladungsverteilung wollen wir nun eine Gaußverteilung der Ladung untersuchen. Hierbei soll die Varianz  $\sigma$  der Verteilung nicht zu groß sein, so dass im System praktisch keine Teilchen auftreten, die gegenüber

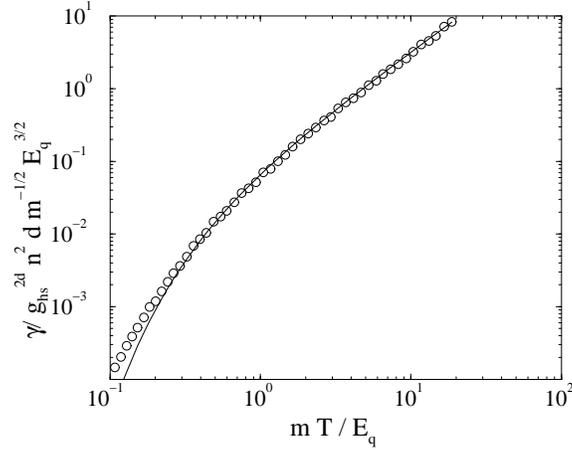


Abbildung 6.7: *Doppeltlogarithmische Auftragung der skalierten Dissipationsrate gegen die skalierte Temperatur für ein System mit gaußverteilter Ladung.*

der Durchschnittsladung  $\langle q \rangle > 0$  negativ geladen sind<sup>2</sup>. In diesem System gibt es unendlich viele Kombinationen der Ladungen  $q_i$  und  $q_j$  von kollidierenden Teilchen. Geht man naiv vor und nimmt die Kollisionspartner als vollkommen unkorreliert durch die jeweiligen Ladungen an, so würde das durchschnittliche Ladungsquadrat bei Kollisionen sich ergeben als:

$$\langle q_i q_j \rangle = \langle q_i \rangle \langle q_j \rangle = \langle q \rangle^2 \quad . \quad (6.19)$$

Hierbei stehen die eckigen Klammern für eine Mittelung über alle Kollisionen. In dieser naiven Betrachtung würde das System mit gaußverteilter Ladung also dieselbe Dissipationsrate zeigen wie ein System mit singulärer Ladungsverteilung, in dem alle Teilchen dieselbe Ladung  $\langle q \rangle$  tragen.

Abbildung 6.7 zeigt ein simuliertes System mit einer Varianz von  $\sigma = \langle q \rangle / 5$ . Hierbei wurde zur Skalierung die Energiebarriere  $E_q = \langle q \rangle^2 / d$  für den Mittelwert  $\langle q \rangle$  der Verteilung genommen. Die durchgezogene Kurve entspricht Gl. (6.10) mit  $E_{\text{eff}} = 0.46 \cdot E_q$  gemäß der Packungsdichte des Systems von  $\nu = 0.09$ . Man sieht, dass die mit der mittleren Ladung  $\langle q \rangle$  gewonnene Dissipationsrate für hohe Temperaturen das Verhalten noch erwartungsgemäß gut wiedergibt. Für tiefere Temperaturen indes unterschätzt sie die Dissipationsrate, da die Ladungen der stoßenden Teilchen mehr und mehr korreliert werden und die Dissipation dann hauptsächlich über die weniger stark geladenen Teilchen geleistet wird. Dieses

<sup>2</sup>Dies kann nur für ein endliches System vollständig realisiert werden. Für jede von Null verschiedene Varianz kommen für große  $N$  gegengeladene Teilchen vor. Die Varianz  $\sigma$  soll also so bemessen sein, dass diese Teilchen durch ihre kleine Anzahl für das Systemverhalten keine Rolle spielen.

Phänomen ist ähnlich dem für das bimonopolar geladene System, nur dass hier nicht einzelne Bereiche, in denen jeweils eine Energiebarriere dominiert, separiert werden können, sondern die effektive Energiebarriere kontinuierlich vermindert wird und eine Temperaturabhängigkeit aufweist. Je breiter die Verteilung ist, desto weniger wird sich das Verhalten der Dissipationsrate mit der mittleren Ladung  $\langle q \rangle$  beschreiben lassen.

Eine breite Ladungsverteilung sorgt hier für eine effektive Erhöhung der Dissipationsrate gegenüber der für eine singuläre Verteilung. Anders ausgedrückt: Es kann also durch eine breitere Verteilung der Ladungen bei gleicher Gesamtladung des granularen Systems der Einfluss der elektrischen Ladung auf das granulare System vermindert werden.

### 6.2.3 Diskussion

Es zeigte sich, dass die Ergebnisse, die für die singuläre Ladungsverteilung gewonnen wurden, sich auf allgemeinere Ladungsverteilungen übertragen lassen. Anhand der bimonopolaren Verteilung wurde deutlich, dass für tiefe Temperaturen die Dissipationsrate hauptsächlich über die weniger stark geladenen Teilchen getragen wird. Eine quantitative Beschreibung der Dissipationsrate in granularen Systemen mit Ladungsverteilung bereitet Schwierigkeiten, vor allem weil hier die Reduktion der effektiven Energiebarriere von Teilchen verschiedener Ladungsgröße geleistet wird. Dies hat unter anderem Auswirkungen auf die Nahordnung der Teilchen, die nachweislich die effektive Reduktion der Energiebarriere bestimmt.

Weiterhin wurde der Effekt beobachtet, dass durch eine breitere Verteilung der Gesamtladung auf die einzelnen Teilchen der Einfluss der elektrischen Ladung auf das System reduziert werden kann. Die Betrachtung von realistischen Ladungsverteilungen in granularen Systemen war hier nicht möglich. Hauptsächlich, weil verlässliche Daten fehlen und diese letztendlich stark von schwer kontrollierbaren Umweltfaktoren abhängen. Jedoch könnte der erwähnte Effekt interessante Anwendungsmöglichkeiten für die Praxis eröffnen, wenn die Auswirkung der Aufladung granularer Systeme vermindert werden soll.

