

Relationale Entscheidungstheorie

Dem Fachbereich 11 / Mathematik der
Gerhard-Mercator-Universität - Gesamthochschule - Duisburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines

Dr. rer. nat.

eingereichte Dissertation

von

Oliver van Laak

aus

Düsseldorf

Referent: Prof. Dr. Günter Törner
Korreferent: Prof. Dr. Wolfram Luther
Tag der mündlichen Prüfung: 3. Mai 2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die Sprachen der Klasse MS	7
1.1 Mehrwertige Sprachen und Mengen	7
1.2 Die Syntax der Sprachen MS	10
1.3 Abbildungen auf Wahrheitswerten	14
1.3.1 t -Normen und s -Normen	14
1.3.2 Negationsfunktionen	17
1.3.3 Das Residuum	19
1.3.4 Charakterisierung des Minimum-Operators	22
1.4 Wahrheitsräume und Tautologien	24
1.4.1 Wahrheitsräume und Wahrheitsfunktionen	25
1.4.2 Äquivalenz von Wahrheitsräumen	29
1.4.3 Isomorphie von Wahrheitsräumen	34
1.4.4 Tautologien und Kontradiktionen	40
1.5 Ein Anwendungsbeispiel: Parametrisierte t -Normen	43
1.6 Interpretationen und Modelle	44
1.7 Abschließende Bemerkungen	49
2 Mehrwertige Relationen	51
2.1 Mehrwertige Relationen und Fuzzy-Mengen	51
2.2 Grundlegende Begriffe	53
2.3 Mehrwertige Mengenoperationen	56
2.3.1 Mehrwertige Relationensysteme	57
2.3.2 Isomorphe Relationensysteme	62
2.4 Ein Anwendungsbeispiel: Formen mehrwertiger Relationen	65
2.5 Abschließende Bemerkungen	67

3	Logische Maße	69
3.1	Logische Maße: ein erster Zugang	69
3.2	Grundbegriffe	70
3.3	Logische Inklusionsmaße	73
3.3.1	Grundlegende Definitionen	74
3.3.2	Kanonische Inklusionsmaße	79
3.3.3	Abgeleitete Inklusionsmaße	84
3.3.4	Das Kartesische Produkt von Inklusionsmaßen	88
3.4	Logische Maße und Fuzzy-Maße	91
3.4.1	Grundlegende Definitionen	91
3.4.2	Darstellungssätze von Fuzzy-Maßen	93
3.5	Ein Anwendungsbeispiel: Zur Wahrscheinlichkeit mehrwertiger Ereignisse . .	101
3.6	Abschließende Bemerkungen	104
4	Relationale Entscheidungstheorie	105
4.1	Mathematische Entscheidungsmodelle	105
4.2	Das relationale Entscheidungsmodell	107
4.3	Das Kartesische Produkt relationaler Modelle	113
4.4	Symmetrische Entscheidungsmodelle	117
4.5	Äquivalenz und Isomorphie relationaler Modelle	121
4.6	Ein Anwendungsbeispiel: Indifferenzkurven isomorpher Systeme	128
4.7	Abschließende Bemerkungen	132
5	Relationale und klassische Entscheidungstheorie	133
5.1	Entscheidungsmodelle mit Nutzenfunktion	133
5.2	Entscheidungen mit einem Kriterium	136
5.2.1	Entscheidungen bei Sicherheit	137
5.2.2	Entscheidungen bei Risiko	138
5.2.3	Entscheidungen bei Unsicherheit	139
5.3	Entscheidungen mit mehreren Kriterien	140
5.3.1	Entscheidungsprobleme mit Restriktionen	141
5.3.2	Entscheiden mit mehreren Zielen	143
5.4	Ein Anwendungsbeispiel: Online-Routing-Systeme	151
5.5	Abschließende Bemerkungen	160
	Schlußbemerkungen	163
	Symbole	165
	Abbildungsverzeichnis	168
	Literaturverzeichnis	169

„Die Logik muß für sich selber sorgen.“

L. WITTGENSTEIN – TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS

*„Das Mögliche und das
Wahrscheinliche sind nicht dasselbe;
das Mögliche braucht noch lange
nicht das Wahrscheinliche zu sein.“*

F. DÜRRENMATT – DER VERDACHT

*„Nur allein der Mensch
Vermag das Unmögliche:
Er unterscheidet,
Wählet und richtet;
Er kann dem Augenblick
Dauer verleihen.“*

J. W. VON GOETHE – DAS GÖTTLICHE

Einleitung

In den vergangenen drei Jahrzehnten hat sich die Theorie der mehrwertigen Mengen (engl. *Fuzzy-Set-Theory*) als Methode zur Repräsentation ungenauer Aussagen etabliert. Dabei war neben der Control-Theory die Entscheidungstheorie eines der wichtigsten Anwendungsfelder der neuen Ansätze. Ausgelöst wurde diese Entwicklung von einer Arbeit von R. Bellman und L. A. Zadeh [Bellman '70]. In dieser schlugen sie einen Ansatz zur Beschreibung von Entscheidungsproblemen vor, in dem verschiedene Kriterien eines Entscheidungsproblems durch mehrwertige Menge dargestellt werden. Dieser Ansatz wird als *symmetrisches Entscheidungsmodell* bezeichnet, da bei der Modellbildung nicht zwischen den Zielen und den Nebenbedingungen der Entscheidung unterschieden wird. Seit dieser ersten Veröffentlichung wurden zahlreiche Ansätze entwickelt, die entweder den Bellman-Zadeh'schen Vorschlag erweiterten – hier sind vor allem die Arbeiten von Zimmermann (vgl. u. a. [Zimmermann '75, Zimmermann '76, Zimmermann '91]) und Rommelfanger (vgl. [Rommelfanger '94]) zu erwähnen – oder die auf anderen Konzepten zur Beschreibung von Optimalität beruhten. Zu nennen sind hier die Arbeiten von Orlovski [Orlovski '77], Ramik und Rimanek [Ramik '85], Tanaka, Ichihashi und Asai [Tanaka '84] sowie Slowinski [Slowinski '86]. Eine Übersicht über die verschiedenen Ansätze sowie Beispiele zu ihrer Anwendung finden sich in dem Werk von Lai und Hwang [Lai '92] sowie in dem bereits genannten Buch von Rommelfanger [Rommelfanger '94]. Nach wie läßt sich jedoch feststellen, daß das symmetrische Entscheidungsmodell der zentrale Ansatz bei der Beschreibung von Entscheidungsproblemen mit Methoden der Fuzzy-Set-Theory ist.

Trotz der zahlreichen Untersuchungen, die zu dem symmetrischen Entscheidungsmodell durchgeführt wurden, und trotz den unbestreitbaren Erfolgen dieses Ansatzes in der Anwendung ist der symmetrische Ansatz zur Darstellung von Entscheidungsproblemen nicht frei von jeder Problematik. So bestehen bei der Modellbildung stets eine große Anzahl von Freiheitsgeraden. Diese betreffen die Abbildungen, die zur Darstellung der mehrwertigen Mengen verwendet werden, sowie verwendeten Verknüpfungen der Mengen. Diese Freiheitsgerade ermöglichen sicher einen großen Freiraum bei der mathematischen Modellierung und erlauben prinzipiell eine sehr genaue und problem-spezifische Modellbildung. Allerdings stellt sich die Frage, wie Veränderungen der Modellparameter – dieses sind eben die mehrwertigen Mengen und ihre Verknüpfungen – das Modell beeinflussen und ob gewisse Parameterkonstellationen nicht zu vergleichbaren Resultaten führen. Fragestellungen dieser Art sind bereits mehrfach untersucht worden. Zu nennen sind hier unter anderem die Arbeiten von Hersh und Caramazza [Hersh '76], Zimmermann und Zysno [Zimmermann '82] sowie Leberling [Leberling '82]. Allerdings erfolgten diese Untersuchungen auf empirischer Ebene. Gegebenenfalls können hier jedoch allgemeingültige Aussagen abgeleitet werden, die dann Aufschlüsse über prinzipielle Zusammenhänge geben.

Zudem erscheint es problematisch, daß sich im Rahmen der symmetrischen Entscheidungstheorie zwar Entscheidungsprobleme mit mehreren Zielen und ungenau definierten Neben-

bedingungen abbilden lassen, daß jedoch ungenaue Informationen im Sinne der klassischen Entscheidungstheorie nicht darstellbar sind. So können keine Entscheidungsprobleme unter Risiko oder Unsicherheit modelliert werden. In der Vergangenheit war diese Tatsache schon mehrfach Gegenstand der wissenschaftlichen Untersuchungen und die eingangs erwähnten Modelle von Ramik und Rimanek [Ramik '85], Tanaka, Ichihashi und Asai [Tanaka '84], Slowinski [Slowinski '86] sowie Rommelfanger [Rommelfanger '94] sind letztlich mit der Zielsetzung entwickelt worden, das symmetrische Modell entsprechend zu erweitern. Allerdings haben diese Ansätze nur bedingt zur Lösung des Problems beitragen können. So ist lediglich der Ansatz von Rommelfanger eine Erweiterung des symmetrischen Optimierungsmodells. Alle andere Ansätze führen im Fall vollständiger Information zu Modellen, die mit einem entsprechenden symmetrischen Ansatz nicht übereinstimmen. Zudem können in keinem der genannten Ansätze die klassischen Methoden der Entscheidungstheorie zur Beschreibung von unvollständiger Information integriert werden. Angesichts des unbestreitbaren Erfolgs der klassischen Ansätze in vielen Anwendungsfällen ist dies sicher unbefriedigend.

Schließlich orientieren sich die Arbeiten zur symmetrischen Entscheidungstheorie im allgemeinen eng an konkrete Anwendungen. Eine Darstellung oder Ableitung im Sinne einer mathematischen Theorie erfolgt nicht. J. v. Neumann und O. Morgenstern haben jedoch bereits in ihrem grundlegenden Werk zur mathematischen Entscheidungstheorie auf die Notwendigkeit einer systematischen Ableitung der Entscheidungsmodelle hingewiesen. So findet sich hier unter anderem die Forderung „Die Theorie, die wir schließlich erhalten, muß mathematisch streng und begrifflich sein.“ (vgl. [Neumann '53, S. 7]). Sie argumentieren weiter, daß nur durch die mathematische Strenge der Ableitung des Modells die Plausibilität des gesamten Ansatzes gesichert werden kann (vgl. [Neumann '53, S. 7 f.]). Diese Position hat sicher mit zum Erfolg der mathematischen Entscheidungstheorie beigetragen und das Fehlen der entsprechenden Strenge in der Darstellung zur symmetrischen Entscheidungstheorie muß daher als ein Schwachpunkt angesehen werden.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Beschreibung eines neuen Ansatzes zur mathematischen Beschreibung von Entscheidungsproblemen auf der Basis von mehrwertigen Mengen. Dieser wird eine Erweiterung des symmetrischen Entscheidungsmodells von Bellman und Zadeh sein, in der sämtliche der oben skizzierten Schwachpunkte der Theorie ausgeräumt werden. Da in dem Ansatz lediglich mehrwertige Relationen (bzw. mehrwertige Mengen) sowie der Vergleich und die Verknüpfung von mehrwertigen Relationen zur Darstellung von Entscheidungsproblemen verwendet werden, wird diese Methode als *relationale Entscheidungstheorie* bezeichnet. Die relationale Entscheidungstheorie wird es erlauben, einen systematischen Vergleich zwischen verschiedenen Entscheidungsmodellen durchzuführen. So kann zur Analyse der Parameter der Entscheidung beigetragen werden. Ferner werden sämtliche Klassen von unvollständiger Information, die in der Entscheidungstheorie betrachtet werden, im Rahmen der relationalen Theorie abbildbar sein. Dies wird innerhalb eines einheitlichen Grundmodells möglich sein und es werden insbesondere auch Problemstellungen darstellbar, bei denen verschiedenen Kategorien von Information gleichzeitig auftreten. Ähnliches ist bei keinem der bisher bekannten Ansätze zur Entscheidungstheorie möglich. Schließlich erfolgt die Darstellung in der gebotenen mathematischen Strenge. Hierdurch wird relationale Entscheidungstheorie insgesamt begründbar und es werden Zusammenhängen zwischen verschiedenen mathematischen Teilgebieten klar, die in dieser Art bisher nicht bekannt waren. So wird gezeigt, wie sich die Theorien der Wahrscheinlichkeits- und Fuzzy-Maße in ein mehrwertiges logisches Konzept integrieren lassen und wie klassische Ansätze zur Entscheidungstheorie unter Unsicherheit durch Operationen mehrwertiger Mengen dargestellt

werden können.

Grundlage der relationalen Entscheidungstheorie ist eine spezielle Klasse mehrwertiger logischer Sprachen, die sogenannten *Maßsprachen* oder die *Sprachen der Klasse MS*. Wesentlich sind dabei zwei Konzepte. Dies ist zum einen die Mehrwertigkeit der Logik. Diese Mehrwertigkeit erlaubt es, wesentliche Aspekte der Fuzzy-Set-Theory durch die Sprachen der Klasse MS zu erklären. Dies ist kein prinzipiell neuer Ansatz, allerdings erlaubt das in dieser Arbeit erstmals eingeführte Konzept der *Wahrheitsräume* eine Klassifizierung der logischen Sprachen. Als Konsequenz ergeben sich entsprechende Klassen von vergleichbaren Systemen mehrwertiger Relationen und es können neue, grundlegende Aussagen über diese Systeme abgeleitet werden. So ermöglicht das hier eingeführte *w*-Isomorphie-Konzept, solche Systeme von mehrwertigen Relationen zu charakterisieren, die unter gewissen Randbedingungen austauschbar sind. Der zweite wichtige Ansatz ist der der logischen Maße. Diese sind mit klassischen Konzepten wie beispielsweise das der klassischen Mengeninklusion verwandt. Sie ermöglichen die bereits oben angesprochene Integration der Theorien der Wahrscheinlichkeits- und Fuzzy-Maße in eine mehrwertige Logik. Hierdurch werden die konzeptionellen Unterschiede zwischen den Begriffen von Mehrwertigkeit und Wahrscheinlichkeit deutlich und es werden Methoden bereitgestellt, beide Konzepte innerhalb einer Theorie zu betrachten. Die eigentliche relationale Entscheidungstheorie ergibt sich schließlich aus der Anwendung der zuvor bereitgestellten Methoden. Hier wird sich zeigen, daß sich die strukturellen Eigenschaften der mehrwertigen Sprachen (und der mehrwertigen Relationen) in den entsprechenden Strukturen der Entscheidungsmodelle wiederfinden. Es ergeben sich insbesondere die oben bereits erwähnten Möglichkeiten der Analyse und des Vergleichs von Entscheidungsmodellen. Die Theorie der logischen Maße wird die Abbildung allen Klassen von unvollständiger Information in Entscheidungsmodellen ermöglichen.

Die klassische Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktionen, wie sie unter anderem von J. v. Neumann und O. Morgenstern [Neumann '53], L.J. Savage [Savage '72] oder P. Fishburn [Fishburn '70] hergeleitet wurde, unterscheidet sich konzeptionell grundlegend von der relationalen Entscheidungstheorie. So ist es das Bestreben der obigen Autoren, die Entscheidungstheorie axiomatisch als eigenständige Theorie zu begründen. Dies ist – wie oben erwähnt – in der relationalen Entscheidungstheorie nicht der Fall, da diese sich aus der Anwendung allgemeinerer Konzepte ergibt. Die relationale Entscheidungstheorie kann daher auf einer methodischen Ebene nicht mit den klassischen Ansätzen mit Nutzenfunktion verglichen werden. Allerdings kann eine solche Diskussion auf der Modellebene erfolgen. Dieser Vergleich der entsprechenden Modelle zeigt, daß die hier entwickelte relationale Entscheidungstheorie nicht nur die symmetrische Entscheidungstheorie umfaßt. Es bestehen vielmehr wesentliche Parallelen auch zur klassischen Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktion. Im Gegensatz zur klassischen Theorie, in der eine Vielzahl von Modellierungsverfahren mit heterogenen axiomatischen Grundlagen verwendet werden, ist die Darstellung von Entscheidungsproblemen im Falle der relationalen Theorie jedoch stets vor dem Hintergrund eines einheitlichen Konzeptes möglich.

Der folgende Text ist im Detail wie folgt strukturiert:

In Kapitel 1 werden die für die gesamte Arbeit grundlegenden Begriffe und Konzepte eingeführt. Der Schwerpunkt der Untersuchungen liegt dabei auf der Betrachtung der Sprachen der Klasse MS, einer speziellen Familie von mehrwertigen logischen Sprachen. Diese werden eingeführt und es werden Methoden abgeleitet, die einen systematischen Vergleich und eine Klassifizierung der Sprachen zulassen.

Der Abschnitt 1.1 dient zur Einleitung in die Thematik. Bei der Einführung der Sprachen wird in Abschnitt 1.2 zunächst die gemeinsame Syntax der Sprachen der Klasse MS festgelegt. In den Abschnitten 1.3 bis 1.6 wird im Anschluß die Semantik der Sprachen bestimmt. Die Festlegung der Semantik erfolgt in mehreren Schritten. Zunächst werden in Abschnitt 1.3 Funktionen auf Wahrheitswerten definiert, die im folgenden zur Konstruktion der semantischen Bewertungen verwendet werden. Diese werden in Abschnitt 1.4 zu dem Begriff des Wahrheitsraumes zusammengefaßt, welcher die gesamte semantische Struktur einer Sprache der Klasse MS repräsentiert. Das Konzept des Wahrheitsraumes wird in den Abschnitten 1.4.2 und 1.4.3 dazu benutzt, um mit den Begriffen der Äquivalenz und Isomorphie von Wahrheitsräumen eine Klassifizierung der Sprachen der Klasse MS vorzunehmen. Wesentliche Aussagen zu diesen Begriffen werden in dem Äquivalenzsatz 1.34 und in dem Isomorphiesatz 1.44 von Wahrheitsräumen gezeigt. In Abschnitt 1.5 wird mit den parametrisierten t -Normen ein erstes Beispiel für die Anwendung der bis dahin eingeführten Begriffe gegeben. Schließlich wird in Abschnitt 1.6 mit der Definition der Begriffe der Interpretation und des Modells die formale Grundlage für die Anwendung der Sprachen der Klasse MS gelegt. Den Abschluß des Kapitels 1 bildet der Abschnitt 1.7, in dem die wesentlichen Ergebnisse des Kapitels zusammengefaßt, weitere Anwendungsfelder beschrieben und mögliche anschließende Fragestellung skizziert werden.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Begriffe für den Umgang mit mehrwertigen Relationen erläutert und die Anknüpfungspunkte zur Fuzzy-Set-Theory dargestellt. Zudem wird mit den mehrwertigen Gleichheitsrelationen eine wichtige Klasse von mehrwertigen Relationen eingeführt (Abschnitt 2.2). Der Abschnitt 2.3 befaßt sich mit den Verknüpfungen mehrwertiger Relationen. Diese sind verschiedene Verallgemeinerungen der klassischen Mengenoperationen und lassen sich jeweils in einer Sprache der Klasse MS durch logische Verknüpfungen interpretieren (Abschnitt 2.3.1). Die verschiedenen semantischen Strukturen der Sprachen der Klasse MS führen so zu unterschiedlich strukturierten Verknüpfungen von Relationen. Mit der Untersuchung dieses Aspektes ist insbesondere der Abschnitt 2.3.2 befaßt, in dem der Begriff der w -Isomorphie als Konzept zum Vergleich von Relationen und ihrer Verknüpfungen eingeführt wird. Zentral ist hier der Isomorphiesatz 2.19 von Relationensystemen. Der Abschluß der Überlegungen zu mehrwertigen Relationen bildet eine Anwendungsbeispiel (Abschnitt 2.4). Dieses zeigt am Beispiel des symmetrischen Entscheidungsmodells die Relevanz des Isomorphie-Konzeptes für die Anwendung.

In dem Kapitel 3 wird das Konzept der logischen Maße eingeführt. Zunächst wird zu diesem Zweck in Abschnitt 3.2 der grundsätzliche Ansatz erläutert und Beispiele angegeben. Der Abschnitt 3.3 beschäftigt sich mit einer speziellen Klasse von logischen Maßen, den logischen Inklusionsmaßen. Nach der Einführung des Begriffes sowie der Angabe wichtiger Repräsentanten dieser Familie von logischen Maßen (Abschnitt 3.3.1 und Abschnitt 3.3.2) werden die Eigenschaften von logischen Inklusionsmaßen diskutiert (Abschnitt 3.3.3). Es werden insbesondere die Konzepte des dualen Inklusionsmaßes sowie des Durchschnittes, der Vereinigung und des Kartesischen Produktes von Inklusionsmaßen eingeführt. Der Abschnitt 3.4 ist dann mit einem Vergleich des Konzeptes der Fuzzy-Maße mit dem des logischen Maßes befaßt. Hier wird nachgewiesen, daß sich wesentliche Fuzzy-Maße eindeutig durch logische Inklusionsmaße repräsentieren lassen. Wesentliche Ergebnisse sind hier die Darstellungssätze von Möglichkeits-, Notwendigkeits- und Wahrscheinlichkeitsmaßen (3.42, 3.44 und 3.48). Eine mögliche Anwendung der Resultate wird in dem Beispiel des Abschnittes 3.5 aufgezeigt. In Abschnitt 3.6 werden schließlich die wesentlichen Ergebnisse des Kapitels 3 zusammengefaßt und kommentiert.

Gegenstand des vierten Kapitels ist schließlich die eigentliche relationale Entscheidungstheorie. Hier wird insbesondere der Begriff des relationalen Entscheidungsmodells selbst geprägt. Ein solches Modell ist als mathematische Struktur zu verstehen und kann als solche selbst zum Gegenstand eines mathematischen Formalismus werden. So ermöglicht es das in Abschnitt 4.3 eingeführte Kartesische Produkt von relationalen Entscheidungsmodellen, Entscheidungsmodelle mit mehreren Kriterien in die relationale Entscheidungstheorie zu integrieren. Wesentliches Resultat dieses Abschnittes ist der Homomorphiesatz 4.10, der einen Zusammenhang zwischen der Menge der relationalen Entscheidungsmodellen und der Menge der mehrwertigen Relationen beschreibt. Als Anwendung dieses Satzes wird in Abschnitt 4.4 die relationale Entscheidungstheorie dem symmetrischen Ansatz zur Entscheidungstheorie nach Bellman und Zadeh gegenübergestellt. In Abschnitt 4.5 ist die zentrale Fragestellung die Invarianz der Modellbildung gegenüber der Änderung von Modellparametern. Wichtige Begriffe sind hier die Äquivalenz und Isomorphie von Systemen von Entscheidungsmodellen. Beide Konzepte werden eingeführt und es wird in den Äquivalenz- und Isomorphiesätzen (4.19 und 4.25) ein wichtiger Zusammenhang zwischen der Äquivalenz und Isomorphie von Systemen von Entscheidungsmodellen und den entsprechenden Konzepten von Wahrheitsräumen hergestellt. Abschnitt 4.6 enthält ein ausführliches Beispiel.

Der Vergleich zwischen der relationalen Entscheidungstheorie und der Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktion wird in Kapitel 5 geführt. Dabei werden in Abschnitt 5.2 zunächst Modelle verglichen, in denen nur ein Entscheidungskriterium berücksichtigt wird. Es wird insbesondere gezeigt, daß wichtige klassische Ansätze zur Entscheidung bei Sicherheit (Abschnitt 5.2.1), bei Risiko (Abschnitt 5.2.2) und bei Unsicherheit (Abschnitt 5.2.3) ihre jeweilige Entsprechung im relationalen Entscheidungsmodell finden. Demgegenüber zeigen sich in Abschnitt 5.3 deutliche Unterschiede zwischen klassischer und relationaler Entscheidungstheorie bei der Modellierung von mehreren Zielkriterien. Diese Unterschiede werden diskutiert und in Beispielen verdeutlicht. Insbesondere im Anwendungsbeispiel des Abschnittes 5.4 werden beide Methoden vor dem Hintergrund einer realen Problemstellung miteinander verglichen. Im Abschnitt 5.5 werden die wesentlichen Inhalte des vorangegangenen Abschnittes noch einmal zusammengefaßt und kommentiert.

Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um Herrn Prof. Dr. G. Törner und Herrn Prof. Dr. W. Luther für ihre Unterstützung bei der Erstellung dieser Dissertation zu danken. Ferner gilt mein besonderer Dank Frau Dr. Claudia Osmann für ihre vielen kritischen Bemerkungen und die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen. Schließlich gilt mein Dank Herrn Dr. Jörg Esser, Herrn Dr. Thomas Möllers, Herrn Dr. Jörg Wenz, Herrn Dipl.-Math. Oliver Annen, Herrn Dipl.-Math. Sigurður Marinósson, Herrn Dipl.-Kfm. Christopher Rentrop, Herrn Dipl.-Phys. André Stebens sowie Herrn Dipl.-Math. Christoph Schuster.

Kapitel 1

Die Sprachen der Klasse MS

Zusammenfassung:

In diesem Kapitel werden Begriffe und Konzepte eingeführt, die grundlegend für die Formulierung von relationalen Entscheidungsmodellen sind. Dabei wird eine spezielle Familie von mehrwertigen logischen Sprachen im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen, die sogenannten *Sprachen der Klasse MS*. Diese gleichen in ihrem syntaktischen Aufbau den klassischen logischen Sprachen, verfügen mit den in dieser Arbeit eingeführten Maßsymbolen allerdings über zusätzliche Sprachelemente, welche es erlauben, unvollständige Informationen und ungenaues Wissen im Rahmen einer mehrwertigen Logik darzustellen.

Neben der Einführung von Grundbegriffen liegt der Schwerpunkt dieses Kapitels auf der Beschreibung wichtiger Eigenschaften der Sprachen der Klasse MS. Dabei wird insbesondere eine Klassifizierung der semantischen Struktur der Sprachen vorgenommen. Entscheidend sind hier die Begriffe des Wahrheitsraumes, durch den sich die verschiedenen Sprachenklassen formal repräsentieren lassen, sowie die Konzepte der Isomorphie und der Äquivalenz von Wahrheitsräumen, mittels derer Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Sprachen charakterisiert werden können. Zentrale Aussagen enthalten der Äquivalenzsatz 1.34 sowie der Isomorphiesatz 1.44.

1.1 Mehrwertige Sprachen und Mengen

Allen klassischen logischen Kalkülen sind zwei grundlegende Prinzipien gemeinsam. Dies ist zum einen das Prinzip der *Zweiwertigkeit*, welches besagt, daß jede logische Aussage entweder *wahr* oder *falsch* ist, daß also insbesondere keine weiteren Bewertungen des Wahrheitsgehaltes von Aussagen existieren. Zum anderen ist dies das *Extensionalitätsprinzip*. Nach diesem Prinzip ist der Wahrheitswert eines zusammengesetzten Ausdrucks ausschließlich von den Wahrheitswerten seiner Teilausdrücke abhängig, nicht jedoch von deren inhaltlicher Beziehung. (In der Prädikatenlogik wird zusätzlich angenommen, daß ein Prädikat eindeutig durch die Objekte bestimmt wird, auf die es zutrifft, vgl. [Gottwald '89, S. 1].) Unter einer *mehrwertigen Logik* wird im allgemeinen ein logisches System verstanden, das

zwar das Extensionalitätsprinzip beibehält, das aber das Prinzip der Zweiwertigkeit in dem Sinne negiert, als daß mehr als zwei Wahrheitswerte zugelassen sind.¹

Die historischen Wurzeln der Untersuchung solcher mehrwertiger Systeme liegen in den Arbeiten von McColl [McColl 1897], Peirce [Peirce 1900-01], Lukasiewicz [Lukasiewicz '20] und Post [Post '20]. Allerdings gehören sicher schon die Überlegungen von Aristoteles in *De Interpretatione*, cap. 9 zur Vorgeschichte der mehrwertigen Logik. Dort diskutiert Aristoteles, welcher Wahrheitswert einer auf Zukünftiges bezogenen Aussage zugeordnet werden sollte (vgl. [Gottwald '89, S. 5]). Weitere Eckpunkte der Forschung im Bereich der mehrwertigen Logik werden durch die Arbeiten von Lukasiewicz [Lukasiewicz '30 A], Lukasiewicz und Tarski [Lukasiewicz '30 B], Wajsberg [Wajsberg '31] und Gödel [Gödel '32] markiert, in denen die ursprünglichen Ideen weiter präzisiert und Parallelen zu anderen Logikkonzepten aufgezeigt worden sind. Eine Übersicht über die Arbeiten und Ergebnisse dieser Forschungsperiode findet sich in [Rescher '69], [Rutz '73] und [Kreiser '88]. Das oben bereits zitierte Buch von Gottwald [Gottwald '89] eignet sich besonders zur Einführung in die Thematik.

Zunächst unabhängig von der oben skizzierten Entwicklung entstand mit der *Fuzzy-Set-Theory* in den letzten Jahrzehnten eine der mehrwertigen Logik verwandte Theorie. Gegenstand der Fuzzy-Set-Theory ist unter anderem die Untersuchung von mehrwertigen Mengen und deren Verknüpfungen. Als Ursprung dieser Theorie gilt im allgemeinen die Arbeit von L. A. Zadeh [Zadeh '65]. Tatsächlich sind die Konzepte von mehrwertiger Logik und mehrwertiger Mengentheorie jedoch eng verwandt und viele der Überlegungen von Zadeh finden sich bereits in den Arbeiten von Lukasiewicz. So verwenden beide analoge Konzepte zur Erweiterung der logischen Grundoperationen 'und', 'oder' und 'nicht' auf der einen und zur Verallgemeinerung der Mengenoperatoren 'Durchschnitt', 'Vereinigung' und 'Komplement' auf der anderen Seite.

Angesichts der explosionsartigen Entwicklung der Fuzzy-Set-Theory ist es an dieser Stelle nicht möglich, einen Überblick über die historische Entwicklung dieser Theorie oder den aktuellen Stand der Forschung zu geben. Zahlreiche wissenschaftliche Zeitschriften befassen sich ausschließlich mit Themen aus dem Bereich der Fuzzy-Theorie sowie ihrer Anwendung und bezeugen so die rasante Weiterentwicklung des Forschungsgebietes. Neuere Einführungen in die Grundzüge der Theorie bieten die Bücher von Tanaka [Tanaka '96], von Klir, Clair und Yuan [Klir '97] sowie von Morderson und Premchand [Morderson '98]. Im deutschsprachigen Raum sind die Werke von Böhme [Böhme '93], Kruse, Gebhardt und Klawonn [Kruse '95], Gottwald [Gottwald '93] sowie Bandemer und Gottwald [Bandemer '93] empfehlenswert. Das Buch von Zimmermann [Zimmermann '87] ist nach wie vor ein wichtiges Standardwerk.

Trotzdem die Theorien der mehrwertigen Logik und der mehrwertigen Mengen sowohl historisch als auch inhaltlich viele Parallelen aufweisen und obwohl Spezialfälle mehrwertiger logischer Systeme auch im Rahmen der Fuzzy-Theorie betrachtet werden, unterscheiden sich beide Ansätze grundlegend in ihrer Zielsetzung. Während sich nämlich die mehrwertige Logik als Gebiet der mathematischen Grundlagenforschung versteht, steht die praktische Anwendung im Mittelpunkt des Interesses der Fuzzy-Set-Theory. So sind Fragestellungen wie etwa die Vollständigkeit verschiedener logischer Sprachen sicher von großem mathematischen Interesse und daher ein zentraler Forschungsgegenstand der mehrwertigen Logik.

¹Es sind logische Systeme bekannt, in denen das Extensionalitätsprinzip nicht gilt. Diese werden im weiteren nicht betrachtet. Der interessierte Leser sei exemplarisch auf [Kreiser '88] verwiesen, wo ein ausführlicher Überblick über verschiedene alternative Ansätze zu finden ist.

Der Nutzen dieser Untersuchungen für außermathematische Anwendungen ist jedoch bisher nicht erschlossen und in der Fuzzy-Set-Theory wird dieses Thema daher eher am Rande behandelt.² Umgekehrt werden bedeutende Gebiete der Fuzzy-Set-Theory wie etwa die Fuzzy-Entscheidungstheorie, die Fuzzy-Control-Theory oder die Fuzzy-Maßtheorie in der Literatur zumeist nicht systematisch aus ihren logischen Wurzeln heraus abgeleitet. Die Zusammenhänge und Hintergründe der Theorie werden so nicht deutlich und die Eingrenzung und Diskussion der Konzepte erschwert.

Für die vorliegende Arbeit ergibt sich daher die Aufgabe, die vorhandene Lücke zwischen der Theorie der mehrwertigen Logik auf der einen und speziellen Feldern der Fuzzy-Set-Theory auf der anderen Seite zu füllen. Dabei liegt der Fokus der Untersuchungen auf der Erschließung solcher Methoden und Konzepte, die in Kapitel 4 zur Formulierung des relationalen Entscheidungsmodells benötigt werden. Diese sind insbesondere die Fuzzy-Maß- und Fuzzy-Mengentheorie, die wir in Kapitel 2 aus den im folgenden beschriebenen Grundlagen herleiten werden. Nur durch diese Art der Erschließung der relationalen Entscheidungstheorie und ihrer Hintergründe werden die mathematischen Zusammenhänge transparent und der relationale Ansatz letztlich plausibel.

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist eine spezielle Klasse von mehrwertigen logischen Sprachen, die sogenannten *Maßsprachen* bzw. *Sprachen der Klasse MS*.³ Syntaktisch gleichen diese in wesentlichen Punkten der mehrwertigen und der klassischen Prädikatenlogik (vgl. [Gottwald '89, S. 183 f.] oder [Ebbinghaus '96, § 2]). Allerdings gehören keine logischen Quantoren (wie z. B. \forall , \exists) zum Umfang der Sprachen der Klasse MS.⁴ Andererseits besitzen die Sprachen der Klasse MS mit den in dieser Arbeit eingeführten Maßsymbolen zusätzliche Sprachelemente, die allenfalls im Klassenkalkül (vgl. [Hilbert '72]) logische Vorbilder besitzen. Die Maßsymbole werden es in Abschnitt 2 erstmals erlauben, die Fuzzy-Maß-Theorie und damit auch die Theorie der Wahrscheinlichkeitsmaße aus einer mehrwertigen Logik heraus zu begründen.⁵ Hierdurch wird die Abbildung unvollständiger Information im Rahmen eines logischen Konzeptes ermöglicht.

Während die Syntax aller Sprachen der Klasse MS übereinstimmt, unterscheiden sich die Sprachen hinsichtlich ihrer semantischen Struktur. So führen verschiedene Sprachen der Klasse MS zu unterschiedlichen Verallgemeinerungen der Mengentheorie und zu anderen Erweiterungen der Theorie der Fuzzy-Maße. Obwohl formal alle relationalen Entscheidungsmodelle identisch sind, kann daher die tatsächliche Entscheidung im Anwendungsfall wesentlich von der zugrundeliegenden Sprache bestimmt werden. Insofern wird durch die Klasse der Sprachen auch eine Klasse von Entscheidungsmodellen induziert. Daher wird in dem nun folgenden Kapitel insbesondere der Vergleich und die Klassifizierung der verschiedenen semantischen Strukturen vertieft.

In Analogie zur klassischen Prädikatenlogik sind zur Festlegung einer Semantik der Sprachen der Klasse MS zwei Schritte notwendig. Erstens muß den Ausdrücken eine inhaltliche Bedeutung zugeordnet werden. Jedem Relationssymbol wird in einer Sprache MS hierzu

²Die Arbeiten von Pavelka [Pavelka '79] und Novak [Novak '87], in denen die Vollständigkeit einer Fuzzy-Logik gezeigt wird, sind hier Ausnahmen.

³Wir werden anstelle der Bezeichnung ‚*Sprache der Klasse MS*‘ auch den Begriff ‚*Sprache MS*‘ verwenden.

⁴Bei mehrwertigen prädikatenlogischen Sprachen werden gelegentlich auch allgemeinere Quantoren betrachtet (vgl. [Gottwald '89, S. 184 ff.]).

⁵Die Interpretation von Wahrheitswerten als Wahrscheinlichkeiten ist bereits bei [Reichenbach '32], [Gaines '78] und [Kosko '90] untersucht worden. Allerdings sind bisher keine systematischen Ableitungen wahrscheinlichkeitstheoretischer Konzepte aus einer mehrwertigen logischen Sprache heraus bekannt.

eine mehrwertige Relation, jeder Variablen und jeder Konstanten ein Objekt und jedem Maßsymbol ein logisches Maß⁶ zugewiesen. In einem zweiten Schritt werden die nun mit einer Bedeutung versehenen Ausdrücke hinsichtlich ihres Wahrheitsgehaltes bewertet. Diese Bewertung erfolgt im Falle der Ausdrücke mit Junktoren nach einem Regelwerk. Es legt fest, wie von den Wahrheitswerten der Teilausdrücke auf den Wahrheitswert des entsprechenden Gesamtausdrucks geschlossen werden kann.

Im Falle der klassischen Logik wird das obige Regelwerk vollständig durch die bekannten Wahrheitstabellen beschrieben (vgl. [Ebbinghaus '96, S. 34]). Bei den Sprachen der Klasse MS sind neben den klassischen Wahrheitswerten *wahr* und *falsch* weitere Zwischenwerte zugelassen. Die Festlegung der Wahrheitswerte von Ausdrücken mit Junktoren kann daher nicht über einfache Wahrheitstabellen erfolgen, sondern wird durch geeignete Abbildungen beschrieben. Wir setzen dabei gemäß dem Extensionalitätsprinzip voraus, daß die Festlegung der Wahrheitswerte von Ausdrücken mit Junktoren unabhängig ist von der inhaltlichen Bedeutung dieser Ausdrücke. So soll der Wahrheitswert eines Ausdrucks $(\varphi \wedge \psi)$ in jeder Sprache MS ausschließlich von den Wahrheitswerten seiner Teilausdrücke φ und ψ abhängen, nicht aber von ihrer inhaltlichen Beziehung.

Entsprechend den obigen Überlegungen erfolgt die Festlegung der Semantik der Sprachen MS in mehreren Schritten. Die Zuordnung der Sprachelemente zu einer inhaltlichen Bedeutung findet in Abschnitt 1.6 mit den Begriffen der *Struktur* und der *Interpretation* seine mathematische Entsprechung. Die Definition des Regelwerks zur Bewertung der Ausdrücke mit Junktoren erfolgt stufenweise. Zunächst werden in Abschnitt 1.3 die Abbildungen definiert, welche die Regeln beschreiben, nach denen von den Wahrheitswerten der Teilausdrücke eines Ausdrucks auf seinen gesamten Wahrheitswert geschlossen werden kann. Dieses wird zu den Begriffen der *t- und s-Normen*, der *Involution* sowie des *Residuums* führen. Dabei handelt es sich um Klassen von Abbildungen, die über gemeinsame charakteristische Eigenschaften verfügen. Die Verwendung unterschiedlicher Abbildungen dieser Klassen führt zu verschiedenen semantischen Regelwerken für die Sprachen MS. Mathematisch werden diese Regelwerke durch den Begriff des *Wahrheitsraumes* repräsentiert, den wir in Abschnitt 1.4 einführen. Wahrheitsräume erlauben es, die Eigenschaften der verschiedenen semantischen Strukturen zu charakterisieren und Unterschiede herauszustellen. Diese Diskussion wird ebenfalls in Abschnitt 1.4 erfolgen. Zentral werden hier die Begriffe von *Äquivalenz* und *Isomorphie* von Wahrheitsräumen sowie die entsprechenden Äquivalenz- und Isomorphiesätze sein, die in dieser Arbeit erstmals formuliert werden.

1.2 Die Syntax der Sprachen MS

Der formale Aufbau der Sprachen der Klasse MS gleicht in wesentlichen Teilen der Syntax der klassischen sowie der mehrwertigen Prädikatenlogik. So werden Relationensymbole (bzw. Prädikate) sowie Variablen und Konstanten zur Repräsentation von Eigenschaften der betrachteten Objekte verwendet. Beispielhaft kann das Relationensymbol P die Relation ‚*ist größer oder gleich*‘ repräsentieren. Der Ausdruck Pxy ist dann ein Element der Sprachen MS, das die Aussage ‚*x größer oder gleich y*‘ abbildet. Da zudem die klassischen Junktoren zum Sprachumfang der Sprachen MS gehören, sind einfache logische Ausdrücke – etwa der Form

$$((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz)$$

⁶Logische Maße und mehrwertige Relationen werden in Abschnitt 1.6 definiert (S. 44, 45).

der die bekannte Transitivität der Relation ‚*ist größer oder gleich*‘ beschreibt – ebenfalls Elemente der Sprachen MS.

Die *syntaktischen Unterschiede* zur Prädikatenlogik folgen aus zwei Gegebenheiten. Einerseits fehlen im Umfang der Sprachen MS jegliche Quantoren, wie etwa die aus der klassischen Logik bekannten Quantoren \exists und \forall . Andererseits verfügen die Sprachen der Klasse MS mit den erstmals in dieser Arbeit eingeführten Maßsymbolen über zusätzliche Sprachelemente. Diese werden später zur Darstellung von Eigenschaften von Relationen verwendet. Repräsentiert etwa das Maßsymbol \mathbf{E} ein Maß für die Gleichheit von Relationen und sind P und Q Relationssymbole, so soll der Ausdruck $\mathbf{E}PQ$ zum Umfang der Sprachen MS gehören. Er beschreibt hier die Aussage, daß die durch P und Q repräsentierten Prädikate gleich sind. Die Verkettung auch solcher Ausdrücke durch Junktoren ist zulässig.

In Kapitel 3 werden weitere Beispiele für die Anwendung von logischen Maßen ausführlich diskutiert. Dort werden wir unter anderem zeigen, wie sich verschiedene Arten von unvollständiger Information durch logische Maße darstellen lassen. So können beispielsweise Wahrscheinlichkeitsmaße durch logische Maße repräsentiert werden (vgl. Satz 3.48). An dieser Stelle sei lediglich darauf hingewiesen, daß der durch das Fehlen der klassischen Quantoren hervorgerufene geringere Sprachumfang der Sprachen MS teilweise durch spezielle Maße kompensiert werden kann. Auch dieser Aspekt wird erst in Kapitel 3 vertieft.

Die oben skizzierte formale Verwandtschaft der Sprachen MS mit der Prädikatenlogik erlaubt es, sich bei der Konstruktion der Semantik der Sprachen MS eng an dem Vorbild der Prädikatenlogik zu orientieren, obwohl eine gänzlich neue Familie von formalen Sprachen beschrieben wird. Die im folgenden verwendeten Begriffe finden daher in der Prädikatenlogik ihre jeweilige Entsprechung. Die formalen Eigenschaften der Sprachen MS gleichen im wesentlichen denen der Prädikatenlogik. Daher können wir uns hier auf die Zusammenstellung einfacher Eigenschaften beschränken. Eine ausführliche Darstellung der Semantik der Prädikatenlogik sowie die wesentlichen Beweise findet sich u. a. in [Ebbinghaus '96]. Eine vollständige Beschreibung der Syntax von mehrwertigen prädikatenlogischen Sprachen findet sich in [Gottwald '89].

Unter einem *Alphabet* \mathcal{A} verstehen wir eine nichtleere Menge von Zeichen. Endliche lineare Reihen von Zeichen eines Alphabets heißen *Wörter*. Die Menge aller Wörter eines Alphabets \mathcal{A} sei mit \mathcal{A}^+ bezeichnet. Die *leere Zeichenreihe*, d.h. die Zeichenreihe, in der kein Zeichen vorkommt, wird ebenfalls als ein Wort des Alphabets \mathcal{A} aufgefaßt und mit \diamond bezeichnet.

Die Anzahl der in einem Wort $\zeta \in \mathcal{A}^+$ vorkommenden Zeichen heißt die *Länge* des Wortes ζ . Treten Zeichen mehrfach in einem Wort auf, so werden diese auch mehrfach gezählt. Die Länge von \diamond ist Null. Zwei Wörter $\zeta, \zeta' \in \mathcal{A}^+$ heißen *gleich* (in Zeichen: $\zeta = \zeta'$), wenn sie an jeder Stelle übereinstimmen.

In der folgenden Definition 1.1 werden die speziellen Alphabete der Sprachen MS festgelegt.

1.1 Definition *Ein Alphabet \mathcal{A} einer Sprache der Klasse MS besteht aus den folgenden Zeichen:*

- (i) *Bezeichner für Variablen: x, y, z, \dots (ggf. mit Index)*
- (ii) *Bezeichner für Konstanten: $a, b, c \dots$ (ggf. mit Index)*
- (iii) *Zeichen (Junktoren):*

nicht: \neg

und: \wedge

oder: \vee

Pfeil: \rightarrow

Doppelpfeil: \leftrightarrow

(iv) Klammersymbole: $), ($

(v) Für $\nu \geq 1$ eine Menge von ν -stelligen Relationssymbolen: $A, B, C \dots$

(vi) Für $\nu \geq 1$ und $\kappa \geq 1$ eine Menge von ν -stelligen Maßsymbolen der Dimension κ : $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$

Ein ν -stelliges Relationssymbol wird später eine Relation von ν Elementen einer Menge repräsentieren. Die klassische Äquivalenzrelation ist in diesem Sinne eine 2-stellige Relation. Durch ν -stellige Maße der Dimension κ werden entsprechend Aussagen über ν Relationen, die selbst κ -stellig sind, abgebildet.

Offensichtlich sind nicht alle Wörter, die sich aus einem Alphabet der Sprachen MS bilden lassen, bei der Formulierung der Sprachen MS zweckmäßig. Ein in diesem Sinne ‘sinnvolles’ Wort könnte beispielsweise

$$((Pxy \wedge Pyz) \rightarrow Pxz)$$

sein. Hingegen ist

$$x\neg \wedge P)($$

im obigen Sinne ‘sinnlos’ und soll als Sprachelement der MS ausgeschlossen werden. Wir werden in Definition 1.2 die Wörter eines Alphabets \mathcal{A} charakterisieren, welche als Sprachelemente der Sprachen MS zulässig sind. Diese heißen Ausdrücke.

1.2 Definition Die **Ausdrücke** einer Sprache MS sind genau diejenigen Wörter aus \mathcal{A}^+ , welche durch endliche Anwendung der folgenden Regeln gebildet werden können:

(A1) Sind q_1, \dots, q_ν Variablen oder Konstanten und ist R ein ν -stelliges Relationssymbol, so ist $Rq_1 \dots q_\nu$ ein Ausdruck.

(A2) Sind R_1, \dots, R_ν κ -stellige Relationssymbole und ist \mathbf{M} ein ν -stelliges Maßsymbol der Dimension κ , so ist $\mathbf{M}R_1 \dots R_\nu$ ein Ausdruck.

(A3) Ist φ ein Ausdruck, so ist auch $(\neg\varphi)$ ein Ausdruck. (Negation)

(A4) Sind φ und ψ Ausdrücke, so sind

$(\varphi \wedge \psi)$ (Konjunktion)

$(\varphi \vee \psi)$ (Disjunktion)

$(\varphi \rightarrow \psi)$ (Subjunktion)

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ (Bisubjunktion)

ebenfalls Ausdrücke.

Die Menge aller Ausdrücke eines Alphabets \mathcal{A} der Sprachen MS wird mit $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ bezeichnet. Die unter (A1) und (A2) definierten Ausdrücke heißen **atomare Ausdrücke**. Die Menge aller atomaren Ausdrücke wird mit $\mathcal{F}_a^{\mathcal{A}}$ bezeichnet.

Durch die Konstruktionsregeln der Definition 1.2 werden die strukturellen Eigenschaften der Ausdrücke der Sprachen MS vollständig festgelegt. Im folgenden werden wichtige Eigenschaften zusammengestellt. Wesentlich ist insbesondere die Aussage des Satzes 1.4 wesentlich, der Aufschlüsse über die Eindeutigkeit des Aufbaus von Ausdrücken gibt. Wegen der eingangs bereits erwähnten Verwandtschaft zu den klassischen Logikkalkülen verzichten wir hier auf die explizite Beweisführung.

Das folgende Lemma dient der Vorbereitung des Satzes 1.4.

1.3 Lemma Für alle Ausdrücke $\varphi, \varphi' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ gilt: φ ist kein echtes Anfangsstück von φ' (d.h. es gibt kein von \diamond verschiedenes $\zeta \in \mathcal{A}^+$ mit $\varphi\zeta = \varphi'$).

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv. Eine explizite Darstellung der Argumentation findet sich bei [Ebbinghaus '96, S. 22 f.]. ■

Es kann nun gezeigt werden, daß sich jeder Ausdruck in eindeutiger Weise in Teilausdrücke zerlegen läßt.

1.4 Satz Jeder Ausdruck ist entweder von der Gestalt (i) $Rq_1 \dots q_\nu$ oder (ii) $\mathbf{M}R_1 \dots R_\nu$ oder (iii) $(\neg\varphi)$ oder (iv) $(\varphi \wedge \psi)$ oder (v) $(\varphi \vee \psi)$ oder (vi) $(\varphi \rightarrow \psi)$ oder (vii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)$. Dabei sind eindeutig bestimmt das Relationssymbol R und die Variablen oder Konstanten q_1, \dots, q_ν im Fall (i), das Maßsymbol \mathbf{M} sowie die Relationssymbole R_1, \dots, R_ν im Fall (ii), der Ausdruck φ im Fall (iii) und die Ausdrücke φ und ψ in den Fällen (iv) bis (vii).

Beweis: Bei (i) und (ii) ist nichts zu zeigen. Die Behauptung (iii) folgt ebenfalls sofort durch Abzählen und Vergleich der Zeichen des Ausdrucks.

Es seien Ausdrücke $\varphi, \varphi', \psi, \psi' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ und Junktoren $\circ, \circ' \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ gegeben, so daß $(\varphi \circ \psi) = (\varphi' \circ' \psi')$ gilt.

Wir nehmen an, daß $\varphi \neq \varphi'$ gilt. Dann ist entweder φ ein echtes Anfangsstück von φ' oder umgekehrt. Nach Lemma 1.3 kann dann φ (bzw. φ') kein Ausdruck sein, im Widerspruch zur Annahme. Folglich gilt $\varphi = \varphi'$ und es folgt $\circ = \circ'$ sowie $\psi = \psi'$. ■

Aus Satz 1.4 ergibt sich eine Möglichkeit, Abbildungen auf den Ausdrücken der Sprachen MS zu definieren. Dabei reicht es, die Abbildung auf den atomaren Ausdrücken festzulegen und eine eindeutige Vorschrift für die in (A3) und (A4) definierten Verknüpfungsregeln anzugeben. Diese beschreibt, wie von den Bildern der jeweiligen Teilausdrücke auf das des Gesamtausdruckes geschlossen werden kann. Da sich nach Satz 1.4 jeder Ausdruck eindeutig durch die Regeln (A3) bis (A4) in Teilausdrücke zerlegen läßt, kann letztlich auf die Wohldefiniertheit der Abbildung geschlossen werden. Der hier beschriebene Konstruktionsmechanismus wird auch *induktive Definition* von Abbildungen genannt (siehe auch [Ebbinghaus '96, S. 24]). Er wird explizit in Abschnitt 1.4 verwendet, wo auch die obige Überlegung verfeinert wird.

1.3 Abbildungen auf Wahrheitswerten

Gegenstand des folgenden Abschnitts sind die Abbildungen, die später zur Bestimmung der Wahrheitswerte von Ausdrücken mit Junktoren dienen. Hierzu ist es zunächst notwendig, die Menge der Wahrheitswerte selbst festzulegen.

Die erste Forderung an die Menge der Wahrheitswerte ist, daß diese mit einer vollständigen Ordnung versehen ist. Je zwei Wahrheitswerte sollen stets in dem Sinne vergleichbar sein, daß der eine größer oder gleich dem anderen ist. Es wird ferner angenommen, daß die Menge der Wahrheitswerte ein Maximum (*wahr*) und ein Minimum (*falsch*) bezüglich dieser Ordnung besitzt. Prinzipiell sind diese Bedingungen ausreichend für die wesentlichen Überlegungen des folgenden Abschnitts und offenbar sind verschiedene Mengen von Wahrheitswerten denkbar. Es zeigt sich jedoch, daß es aus technischen Gründen zweckmäßig ist, die Menge der Wahrheitswerte stets als eine geeignete Teilmenge des reellen Intervalls $[0, 1]$ aufzufassen (vgl. z. B. S. 25). Der Wert 1 wird dabei mit *wahr*, der Wert 0 mit *falsch* identifiziert. Auf diese Art können Sprachen der Klasse MS, die bezüglich verschiedener Mengen von Wahrheitswerten definiert werden, einfach miteinander verglichen und ihre Konstruktion vereinheitlicht werden.

Die obigen Konventionen erlauben es, alle Abbildungen, die die Wahrheitswerte der Ausdrücke mit Junktoren bestimmen, durch Abbildungen zu beschreiben, die auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert sind. Der Wahrheitswert der Negation eines Ausdrucks wird hierzu durch eine einstellige Abbildung $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dargestellt. Konjunktion, Disjunktion, Subjunktion und Bisubjunktion werden durch zweistellige Abbildungen $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ bewertet. Bei der Konstruktion der Abbildungen wird stets so vorgegangen, daß sich bei der Einschränkung der Wahrheitswerte auf $\{0, 1\}$ die klassischen Wahrheitstabellen ergeben. Jede Sprache der Klasse MS wird in diesem Sinne eine Erweiterung der klassischen Logik sein. Eine genauere Untersuchung dieses Aspektes findet sich in Abschnitt 1.4.

Die Inhalte dieses Abschnitts finden sich an verschiedenen Stellen in der Standardliteratur zur Fuzzy-Set-Theory und zur mehrwertigen Logik. Wir verweisen stellvertretend für andere auf [Böhme '93, Kruse '95] und [Gottwald '93] sowie auf [Gottwald '89]. Die Darstellung unterscheidet sich dort von der hier gewählten jedoch in mehreren Punkten. So werden die Begriffe der dualen s -Norm sowie des Residuums mit Blick auf die beabsichtigte Einführung der Wahrheitsräume in Abschnitt 1.4 allgemeiner eingeführt als üblich. Zudem werden wir spezielle, für das weitere zweckmäßige Notationen verwenden. Schließlich ist es beabsichtigt, die im Bereich der Fuzzy-Set-Theory häufig verwendete, eher intuitive Einführung der Begriffe mathematisch exakt zu fassen und die entsprechenden Aussagen mit der für diese Arbeit notwendigen Strenge zu beweisen.

1.3.1 t -Normen und s -Normen

Die Wahrheitswerte der Konjunktion und Disjunktion werden durch Abbildungen beschrieben, die t -Normen bzw. s -Normen genannt werden. Diesen entstammen ursprünglich Untersuchungen zur verallgemeinerten Geometrie (vgl. etwa [Schweizer '60, Schweizer '61]).

Beide Abbildungen unterscheiden sich in ihrer Axiomatik lediglich hinsichtlich der Festlegung ihres neutralen Elements. Im Falle der t -Norm ist dieses das Maximum (*wahr* oder 1) der Menge der Wahrheitswerte. Bei den s -Normen ist es das Minimum (*falsch* oder 0).

1.5 Definition Eine Abbildung $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ heißt **t-Norm**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(T1) \quad \forall a \in [0, 1] : t(a, 1) = a \quad (\text{Neutrales Element})$$

$$(T2) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : a \leq b \Rightarrow t(a, c) \leq t(b, c) \quad (\text{Monotonie})$$

$$(T3) \quad \forall a, b \in [0, 1] : t(a, b) = t(b, a) \quad (\text{Kommutativität})$$

$$(T4) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : t(a, t(b, c)) = t(t(a, b), c) \quad (\text{Assoziativität})$$

s -Normen werden wie folgt definiert.

1.6 Definition Eine Abbildung $s : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ heißt **s-Norm** (oder **t-Conorm**), wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(S1) \quad \forall a \in [0, 1] : s(a, 0) = a \quad (\text{Neutrales Element})$$

$$(S2) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : a \leq b \Rightarrow s(a, c) \leq s(b, c) \quad (\text{Monotonie})$$

$$(S3) \quad \forall a, b \in [0, 1] : s(a, b) = s(b, a) \quad (\text{Kommutativität})$$

$$(S4) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : s(a, s(b, c)) = s(s(a, b), c) \quad (\text{Assoziativität})$$

Eine Motivation der Eigenschaften von t - und s -Normen findet sich bei Kruse [Kruse '95, S. 21]. Wir geben an dieser Stelle lediglich je zwei wichtige t -Normen und s -Normen an. Dies sind der Maximum- und der Minimum-Operator sowie die Drastische Summe und das Drastische Produkt. Weitere Beispiele finden sich in Tabelle 1.1.

1.7 Beispiel Beispiele für t -Normen sind:

(i) Minimum-Operator:

$$t_{\min} : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (a, b) \longmapsto \min(a, b)$$

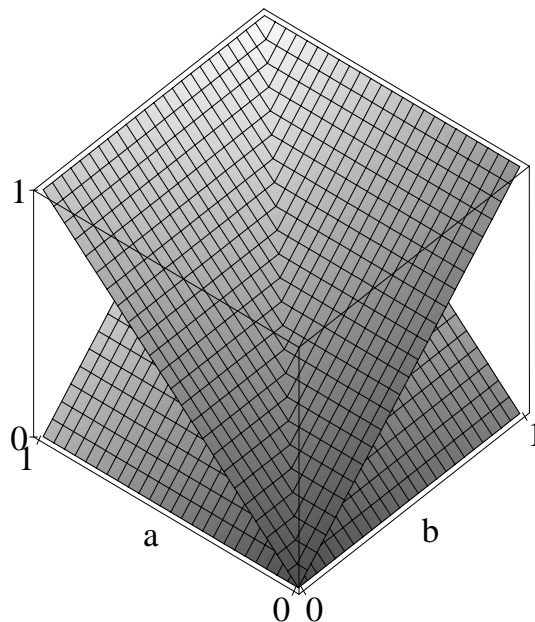
(ii) Drastisches Produkt:

$$t_D : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (a, b) \longmapsto \begin{cases} \min(a, b) & a = 1 \vee b = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiele für s -Normen sind:

(i) Maximum-Operator:

$$s_{\max} : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (a, b) \longmapsto \max(a, b)$$

Abbildung 1.1: $t_{\min}(a, b)$ und $s_{\max}(a, b)$

(ii) Drastische Summe:

$$s_D : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (a, b) \longmapsto \begin{cases} \max(a, b) & a = 0 \vee b = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch die t - und s -Normen des Beispiels 1.7 können alle übrigen t - und s -Normen abgeschätzt werden. Es gilt der folgende Satz:

1.8 Satz Für jede t -Norm $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ und jede s -Norm $s : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ gilt:

$$(i) \quad \forall a, b \in [0, 1] : t_D(a, b) \leq t(a, b) \leq t_{\min}(a, b)$$

$$(ii) \quad \forall a, b \in [0, 1] : s_{\max}(a, b) \leq s(a, b) \leq s_D(a, b)$$

Beweis: zu (i): Es sei t eine t -Norm. Wir betrachten zunächst die linke Seite der Ungleichung. Ist $a \neq 1$ und $b \neq 1$, so gilt nach der Definition von t_D :

$$t_D(a, b) = 0 \leq t(a, b).$$

Nehmen wir den Fall $b = 1$ an, so gilt:

$$t_D(a, 1) = a \stackrel{(T1)}{=} t(a, 1).$$

Wegen der Kommutativität von t folgt die Behauptung auch für $a = 1$.

Wir betrachten nun die rechte Seite der Ungleichung. Für jede t -Norm t und $a, b \in [0, 1]$ gilt:

$$t(a, b) \stackrel{(T2)}{\leq} t(a, 1) \stackrel{(T1)}{=} a$$

und

$$t(a, b) \stackrel{(T3)}{=} t(b, a) \stackrel{(T2)}{\leq} t(b, 1) \stackrel{(T1)}{=} b.$$

Insgesamt erhalten wir: $t(a, b) \leq \min(a, b)$.

Die Behauptung (ii) folgt durch analoge Überlegungen. ■

In Abbildung 1.1 wird die Aussage des Satzes 1.8 veranschaulicht. Dort sind die Graphen des Minimum- und des Maximum-Operators aufgetragen. Drastisches Produkt und Drastische Summe sind nicht dargestellt, da beide Abbildungen nur auf dem Rand (im Falle $a = 1 \vee b = 1$) des zwei-dimensionalen Einheitswürfels ungleich 0 bzw. 1 sind und dort mit dem Minimum- bzw. dem Maximum-Operator übereinstimmen. Der Graph jeder weiteren t -Norm liegt unterhalb der abgebildeten Flächen, der Graph jeder s -Norm oberhalb dieser. Der von den Flächen eingeschlossene Raum wird von t - und s -Normen nicht erreicht.

Aus Satz 1.8 ergibt sich eine wichtige Folgerung.

1.9 Satz *Es sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm und $s : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine s -Norm. Dann gilt:*

$$(i) \quad \forall a \in [0, 1] : t(a, 0) = 0$$

$$(ii) \quad \forall a \in [0, 1] : s(a, 1) = 1$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Abschätzungen des Satzes 1.8. ■

1.3.2 Negationsfunktionen

Um die Negation darzustellen, werden die sogenannten Negationsfunktionen verwendet. Ihre Eigenschaften sind eine intuitive Erweiterung der klassischen Negation.

1.10 Definition *Eine Abbildung $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ heißt eine **Negationsfunktion**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$(N1) \quad n(0) = 1 \text{ und } n(1) = 0$$

$$(N2) \quad \forall a, b \in [0, 1] : a \leq b \Rightarrow n(a) \geq n(b) \quad (\text{Monotonie})$$

*Eine Negationsfunktion heißt **streng**, wenn zusätzlich gilt:*

$$(N3) \quad n \in C([0, 1]) \text{ und } \forall a, b \in [0, 1] :$$

$$a < b \Rightarrow n(a) > n(b) \quad (\text{Stetigkeit und strenge Monotonie})$$

*Eine strenge Negationsfunktion heißt **Involution**, wenn zusätzlich gilt:*

$$(N4) \quad \forall a \in [0, 1] : n(n(a)) = a$$

Bezeichnung	Vorschrift ($a, b \in [0, 1]$)
Minimum-Operator	$t_{\min}(a, b) = \min(a, b)$
Maximum-Operator	$s_{\max}(a, b) = \max(a, b)$
Beschränkte Differenz	$t_B(a, b) = \max(0, a + b - 1)$
Beschränkte Summe	$s_B(a, b) = \min(1, a + b)$
Algebraisches Produkt	$t_A(a, b) = a \cdot b$
Algebraische Differenz	$s_A(a, b) = a + b - a \cdot b$
Drastisches Produkt	$t_D(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & a = 1 \vee b = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
Drastische Summe	$s_D(a, b) = \begin{cases} \max(a, b) & a = 0 \vee b = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Tabelle 1.1: Duale Paare von t - und s -Normen

Wir werden im weiteren stets Involutionen betrachten.

1.11 Beispiel Die in der Praxis am häufigsten verwendete Negationsfunktion ist die Funktion

$$n_s : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad a \longmapsto 1 - a.$$

Sie ist eine Involution.

Involutionen eröffnen die Möglichkeit, einen Zusammenhang zwischen bestimmten t - und s -Normen herzustellen. Dieser führt zu dem Begriff der zu t dualen s -Norm, den wir im folgenden Satz einführen.

1.12 Satz Es sei $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ eine t -Norm und $n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ eine Involution. Die Abbildung

$$s_{t,n} : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (a, b) \longmapsto n(t(n(a), n(b)))$$

ist eine s -Norm. Sie heißt die **zu t duale s -Norm (bezüglich n)**.

Beweis: Es seien t, n und $s_{t,n}$ wie oben gegeben. Wir weisen die Eigenschaften der Definition 1.6 nach.

zu (S1) (Neutrales Element): Es sei $a \in [0, 1]$ beliebig, dann gilt:

$$s_{t,n}(a, 0) = n(t(n(a), n(0))) \stackrel{(N1)}{=} n(t(n(a), 1)) \stackrel{1.9}{=} n(n(a)) \stackrel{(N4)}{=} a.$$

zu (S2) (Monotonie): Es seien $a, b, c \in [0, 1]$, mit $a \leq b$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} a &\leq b \\ \stackrel{(N2)}{\Rightarrow} n(a) &\geq n(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(T2)}{\Rightarrow} t(n(a), n(c)) \geq t(n(b), n(c)) \\
&\stackrel{(N2)}{\Rightarrow} n(t(n(a), n(c))) \leq n(t(n(b), n(c))) \\
&\Rightarrow s_{t,n}(a, c) \leq s_{t,n}(b, c)
\end{aligned}$$

zu (S3) (Kommutativität): folgt sofort aus (T3)

zu (S4) (Assoziativität): Es seien $a, b, c \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&s_{t,n}(a, s_{t,n}(b, c)) \\
&= n(t(n(a), n(n(t(n(b), n(c)))))) \\
&\stackrel{(N4)}{=} n(t(n(a), t(n(b), n(c)))) \\
&\stackrel{(T4)}{=} n(t(t(n(a), n(b)), n(c))) \\
&\stackrel{(N4)}{=} n(t(n(\underbrace{t(n(a), n(b))}_{s_{t,n}(a,b)}), n(c))) \\
&= s_{t,n}(s_{t,n}(a, b), c)
\end{aligned}$$

■

1.13 Bemerkung

(i) In der Literatur wird der Begriff der dualen s -Norm häufig nur für die Involution n_s definiert und untersucht. Allerdings wäre ein solcher Ansatz für die beabsichtigten Untersuchungen zu speziell. Die gewählte Bezeichnung $s_{t,n}$ orientiert sich an einer von Gottwald [Gottwald '93] verwendeten Notation.

(ii) Es sei $s : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine s -Norm. Dann definiert

$$t_{s,n} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \quad (a, b) \mapsto n(s(n(a), n(b)))$$

eine t -Norm. Diese heißt die **zu s duale t -Norm** (bzgl. n). Ist s eine duale s -Norm zu einer t -Norm t bzgl. n , so ist t die duale t -Norm zu s bzgl. n . Demnach gilt für jede t -Norm t und jede Involution n : $t_{s_{t,n},n} = t$.

In Tabelle 1.1 sind exemplarisch duale Paare von t - und s -Normen aufgeführt. Bei allen abgebildeten Paaren ist die Involution n_s aus Beispiel 1.11 zugrunde gelegt worden.

1.3.3 Das Residuum

Bisher wurden Abbildungen zur Darstellung von Konjunktion, Disjunktion und Negation behandelt. Wir werden in diesem Abschnitt als letztes die Abbildungen zur Darstellung von Subjunktionen, die sogenannten *Residuen*, einführen. Die Bewertung der Bisubjunktionen wird später durch eine Kombination von Residuen und t -Normen erfolgen (vgl. Abschnitt 1.4 (S. 25)) und daher an dieser Stelle nicht explizit behandelt.

Wir beginnen mit der Definition des Residuums.

t-Norm ($a, b \in [0, 1]$)	Residuum ($a, b \in [0, 1]$)
$t_{\min}(a, b) = \min(a, b)$	$r_{\min}(a, b) = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$
$t_B(a, b) = \max(0, a + b - 1)$	$r_B(a, b) = \min(1, 1 - a + b)$
$t_A(a, b) = a \cdot b$	$r_A(a, b) = \begin{cases} \min(1, b/a) & a \neq 0 \\ 1 & a = 0 \end{cases}$
$t_D(a, b) = \begin{cases} \min(a, b) & a = 1 \vee b = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$r_D(a, b) = \begin{cases} b & a = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Tabelle 1.2: Residuen verschiedener t -Normen

1.14 Definition Es sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm. Die Abbildung

$$r_t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] \quad (a, b) \mapsto \sup\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq b\}$$

heißt das **Residuum von t** .

In Tabelle 1.2 sind Residuen zu verschiedenen t -Normen aufgeführt.

1.15 Bemerkung Wir orientieren uns bei der Begriffsbildung der Definition 1.14 an dem Vorgehen von Gottwald [Gottwald '93, S. 13, Def. 1.4], der allerdings den Begriff des Φ -Operators verwendet und lediglich nach unten halbstetige t -Normen betrachtet. In der Literatur zur Fuzzy-Set-Theory ist eine andere Definition des Residuums üblich (vgl. [Kruse '95, S. 59, Def. 2.62]). Diese stimmt im Falle einer stetigen t -Norm mit der Begriffsbildung der Definition 1.14 überein (vgl. [Kruse '95, S. 59, Satz 2.63]). Im Falle einer nicht stetigen t -Norm kann mit der üblichen Definition allerdings die Existenz und Eindeutigkeit eines Residuums nicht gesichert werden, so daß diese Begriffsbildung mit Blick auf die beabsichtigte Einführung der Wahrheitsräume nicht zweckmäßig erscheint.

Wir geben einige grundlegende Eigenschaften des Residuums an.

1.16 Satz Es sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm und $r_t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ das Residuum von t . Das Residuum hat die folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : \begin{aligned} b \leq c &\Rightarrow r_t(a, b) \leq r_t(a, c) \\ a \leq b &\Rightarrow r_t(a, c) \geq r_t(b, c) \end{aligned} \quad (\text{Monotonie})$$

$$(ii) \quad \forall a, b \in [0, 1] : a \leq b \Rightarrow r_t(a, b) = 1$$

$$(iii) \quad \forall a \in [0, 1] : r_t(1, a) = a \quad (\text{Neutrales Element})$$

Beweis: zu (i): Wir zeigen zunächst die erste Ungleichung. Seien $a, b, c \in [0, 1]$ und $b \leq c$. Für alle $d \in [0, 1]$ und jede t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ gilt:

$$t(a, d) \leq b \Rightarrow t(a, d) \leq c.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} r_t(a, b) &= \sup\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq b\} \\ &\leq \sup\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq c\} = r_t(a, c). \end{aligned}$$

Wir wenden uns dem Beweis der zweiten Ungleichung zu:

Seien $a, b, c \in [0, 1]$ und $a \leq b$. Es gilt nach (T2) stets $t(a, d) \leq t(b, d)$ für alle $d \in [0, 1]$. Somit folgt

$$t(b, d) \leq c \Rightarrow t(a, d) \leq c$$

und wir erhalten die Behauptung wie im ersten Fall.

zu (ii): Es seien $a, b \in [0, 1]$ mit $a \leq b$.

Für jede t -Norm t gilt nun: $t(a, d) \stackrel{1.8}{\leq} \min(a, d) \stackrel{(T2)}{\leq} \min(a, b) = a \leq b$, für alle $d \in [0, 1]$. Also folgt:

$$r_t(a, b) = \sup\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq b\} = \sup\{d \in [0, 1]\} = 1.$$

zu(iii): Sei $a \in [0, 1]$, dann gilt

$$r_t(1, a) = \sup\{d \in [0, 1]; t(1, d) \leq a\} = \sup\{d \in [0, 1]; d \leq a\} = a$$

■

Im nächsten Satz werden wichtige Eigenschaften von Verknüpfungen von t -Normen und Residuen aufgeführt.

1.17 Satz *Es sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm, die nach unten halbstetig ist, und $r_t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ das Residuum von t . Es gelten die folgenden Aussagen:*

$$(i) \quad \forall a, b \in [0, 1] : t(a, r_t(a, b)) \leq b$$

$$(ii) \quad \forall a, b \in [0, 1] : r_t(a, t(a, b)) \geq b$$

$$(iii) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : t(r_t(a, b), r_t(b, c)) \leq r_t(a, c)$$

Beweis: zu (i): Da die t -Norm nach Voraussetzung nach unten halbstetig ist, ist die Menge $\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq b\}$ abgeschlossen. Es folgt die Behauptung.

zu (ii): Es gilt:

$$r_t(a, t(a, b)) = \sup\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq t(a, b)\}$$

Wegen der Monotonie der t -Norm gilt für $d \leq b$ stets $t(a, d) \leq t(a, b)$. Also ist

$$\sup\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq t(a, b)\} \geq b$$

zu (iii): Es seien $a, b, c \in [0, 1]$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & t(a, t(r_t(a, b), r_t(b, c))) \\ \stackrel{(T4)}{=} & t(t(a, r_t(a, b)), r_t(b, c)) \\ \stackrel{(i)}{\leq} & t(b, r_t(b, c)) \\ \stackrel{(i)}{\leq} & c \end{aligned}$$

Wir erhalten daher:

$$\begin{aligned} t(r_t(a, b), r_t(b, c)) & \leq \sup\{d \in [0, 1]; t(a, d) \leq c\} \\ & = r_t(a, c) \end{aligned}$$

■

1.3.4 Charakterisierung des Minimum-Operators

In der Theorie mehrwertiger Mengen ist der Minimum-Operator die am häufigsten verwendete t -Norm. Seine Anwendung im Bereich der mehrwertigen Mengen geht auf Zadeh [Zadeh '65] zurück. Allerdings betrachtete schon Lukasiewicz in [Lukasiewicz '30 A] eine mehrwertige Logik, in der das Minimum zur Verallgemeinerung des klassischen und' verwendet wurde. Auch heute wird bei der Untersuchung der Fuzzy-Logik fast ausschließlich der Minimum-Operator zugrundegelegt (vgl. [Pavelka '79, Novak '87] oder [Böhme '93, S. 209 ff.]).

Wir werden diesen Operator daher nun genauer betrachten und einige charakteristische Eigenschaften zusammenstellen. Wichtig sind hier vor allem die Distributivgesetze, die wir in Satz 1.24 zeigen. Wir beginnen mit dem Begriff der Idempotenz einer Abbildung.

1.18 Definition Eine Abbildung $u : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ heißt **idempotent**, wenn für alle $a \in [0, 1]$ gilt: $u(a, a) = a$.

1.19 Satz Ist eine t -Norm $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ idempotent, so gilt: $t = t_{\min}$.

Beweis: Es seien t eine idempotente t -Norm und $a, b \in [0, 1]$. Wir nehmen $a \leq b$ an. Dann gilt:

$$a = t(a, a) \stackrel{(T2)}{\leq} t(a, b) \stackrel{(T2)}{\leq} t(a, 1) \stackrel{(T1)}{=} a.$$

Also gilt $t(a, b) = a = \min(a, b)$. Für $a \geq b$ folgt die Behauptung aus Symmetriegründen nach (T3). ■

1.20 Definition Eine Abbildung $u : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ heißt **interaktiv**, wenn $a, b \in [0, 1]$ derart existieren, daß $u(a, b) \notin \{a, b\}$ gilt.

Es wird sich zeigen, daß jede t -Norm mit Ausnahme des Minimum-Operators interaktiv ist.

1.21 Satz Ist eine t -Norm $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ nicht interaktiv, so gilt: $t = t_{\min}$.

Beweis: Es sei t eine nicht interaktive t -Norm. Für jedes $a \in [0, 1]$ gilt dann $t(a, a) = a$. Also ist t idempotent. Aus Satz 1.19 folgt: $t = t_{\min}$. ■

Die Eigenschaften der Interaktivität und Idempotenz charakterisieren nicht nur t -Normen, sondern auch ihre dualen s -Normen. Dies zeigt der folgende Satz.

1.22 Satz Sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm, $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine Involution und $s_{t,n} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ die zu t duale s -Norm bzgl. n . Es ist $s_{t,n}$ genau dann idempotent (bzw. nicht interaktiv), wenn t idempotent (bzw. nicht interaktiv) ist.

Beweis: Wir weisen die Idempotenz nach.

Für alle $a, b \in [0, 1]$ ist $s_{t,n}(a, b) = n(t(n(a), n(b)))$. Ist nun t idempotent, so folgt: $s_{t,n}(a, a) = n(t(n(a), n(a))) = n(n(a)) = a$.

Für alle $a, b \in [0, 1]$ ist andererseits $t(a, b) = n(s_{t,n}(n(a), n(b)))$. Ist nun $s_{t,n}$ idempotent, so folgt: $t(a, a) = n(s_{t,n}(n(a), n(a))) = n(n(a)) = a$.

Die entsprechende Behauptung der Interaktivität kann nun wie in Satz 1.21 bewiesen werden. ■

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll gezeigt werden, daß es genau ein Paar von dualer t - und s -Norm gibt, für das ein Distributivgesetz gilt. Als Vorbereitung dazu dient das folgende Lemma.

1.23 Lemma Es sei $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine Involution. Es sei ferner $t = t_{\min}$. Dann gilt für alle $a, b \in [0, 1]$:

$$s_{t,n}(a, b) = \max(a, b) = s_{\max}(a, b).$$

Beweis: Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt für $a, b \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} s_{t,n}(a, b) &= n(\min(n(a), n(b))) \\ &\stackrel{(N3)}{=} n(n(\max(a, b))) \\ &\stackrel{(N4)}{=} \max(a, b) \end{aligned}$$

Da a und b beliebig gewählt sind, ist die Behauptung des Lemmas gezeigt. ■

Analog läßt sich zeigen, daß die zu s_{\max} duale t -Norm stets der Minimum-Operator ist, und zwar unabhängig von der betrachteten Involution.

1.24 Satz Es sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm, $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine Involution und $s_{t,n} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ die zu t duale s -Norm bzgl. n . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $t = t_{\min}$.

(ii) Es gilt eines der beiden folgenden Distributivgesetze:

$$(a) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : t(a, s_{t,n}(b, c)) = s_{t,n}(t(a, b), t(a, c))$$

$$(b) \quad \forall a, b, c \in [0, 1] : s_{t,n}(a, t(b, c)) = t(s_{t,n}(a, b), s_{t,n}(a, c))$$

Beweis: „(i) \Rightarrow (ii)“: Es sei $t = t_{\min}$. Nach Lemma 1.23 ist dann $s_{t,n} = s_{\max}$. Die Gültigkeit der Distributivgesetze für den Minimum- und den Maximum-Operator folgt aus elementaren Umformungen.

„(ii) \Leftarrow (i)“: Es gelte das Distributivgesetz (a) für alle $a, b, c \in [0, 1]$. Dann gilt es insbesondere für $b = c = 1$. Ist $a \in [0, 1]$ beliebig gewählt, so folgt:

$$a \stackrel{(T1)}{=} t(a, 1) \stackrel{1.9}{=} t(a, s_{t,n}(1, 1)) \stackrel{(a)}{=} s_{t,n}(t(a, 1), t(a, 1)) \stackrel{(T1)}{=} s_{t,n}(a, a).$$

Also ist $s_{t,n}$ idempotent und aus Satz 1.22 folgt die Idempotenz von t , was nach Satz 1.19 $t = t_{\min}$ impliziert.

Das Distributivgesetz (b) gelte für alle $a, b, c \in [0, 1]$. Dann gilt es insbesondere für $b = c = 0$. Ist $a \in [0, 1]$ beliebig gewählt, so folgt:

$$a \stackrel{(S1)}{=} s_{t,n}(a, 0) \stackrel{1.9}{=} s_{t,n}(a, t(0, 0)) \stackrel{(b)}{=} t(s_{t,n}(a, 0), s_{t,n}(a, 0)) \stackrel{(S1)}{=} t(a, a).$$

Also ist t idempotent und Satz 1.19 liefert $t = t_{\min}$. ■

Eine Folgerung des Satzes 1.24 ist, daß das Distributivgesetz (a) genau dann gilt, wenn das Distributivgesetz (b) gilt. Ferner zeigt sich, daß die Eigenschaft der Distributivität lediglich von einer t -Norm – nämlich dem Minimum-Operator – erfüllt wird. Hier wird deutlich, daß wesentliche strukturelle Unterschiede zwischen den verschiedenen t -Normen bestehen. Diese Unterschiede werden sich später entsprechend in der Semantik der mit den t -Normen definierten Sprachen wiederfinden (vgl. Bsp. 1.53).

Die Aussage des Satzes 1.24 läßt sich auch für Teilmengen von $[0, 1]$ zeigen, sofern diese die Elemente 0 und 1 umfassen. Solche Mengen werden in Abschnitt 1.4 als Mengen von Wahrheitswerten aufgefaßt.

1.25 Bemerkung *Es seien $\{0, 1\} \subseteq T \subseteq [0, 1]$ sowie eine t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ und eine Involution $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gegeben. Für die Einschränkungen $t|_{T^2}$ und $s_{t,n}|_{T^2}$ gilt eines der beiden Distributivgesetze aus Satz 1.24 genau dann, wenn gilt: $t|_{T^2} = t_{\min}|_{T^2}$.*

1.4 Wahrheitsräume und Tautologien

In diesem Abschnitt wird festgelegt, wie t -Normen, s -Normen, Negationsfunktionen und Residuen zur Ermittlung der Wahrheitswerte solcher Ausdrücken verwendet werden, in denen Junktoren vorkommen. Dabei werden wir ausnutzen, daß sich mit der Vorgabe einer t -Norm und einer Involution bereits eine (duale) s -Norm sowie ein Residuum ableiten lassen. Involution und t -Norm werden daher als Erzeugende der Semantik der Sprachen MS verwendet. Dieses Vorgehen ist prinzipiell vergleichbar mit dem Vorgehen in der klassischen Logik. Auch dort werden gelegentlich Konjunktion und Negation als Erzeugende der übrigen Grundoperationen (vgl. [Carnap '68]) gebraucht.

In Abschnitt 1.3 wurde bereits gezeigt, daß verschiedene t -Normen und Involutionen existieren. Durch unterschiedliche Vorgabe dieser beiden Elemente entstehen verschiedene semantische Strukturen. Allerdings muß zur vollständigen Festlegung der Struktur der Semantik

neben t -Norm und Involution noch die zulässige Menge der Wahrheitswerte festgelegt werden. Diese wird durch eine geeignete Teilmenge des Intervalls $[0, 1]$ repräsentiert. Durch die drei Elemente t -Norm, Involution und Menge der Wahrheitswerte wird die Struktur der Semantik einer Sprache der Klasse MS vollständig erklärt. Wir werden diese Elemente zu dem Begriff des *Wahrheitsraumes* zusammenfassen. Dieser stellt somit das wesentliche Charakteristikum der Semantik der betrachteten Sprache dar. Er bietet die konzeptionelle Grundlage zur Untersuchung und Gegenüberstellung der verschiedenen Sprachen.

Neben der Einführung der grundlegenden Begriffe ist die Zielsetzung des folgenden Abschnitts die strukturelle Analyse der Eigenschaften von Wahrheitsräumen. Dabei werden zwei Schwerpunkte gesetzt. Zum einen ist dies die Frage der Vergleichbarkeit der durch die Wahrheitsräume beschriebenen semantischen Strukturen. Diese Problemstellung wird zu den Begriffen der *Äquivalenz* bzw. der *Isomorphie* von Wahrheitsräumen führen. Ein zweiter Schwerpunkt wird die Betrachtung von speziellen semantischen Charakteristika von Wahrheitsräumen sein. Hier wird der Begriff der *Tautologien* einer Sprache MS von zentraler Bedeutung sein. Dieser Begriff entspricht inhaltlich dem klassischen Vorbild. Er bezeichnet Ausdrücke, die unabhängig von ihrer konkreten Bedeutung wahr sind.

Der Diskurs der beiden obigen Schwerpunkte wird sich auf Aussagen beschränken, die für die beabsichtigte Formulierung des Entscheidungsmodells in Kapitel 4 von Bedeutung sind oder die uns wichtig für das Verständnis des hier vorgestellten Konzepts erscheinen. Zudem werden wir auf Berührungspunkte zu anderen logischen Konzepten hinweisen, ohne daß hier eine vollständige Abhandlung dieser Verwandtschaft beabsichtigt ist.

Die von uns im folgenden vorgenommenen Begriffsbildungen und der durchgeführte systematische Vergleich verschiedener semantischer Strukturen sind sowohl methodisch als auch inhaltlich grundsätzlich neu. Sie geben Aufschluß über wichtige Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Sprachen der Klasse MS, die es bei ihrer Anwendung erlauben werden, angemessene Sprachen zur konkreten Problembeschreibung zu bestimmen.

1.4.1 Wahrheitsräume und Wahrheitsfunktionen

Wir beginnen mit der Definition von Wahrheitsräumen, geben Beispiele und stellen im Anschluß einige Eigenschaften zusammen. Im folgenden sei \mathcal{A} ein fest gewähltes Alphabet der Sprachen MS. Die Menge aller Ausdrücke von \mathcal{A} sei wie üblich mit $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ bezeichnet. Um triviale Fälle auszuschließen, nehmen wir ferner an, daß die Menge $\mathcal{F}_a^{\mathcal{A}}$ der atomaren Ausdrücke mindestens zwei Elemente enthält.

1.26 Definition *Es sei $\{0, 1\} \subseteq T \subseteq [0, 1]$. T heißt eine Menge von Wahrheitswerten. Es seien ferner $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm, $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine Involution, $s_{t,n} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ die zu t duale s -Norm bezüglich n und $r_t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ das Residuum von t . Das Tripel $\tau = (t, n, T)$ heißt ein **Wahrheitsraum**, wenn die Einschränkungen von $t, n, s_{t,n}$ und r_t auf T abgeschlossen sind, d. h. es gilt:*

$$\begin{aligned} \text{(W1)} \quad t|_{T^2} &: T^2 \rightarrow T \\ n|_T &: T \rightarrow T \\ s_{t,n}|_{T^2} &: T^2 \rightarrow T \\ r_t|_{T^2} &: T^2 \rightarrow T \end{aligned}$$

Zwei Wahrheitsräume $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ heißen **gleich** (in Zeichen: $\tau_1 = \tau_2$), wenn gilt: $t_1 = t_2$, $n_1 = n_2$ und $T_1 = T_2$.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathcal{F}^A \rightarrow T$ heißt eine **Wahrheitsfunktion** in einem Wahrheitsraum $\tau = (t, n, T)$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(W2) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}^A : \|(\neg\varphi)\| = n(\|\varphi\|)$$

$$(W3) \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^A :$$

$$(i) \quad \|(\varphi \wedge \psi)\| = t(\|\varphi\|, \|\psi\|)$$

$$(ii) \quad \|(\varphi \vee \psi)\| = s_{t,n}(\|\varphi\|, \|\psi\|)$$

$$(iii) \quad \|(\varphi \rightarrow \psi)\| = r_t(\|\varphi\|, \|\psi\|)$$

$$(iv) \quad \|(\varphi \leftrightarrow \psi)\| = t(r_t(\|\varphi\|, \|\psi\|), r_t(\|\psi\|, \|\varphi\|))$$

Ist $\|\cdot\| : \mathcal{F}^A \rightarrow T$ eine Wahrheitsfunktion in τ , so schreiben wir kurz $\|\cdot\| \in \tau$. Für $\varphi \in \mathcal{F}^A$ wird $\|\varphi\|$ der **Wahrheitswert** von φ genannt.

Jede Abbildung $\mathcal{F}^A \rightarrow T$ ist eine Bewertung der Ausdrücke einer Sprache MS mit Wahrheitswerten. Diese sind zunächst völlig beliebig und nicht jede dieser Bewertungen kann als zweckmäßige Bewertung im Sinne einer mehrwertigen logischen Sprache verstanden werden. Durch die Forderungen (W2) und (W3) werden aus der Menge aller dieser Abbildungen gewisse zulässige Funktionen – die Wahrheitsfunktionen über einem Wahrheitsraum – charakterisiert. Sie sind die semantisch zulässigen Bewertungen der Ausdrücke und jede dieser Abbildungen ist im obigen Sinne logisch sinnvoll. Indem durch einen Wahrheitsraum die zulässigen Bewertungen festgelegt werden, definiert dieser die semantische Struktur einer Sprache aus der Klasse MS.

Wir geben zunächst einige einfache Beispiele an.

1.27 Beispiel – Klassische Aussagenlogik

Wir betrachten die Menge der Wahrheitswerte $T = \{0, 1\}$, eine t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ und eine Involution $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Wir weisen nach, daß $\tau = (t, n, \{0, 1\})$ stets ein Wahrheitsraum ist.

Den Ausführungen des Abschnittes 1.3 entnehmen wir die folgenden Tabellen:

a	$n(a)$
0	1
1	0

a	b	$t(a, b)$	$s_{t,n}(a, b)$	$r_t(a, b)$
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Wie man an diesen Tabellen abliest, ist $\tau = (t, n, \{0, 1\})$ stets ein Wahrheitsraum, da (W1) erfüllt ist.

Aus den Axiomen (W2) und (W3) ergeben sich die folgenden Wahrheitswerte für Ausdrücke, in denen Junktoren enthalten sind:

$\ \varphi\ $	$\ (\neg\varphi)\ $	$\ \varphi\ $	$\ \psi\ $	$\ (\varphi \wedge \psi)\ $	$\ (\varphi \vee \psi)\ $	$\ (\varphi \rightarrow \psi)\ $	$\ (\varphi \leftrightarrow \psi)\ $
0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
		1	0	0	1	0	0
		1	1	1	1	1	1

Diese Tabellen entsprechen den Wahrheitstafeln der klassischen Aussagenlogik. In diesem Sinne definiert der Wahrheitsraum $\tau = (t, n, \{0, 1\})$ die Semantik einer Sprache MS , die zu der Semantik der klassischen Aussagenlogik äquivalent ist. Allerdings verfügt diese Sprache mit den Maßsymbolen über Elemente, die in der klassischen Aussagenlogik keine Entsprechung besitzen.

1.28 Beispiel

- (i) Der Wahrheitsraum $\tau_1 = (t_{\min}, n_s, \{0, 1\})$ ist ein Wahrheitsraum. Er beschreibt die logische Sprache des Beispiels 1.27.
- (ii) $\tau_2 = (t_{\min}, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ ist ein Wahrheitsraum. Er gleicht semantisch der dreiwertigen Lukasiewicz-Logik (vgl. [Böhme '93, 209 f.]). Ein weiterer Wahrheitsraum mit drei Wahrheitswerten wird durch $\tau_3 = (t_D, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ definiert. Wir werden später nachweisen, daß er nicht dieselbe Semantik wie der Wahrheitsraum τ_2 beschreibt (vgl. auch Bsp. 1.37).
- (iii) Es sei $\{0, 1\} \subseteq T \subseteq [0, 1]$ eine Menge von Wahrheitswerten. Ferner sei eine Involution $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gegeben, für die $n|_T : T \rightarrow T$ gilt. Dann sind

$$\tau_{\min} = (t_{\min}, n, T) \quad \text{und} \quad \tau_D = (t_D, n, T)$$

Wahrheitsräume. Der Wahrheitsraum τ_{\min} ist mit den mehrwertigen logischen Sprachen der Klasse L verwandt, die von Lukasiewicz und Tarski in [Lukasiewicz '30 B] untersucht wurden (vgl. auch [Gottwald '89, S. 84 f.]).

Es ist zunächst nicht klar, ob in allen Wahrheitsräumen stets Wahrheitsfunktionen existieren, ob also der Begriff des Wahrheitsraumes immer zu zulässigen Bewertungen und infolgedessen zu einer sinnvollen Semantik führt. Um die Diskussion dieses Abschnittes in dieser Hinsicht zu rechtfertigen, werden wir daher in Satz 1.29 zunächst die Existenz von Wahrheitsfunktionen in beliebigen Wahrheitsräumen nachweisen.

1.29 Satz - Satz von der Existenz und Eindeutigkeit von Wahrheitsfunktionen

Es sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum. Es sei ferner $\mathcal{F}_a^A \subset \mathcal{F}^A$ die Menge aller atomaren Ausdrücke. Ist $\alpha : \mathcal{F}_a^A \rightarrow T$ beliebig, so existiert genau eine Wahrheitsfunktion $\|\cdot\| \in \tau$, so daß $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_a^A} = \alpha$ gilt.

Beweis: Es sei $\alpha : \mathcal{F}_a^A \rightarrow T$ gegeben. Wir definieren eine Abbildung $g : \mathcal{F}^A \rightarrow T$ durch

- (i) $g(\varphi) := \alpha(\varphi)$, für $\varphi \in \mathcal{F}_a^A$
(ii) $g(\neg\varphi) := n(g(\varphi))$, für $\varphi \in \mathcal{F}^A$,

(iii) und für $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$ sei

- (a) $g((\varphi \wedge \psi)) := t(g(\varphi), g(\psi))$
- (b) $g((\varphi \vee \psi)) := s_{t,n}(g(\varphi), g(\psi))$
- (c) $g((\varphi \rightarrow \psi)) := r_t(g(\varphi), g(\psi))$
- (d) $g((\varphi \leftrightarrow \psi)) := t(r_t(g(\varphi), g(\psi)), r_t(g(\psi), g(\varphi)))$.

Wir weisen nach, daß g eine Wahrheitsfunktion über τ ist.

Zunächst zeigen wir induktiv die Wohldefiniertheit und die Eindeutigkeit von g .

Für die atomaren Ausdrücke ist nach der Definition von α und g nichts zu zeigen.

Sei $\psi \in \mathcal{F}^A$ ein Ausdruck und $g(\psi) \in T$ sei eindeutig bestimmt. Dann ist auch $\varphi = (\neg\psi)$ ein Ausdruck und es ist $n(g(\psi)) \in T$, da $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum ist. Da $g(\psi)$ eindeutig bestimmt ist und da sich nach Satz 1.4 φ eindeutig aus ψ erzeugen läßt, folgt die Eindeutigkeit von $g(\varphi) = n(g(\psi))$.

Seien $\psi, \chi \in \mathcal{F}^A$, mit eindeutig bestimmten $g(\psi), g(\chi) \in T$. Dann ist $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ ein Ausdruck und es ist $t(g(\psi), g(\chi)) \in T$, da $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum ist. Da $g(\psi)$ und $g(\chi)$ eindeutig bestimmt sind und da sich nach Satz 1.4 φ eindeutig aus ψ und χ erzeugen läßt, folgt die Eindeutigkeit von $g(\varphi) = t(g(\psi), g(\chi))$. Analog läßt sich die Behauptung für die übrigen Junktoren nachweisen.

Da sich jeder Ausdruck durch endliche Anwendung der Regeln (A1) bis (A4) erzeugen läßt, folgt insgesamt die Wohldefiniertheit und die Eindeutigkeit von g durch Induktion⁷.

Nach der Konstruktion ist g eine Wahrheitsfunktion über τ und die Existenz und Eindeutigkeit einer geeigneten Wahrheitsfunktion ist nachgewiesen. ■

Wir stellen grundlegende Eigenschaften von Wahrheitsfunktionen zusammen. Es zeigt sich, daß viele der Gesetzmäßigkeiten der klassischen Logik auch für die Sprachen der Klasse MS gelten.

1.30 Lemma Sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und $\|\cdot\| \in \tau$ eine Wahrheitsfunktion. Dann gilt:

- (i) $\forall \varphi \in \mathcal{F}^A : \quad \|\varphi\| = \|(\neg(\neg\varphi))\|$
- (ii) $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^A : \quad \|(\varphi \vee \psi)\| = \|(\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)))\|$
- (iii) $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^A : \quad \begin{aligned} \|(\varphi \wedge \psi)\| &= \|(\psi \wedge \varphi)\| \\ \|(\varphi \vee \psi)\| &= \|(\psi \vee \varphi)\| \end{aligned}$
- (iv) $\forall \varphi, \psi, \omega \in \mathcal{F}^A : \quad \begin{aligned} \|((\varphi \wedge \psi) \wedge \omega)\| &= \|(\varphi \wedge (\psi \wedge \omega))\| \\ \|((\varphi \vee \psi) \vee \omega)\| &= \|(\varphi \vee (\psi \vee \omega))\| \end{aligned}$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus den Eigenschaften von t -Normen, dualen s -Normen und Negationsfunktionen (vgl. Abschnitt 1.3). ■

⁷Zum Konzept der Induktion bei der Konstruktion logischer Sprachen vgl. [Ebbinghaus '96, S. 19 f.]

Das folgende Lemma enthält Aussagen über die Subjunktion.

1.31 Lemma Sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und $\|\cdot\| \in \tau$ eine Wahrheitsfunktion. Dann gilt:

- (i) $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$, mit $\|\varphi\| = 0$: $\|(\varphi \rightarrow \psi)\| = 1$
- (ii) $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$: $\|(\varphi \leftrightarrow \psi)\| = \|((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))\|$
- (iii) $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$: $\|(\varphi \leftrightarrow \psi)\| = \min(\|(\varphi \rightarrow \psi)\|, \|(\psi \rightarrow \varphi)\|)$

Ist t nach unten halbstetig, so gilt zudem:

- (iv) $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$: $\|((\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi)\| = 1$
- (v) $\forall \varphi, \psi, \omega \in \mathcal{F}^A$: $\|(((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \omega)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \omega))\| = 1$

Beweis: Die Aussagen (i) bis (iii) folgen direkt aus Satz 1.16 und der Definition 1.26. Die Behauptungen (iv) und (v) folgen aus dem Satz 1.17. ■

Die Ausdrücke aus (iv) und (v) aus Lemma 1.31 besitzen unabhängig von den Wahrheitswerten ihrer Teilausdrücke den Wahrheitswert 1. Solche Ausdrücke heißen *Tautologien*. Wir werden sie später weitergehend untersuchen (S. 40 f). Zunächst werden wir jedoch Begriffe einführen, die einen systematischen Vergleich verschiedener Wahrheitsräume erlauben.

1.4.2 Äquivalenz von Wahrheitsräumen

Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß verschiedene Wahrheitsräume die gleiche Semantik beschreiben können. So zeigt das Beispiel 1.27, daß alle Wahrheitsräume der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, 1\})$ die gleiche Semantik, nämlich die der klassischen Logik, definieren. Allgemein sollen Wahrheitsräume, die die gleiche Semantik beschreiben, als *äquivalent* bezeichnet werden.

1.32 Definition Es sei T eine Menge von Wahrheitswerten. Zwei Wahrheitsräume $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ heißen **äquivalent** (in Zeichen: $\tau_1 \sim \tau_2$), wenn für jede Abbildung $\|\cdot\| : \mathcal{F}^A \rightarrow T$ gilt:

$$\|\cdot\| \in \tau_1 \Leftrightarrow \|\cdot\| \in \tau_2 .$$

1.33 Bemerkung

- (i) Die Relation \sim der Definition 1.32 definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wahrheitsräume, die bezüglich der gleichen Menge T von Wahrheitswerten gebildet werden.
- (ii) Nach Definition 1.32 sind zwei Wahrheitsräume genau dann äquivalent, wenn die Mengen ihrer Wahrheitsfunktionen übereinstimmen. Die semantisch zulässigen Bewertungen der Ausdrücke sind dann die gleichen. Beide Wahrheitsräume beschreiben in diesem Sinne dieselbe semantische Struktur.

(iii) Es sei \mathcal{F}_a^A die Menge der atomaren Ausdrücke und $\alpha : \mathcal{F}_a^A \rightarrow T$ eine beliebige Abbildung. Es seien ferner $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ äquivalente Wahrheitsräume. Nach Satz 1.29 existieren dann Wahrheitsfunktionen $\|\cdot\|_1 \in \tau_1$ und $\|\cdot\|_2 \in \tau_2$, so daß $\|\cdot\|_1|_{\mathcal{F}_a^A} = \alpha = \|\cdot\|_2|_{\mathcal{F}_a^A}$ gilt. Da nach Satz 1.29 die Wahrheitsfunktionen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ eindeutig bestimmt sind und außerdem $\|\cdot\|_1 \in \tau_2$ gilt, folgt $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. Für alle Ausdrücke $\varphi \in \mathcal{F}^A$ gilt also: $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_2$.

Der folgende Satz vereinfacht die Charakterisierung äquivalenter Wahrheitsräume.

1.34 Satz - Äquivalenzsatz von Wahrheitsräumen

Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ Wahrheitsräume. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\tau_1 \sim \tau_2$

(ii) Es gilt:

$$\begin{aligned} t_1|_{T^2} &= t_2|_{T^2} \\ n_1|_T &= n_2|_T \\ s_{t_1, n_1}|_{T^2} &= s_{t_2, n_2}|_{T^2} \\ r_{t_1}|_{T^2} &= r_{t_2}|_{T^2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dabei bezeichnen s_{t_i, n_i} die zu t_i duale s -Norm bezüglich n_i und r_{t_i} das Residuum von t_i für $i = 1, 2$.

Beweis: „(i) \Rightarrow (ii)“: Es sei $\tau_1 \sim \tau_2$. Wir weisen die Behauptung für die t -Normen nach. Dazu seien $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_a^A$ mit $\varphi \neq \psi$ beliebig gewählt. Dann gilt für alle $\|\cdot\| \in \tau_1$:

$$\|(\varphi \wedge \psi)\| = t_1(\|\varphi\|, \|\psi\|) \quad (\text{da } \|\cdot\| \in \tau_1)$$

und

$$\|(\varphi \wedge \psi)\| = t_2(\|\varphi\|, \|\psi\|) \quad (\text{da } \|\cdot\| \in \tau_2)$$

Da $\|\cdot\|$ beliebig ist, folgt mit Satz 1.29: $t_1|_{T^2} = t_2|_{T^2}$

Die übrigen Gleichungen aus (1.1) lassen sich analog rechtfertigen.

„(ii) \Rightarrow (i)“: Folgt sofort aus der Definition von Wahrheitsräumen (1.26). ■

1.35 Beispiel

(i) Wir haben in Beispiel 1.27 gezeigt, daß die Einschränkungen aller t -Normen, s -Normen, Involutionen und Residuen auf der Menge $\{0, 1\}$ übereinstimmen. Nach Satz 1.34 sind daher alle Wahrheitsräume der Form $\tau = (t, n, \{0, 1\})$ äquivalent. Es existiert also nur eine Äquivalenzklasse von Wahrheitsräumen dieser Art.

(ii) Betrachtet man die Menge von Wahrheitswerten $[0, 1]$, so folgt nach Satz 1.34, daß zwei Wahrheitsräume der Form $\tau = (t, n, [0, 1])$ genau dann äquivalent sind, wenn die t -Norm und die Involution übereinstimmen, wenn die betreffenden Wahrheitsräume also gleich sind. Jede Äquivalenzklasse von Wahrheitsräumen der Gestalt $\tau = (t, n, [0, 1])$ enthält demnach genau ein Element.

Unter gewissen Voraussetzungen läßt sich die Charakterisierung äquivalenter Wahrheitsräume nach Satz 1.34 weiter vereinfachen.

1.36 Satz *Es sei T eine Menge von Wahrheitswerten mit endlicher Mächtigkeit. Es seien ferner $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ Wahrheitsräume, t_1 und t_2 seien nach unten halbstetig. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

$$(i) \quad \tau_1 \sim \tau_2$$

$$(ii) \quad t_1|_{T^2} = t_2|_{T^2}$$

Beweis: „(i) \Rightarrow (ii)“: Diese Aussage ist bereits in Satz 1.34 gezeigt worden.

„(ii) \Rightarrow (i)“: Wir weisen nach, daß unter den Voraussetzungen des Satzes gilt:

$$t_1|_{T^2} = t_2|_{T^2} \tag{1.2}$$

$$n_1|_T = n_2|_T \tag{1.3}$$

$$s_{t_1, n_1}|_{T^2} = s_{t_2, n_2}|_{T^2} \tag{1.4}$$

$$r_{t_1}|_{T^2} = r_{t_2}|_{T^2} \tag{1.5}$$

Die Behauptung ergibt sich dann aus Satz 1.34.

Nach der Voraussetzung gilt $t_1|_{T^2} = t_2|_{T^2}$, so daß für Gleichung (1.2) nichts mehr zu zeigen ist.

Wir betrachten die Involutionen n_1 und n_2 und weisen Gleichung (1.3) nach. Per Definition ist jede Involution auf $[0, 1]$ eine streng monoton fallende Abbildung. Also ist jede Involution auch streng monoton fallend auf jeder Teilmenge von $[0, 1]$, insbesondere also auf T . Da τ_1 und τ_2 Wahrheitsräume sind, sind die Involutionen n_1 und n_2 auf T zudem abgeschlossen. Es sei nun $T = \{a_1, \dots, a_\nu\}$ die zugrunde liegende Menge von Wahrheitswerten (T hat nach Voraussetzung eine endliche Mächtigkeit).

O.B.d.A. sei

$$0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{\nu-1} < a_\nu = 1 .$$

Die Abbildung

$$n : T \longrightarrow T \quad a_i \longmapsto a_{\nu-i+1}$$

ist dann die einzige streng monoton fallende, abgeschlossene Abbildung auf T . Folglich gilt:

$$n_1|_T = n = n_2|_T$$

Damit ist Gleichung (1.3) gezeigt.

Da die t -Normen t_1, t_2 und die Involutionen n_1, n_2 auf T übereinstimmen, folgt Gleichung (1.4), denn nach Definition gilt für alle $a, b \in T$:

$$s_{t_1, n_1}(a, b) = n_1(t_1(n_1(a), n_1(b))) = n_2(t_2(n_2(a), n_2(b))) = s_{t_2, n_2}(a, b)$$

Es bleibt Gleichung (1.5) zu zeigen. Dazu seien $a, b \in T$ beliebig gewählt. Da t_1 nach unten halbstetig ist, gilt $t_1(a, r_{t_1}(a, b)) \leq b$ (vgl. Satz 1.17 (i)) und es folgt:

$$t_1(a, r_{t_1}(a, b)) = t_2(a, r_{t_1}(a, b)) \leq b$$

Folglich ist $r_{t_1}(a, b) \leq r_{t_2}(a, b)$ ($= \sup\{d \in [0, 1]; t_2(a, d) \leq b\}$). Andererseits ist auch t_2 nach unten halbstetig und wir erhalten

$$t_2(a, r_{t_2}(a, b)) = t_1(a, r_{t_2}(a, b)) \leq b$$

Somit ist $r_{t_2}(a, b) \leq r_{t_1}(a, b)$ und es folgt $r_{t_1}(a, b) = r_{t_2}(a, b)$.

Da $a, b \in T$ beliebig gewählt sind, folgt die Behauptung. ■

Wir schließen die Überlegungen zur Äquivalenz mit einem Lemma ab, das die Aussagen der Sätze 1.34 und 1.36 weiter verdeutlichen soll. Wir werden nachweisen, daß genau vier verschiedene Äquivalenzklassen von Wahrheitsräumen existieren, die bezüglich der Menge von Wahrheitswerten $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ gebildet werden.

1.37 Lemma *Wir betrachten die Menge von Wahrheitswerten $T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Es existieren genau vier Äquivalenzklassen von Wahrheitsräumen, die von der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ sind. Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen sind:*

$$\begin{aligned} \tau_{\min} &= (t_{\min}, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\}) \\ \tau_B &= (t_B, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\}) \\ \tau_D &= (t_D, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\}) \\ \tau_H &= (t_H, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\}) \end{aligned}$$

Dabei ist t_H eine t -Norm, die durch

$$t_H : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (a, b) \longmapsto \begin{cases} \min(a, b) & a + b \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist.

Beweis: Wir weisen zunächst nach, daß τ_{\min} , τ_B , τ_D und τ_H vier nicht äquivalente Wahrheitsräume sind.

Zu diesem Zweck sei ein beliebiger Wahrheitsraum $\tau = (t, n, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ gegeben. Wir betrachten die möglichen Funktionswerte, die die t -Norm und die duale s -Norm sowie die Involution und das Residuum auf T annehmen können. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten zur Definition dieser Abbildungen läßt nach Satz 1.34 Rückschlüsse auf die Anzahl der existierenden Äquivalenzklassen von Wahrheitsräumen zu.

Für jede Involution n in einem Wahrheitsraum des Typs $\tau = (t, n, T)$ gilt nach den Überlegungen aus dem Beweis zu Satz 1.36: $n|_T = n_s|_T$.

Da n auf T eindeutig ist, ist auch die duale s -Norm $s_{t,n}$ auf T eindeutig bestimmt, wenn t auf T vorgegeben wird. Es bleiben daher lediglich die t -Norm und das Residuum zu untersuchen. Wir betrachten zu diesem Zweck die folgende Tabelle, in der aufgetragen ist, welche Funktionswerte die t -Norm und das Residuum auf der Menge T annehmen:

a	b	$t(a, b)$	$r_t(a, b)$	Begründung
0	0	0	1	(Satz 1.9, Satz 1.16 (ii))
$\frac{1}{2}$	0	0	c''	(Satz 1.9, –)
1	0	0	0	(Satz 1.9, Satz 1.16 (iii))
0	$\frac{1}{2}$	0	1	(Satz 1.9, Satz 1.16 (ii))
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	c'	1	(–, Satz 1.16 (ii))
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	(Def. 1.5 (T1), Satz 1.16 (iii))
0	1	0	1	(Def. 1.5 (T1), Satz 1.16 (ii))
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	(Def. 1.5 (T1), Satz 1.16 (ii))
1	1	1	1	(Def. 1.5 (T1), Satz 1.16 (iii))

Wie man der Tabelle entnimmt, werden lediglich die durch c' und c'' gekennzeichneten Funktionswerte nicht durch die Axiomatik des Abschnitts 1.3 eindeutig bestimmt. Wahrheitsräume der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ sind folglich genau dann nicht äquivalent, wenn sich die Funktionswerte der entsprechenden t -Normen und Residuen an mindestens einer dieser beiden Stellen unterscheiden.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
t_{\min}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} & \text{und} & & r_{\min}(\tfrac{1}{2}, 0) &= 0 \\
t_H(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= \tfrac{1}{2} & \text{und} & & r_H(\tfrac{1}{2}, 0) &= \tfrac{1}{2} \\
t_B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= 0 & \text{und} & & r_B(\tfrac{1}{2}, 0) &= \tfrac{1}{2} \\
t_D(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= 0 & \text{und} & & r_D(\tfrac{1}{2}, 0) &= 1
\end{aligned}$$

Da die Einschränkungen der obigen t -Normen und Residuen auf T paarweise verschieden sind, sind die Wahrheitsräume τ_{\min} , τ_B , τ_D und τ_H nach Satz 1.34 nicht äquivalent. Es sind Repräsentanten von vier verschiedenen Äquivalenzklassen von Wahrheitsräumen der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$.

Wir weisen nun nach, daß jeder Wahrheitsraum der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ zu einer der vier Wahrheitsräume τ_{\min} , τ_B , τ_D oder τ_H äquivalent ist.

Jede t -Norm läßt sich nach Satz 1.8 nach oben durch t_{\min} abschätzen. Ist ein Wahrheitsraum der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ gegeben, so gilt folglich

$$t(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad t(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 0 .$$

Jede dieser t -Normen stimmt also auf T mit einer der obigen t -Normen überein.

Sei $t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$. Dann gilt:

$$r_t(\tfrac{1}{2}, 0) = \sup\{d \in [0, 1]; t(\tfrac{1}{2}, d) \leq 0\} \geq \tfrac{1}{2}$$

Also gilt in diesem Fall $r_t(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}$ oder $r_t(\frac{1}{2}, 0) = 1$.

Ist $t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, so gilt:

$$r_t(\tfrac{1}{2}, 0) = \sup\{d \in [0, 1]; t(\tfrac{1}{2}, d) \leq 0\} \leq \tfrac{1}{2}$$

In diesem Fall ist $r_t(\frac{1}{2}, 0) = 0$ oder $r_t(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2}$.

Insgesamt können also nur vier verschiedene Arten von Wahrheitsräumen existieren, da nur vier paarweise verschiedene Einschränkungen von t -Normen und Residuen auf T möglich sind. ■

1.38 Bemerkung Die Wahrheitsräume τ_{\min} und τ_H sowie τ_B und τ_D sind nicht äquivalent, obwohl die entsprechenden t -Normen auf T übereinstimmen. Hier zeigt sich, daß die Halbstetigkeit der t -Normen in Satz 1.36 eine notwendige Bedingung ist (t_H und t_D sind nicht nach unten halbstetig).

1.4.3 Isomorphie von Wahrheitsräumen

Ein weiterer wichtiger Begriff bei der Klassifizierung von Wahrheitsräumen ist der Begriff der Isomorphie zweier Wahrheitsräume. Während sich das Konzept der Äquivalenz auf Wahrheitsräume bezieht, die bezüglich der gleichen Menge von Wahrheitswerten gebildet werden, stellt die Isomorphie eine Beziehung zwischen Wahrheitsräumen mit Mengen von Wahrheitswerten gleicher Mächtigkeit dar. Wir motivieren den Begriff der Isomorphie zunächst mit einem Beispiel.

1.39 Beispiel Es sei $c \in]0, 1[$ gegeben. Wir definieren eine Abbildung n_c durch

$$n_c : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1] \quad a \longmapsto \begin{cases} \frac{c-1}{c} a + 1 & a \in [0, c[\\ \frac{c}{c-1}(a-1) & a \in [c, 1] \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, daß n_c eine Involution ist. Dabei ist c stets Fixpunkt von n_c ; d. h. es ist $n_c(c) = c$. Als Spezialfall ergibt sich $n_s = n_{\frac{1}{2}}$.

Wir betrachten die folgenden Tabellen:

a	$n_c(a)$
0	1
c	c
1	0

a	b	$t_{\min}(a, b)$	$s_{t_{\min}, n_c}(a, b)$	$r_{\min}(a, b)$
0	0	0	0	1
0	c	0	c	1
0	1	0	1	1
c	0	0	c	0
c	c	c	c	1
c	1	c	1	1
1	0	0	1	0
1	c	c	1	c
1	1	1	1	1

Wie man den Tabellen entnimmt, definiert $\tau_c = (t_{\min}, n_c, \{0, c, 1\})$ für alle $c \in]0, 1[$ einen Wahrheitsraum.

Zwischen allen Wahrheitsräumen des Beispiels 1.39 existieren offenbar semantische Parallelen, da der Wahrheitswert c austauschbar zu sein scheint. Wahrheitsräume, die solche strukturellen Ähnlichkeiten aufweisen, sollen als *isomorph* bezeichnet werden. Wir präzisieren

zunächst den Begriff der Isomorphie. Dabei orientieren wir uns konzeptionell an der Definition der Äquivalenz von Wahrheitsräumen.

1.40 Definition *Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ Wahrheitsräume. Der Wahrheitsraum τ_1 heißt **isomorph** zu τ_2 (in Zeichen: $\tau_1 \simeq \tau_2$), wenn eine bijektive, monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ derart existiert, daß die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

$$(i) \bigcup_{a \in T_1} \{\Omega(a)\} = T_2$$

$$(ii) \text{ Für alle } \|\cdot\| \in \tau_1 \text{ gilt: } \Omega \circ \|\cdot\| \in \tau_2$$

1.41 Bemerkung *Ist $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bijektiv und monoton steigend, so gilt:*

$$(i) \Omega(0) = 0 \text{ und } \Omega(1) = 1.$$

(ii) Ω ist streng monoton steigend.

(iii) Ω ist stetig.

Der Begriff der Isomorphie von Wahrheitsräumen ist symmetrisch, wie das folgende Lemma zeigt.

1.42 Lemma *Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ Wahrheitsräume. Ferner seien $\tau_1 \simeq \tau_2$ und $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, so daß Ω die Bedingungen (i) und (ii) der Definition 1.40 erfüllt. Dann gilt:*

$$(i) \Omega|_{T_1} : T_1 \rightarrow T_2 \text{ ist bijektiv.}$$

(ii) *Es existiert eine bijektive Abbildung zwischen den Mengen der Wahrheitsfunktionen in τ_1 und den Wahrheitsfunktionen in τ_2 , d. h. es existiert eine bijektive Abbildung $\bar{\Omega} : \tau_1 \rightarrow \tau_2$.*

$$(iii) \tau_2 \simeq \tau_1$$

Beweis: Es seien $\tau_1 \simeq \tau_2$ und $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, so daß die Bedingungen (i) und (ii) der Definition 1.40 erfüllt sind. Ω ist dann bijektiv und monoton steigend.

zu (i): Ω ist nach Voraussetzung auf $[0, 1]$ injektiv. Daher ist Ω auch auf T_1 injektiv. Da $\bigcup_{a \in T_1} \Omega(a) = T_2$ gilt, ist Ω auf T_1 auch surjektiv. Also ist $\Omega|_{T_1}$ bijektiv.

zu (ii): Es sei $T_1^{\mathcal{F}_a^A}$ die Menge aller Abbildungen $\alpha : \mathcal{F}_a^A \rightarrow T_1$ und $T_2^{\mathcal{F}_a^A}$ die Menge aller Abbildungen $\beta : \mathcal{F}_a^A \rightarrow T_2$. Nach Satz 1.29 existieren bijektive Abbildungen

$$\Phi_1 : T_1^{\mathcal{F}_a^A} \rightarrow \tau_1 \quad \text{und} \quad \Phi_2 : T_2^{\mathcal{F}_a^A} \rightarrow \tau_2,$$

die jeder Abbildung aus $T_1^{\mathcal{F}_a^A}$ (bzw. $T_2^{\mathcal{F}_a^A}$) eindeutig eine Wahrheitsfunktion zuordnen. Zudem ist die Abbildung

$$\widehat{\Omega} : T_1^{\mathcal{F}_a^A} \rightarrow T_2^{\mathcal{F}_a^A} \quad \alpha \mapsto \Omega \circ \alpha$$

bijektiv, da die Abbildung $\Omega|_{T_1} : T_1 \longrightarrow T_2$ bijektiv ist. Also definiert

$$\bar{\Omega} := \Phi_2 \circ \widehat{\Omega} \circ \Phi_1^{-1} : \tau_1 \longrightarrow \tau_2$$

eine bijektive Abbildung von der Menge der Wahrheitsfunktionen in τ_1 in die Menge der Wahrheitsfunktionen in τ_2 .

zu (iii): Die Abbildung $\Omega|_{T_1} : T_1 \longrightarrow T_2$ ist bijektiv (vgl. (i)). Also ist die Umkehrfunktion Ω^{-1} ebenfalls monoton steigend und bijektiv und es gilt:

$$\bigcup_{a \in T_2} \{\Omega^{-1}(a)\} = T_1$$

Es bleibt nachzuweisen, daß für alle $\|\cdot\|_2 \in \tau_2$ gilt: $\Omega^{-1} \circ \|\cdot\|_2 \in \tau_1$.

Die Abbildung

$$\Omega' : \tau_1 \longrightarrow \tau_2 \quad \|\cdot\|_1 \longmapsto \Omega \circ \|\cdot\|_1$$

ist injektiv, da Ω bijektiv ist. Da τ_1 und τ_2 nach (ii) gleich mächtig sind, ist Ω' auch surjektiv. Es existiert daher für alle $\|\cdot\|_2 \in \tau_2$ ein $\|\cdot\|_1 \in \tau_1$, so daß $\|\cdot\|_2 = \Omega \circ \|\cdot\|_1$ ist. Es folgt:

$$\Omega^{-1} \circ \|\cdot\|_2 = \Omega^{-1} \circ \Omega \circ \|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_1$$

Also ist dann insbesondere $\Omega^{-1} \circ \|\cdot\|_2 \in \tau_1$. ■

1.43 Bemerkung

- (i) Die Relation \simeq definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wahrheitsräume, deren Mengen von Wahrheitswerten die gleiche Mächtigkeit besitzen.
- (ii) Sind zwei Wahrheitsräume äquivalent, so sind sie auch isomorph, d. h. $\tau_1 \sim \tau_2 \Rightarrow \tau_1 \simeq \tau_2$.
- (iii) Gilt für zwei Wahrheitsräume $\tau_1 \simeq \tau_2$, so existiert für alle $\|\cdot\|_1 \in \tau_1$ ein $\|\cdot\|_2 \in \tau_2$ mit $\|\cdot\|_2 = \Omega \circ \|\cdot\|_1$. Dabei bezeichne $\Omega : T_1 \longrightarrow T_2$ die entsprechende Abbildung aus Definition 1.40. Da Ω streng monoton steigend ist, gilt für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$:

$$\|\varphi\|_1 \geq \|\psi\|_1 \Leftrightarrow \|\varphi\|_2 \geq \|\psi\|_2$$

Eine durch φ repräsentierte Aussage ist genau dann in dem Wahrheitsraum τ_1 „wahrer“ als die entsprechende Aussage, die durch ψ dargestellt wird, wenn sie es auch in τ_2 ist.

Die Isomorphie von Wahrheitsräumen läßt sich durch Eigenschaften der betreffenden t -Normen und Involutionen charakterisieren. Es gilt der folgende Satz.

1.44 Satz - Isomorphiesatz von Wahrheitsräumen

Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ Wahrheitsräume. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es ist $\tau_1 \simeq \tau_2$

(ii) Es existiert eine bijektive, monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, so daß gilt:

$$\tau_1 \sim \tau_\Omega = (t_\Omega, n_\Omega, T_1)$$

Dabei ist definiert:

$$\begin{aligned} t_\Omega : [0, 1]^2 &\longrightarrow [0, 1] & (a, b) &\longmapsto \Omega^{-1}(t_2(\Omega(a), \Omega(b))) \\ n_\Omega : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] & a &\longmapsto \Omega^{-1}(n_2(\Omega(a))) \end{aligned}$$

Beweis: „(i) \Rightarrow (ii)“: Es sei $\tau_1 \simeq \tau_2$. Dann existiert eine bijektive und monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, so daß für alle $\|\cdot\| \in \tau_1$ gilt: $\Omega \circ \|\cdot\| \in \tau_2$.

Es seien $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_a^A$, mit $\varphi \neq \psi$. Ferner sei $\|\cdot\| \in \tau_1$ beliebig gewählt. Da $\Omega \circ \|\cdot\| \in \tau_2$ ist, gilt

$$\Omega(\|\varphi \wedge \psi\|) = t_2(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|))$$

Da andererseits $\|\cdot\| \in \tau_1$ ist, gilt

$$\Omega(\|\varphi \wedge \psi\|) = \Omega(t_1(\|\varphi\|, \|\psi\|))$$

Insgesamt folgt:

$$t_1(\|\varphi\|, \|\psi\|) = \Omega^{-1}(t_2(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|))) = t_\Omega(\|\varphi\|, \|\psi\|)$$

Da dies für jede Wahrheitsfunktion aus τ_1 gilt, folgt aus Satz 1.29 für alle $a, b \in T_1$: $t_1(a, b) = t_\Omega(a, b)$.

Analog läßt sich für alle $a, b \in T_1$ zeigen:

$$\begin{aligned} n_1(a) &= n_\Omega(a) \\ s_{t_1, n_1}(a, b) &= s_\Omega(a, b) := \Omega^{-1}(s_{t_2, n_2}(\Omega(a), \Omega(b))) \\ r_{t_1}(a, b) &= r_\Omega(a, b) := \Omega^{-1}(r_{t_2}(\Omega(a), \Omega(b))) \end{aligned}$$

Man weist leicht nach, daß t_Ω eine t -Norm und n_Ω eine Involution ist. Um die Behauptung des Satzes nachzuweisen, bleibt zu zeigen, daß s_{t_Ω, n_Ω} auf T_1 mit s_Ω und r_{t_Ω} auf T_1 mit r_Ω übereinstimmen. Hieraus folgt die Abgeschlossenheit der entsprechenden Abbildungen auf T_1 und $\tau_\Omega = (t_\Omega, n_\Omega, T_1)$ ist dann ein Wahrheitsraum. Zudem liefert Satz 1.34 mit den obigen Überlegungen $\tau_1 \sim \tau_\Omega$.

Wir betrachten zunächst die Abbildung s_{t_Ω, n_Ω} und s_Ω . Es ist für alle $a, b \in T_1$:

$$\begin{aligned} &s_{t_\Omega, n_\Omega}(a, b) \\ &= \Omega^{-1}(n_2(\Omega(\Omega^{-1}(t_2(\Omega(\Omega^{-1}(n_2(\Omega(a))))), \Omega(\Omega^{-1}(n_2(\Omega(b)))))))) \\ &= \Omega^{-1}(n_2(t_2(n_2(\Omega(a)), n_2(\Omega(b)))) \\ &= \Omega^{-1}(s_{t_2, n_2}(\Omega(a), \Omega(b))) = s_\Omega(a, b) \end{aligned}$$

Wir wenden uns den Abbildungen r_{t_Ω} und r_Ω zu. Es gilt für alle $a, b \in T_1$:

$$\begin{aligned} &r_{t_\Omega}(a, b) \\ &= \sup\{d \in [0, 1]; \Omega^{-1}(t_2(\Omega(a), \Omega(d))) \leq b\} \\ &= \sup\{d \in [0, 1]; t_2(\Omega(a), \Omega(d)) \leq \Omega(b)\} \end{aligned}$$

Es sei $d' := \Omega(d)$. Dann gilt $d = \Omega^{-1}(d')$. Wegen der Stetigkeit und der Monotonie von Ω (vgl. Bemerkung 1.41) erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} & \sup\{d \in [0, 1]; t_2(\Omega(a), \Omega(d))\} \leq \Omega(b) \\ & = \Omega^{-1}(\sup\{d' \in [0, 1]; t_2(\Omega(a), d')\}) \leq \Omega(b) \\ & = r_\Omega(a, b) \end{aligned}$$

Für alle $a, b \in T_1$ gilt: $r_{t_\Omega}(a, b) = r_\Omega(a, b)$.

Aus den Vorüberlegungen ergibt sich: $\tau_1 \sim \tau_\Omega$.

„(ii) \Rightarrow (i)“: Es sei $\tau_1 \sim \tau_\Omega$. Dann gilt für alle Abbildungen $\|\cdot\| : \mathcal{F}^A \longrightarrow [0, 1]$:

$$\|\cdot\| \in \tau_1 \Leftrightarrow \|\cdot\| \in \tau_\Omega$$

Also gilt für alle $\|\cdot\| \in \tau_1$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$:

$$\begin{aligned} \|(\neg\varphi)\| &= n_\Omega(\|\varphi\|) = \Omega^{-1}(n_2(\Omega(\|\varphi\|))) \\ \|(\varphi \wedge \psi)\| &= t_\Omega(\|\varphi\|, \|\psi\|) = \Omega^{-1}(t_2(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|))) \\ \|(\varphi \vee \psi)\| &= s_{t_\Omega, n_\Omega}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)) \\ \|(\varphi \rightarrow \psi)\| &= r_{t_\Omega}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)) \\ \|(\varphi \leftrightarrow \psi)\| &= t_\Omega(r_{t_\Omega}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)), r_{t_\Omega}(\Omega(\|\psi\|), \Omega(\|\varphi\|))) \end{aligned}$$

Es ist $\|\varphi\|, \|\psi\| \in T_1$. Wir haben im ersten Teil des Beweises bereits nachgewiesen, daß auf T_1 die Abbildungen s_{t_Ω, n_Ω} und s_Ω sowie r_{t_Ω} und r_Ω übereinstimmen. Wir erhalten mit den entsprechenden Definitionen von s_Ω und r_Ω :

$$\begin{aligned} \|(\varphi \vee \psi)\| &= \Omega^{-1}(s_{t_2, n_2}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|))) \\ \|(\varphi \rightarrow \psi)\| &= \Omega^{-1}(r_{t_2}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|))) \\ \|(\varphi \leftrightarrow \psi)\| &= \Omega^{-1}(t_2(r_{t_2}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)), r_{t_2}(\Omega(\|\psi\|), \Omega(\|\varphi\|)))) \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir so:

$$\begin{aligned} \Omega(\|(\neg\varphi)\|) &= n_2(\Omega(\|\varphi\|)) \\ \Omega(\|(\varphi \wedge \psi)\|) &= t_2(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)) \\ \Omega(\|(\varphi \vee \psi)\|) &= s_{t_2, n_2}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)) \\ \Omega(\|(\varphi \rightarrow \psi)\|) &= r_{t_2}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)) \\ \Omega(\|(\varphi \leftrightarrow \psi)\|) &= t_2(r_{t_2}(\Omega(\|\varphi\|), \Omega(\|\psi\|)), r_{t_2}(\Omega(\|\psi\|), \Omega(\|\varphi\|))) \end{aligned}$$

Also ist $\Omega \circ \|\cdot\| \in \tau_2$. ■

1.45 Bemerkung *Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, [0, 1])$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, [0, 1])$ gegeben. Nach Satz 1.44 gilt $\tau_1 \simeq \tau_2$ genau dann, wenn eine bijektive und monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ derart existiert, daß für alle $a, b \in [0, 1]$ gilt:*

$$t_1(a, b) = \Omega^{-1}(t_2(\Omega(a), \Omega(b))) \quad \text{und} \quad n_1(a) = \Omega^{-1}(n_2(\Omega(a)))$$

Die Äquivalenzklasse eines Wahrheitsraumes $\tau_1 = (t_1, n_1, [0, 1])$ bzgl. \simeq besitzt insbesondere überabzählbar viele Elemente, da die Menge aller bijektiven und monoton steigenden Abbildungen $\Omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ selbst überabzählbar ist. Hier zeigt sich ein deutlicher Unterschied zu den Begriffen der Äquivalenz und der Isomorphie von Wahrheitsräumen.

Wir geben ein Beispiel für die Anwendung des Satzes 1.44 an, in welchem wir zeigen, daß die Wahrheitsräume des Beispiels 1.39 isomorph sind.

1.46 Beispiel Für $c \in]0, 1[$ sei $\tau_c = (t_{\min}, n_c, \{0, c, 1\})$ der Wahrheitsraum, den wir in Beispiel 1.39 eingeführt haben. Für $c_1, c_2 \in]0, 1[$ gilt dann: $\tau_{c_1} \simeq \tau_{c_2}$.

Beweis: Für $c_1, c_2 \in]0, 1[$ sei $\Omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ gegeben, so daß Ω bijektiv und monoton steigend ist und zudem $\Omega(c_1) = c_2$ gilt.⁸ Wir weisen nach, daß

$$\tau_{c_1} \sim \tau_{\Omega} = (t_{\Omega}, n_{\Omega}, \{0, c_1, 1\})$$

ist. Dabei sei definiert:

$$\begin{aligned} t_{\Omega}(a, b) &:= \Omega^{-1}(t_{\min}(\Omega(a), \Omega(b))) \\ n_{\Omega}(a) &:= \Omega^{-1}(n_{c_2}(\Omega(a))) \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie von Ω gilt für alle $a, b \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} t_{\Omega}(a, b) &= \Omega^{-1}(t_{\min}(\Omega(a), \Omega(b))) = \Omega^{-1}(\min(\Omega(a), \Omega(b))) \\ &= \min(a, b) = t_{\min}(a, b) \end{aligned}$$

Also ist insbesondere: $t_{\min}|_{\{0, c_1, 1\}^2} = t_{\Omega}|_{\{0, c_1, 1\}^2}$

Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} n_{\Omega}(1) &= \Omega^{-1}(n_{c_2}(\Omega(1))) \stackrel{1.41}{=} \Omega^{-1}(n_{c_2}(1)) = \Omega^{-1}(0) \stackrel{1.41}{=} 0 \\ n_{\Omega}(c_1) &= \Omega^{-1}(n_{c_2}(\Omega(c_1))) = \Omega^{-1}(n_{c_2}(c_2)) = \Omega^{-1}(c_2) = c_1 \\ n_{\Omega}(0) &= \Omega^{-1}(n_{c_2}(\Omega(0))) \stackrel{1.41}{=} \Omega^{-1}(n_{c_2}(0)) = \Omega^{-1}(1) \stackrel{1.41}{=} 1 \end{aligned}$$

Also ist: $n_{c_1}|_{\{0, c_1, 1\}} = n_{\Omega}|_{\{0, c_1, 1\}}$.

Der Satz 1.36 liefert: $\tau_1 \sim \tau_{\Omega}$. Aus dem Isomorphiesatz 1.44 folgt die Behauptung. ■

1.47 Bemerkung Zusammen mit dem Beispiel 1.37 folgt aus Beispiel 1.46, daß es genau vier Äquivalenzklassen von isomorphen Wahrheitsräumen mit drei Wahrheitswerten gibt. Repräsentanten dieser Klassen sind τ_{\min} , τ_B , τ_D und τ_H (vgl. Beispiel 1.37).

⁸Solche Abbildungen existieren stets. Ein Beispiel ist:

$$\Omega_{c_1, c_2} : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad a \longmapsto \begin{cases} \frac{c_2}{c_1}a & a \in [0, c_1[\\ \frac{c_2-1}{c_1-1}a + \frac{c_1-c_2}{c_1-1} & a \in [c_1, 1] \end{cases}$$

1.4.4 Tautologien und Kontradiktionen

In den bisherigen Überlegungen zu Wahrheitsräumen standen Konzepte zur Vergleichbarkeit von Wahrheitsräumen im Mittelpunkt der Betrachtungen. Wir wollen uns nun speziellen Eigenschaften von Wahrheitsräumen zuwenden, um erste Konsequenzen aus den vorausgegangenen Überlegungen zu verdeutlichen. Dabei betrachten wir in diesem Abschnitt solche Eigenarten der Wahrheitsräume, die vor allem in der Theorie der mehrwertigen logischen Sprachen von Interesse sind. Wir werden insbesondere eine besondere Klasse von Ausdrücken näher untersuchen. Dies ist die Klasse der *Tautologien* und *Kontradiktionen*.

Wir beginnen mit der Definition tautologischer und kontradiktorischer Ausdrücke in einem Wahrheitsraum.

1.48 Definition Ein Ausdruck $\varphi \in \mathcal{F}^A$ heißt **Tautologie** bezüglich eines Wahrheitsraumes τ , wenn für alle $\|\cdot\| \in \tau$ gilt $\|\varphi\| = 1$. Ein Ausdruck $\varphi \in \mathcal{F}^A$ heißt eine **Kontradiktion** bezüglich eines Wahrheitsraumes τ , wenn $(\neg\varphi)$ eine Tautologie bezüglich τ ist.

Tautologien und Kontradiktionen sind solche Ausdrücke, die bezüglich eines Wahrheitsraumes unabhängig von der Wahrheitsfunktion und somit unabhängig von den Wahrheitswerten der Teilausdrücke wahr bzw. falsch sind. Beide Begriffe schreiben die inhaltliche Intention der klassischen Konzepte auf die Sprachen der Klasse MS fort. Wir geben einige Beispiele an.

1.49 Beispiel

(i) Wir haben in Lemma 1.31 (iv) und (v) bereits gezeigt, daß die Ausdrücke

$$((\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi) \quad (1.6)$$

und

$$(((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \omega)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \omega)) \quad (1.7)$$

mit $\varphi, \psi, \omega \in \mathcal{F}^A$ Tautologien bezüglich jedes Wahrheitsraumes sind, sofern die verwendete t -Norm nach unten halbstetig ist.

Der Ausdruck (1.6) wird in der klassischen Logik als **Modus-Ponens** bezeichnet, der Ausdruck (1.7) heißt **Syllogismus**. Beide Ausdrücke repräsentieren bekannte logische Schlußweisen, die unter den obigen Voraussetzungen in allen Sprachen der Klasse MS gelten.

(ii) Wir betrachten einen Wahrheitsraum der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, 1\})$ aus Beispiel 1.27 und für $\varphi \in \mathcal{F}^A$ die Ausdrücke $(\varphi \vee (\neg\varphi))$ und $(\varphi \wedge (\neg\varphi))$. Es gilt:

$\ \varphi\ $	$\ (\varphi \vee (\neg\varphi))\ $	$\ (\varphi \wedge (\neg\varphi))\ $
1	1	0
0	1	0

Der Ausdruck $(\varphi \vee (\neg\varphi))$ ist eine Tautologie bezüglich τ . Er heißt in der klassischen Logik **Tertium non datur**. Der Ausdruck $(\varphi \wedge (\neg\varphi))$ ist eine Kontradiktion, die auch das **Gesetz vom Widerspruch** genannt wird.

(iii) Es seien $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ und $\tau_B = (t_B, n_s, \{0, \frac{1}{2}, 1\})$ aus Beispiel 1.37 gegeben. Wir betrachten für $\varphi \in \mathcal{F}^A$ erneut die Ausdrücke $(\varphi \vee (\neg\varphi))$ und $(\varphi \wedge (\neg\varphi))$ aus (ii). Wir erhalten die folgenden Belegungstabellen:

τ_{\min} :	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <th style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\ \varphi\$</th> <th style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\ (\varphi \vee (\neg\varphi))\$</th> <th style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\ (\varphi \wedge (\neg\varphi))\$</th> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">$\frac{1}{2}$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">$\frac{1}{2}$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">$\frac{1}{2}$</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">0</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">0</td> </tr> </table>	$\ \varphi\ $	$\ (\varphi \vee (\neg\varphi))\ $	$\ (\varphi \wedge (\neg\varphi))\ $	1	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0
$\ \varphi\ $	$\ (\varphi \vee (\neg\varphi))\ $	$\ (\varphi \wedge (\neg\varphi))\ $											
1	1	0											
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$											
0	1	0											
τ_B :	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <th style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\ \varphi\$</th> <th style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\ (\varphi \vee (\neg\varphi))\$</th> <th style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$\ (\varphi \wedge (\neg\varphi))\$</th> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">$\frac{1}{2}$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">0</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">1</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; text-align: center;">0</td> </tr> </table>	$\ \varphi\ $	$\ (\varphi \vee (\neg\varphi))\ $	$\ (\varphi \wedge (\neg\varphi))\ $	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	0
$\ \varphi\ $	$\ (\varphi \vee (\neg\varphi))\ $	$\ (\varphi \wedge (\neg\varphi))\ $											
1	1	0											
$\frac{1}{2}$	1	0											
0	1	0											

In der durch τ_{\min} definierten Sprache sind beide Ausdrücke also keine Tautologien beziehungsweise Kontradiktionen. In der durch τ_B beschriebenen Sprache bleiben die Eigenschaften der Ausdrücke aus (ii) erhalten.

Tautologien und Kontradiktionen bezeichnen die Elemente der Sprachen der Klasse MS deren Wahrheitswerte unter allen Wahrheitsfunktionen invariant bleiben. Es stellt sich die Frage, ob diese Begriffsbildungen in einer mehrwertigen Logik in dem Sinne erschöpfend sind, daß sie die einzigen beiden Klassen von Ausdrücken repräsentieren, die unter jeder Wahrheitsfunktion eines Wahrheitsraumes den gleichen Wahrheitswert annehmen. Es gilt das folgende Lemma.

1.50 Lemma *Es sei $\tau = (t, n, T)$ ein beliebiger Wahrheitsraum und $\varphi \in \mathcal{F}^A$ ein Ausdruck. Dann existiert eine Wahrheitsfunktion $\|\cdot\| \in \tau$, so daß $\|\varphi\| \in \{0, 1\}$ gilt.*

Beweis: Wir weisen nach, daß in jedem Wahrheitsraum $\tau = (t, n, T)$ Wahrheitsfunktionen $\|\cdot\| \in \tau$ derart existieren, daß $\|\cdot\| : \mathcal{F}^A \rightarrow \{0, 1\}$ gilt. Für diese Wahrheitsfunktion ist die Behauptung dann offenbar richtig.

Es sei eine Abbildung $\alpha : \mathcal{F}_a^A \rightarrow \{0, 1\}$ gegeben. Wir weisen nach, daß die Wahrheitsfunktion $\|\cdot\|_\alpha \in \tau$, für die $\|\cdot\|_\alpha|_{\mathcal{F}_a^A} = \alpha$ gilt, die gesuchten Eigenschaften besitzt. Die Existenz einer solchen Wahrheitsfunktion ist dabei durch Satz 1.29 gesichert.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion im Ausdruckskalkül.

Für die atomaren Ausdrücke ist nichts zu zeigen.

Ist $\varphi \in \mathcal{F}^A$ mit $\|\varphi\|_\alpha \in \{0, 1\}$, so ist auch $\|(\neg\varphi)\|_\alpha \in \{0, 1\}$, denn es ist $\|(\neg\varphi)\|_\alpha = n(\|\varphi\|)$ und es gilt $n(0) = 1$ sowie $n(1) = 0$.

Sind $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^A$ mit $\|\varphi\|_\alpha, \|\psi\|_\alpha \in \{0, 1\}$, so ist auch $\|(\varphi \circ \psi)\|_\alpha \in \{0, 1\}$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Dies folgt aus der Definition der Wahrheitsfunktion und der Abgeschlossenheit von $t, s_{t,n}$ und r_t auf der Menge $\{0, 1\}$, die bereits in Beispiel 1.27 gezeigt wurde.

Insgesamt folgt so induktiv, daß $\|\cdot\|_\alpha : \mathcal{F}^A \rightarrow \{0, 1\}$ gilt. ■

1.51 Bemerkung *Es sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und $\varphi \in \mathcal{F}^A$ ein Ausdruck. Nimmt man an, daß für alle $\|\cdot\| \in \tau$ gilt $\|\varphi\| = a \in T$, so folgt aus Satz 1.50, daß $a \in \{0, 1\}$ ist. Tautologien und Kontradiktionen bezeichnen somit die beiden einzigen Klassen von Ausdrücken, die unter allen Wahrheitsfunktionen eines Wahrheitsraumes den gleichen Wahrheitswert annehmen.*

Tautologien und Kontradiktionen sind offenbar von dem betreffenden Wahrheitsraum abhängig. Wir werden im folgenden untersuchen, ob vergleichbare Wahrheitsräume auch die entsprechenden Tautologien bzw. Kontradiktionen besitzen.

1.52 Satz *Es seien τ_1 und τ_2 Wahrheitsräume mit $\tau_1 \simeq \tau_2$. Es ist $\varphi \in \mathcal{F}^A$ eine Tautologie (bzw. Kontradiktion) bezüglich τ_1 genau dann, wenn φ eine Tautologie (bzw. Kontradiktion) bezüglich τ_2 ist.*

Beweis: Wir weisen die Behauptung für den Fall einer Tautologie nach. Es sei $\tau_1 \simeq \tau_2$. Dann existiert eine bijektive, monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, so daß für alle $\|\cdot\| \in \tau_1$ gilt: $\Omega \circ \|\cdot\| \in \tau_2$.

Nach Lemma 1.42 (ii) sind die Mengen der Wahrheitsfunktionen isomorpher Wahrheitsräume gleich mächtig. Die Abbildung

$$\Omega' : \tau_1 \longrightarrow \tau_2 \quad \|\cdot\| \longmapsto \Omega \circ \|\cdot\|$$

ist bijektiv.

Ist nun $\varphi \in \mathcal{F}^A$ eine Tautologie bzgl. τ_1 , so gilt für alle $\|\cdot\| \in \tau_1$: $\|\varphi\| = 1$.

Ferner ist $\Omega(1) = 1$. Wir erhalten daher $\Omega(\|\varphi\|) = 1$ für alle $\|\cdot\| \in \tau_1$. Wegen der Surjektivität von Ω' folgt: $\|\varphi\| = 1$ für alle $\|\cdot\| \in \tau_2$. ■

Die Mengen der Tautologien und Kontradiktionen isomorpher Wahrheitsräume stimmen nach Satz 1.52 überein. Es ist also möglich, von der durch die Wahrheitsräume repräsentierten Struktur der Semantik einer Sprache MS auf die Tautologien und Kontradiktionen dieser Sprache zu schließen. Umgekehrt läßt sich in Spezialfällen zeigen, daß von den Tautologien (und Kontradiktionen) einer Sprache auch auf die Struktur der Semantik geschlossen werden kann. Wir geben an dieser Stelle lediglich ein Beispiel an.⁹

1.53 Beispiel *Es sei ein Wahrheitsraum der Form $\tau = (t_{\min}, n, T)$ gegeben. In Satz 1.24 ist bereits gezeigt worden, daß für die t -Norm t_{\min} und für ihre duale s -Norm s_{\max} Distributivgesetze gelten. Man folgert hieraus leicht, daß in dem Wahrheitsraum τ die Ausdrücke*

$$\begin{aligned} ((\varphi \wedge (\psi \vee \omega)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega))) \\ ((\varphi \vee (\psi \wedge \omega)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \omega))) \end{aligned} \tag{1.8}$$

für $\varphi, \psi, \omega \in \mathcal{F}^A$ Tautologien sind. Diese entsprechen den klassischen Distributivgesetzen.

Bemerkung 1.25 liefert die Umkehrung: Ist $\tau' = (t', n', T)$ ein beliebiger Wahrheitsraum, t' nach unten halbstetig und T endlich, so daß einer der Ausdrücke (1.8) eine Tautologie ist, so folgt $t'|_{T^2} = t_{\min}|_{T^2}$. Wir erhalten:

⁹Die Frage der Charakterisierbarkeit von Sprachen durch ihre Tautologien hängt eng mit der Frage der Darstellbarkeit logischer Sprachen durch Tautologien zusammen. Diese wird in der klassischen und mehrwertigen Logik häufig diskutiert (vgl. u. a. [Pavelka '79, Gottwald '89, Novak '87, Ebbinghaus '96]). Wir werden ihr hier nicht weiter nachgehen, da sie für die später behandelten Fragestellungen nicht von primärem Interesse ist.

$$\begin{aligned} & \tau' \simeq (t_{\min}, n', T) \\ \Leftrightarrow & \quad \forall \|\cdot\| \in \tau' \text{ und } \forall \varphi, \psi, \omega \in \mathcal{F}^A : \\ & \quad \quad \quad \|((\varphi \wedge (\psi \vee \omega)) \leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)))\| = 1 \\ & \quad \text{oder} \quad \|((\varphi \vee (\psi \wedge \omega)) \leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \omega)))\| = 1 \end{aligned}$$

Die Äquivalenzklasse der Wahrheitsräume, die zu einem Wahrheitsraum des Minimum-Operators isomorph sind, wird in diesem Sinne durch die Tautologien (1.8) charakterisiert.

1.5 Ein Anwendungsbeispiel: Parametrisierte t -Normen

Im dem vorausgegangenen Abschnitt wurden erste theoretische Resultate beschrieben, die aus den Begriffen der Äquivalenz und Isomorphie von Wahrheitsräumen folgen. Das folgende Anwendungsbeispiel zeigt exemplarisch die Bedeutung des Begriffs der Isomorphie von Wahrheitsräumen für die Anwendung der mehrwertigen Logik in der Praxis. Weitere Beispiele hierfür werden sich im Verlaufe der Kapitel 2 und 4 ergeben.

In Abschnitt 1.3 haben wir verschiedene t -Normen aufgelistet. Neben diesen wird in der Forschung zur Fuzzy-Set-Theory häufig die Familie der sogenannten *parametrisierten t -Normen* betrachtet. Diese verfügen über zusätzliche Parameter, die es erlauben sollen, die t -Norm in einer praktischen Anwendung geeignet anzupassen. Wir wollen an dieser Stelle nicht darauf eingehen, wie diese Anpassung erfolgen soll. Dies ist sicher vom konkreten Anwendungsfall abhängig und in der Literatur häufig erörtert worden (vgl. hierzu [Zimmermann '84, Böhme '93] oder [Rommelfanger '94, S. 24 ff.]). Wir wollen vielmehr exemplarisch die Fragestellung beleuchten, ob die so gewonnenen t -Normen tatsächlich in dem Sinne unterschiedlich sind, daß sie verschiedene mehrwertige Sprachen beschreiben.

Ein Beispiel für parametrisierte t -Normen ist die sogenannte *Yager-Verknüpfung* (vgl. [Yager '80]), die durch

$$t_Y^p(a, b) = 1 - \min(1, (1 - a)^p + (1 - b)^p)^{\frac{1}{p}}$$

mit $p > 0$ definiert wird. Man rechnet nach, daß durch t_Y^p für alle $p > 0$ eine t -Norm definiert wird (vgl. auch [Yager '80]). Wir wollen an dieser Stelle auf den Nachweis verzichten.

Zur Analyse des oben skizzierten Sachverhalts definieren wir für $p > 0$ die Abbildung

$$\Omega_p : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \quad a \longmapsto 1 - (1 - a)^p.$$

Die Abbildung Ω_p ist streng monoton steigend und bijektiv. Es gilt ferner:

$$\Omega_p^{-1}(a) = 1 - (1 - a)^{\frac{1}{p}}$$

für alle $a \in [0, 1]$. Mit diesen Überlegungen folgt nun für $p > 0$:

$$\begin{aligned} & t_Y^p(a, b) \\ &= 1 - \min(1, (1 - a)^p + (1 - b)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= 1 - (1 + \min(0, (1 - a)^p + (1 - b)^p - 1))^{\frac{1}{p}} \\ &= 1 - (1 - \max(0, 1 - (1 - a)^p + 1 - (1 - b)^p - 1))^{\frac{1}{p}} \\ &= \Omega_p^{-1}(t_B(\Omega_p(a), \Omega_p(b))) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet t_B die beschränkte Differenz (vgl. Tabelle 1.1). Es ist also:

$$\tau_Y^p = (t_Y^p, n_Y^p, [0, 1]) \simeq \tau_B = (t_B, n_s, [0, 1])$$

mit einer Negation $n_Y^p : [0, 1] \mapsto [0, 1]$, die durch $n_Y^p := \Omega_p^{-1} \circ n_s \circ \Omega_p$ definiert wird.

Insbesondere sind die Wahrheitsräume τ_Y^p für alle $p > 0$ isomorph zueinander, da die Isomorphie eine Äquivalenzrelation ist (vgl. Bemerkung 1.43). *Folglich beschreiben diese Wahrheitsräume im allgemeinen keine grundsätzlich unterschiedlichen Sprachen, unabhängig davon, welcher Parameter $p > 0$ gewählt wird.*

Für die Anwendung folgt hieraus, daß die Verwendung der t -Norm t_Y^p nicht zweckmäßig ist, wenn eine Logik betrachtet werden soll, die nicht mit der Logik vergleichbar ist, die bereits durch t_B beschrieben wird. Insbesondere führt die Wahl des Parameters p in dieser Beziehung zu keiner Änderung. Umgekehrt kann in der Anwendung durchaus eine Parametrisierung in der oben beschriebenen Art sinnvoll sein. Durch die Angabe weiterer monoton steigender Abbildungen können hier andere t -Normen erzeugt werden, die gegebenenfalls algorithmisch einfacher zu handhaben sind oder die den etwaigen Anforderungen besser genügen. Wir werden im Rahmen dieser Arbeit einige Ansätze dazu skizzieren (vgl. Abschnitt 2.4 oder 5.4). Insgesamt zeigt sich, daß das Konzept der Isomorphie von Wahrheitsräumen wesentliche und grundsätzlich neue Ansätze zur Charakterisierung von mehrwertigen Logiksystemen auch für die Anwendung bereitstellt.

1.6 Interpretationen und Modelle

Die Sprachen der Klasse MS sind bisher diskutiert worden, ohne daß ein formaler Weg zur Anwendung der Sprachen auf konkrete Problemstellungen angegeben wurde. Dieser wird in dem folgenden Abschnitt beschrieben. Dabei dient erneut das klassische Vorbild als Orientierung. So gleichen die hier definierten Begriffe der Struktur, der Interpretation und des Modells inhaltlich den entsprechenden Termini der klassischen Logik (vgl. [Ebbinghaus '96, S. 33 ff.]).

Der Grundgedanke bei der Anwendung einer Sprache MS ist, die verschiedenen Sprachelemente mit den Objekten der betrachteten Problemstellung, mit Aussagen über diese Objekte oder mit Bewertungen dieser Aussagen zu identifizieren. Diese Zuordnung wird durch geeignete Abbildungen beschrieben. Diese weisen den Objekten Variablen oder Konstanten, den Aussagen Relationssymbole und den Bewertungen der Aussagen logische Maße zu. Da die Sprachen MS mehrwertige Sprachen sind, können auch Aussagen abgebildet werden, die nicht entweder wahr oder falsch sind, sondern für die ein gradueller Übergang von wahr zu falsch zugelassen wird.

Wir definieren zunächst den Begriff der mehrwertigen Relation und des logischen Maßes.

1.54 Definition *Es sei $U \neq \emptyset$ eine Menge von Objekten, auf welche eine Sprache der Klasse MS angewendet werden soll. U heißt in diesem Zusammenhang der **Grundbereich** oder das **Universum**. Unter einer **mehrwertigen ν -stelligen Relation P über U** verstehen wir eine Abbildung $P : U^\nu \rightarrow [0, 1]$. Die Menge aller ν -stelligen Relationen über einem Universum U wird mit $\mathcal{F}(U^\nu)$ bezeichnet.*

1.55 Bemerkung Mehrwertige Relationen werden auch **Fuzzy-Relationen** genannt. Speziell die 1-stelligen Relationen werden gelegentlich als **unscharfe** (oder **Fuzzy-**) **Prädikate** oder als **unscharfe** (oder **Fuzzy-**) **Mengen** bezeichnet. Die erste Begriffsbildung wird durch die klassische Prädikatenlogik, die zweite durch die Mengentheorie motiviert.

In Kapitel 2 werden wir unscharfe Relationen näher betrachten. An dieser Stelle seien lediglich einige Beispiele genannt.

1.56 Beispiel

(i) Sei $U = \mathbb{R}$, dann definiert

$$P_{<} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (x, y) \longmapsto \begin{cases} 1 & , x < y \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

eine 2-stellige Relation über \mathbb{R} . Die Relation $P_{<}$ entspricht der klassischen ‚ist kleiner als‘ Relation.

(ii) Sei $U = \mathbb{R}$, dann definiert

$$P_{=} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (x, y) \longmapsto 1 - \min(|x - y|, 1)$$

eine 2-stellige Relation über \mathbb{R} . Die Relation $P_{=}$ ist eine mehrwertige Erweiterung der klassischen Gleichheitsrelation (vgl. auch Definition 2.7).

Relationen beschreiben Eigenschaften der Objekte des Grundbereichs oder gewisse Beziehungen zwischen diesen. Demgegenüber sollen logische Maße Beziehungen und Eigenschaften der Relationen abbilden.

1.57 Definition Es sei U ein Universum und $\mathcal{F}(U^\kappa)$ die Menge aller κ -stelligen mehrwertigen Relationen über U . Unter einem ν -stelligen logischen Maß \mathbf{B} der Dimension κ verstehen wir eine Abbildung $\mathbf{B} : \mathcal{F}(U^\kappa)^\nu \longrightarrow [0, 1]$.

Auch der Begriff des Maßes wird erst in Abschnitt 3 näher untersucht. Wir geben hier zwei Beispiele an.

1.58 Beispiel

(i) Es sei U ein Universum. Für $\nu \geq 1$ definiert die Abbildung

$$\mathbf{hgt} : \mathcal{F}(U^\nu) \longrightarrow [0, 1] \quad P \longmapsto \sup_{u \in U^\nu} P(u)$$

ein 1-stelliges Maß der Dimension ν . $\mathbf{hgt}(P)$ wird auch die **Höhe** von P genannt (vgl. Definition 2.1).

(ii) Es sei U ein endliches Universum. Ferner sei $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ eine t -Norm. Die Abbildung

$$\mathbf{I}_P : \mathcal{F}(U)^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \longmapsto \frac{\sum_{u \in U} t(P(u), Q(u))}{\sum_{u \in U} P(u)}$$

ist ein 2-stelliges Maß der Dimension 1.

Die eingangs erwähnte Zuordnung der Elemente der Sprachen der Klasse MS zu Inhalten erfolgt durch eine Abbildung, die den Variablen und Konstanten Objekte eines Universums zuweist und den Relations- bzw. Maßsymbolen mehrwertige Relationen bzw. logische Maße zuordnet. Diese Abbildung wird auch *Struktur* genannt.

1.59 Definition *Es sei U ein Grundbereich und \mathcal{A} das Alphabet einer Sprache der Klasse MS. Unter einer **Struktur über U** verstehen wir eine Abbildung, die auf der Menge der Maß- und Relationssymbole sowie Konstanten und Variablen definiert ist. Für sie gilt:*

- (i) *Für jedes ν -stellige Relationssymbol $R \in \mathcal{A}$ ist $\mathfrak{S}(R)$ eine ν -stellige Relation über U .*
- (ii) *Für jedes ν -stellige Maßsymbol $\mathbf{M} \in \mathcal{A}$ der Dimension κ ist $\mathfrak{S}(\mathbf{M})$ ein ν -stelliges logisches Maß der Dimension κ .*
- (iii) *Für jede Konstante $c \in \mathcal{A}$ ist $\mathfrak{S}(c)$ ein Element von U .*
- (iv) *Für jede Variable $x \in \mathcal{A}$ ist $\mathfrak{S}(x)$ ein Element aus U .*

Die Einschränkung einer Struktur \mathfrak{S} auf die Menge der Variablen wird auch *Belegung* von \mathfrak{S} genannt. Die Begriffe Struktur und Belegung entsprechen so den korrespondierenden Begriffen der klassischen Prädikatenlogik (vgl. [Ebbinghaus '96, S. 28 ff.]).

Durch die Struktur wird jedem Symbol einer Sprache – und daher auch jedem Ausdruck – eine Bedeutung zugeordnet. Damit wird die inhaltliche Bedeutung einer Sprache der Klasse MS festgelegt. Um jedoch den Wahrheitsgehalt der Ausdrücke vor dem Hintergrund dieser Festlegung bestimmen zu können, sind zwei weitere Spezifikationen notwendig. Zum einen muß ein Zusammenhang zwischen den Wahrheitswerten der atomaren Ausdrücke und den Funktionswerten der entsprechenden Relationen und Maße hergestellt werden. Zum anderen ist die semantische Struktur der Sprache festzulegen. Beides findet in dem Begriff der *Interpretation* seinen Ausdruck.

1.60 Definition *Es sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und \mathfrak{S} eine Struktur. Unter einer **τ -Interpretation von \mathfrak{S}** verstehen wir ein Paar $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$. Dabei ist $\|\cdot\| \in \tau$ eine Wahrheitsfunktion derart, daß für alle Variablen oder Konstanten q_1, \dots, q_ν , ν -stelligen Relationssymbole R , κ -stelligen Relationssymbole R_1, \dots, R_ν und ν -stelligen Maßsymbole \mathbf{M} mit der Dimension κ gilt:*

$$\mathfrak{S}(R)(\mathfrak{S}(q_1), \dots, \mathfrak{S}(q_\nu)) = \|Rq_1 \dots q_\nu\| \quad (1.9)$$

$$\mathfrak{S}(\mathbf{M})(\mathfrak{S}(R_1), \dots, \mathfrak{S}(R_\nu)) = \|\mathbf{M}R_1 \dots R_\nu\| \quad (1.10)$$

Der hier eingeführte Interpretations-Begriff unterscheidet sich von dem der klassischen und mehrwertigen Vorbilder (vgl. [Ebbinghaus '96, S. 35 f.] oder [Gottwald '89]), da hier die Verwendung verschiedener Sprachklassen zugelassen wird. Offenbar ist dabei nicht jeder Wahrheitsraum zur Darstellung einer Interpretation einer gegebenen Struktur geeignet. So müssen mindestens diejenigen Wahrheitswerte in der Menge der Wahrheitswerte des Wahrheitsraumes enthalten sein, die auch im Bild der betrachteten Relationen und Maße vorkommen. Es zeigt sich, daß diese Bedingung bereits hinreichend für die Existenz einer entsprechenden Interpretation ist.

1.61 Satz *Es sei \mathfrak{S} eine Struktur über eine Universum U und $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum. Wir definieren die Menge*

$$\mathcal{T} := \left(\bigcup_{P \in \text{Im}(\mathfrak{S})} \text{Im}(P) \right) \cup \left(\bigcup_{\mathbf{B} \in \text{Im}(\mathfrak{S})} \text{Im}(\mathbf{B}) \right).$$

Gilt $\mathcal{T} \subseteq T$, so existiert eine τ -Interpretation $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ von \mathfrak{S} .

Beweis: Es ist zu zeigen, daß eine geeignete Wahrheitsfunktion $\|\cdot\| \in \tau$ existiert.

Jeder atomare Ausdruck $\varphi \in \mathcal{F}_a^{\mathcal{A}}$ ist entweder von der Gestalt $\varphi = Rq_1 \dots q_\nu$ oder $\varphi = \mathbf{M}R_1 \dots R_\nu$. Dabei bezeichnen q_1, \dots, q_ν Variablen oder Konstanten, R ein ν -stelliges Relationssymbol, R_1, \dots, R_ν κ -stellige Relationssymbole und \mathbf{M} ein ν -stelliges Maßsymbol der Dimension κ . Wir definieren die Abbildung

$$\alpha_{\mathfrak{S}} : \mathcal{F}_a \longrightarrow T \quad \varphi \longmapsto \begin{cases} \mathfrak{S}(R)(\mathfrak{S}(q_1), \dots, \mathfrak{S}(q_\nu)) & \text{für } \varphi = Rq_1 \dots q_\nu \\ \mathfrak{S}(\mathbf{M})(\mathfrak{S}(R_1), \dots, \mathfrak{S}(R_\nu)) & \text{für } \varphi = \mathbf{M}R_1 \dots R_\nu \end{cases}$$

Da $\mathcal{T} \subseteq T$ gilt, ist dies stets möglich.

Nach Satz 1.29 existiert $\|\cdot\| \in \tau$, so daß $\|\cdot\| \|\cdot\|_{\mathcal{F}_a^{\mathcal{A}}} = \alpha_{\mathfrak{S}}$ gilt. Also gilt für diese Wahrheitsfunktion

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(R)(\mathfrak{S}(q_1), \dots, \mathfrak{S}(q_\nu)) &= \|Rq_1 \dots q_\nu\| \\ \mathfrak{S}(\mathbf{M})(\mathfrak{S}(R_1), \dots, \mathfrak{S}(R_\nu)) &= \|\mathbf{M}R_1 \dots R_\nu\| \end{aligned}$$

und $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ ist eine τ -Interpretation von \mathfrak{S} . ■

1.62 Bemerkung

- (i) *Es existiert stets eine τ -Interpretation, wenn $T = [0, 1]$ gilt.*
- (ii) *Werden nur klassische Relationen betrachtet (d. h. $\mathcal{T} = \{0, 1\}$), so existiert stets eine τ -Interpretation mit einem Wahrheitsraum der Gestalt $\tau = (t, n, \{0, 1\})$. Diese Interpretation entspricht – von etwaig vorkommenden Maßsymbolen abgesehen – der Interpretation einer klassischen Logik.*
- (iii) *Es sei $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ eine τ -Interpretation. Ferner seien P_1, \dots, P_ν mehrwertige Relationen über U für $\nu \geq 1$ und $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_\kappa$ für $\kappa \geq 0$ logische Maße. Zur Vereinfachung der Sprechweise nennen wir \mathfrak{I}_τ eine τ -Interpretation von P_1, \dots, P_ν und $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_\kappa$, wenn gilt:*

$$\left\{ P_1, \dots, P_\nu, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_\kappa \right\} \subseteq \text{Im}(\mathfrak{S})$$

Für $i = 1, \dots, \nu$ sei dann $\hat{P}_i \in \mathcal{A}$ mit $\mathfrak{S}(\hat{P}_i) = P_i$ und für $j = 1, \dots, \kappa$ sei $\hat{\mathbf{B}}_j \in \mathcal{A}$ mit $\mathfrak{S}(\hat{\mathbf{B}}_j) = \mathbf{B}_j$.

Zum Abschluß soll ein wichtiger Zusammenhang zwischen Interpretationen bezüglich verschiedener Wahrheitsräume darlegen werden, der sich aus dem Begriff der Äquivalenz von Wahrheitsräumen ableiten läßt.

1.63 Satz *Es sei \mathfrak{S} eine Struktur über einem Universum U und $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ sowie $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ zwei Wahrheitsräume. Ferner seien $\mathfrak{I}_{\tau_1} = (\|\cdot\|_1, \mathfrak{S})$ und $\mathfrak{I}_{\tau_2} = (\|\cdot\|_2, \mathfrak{S})$ zwei Interpretationen von \mathfrak{S} . Dann gilt:*

$$\tau_1 \sim \tau_2 \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}} : \|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_2$$

Beweis: Es sind $\mathfrak{I}_{\tau_1} = (\|\cdot\|_1, \mathfrak{S})$ und $\mathfrak{I}_{\tau_2} = (\|\cdot\|_2, \mathfrak{S})$ Interpretationen der gleichen Struktur \mathfrak{S} . Daher gilt nach Definition 1.60 und den Gleichungen (1.9) und (1.10):

$$\begin{aligned} \|Rq_1 \dots q_\nu\|_1 &= \mathfrak{S}(R)(\mathfrak{S}(q_1), \dots, \mathfrak{S}(q_\nu)) = \|Rq_1 \dots q_\nu\|_2 \\ \|\mathbf{M}R_1 \dots R_\nu\|_1 &= \mathfrak{S}(\mathbf{M})(\mathfrak{S}(R_1), \dots, \mathfrak{S}(R_\nu)) = \|\mathbf{M}R_1 \dots R_\nu\|_2 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen q_1, \dots, q_ν beliebige Variablen oder Konstanten, R ein beliebiges ν -stelliges Relationssymbol, R_1, \dots, R_ν beliebige κ -stellige Relationssymbole und \mathbf{M} ein beliebiges ν -stelliges Maßsymbol der Dimension κ .

Es gilt daher: $\|\cdot\|_1|_{\mathcal{F}^{\mathcal{A}}} = \|\cdot\|_2|_{\mathcal{F}^{\mathcal{A}}}$.

Nach Bemerkung 1.33 (iii) folgt für alle $\varphi \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$: $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\|_2$. ■

Sind also zwei τ -Interpretationen der gleichen Struktur gegeben und sind die entsprechenden Wahrheitsräume äquivalent, so stimmen sowohl die Bedeutungen der Ausdrücke als auch ihre Bewertungen mit Wahrheitswerten überein. Beide Interpretationen beschreiben dann die gleiche Sprache.

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Definition des Begriffes des Modells ab. Auch dieser ist eine Erweiterung des entsprechenden klassischen Konzeptes.

1.64 Definition *Es sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ eine τ -Interpretation. Für $\alpha \in [0, 1]$ heißt die τ -Interpretation \mathfrak{I}_τ ein **α -Modell** eines Ausdrucks $\varphi \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$, wenn gilt:*

$$\|\varphi\| = \alpha .$$

1.65 Bemerkung

- (i) *Ist $\varphi \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ eine Tautologie in einem Wahrheitsraum τ , so ist jede Interpretation $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ ein 1-Modell von φ . Dies gilt unabhängig von der Struktur \mathfrak{S} .*
- (ii) *Sind τ_1 und τ_2 Wahrheitsräume mit $\tau_1 \sim \tau_2$ und \mathfrak{S} eine Struktur, so ist nach Satz 1.63 $\mathfrak{I}_{\tau_1} = (\|\cdot\|_1, \mathfrak{S})$ genau dann ein α -Modell eines Ausdrucks $\varphi \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$, wenn $\mathfrak{I}_{\tau_2} = (\|\cdot\|_2, \mathfrak{S})$ ein α -Modell von φ ist.*

1.7 Abschließende Bemerkungen

In den Abschnitten 1.2 bis 1.6 wurden die Sprachen der Klasse MS eingeführt und grundlegende Eigenschaften dieser Sprachfamilie nachgewiesen. Jede Sprache der Klasse MS beschreibt eine mehrwertige Logik und erweitert die klassischen logischen Sprachen (vgl. Beispiel 1.27). Diese Erweiterung erfolgt in zweifachem Sinne. Zum einen wird die klassische Logik syntaktisch durch das Konzept der Maßsymbole ergänzt. Zum anderen werden Wahrheitswerte beliebiger Anzahl zugelassen.

Während die syntaktische Struktur aller Sprachen der Klasse MS identisch ist (vgl. Abschnitt 1.2), unterscheiden sich im allgemeinen ihre semantischen Strukturen. Dabei verstehen wir unter einer semantischen Struktur einer Sprache die Gesamtheit aller semantisch zulässigen Bewertungen ihrer Ausdrücke. Um eine Untersuchung dieser Strukturen zu ermöglichen, mußte der Begriff der Verschiedenheit von semantischen Strukturen beziehungsweise ihre Vergleichbarkeit zunächst genauer spezifiziert werden. Daher wurde in Abschnitt 1.4 zunächst der Begriff des *Wahrheitsraumes* eingeführt. Jeder Wahrheitsraum legt fest, welche Bewertungen der Ausdrücke mit Wahrheitswerten möglich sind und bestimmt so die semantische Struktur einer Sprache der Klasse MS. Eine zulässige Bewertung der Ausdrücke einer Sprache MS bezüglich eines Wahrheitsraumes wurde als *Wahrheitsfunktion* bezeichnet (vgl. Definition 1.26). Jeder Wahrheitsraum kann also mit der Menge der von ihm definierten Wahrheitsfunktionen identifiziert werden (vgl. S. 26). Dabei ist die Zuordnung von Wahrheitsräumen zu der Menge der Wahrheitsfunktionen nicht eindeutig, da verschiedene Wahrheitsräume die gleiche Menge von Wahrheitsfunktionen beschreiben können.

Wir haben uns diese zuletzt genannte Tatsache zunutze gemacht, um ein erstes Kriterium für die Vergleichbarkeit von semantischen Strukturen zu formulieren; namentlich das der *Äquivalenz von Wahrheitsräumen*. Zwei Wahrheitsräume heißen nach Definition 1.32 äquivalent, wenn die Mengen ihrer Wahrheitsfunktionen übereinstimmen. In diesem Fall besitzen die durch sie charakterisierten Sprachen nicht nur die gleiche Syntax, sie verfügen auch über die gleiche Semantik. *In diesem Sinne sind äquivalente Wahrheitsräume unterschiedliche mathematische Darstellungsformen der gleichen logischen Sprache*. Umgekehrt besitzen Sprachen, die durch nicht-äquivalente Wahrheitsräume beschrieben werden, nicht die gleiche semantische Struktur und sind daher verschieden. *Insofern geben die Äquivalenzsätze 1.34 und 1.36 einfache Kriterien für die Unterscheidung von semantischen Strukturen an*.

Eine zweite Form der Vergleichbarkeit von Sprachen der Klasse MS wurde mit dem Begriff der *Isomorphie* von Wahrheitsräumen eingeführt. Dieser ermöglicht es, auch Wahrheitsräume zu vergleichen, die bezüglich verschiedener Mengen von Wahrheitswerten gebildet werden. Sind zwei Wahrheitsräume isomorph, so existiert eine bijektive und streng monoton steigende Abbildung zwischen den Mengen der Wahrheitswerte, die gleichzeitig die Menge der Wahrheitsfunktionen bijektiv aufeinander abbildet (vgl. S. 35 f.). Isomorphe Wahrheitsräume beschreiben nicht Sprachen mit gleicher Semantik, wie dies bei der Äquivalenz von Wahrheitsräumen der Fall ist. Allerdings sind die Sprachen isomorpher Wahrheitsräume in dem Sinne verwandt, daß sich die Wahrheitswerte der einen Sprache durch die der anderen ersetzen lassen, so daß ein Ausdruck φ in der einen Sprache genau dann ‘wahrer’ als ein Ausdruck ψ ist, wenn dies auch in der anderen Sprache der Fall ist. Insbesondere verfügen Sprachen isomorpher Wahrheitsräume über die gleichen Mengen von Tautologien und Kontradiktionen.

Die Ausführungen des zurückliegenden Kapitels hatten das Ziel, die mathematischen Grundlagen für die folgenden Untersuchungen bereitzustellen. Daher wurde auf die Definition einiger in der Logik üblicher Begriffe verzichtet und die Betrachtung vieler für die Logik wichtiger Aspekte erfolgte eher am Rande. Hier sind Stichwörter wie die *Ableitbarkeit* bzw. die *Folgerung*, die *Vollständigkeit* sowie die *Entscheidbarkeit* und *Axiomatisierbarkeit* der Sprachen MS zu nennen. Prinzipiell erscheint es uns möglich, diese Begriffe auch für Sprachen der Klasse MS zu definieren und die entsprechenden Untersuchungen durchzuführen. Insbesondere erscheint uns eine Untersuchung solcher Eigenschaften der logischen Sprachen, die bei Isomorphie der Wahrheitsräumen erhalten bleiben, von großem Interesse. Es besteht dabei die Hoffnung, durch diese Untersuchungen weitere Eigenschaften der verschiedenen Klassen von Wahrheitsräumen zu finden, die das Verständnis der Theorie fördern und damit letztlich auch ihre Anwendung erleichtern.

Kapitel 2

Mehrwertige Relationen

Zusammenfassung:

Gegenstand dieses Kapitels ist die Untersuchung von mehrwertigen Relationen und deren Verknüpfungen. Dabei erfolgt die Diskussion stets vor dem Hintergrund der Sprachen der Klasse MS, die in Kapitel 1 eingeführt wurden. Dies erlaubt es, alle aus der Fuzzy-Set-Theory bekannten Verknüpfungen mehrwertiger Relationen aus einem mehrwertigen logischen Konzept heraus zu begründen. Dieser Ansatz ermöglicht es insbesondere, einen systematischen Vergleich von Systemen mehrwertiger Relationen vorzunehmen. Dabei zeigt sich, daß die semantischen Klassen der Sprachen MS entsprechende Klassen von Relationensystemen induzieren. Wesentliche Aussagen enthält hier der Isomorphiesatz 2.19. Die Klassifizierung der Relationensysteme erweitert die bisherige Theorie der Fuzzy-Mengen um einen wesentlichen Aspekt, aus dem sich wichtige Beiträge für die Anwendung der Fuzzy-Set-Theory ergeben.

2.1 Mehrwertige Relationen und Fuzzy-Mengen

Eine mehrwertige ν -stellige Relation ist, wie in Definition 1.54 festgelegt, eine Abbildung $U^\nu \rightarrow [0, 1]$. Wir wollen diese Begriffsbildung an dieser Stelle nachträglich motivieren und Anknüpfungspunkte zum klassischen Begriff der Relation aufzeigen.

Mehrwertige und klassische Relationen repräsentieren Eigenschaften von Elementen eines Universums oder Beziehungen zwischen diesen. In diesem Sinne sollen beide Konzepte die gleiche inhaltliche Funktionalität besitzen. Während klassische Relationen jedoch Eigenschaften oder Beziehungen abbilden, die entweder ‘zutreffen’ oder ‘nicht zutreffen’, sollen mehrwertige Relationen einen graduellen Übergang bei der Darstellung dieser Aussagen zulassen. Zur Abbildung dieser Übergänge werden den entsprechenden Elementen des Grundbereichs Werte aus $[0, 1]$ zugewiesen. Dabei treffen Aussagen zu, wenn den Elementen der Wert 1 zugeordnet wird. Werden Elemente mit 0 bewertet, so ist die korrespondierende Aussage nicht zutreffend. Graduelle Abstufungen werden durch Zahlen aus dem Intervall $]0, 1[$ beschrieben. Diese Bedeutung der Werte des Intervalls $[0, 1]$ entspricht der Interpretation der Wahrheitswerte von Ausdrücken, die in Kapitel 1 eingeführt worden ist.

Neben den oben beschriebenen inhaltlichen Parallelen zwischen mehrwertigen und klassischen Relationen existieren weitgehende konzeptionelle Übereinstimmungen zwischen beiden Ansätzen. Unter einer (klassischen) ν -stelligen Relation P über einer Grundmenge U versteht man eine Teilmenge $P \subseteq U^\nu$ (vgl. bspw. [Reinhardt '73, S. 31]). So sind klassische Äquivalenzrelationen Mengen von Paaren eines Grundbereichs, die spezifische Eigenschaften besitzen¹. Jede Teilmenge $P \subseteq U^\nu$ kann mit ihrer charakteristischen Funktion χ_P identifiziert werden. Diese ist definiert durch

$$\chi_P : U^\nu \longrightarrow \{0, 1\} \quad u \longmapsto \begin{cases} 1 & u \in P \\ 0 & u \notin P \end{cases}$$

Die Zuordnung von Teilmengen zu ihren charakteristischen Funktionen ist offenbar bijektiv, so daß sich jede klassische ν -stellige Relation $P \subseteq U^\nu$ mit ihrer charakteristischen Funktion $\chi_P : U^\nu \longrightarrow \{0, 1\}$ identifizieren läßt. Wird einem ν -Tupel der Wert 1 zugeordnet, so trifft die mit der Relation identifizierte Aussage auf dieses Tupel zu, andernfalls nicht. Mehrwertige Relationen können in diesem Sinne als einfache formale Erweiterung der charakteristischen Funktion klassischer Relationen aufgefaßt werden. Insbesondere sind mehrwertige, einstellige Relationen Erweiterungen des klassischen Konzepts der Teilmengen, was im nachhinein die Bezeichnung dieser Relationen als *mehrwertige* (oder *Fuzzy*)-*Mengen* rechtfertigt (vgl. Bemerkung 1.55).

Eine formale Trennung zwischen der Relation auf der einen und der ihr zugeordneten Abbildung auf der anderen Seite ist im folgenden weder für klassische noch für mehrwertige Relationen notwendig. Wir werden daher jede klassische ν -stellige Relation als Abbildung $U^\nu \longrightarrow \{0, 1\}$ auffassen, wenn Parallelen zwischen mehrwertiger und klassischer Theorie verdeutlicht werden sollen. Die Menge aller klassischen ν -stelligen Relationen sei dann mit $\mathcal{K}(U^\nu)$ bezeichnet. Es ist

$$\mathcal{K}(U^\nu) := \left\{ P \in \mathcal{F}(U^\nu); \text{Im}(P) \subseteq \{0, 1\} \right\} \subseteq \mathcal{F}(U^\nu)$$

Wir werden zudem auf die in der Fuzzy-Set-Theory übliche Unterscheidung zwischen der mehrwertigen Relation und der sie darstellenden Abbildung verzichten². Allerdings ist dieser Unterschied rein formaler Natur. Alle Ergebnisse des folgenden Kapitels lassen sich entsprechend mit den üblichen Notationen formulieren. Das von uns gewählte Format vereinfacht hier die Darstellung.

Schließlich werden wir das Zeichen ‘ \sim ’ nicht verwenden, das in der Fuzzy-Set-Theory benutzt wird, um Fuzzy-Mengen oder andere Fuzzy-Objekte von den entsprechenden klassischen Vorbildern zu unterscheiden. Eine solche Differenzierung ist in dieser Arbeit nicht notwendig.

Der Aufbau des Kapitels 2 ist wie folgt. In Abschnitt 2.2 werden grundlegende Begriffe der Theorie der mehrwertigen Relationen eingeführt. In Abschnitt 2.3 werden im Anschluß verallgemeinerte Mengenoperationen eingeführt. Dabei induzieren unterschiedliche

¹ $E \subseteq U^2$ ist Äquivalenzrelation gdw. für alle $x, y, z \in U$ gilt: (i) $(x, x) \in E$, (ii) $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$, (iii) $(x, y) \in E \wedge (y, z) \in E \Rightarrow (x, z) \in E$ (vgl. etwa [Meyberg '80, S. 9 f.]).

² Eine *Fuzzy-Menge* \tilde{A} über einem Universum U wird in der Literatur formal durch

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)); x \in U\}$$

definiert (vgl. u. a. [Gottwald '93, Kruse '95, Tanaka '96, Klir '97, Morderson '98]). Dabei wird die Abbildung $\mu_{\tilde{A}} : U \longrightarrow [0, 1]$ als *Zugehörigkeitsfunktion* (engl.: membership function) bezeichnet.

Sprachen der Klasse MS verschiedene Verallgemeinerungen der Mengenoperationen. Diese Mengenoperationen sind zwar in der Fuzzy-Set-Theory bekannt, die von uns in dieser Arbeit verwendete Methode der Einführung der Operationen auf der Basis der Sprachen der Klasse MS erlaubt jedoch erstmals, eine systematische Untersuchung verschiedener mehrwertiger Mengenoperatoren vorzunehmen. Insbesondere werden die Begriffe der Äquivalenz bzw. Isomorphie von Mengensystemen eingeführt und wesentliche Eigenschaften solcher Systeme aufgezeigt. Schließlich werden Zusammenhänge zu den entsprechenden Begriffen für Sprachen der Klasse MS verdeutlicht. Hier sind es vor allem Lemma 2.14 und Satz 2.19 zu nennen. Aus diesen Untersuchungen ergeben sich wesentliche Konsequenzen für die Anwendung von Fuzzy-Mengen und zwar auch in Gebieten, die nicht unmittelbar mit den Inhalten dieser Arbeit in Zusammenhang stehen. Wir gehen darauf exemplarisch im Anwendungsbeispiel des Abschnitts 2.4 ein.

2.2 Grundlegende Begriffe

Wir beginnen mit der Einführung von grundlegenden Begriffen, die die Eigenschaften von mehrwertigen Relationen charakterisieren. Diese entsprechen den üblichen Termini und Methoden der Fuzzy-Theorie (vgl. z. B. [Bandemer '93, Kruse '95, Klir '97]).

2.1 Definition *Es sei U ein Universum.*

(i) Der **Träger** einer mehrwertigen Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ ist definiert als die Menge

$$\text{supp}(P) := \{u \in U^\nu; P(u) > 0\}$$

(ii) Der **Kern** einer mehrwertigen Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ ist definiert als die Menge

$$\text{ker}(P) := \{u \in U^\nu; P(u) = 1\}$$

(iii) Eine mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ heißt **normalisiert** (oder **normal**), wenn $\text{ker}(P) \neq \emptyset$ gilt.

(iv) Die **Höhe** einer mehrwertigen Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ ist definiert als

$$\text{hgt}(P) := \sup_{u \in U^\nu} P(u)$$

(vgl. auch Beispiel 1.58).

(v) Für ein $\alpha \in [0, 1]$ und eine mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ heißt die Menge

$$[P]_\alpha := \{u \in U^\nu; P(u) \geq \alpha\}$$

die **α -Niveau-Menge** von P .

(vi) Für eine mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ und $u \in U^\nu$ bezeichnen wir den Wert von $P(u)$ als den **Zugehörigkeitswert** von u zu der Relation P .

2.2 Bemerkung

- (i) Für jede mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ sind Träger und Kern der Relation klassische Teilmengen von U^ν .
- (ii) $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ ist genau dann eine klassische Relation, wenn Träger und Kern identisch sind, d. h.

$$P \in \mathcal{K}(U^\nu) \Leftrightarrow \ker(P) = \text{supp}(P)$$

Im folgenden definieren wir den Begriff der Kardinalität einer mehrwertigen Relation. Er erweitert in naheliegender Weise den klassischen Begriff der Kardinalität einer Menge.

2.3 Definition Ist U mit $|U| = \nu$ ein endliches Universum, so sei für alle $P \in \mathcal{F}(U)$ die **Kardinalität** von P definiert als

$$|P| := \sum_{i=1}^{\nu} P(u_i)$$

Ist U eine unendliche Menge mit dem Inhaltsmaß λ , so sei

$$|P| := \int_U P(u) d\lambda$$

für alle $P \in \mathcal{F}(U)$.

Wir definieren abschließend die Begriffe der leeren Relation sowie des Enthalten-Seins und der Gleichheit von mehrwertigen Relationen. Auch diese Begriffe sind einfache Erweiterungen der klassischen Vorbilder.

2.4 Definition

- (i) Eine mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ heißt **leer**, wenn $\text{hgt}(P) = 0$ gilt. Wir vereinbaren das Symbol \emptyset für leere Relationen.
- (ii) Die Relationen $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ heißen **gleich** (in Zeichen: $P = Q$), wenn für alle $u \in U^\nu$ gilt: $P(u) = Q(u)$.
- (iii) Eine Relation $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ heißt **enthalten** in der Relation $Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ (in Zeichen: $P \subseteq Q$), wenn für alle $u \in U^\nu$ gilt: $P(u) \leq Q(u)$.

2.5 Bemerkung

- (i) Ist $\emptyset \subseteq U$ die klassische leere Menge, so definiert ihre charakteristische Funktion eine leere mehrwertige Menge. Es ist $\emptyset \subseteq P$ für alle $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$.
- (ii) Gleichheit und Inklusion von Fuzzy-Relationen können als 2-stellige binäre Maße – d. h. als Abbildungen $\mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow \{0, 1\}$ – aufgefaßt werden. Mehrwertige Verallgemeinerungen beider Begriffe werden erst in Abschnitt 3 betrachtet.

Wir schließen die Definition des Kartesischen Produkts für Fuzzy-Relationen an.

2.6 Definition *Es seien U und V zwei Universen, $P \in \mathcal{F}(U^\nu), Q \in \mathcal{F}(V^\kappa)$. Ferner sei eine t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ gegeben. Dann heißt die mehrwertige Relation*

$$P \otimes_t Q : \mathcal{F}(U^\nu \times V^\kappa) \rightarrow [0, 1]$$

$$((u_1, \dots, u_\nu), (v_1, \dots, v_\kappa)) \mapsto t(P(u_1, \dots, u_\nu), Q(v_1, \dots, v_\kappa))$$

das **Kartesische Produkt** von P und Q bezüglich t .

Zum Abschluß dieses Abschnitts wenden wir uns einer speziellen Klasse von zweistelligen mehrwertigen Relationen zu. Diese sind die mehrwertigen Gleichheitsrelationen. Mehrwertige Gleichheitsrelationen beschreiben graduell die Übereinstimmung zweier Objekte eines Universums. Sie werden hier aus zwei Gründen diskutiert. Zum einen soll ein konkretes (nicht-triviales) Beispiel für mehrwertige Relationen gegeben werden. Zum anderen dient die Einführung der Vorbereitung des Konzepts des Gleichheitsmaßes, das wir in Kapitel 3 einführen.

2.7 Definition *Es sei U ein Universum und $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm. Eine Relation $E \in \mathcal{F}(U^2)$ heißt **Gleichheitsrelation** oder **Äquivalenzrelation** bezüglich t , wenn sie für alle $u_1, u_2, u_3 \in U$ die folgenden Eigenschaften besitzt:*

$$(i) \quad E(u_1, u_1) = 1 \quad (\text{Reflexivität})$$

$$(ii) \quad E(u_1, u_2) = E(u_2, u_1) \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(iii) \quad t(E(u_1, u_2), E(u_2, u_3)) \leq E(u_1, u_3) \quad (\text{Transitivität})$$

Mehrwertige Gleichheitsrelationen können als Erweiterungen des klassischen Begriffs der Äquivalenzrelation interpretiert werden. Wir verdeutlichen dies in der folgenden Bemerkung.

2.8 Bemerkung *Es sei $E \in \mathcal{F}(U^2)$ eine Gleichheitsrelation bzgl. einer t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ und ferner sei $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Dann gilt in jeder τ -Interpretation $\mathfrak{J}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ von E :*

$$(i) \quad \|\widehat{E}q_1q_1\| = 1$$

$$(ii) \quad \|(\widehat{E}q_1q_2 \leftrightarrow \widehat{E}q_2q_1)\| = 1$$

$$(iii) \quad \|((\widehat{E}q_1q_2 \wedge \widehat{E}q_2q_3) \rightarrow \widehat{E}q_1q_3)\| = 1$$

für alle Variablen oder Konstanten q_1, q_2 und q_3 . Für $E \in \mathcal{F}(U^\nu)$ ist zudem $\widehat{E} \in \mathcal{A}$ mit $\mathfrak{S}(\widehat{E}) = E$ (vgl. Bemerkung 1.62 (iii)). Die obigen Ausdrücke entsprechen den klassischen Ausdrücken, die im allgemeinen zur Definition von Äquivalenzrelationen verwendet werden (vgl. S. 52). Der Begriff der mehrwertigen Äquivalenzrelation ist in diesem Sinne eine Erweiterung des klassischen Konzeptes.

Wir geben einige Beispiele an. Diese sind [Kruse '95, S. 48 f.] entnommen.

2.9 Beispiel

(i) Es sei E' eine beliebige Äquivalenzrelation auf einem Universum U . Dann definiert die Abbildung

$$E : U^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (u_1, u_2) \longmapsto \begin{cases} 1 & (u_1, u_2) \in E' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $u_1, u_2 \in U$ eine mehrwertige Gleichheitsrelation auf U . Dies folgt aus elementaren Umformungen.

(ii) Es sei $\delta : U^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ eine Metrik auf einem Universum U . Dann definiert

$$E : U^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (u_1, u_2) \longmapsto 1 - \min(\delta(u_1, u_2), 1)$$

eine mehrwertige Gleichheitsrelation bezüglich der beschränkten Differenz t_B .

2.3 Mehrwertige Mengenoperationen

Zu Beginn des Abschnitts 2.1 haben wir bereits angemerkt, daß mehrwertige Relationen Erweiterungen des klassischen Konzepts der Teilmenge sind. Diese Erweiterung wäre unvollständig, wenn sich nicht auch die Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung und Komplement für mehrwertige Relationen definieren ließen. Wir werden diese in dem nun folgenden Abschnitt einführen und wesentliche Eigenschaften der Erweiterungen darstellen.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist, daß sich die klassischen Mengenoperationen stets in einem aussagenlogischen Sinne interpretieren lassen. So gelten für die klassischen Mengenoperationen die folgenden Regeln:

$$x \in P \cup Q \Leftrightarrow x \in P \vee x \in Q \quad (2.1)$$

$$x \in P \cap Q \Leftrightarrow x \in P \wedge x \in Q \quad (2.2)$$

$$x \in P^c \Leftrightarrow \neg(x \in P) \quad (2.3)$$

Die angestrebte Erweiterung der Mengenoperationen wird vor diesem Hintergrund in zweierlei Hinsicht erfolgen. Zum einen sollen sich bei der Einschränkung der betrachteten Relationen auf den klassischen Fall³ stets die Gleichungen (2.1) – (2.3) ergeben. Zum anderen sollen für mehrwertige Relationen entsprechende mehrwertige Beziehungen gelten. So wird der Durchschnitt zweier mehrwertiger Relationen in einer Sprache der Klasse MS den gleichen Wahrheitswert besitzen, der auch der Konjunktion der beiden ursprünglichen Relationen zukommt.

Da die Sprachen der Klasse MS verschiedene semantische Strukturen aufweisen (vgl. Kapitel 1), ergeben sich für die Erweiterung der Mengenoperationen ebenfalls unterschiedliche Möglichkeiten. Ein Schwerpunkt der folgenden Untersuchungen wird daher sein, unter welchen Voraussetzungen die strukturellen Eigenschaften der Sprachen der Klasse MS einen Vergleich der entsprechenden Erweiterungen der Mengentheorie erlauben und welche Konsequenzen sich hieraus ergeben.

³d. h. $P, Q \in \mathcal{K}(U^\nu)$

Die folgenden Ausführungen unterscheiden sich von dem in der Fuzzy-Set-Theory üblichen Vorgehen durch den strengen Bezug zur mehrwertigen Logik, den wir stets herstellen, sowie durch eine allgemeinere Begriffsbildung. So werden die Mengenoperationen selbst nicht explizit definiert, wie dies in der Fuzzy-Set-Theory geschieht, sondern lediglich charakteristische Eigenschaften dieser Verknüpfungen angegeben. Hierdurch eröffnet sich die Möglichkeit, die Ergebnisse des Kapitels 1 in die folgenden Überlegungen zu integrieren und auf einfache Weise neue Aussagen über die Vergleichbarkeit von mehrwertigen Relationensystemen abzuleiten. Diese führen zu wichtigen Konsequenzen für die Theorie und Anwendung dieser Systeme, die wir am Ende dieses Abschnitts exemplarisch aufzeigen.

2.3.1 Mehrwertige Relationensysteme

Wir beginnen mit der Einführung der mehrwertigen Mengenoperationen. Dabei lassen wir auch gewisse Teilsysteme der Menge aller mehrwertigen Relationen zu.

2.10 Definition *Es sei $\{\emptyset, U^\nu\} \subseteq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}(U^\nu)$ eine Familie von ν -stelligen Relationen. Ferner seien Abbildungen*

$$\begin{aligned} \cap : \mathcal{M}^2 &\longrightarrow \mathcal{M} & (P, Q) &\longmapsto P \cap Q \\ \cup : \mathcal{M}^2 &\longrightarrow \mathcal{M} & (P, Q) &\longmapsto P \cup Q \\ {}^c : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} & P &\longmapsto P^c \end{aligned}$$

sowie ein Wahrheitsraum $\tau = (t, n, T)$ gegeben.

Wir nennen $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ ein **τ -Relationensystem**, wenn gilt:

$$(i) \bigcup_{P \in \mathcal{M}} \text{Im}(P) \subseteq T$$

(ii) Für alle $u \in U^\nu$ und $P, Q \in \mathcal{M}$ ist:

$$\begin{aligned} P \cap Q(u) &= t(P(u), Q(u)) \\ P \cup Q(u) &= s_{t,n}(P(u), Q(u)) \\ P^c(u) &= n(P(u)) \end{aligned}$$

Ist $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ ein τ -Relationensystem, so nennen wir \cap den **τ -Durchschnitt**, \cup die **τ -Vereinigung** und c das **τ -Komplement**.

2.11 Bemerkung

(i) Wir werden im folgenden auch den Begriff Relationensystem für ein τ -Relationensystem verwenden, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welcher Wahrheitsraum dem Relationensystem zugrunde liegt, oder wenn eine genaue Spezifizierung des Wahrheitsraumes nicht notwendig ist.

- (ii) Es sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ ein τ -Relationensystem. Aus den Sätzen 1.31 (iii) und 1.16 (ii) folgt für alle $P, Q \in \mathcal{M}$ und jede τ -Interpretation $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ von $P, P^c, Q, P \cap Q$ und $P \cup Q$:

$$\|(\widehat{P \cap Q} q \leftrightarrow (\widehat{P} q \wedge \widehat{Q} q))\| = 1$$

$$\|(\widehat{P \cup Q} q \leftrightarrow (\widehat{P} q \vee \widehat{Q} q))\| = 1$$

$$\|(\widehat{P^c} q \leftrightarrow (\neg \widehat{P} q))\| = 1$$

Dabei bezeichnet q ein Variablen- oder Konstantensymbol. Für $P \in \mathcal{M}$ sei zudem $\widehat{P} \in \mathcal{A}$ mit $\mathfrak{S}(\widehat{P}) = P$ (vgl. Bemerkung 1.62).

Diese Ausdrücke entsprechen den Gleichungen (2.1) – (2.3), die wir eingangs zur Motivation der Erweiterung der Mengenoperationen angegeben haben. Sie sind in der durch τ beschriebenen mehrwertigen Sprache stets wahr.

Wir geben einfache Beispiele von τ -Relationensystemen an.

2.12 Beispiel

- (i) Es sei $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum und U ein Universum. Es seien

$$\cap : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow \mathcal{F}(U^\nu)$$

$$\cup : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow \mathcal{F}(U^\nu)$$

$$^c : \mathcal{F}(U^\nu) \longrightarrow \mathcal{F}(U^\nu)$$

definiert durch

$$P \cap Q(u) := t(P(u), Q(u))$$

$$P \cup Q(u) := s_{t,n}(P(u), Q(u))$$

$$P^c(u) := n(P(u))$$

für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ und $u \in U^\nu$. Dann ist $\mathfrak{R} = (\mathcal{F}(U), \cap, \cup, ^c)$ ein τ -Relationensystem. Dieses Relationensystem entspricht einem System von verallgemeinerten Mengenoperationen, wie es üblicherweise in der Fuzzy-Set-Theory verwendet wird (vgl. [Gottwald '93], [Kruse '95]). Alle verallgemeinerten Mengenoperationen, die Gegenstand der Fuzzy-Set-Theory sind, lassen sich auf diese Art als τ -Relationensysteme auffassen.

- (ii) Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, [0, 1])$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, [0, 1])$ zwei beliebige Wahrheitsräume und U ein Universum. Wie oben seien die Verallgemeinerten Mengenoperationen durch

$$P \cap Q(u) := t_1(P(u), Q(u))$$

$$P \cup Q(u) := s_{t_1, n_1}(P(u), Q(u))$$

$$P^c(u) := n_1(P(u))$$

definiert. Ferner sei $\mathcal{K}(U)$ die Menge aller klassischen Teilmengen von U . Unter diesen Voraussetzungen ist $\mathfrak{R} = (\mathcal{K}(U), \cap, \cup, ^c)$ sowohl ein τ_1 als auch ein τ_2 -Relationensystem, da alle t -Normen und Involutionen auf $\{0, 1\}$ identisch sind.

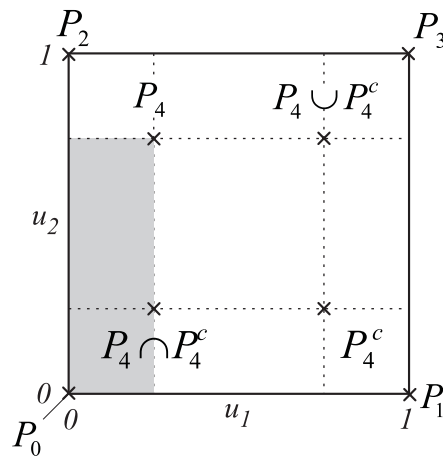


Abbildung 2.1: Darstellung mehrwertiger Relationen nach Kosko

Wir geben ein weiteres Beispiel an, in dem auch eine spezielle Methode der Darstellung von mehrwertigen Relationen eingeführt wird. Diese geht auf Kosko [Kosko '90] zurück.

2.13 Beispiel *Es sei $U = \{u_1, u_2\}$ ein Universum. Wir können jedes Element aus $\mathcal{F}(U)$ als Punkt im 2-dimensionalen Einheitswürfel darstellen, indem wir die Tupel der Zugehörigkeitswerte der Elemente u_1 und u_2 als Koordinaten in den Würfel eintragen. Beispielsweise repräsentieren die charakteristischen Funktionen der klassischen Mengen*

$$P_0 = \emptyset, P_1 = \{u_1\}, P_2 = \{u_2\} \text{ und } P_3 = \{u_1, u_2\}$$

die Eckpunkte des Einheitswürfels (vgl. Abbildung 2.1). Es sei nun $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1])$ gegeben. Wir betrachten das τ_{\min} -Relationensystem $(\mathcal{F}(U), \cap, \cup, ^c)$.

Es sei $P_4 \in \mathcal{F}(U)$ gegeben durch $P_4(u_1) = \frac{1}{4}$ und $P_4(u_2) = \frac{3}{4}$. Es gilt dann für $u \in \{u_1, u_2\}$:

$$\begin{aligned} P_4^c(u) = 1 - P_4(u) &\Rightarrow P_4^c(u_1) = \frac{3}{4} \text{ und } P_4^c(u_2) = \frac{1}{4} \\ P_4 \cap P_4^c(u) = \min(P_4(u), P_4^c(u)) &\Rightarrow P_4 \cap P_4^c(u_1) = P_4 \cap P_4^c(u_2) = \frac{1}{4} \\ P_4 \cup P_4^c(u) = \max(P_4(u), P_4^c(u)) &\Rightarrow P_4 \cup P_4^c(u_1) = P_4 \cup P_4^c(u_2) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Trägt man die Zugehörigkeitswerte von P_4 , P_4^c , $P_4 \cap P_4^c$ und $P_4 \cup P_4^c$ in das Diagramm ein, so entsteht die in Abbildung 2.1 dargestellte Figur. Sie ist symmetrisch zum Mittelpunkt des Einheitswürfels und zu beiden Diagonalen. Man erkennt zudem leicht, daß die im Diagramm grau gezeichnete Fläche alle diejenigen mehrwertigen Relationen umfaßt, die in P_4 enthalten sind.

Das Beispiel 2.12 (ii) zeigt, daß ein Relationensystem durchaus bezüglich unterschiedlicher Wahrheitsräume ein τ -Relationensystem sein kann. Dies bedeutet letztlich, daß die entsprechenden mehrwertigen Mengenverknüpfungen in verschiedenen Sprachen der Klasse MS als Erweiterungen der klassischen Mengenoperationen verstanden werden können. Sind allerdings zwei Sprachen semantisch äquivalent, so ist ein Relationensystem entweder eine Verallgemeinerung der klassischen Mengenoperationen bezüglich beider oder keiner der beiden Sprachen. Dies zeigt das folgende Lemma.

2.14 Lemma *Es sei $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ ein τ_1 -Relationensystem bezüglich eines Wahrheitsraumes $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$. Ist $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ ein zweiter Wahrheitsraum mit $\tau_1 \sim \tau_2$, so ist $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ auch ein τ_2 -Relationensystem.*

Beweis: Es sei $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ ein Wahrheitsraum und $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ ein τ_1 -Relationensystem.

Da $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ ein τ_1 -Relationensystem ist, gilt nach Definition 2.10 (i):

$$\bigcup_{P \in \mathcal{M}} \text{Im}(P) \subseteq T$$

Da nach Voraussetzung $\tau_1 \sim \tau_2$ ist, gilt nach dem Äquivalenzsatz 1.34 für alle $P, Q \in \mathcal{M}$ und $u \in U^\nu$:

$$\begin{aligned} P \cap Q(u) &= t_1(P(u), Q(u)) = t_2(P(u), Q(u)) \\ P \cup Q(u) &= s_{t_1, n_1}(P(u), Q(u)) = s_{t_2, n_2}(P(u), Q(u)) \\ P^c(u) &= n_1(P(u)) = n_2(P(u)) \end{aligned}$$

Also ist für den Wahrheitsraum $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ auch die zweite Bedingung der Definition 2.10 erfüllt und $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ ist ein τ_2 -Relationensystem. ■

Wir wenden uns besonderen Merkmalen der erweiterten Mengenoperationen zu. Wesentliche Eigenschaften der klassischen Theorie finden sich auch in ihrer mehrwertigen Verallgemeinerung wieder.

2.15 Lemma *Es seien gegeben ein Universum U , ein Wahrheitsraum $\tau = (t, n, T)$ sowie ein τ -Relationensystem $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}(U^\nu)$. Für alle $O, P, Q \in \mathcal{M}$ gilt dann:*

(i) Kommutativität: $P \cap Q = Q \cap P$ und $P \cup Q = Q \cup P$

(ii) Assoziativität: $O \cap (P \cap Q) = (O \cap P) \cap Q$

$$O \cup (P \cup Q) = (O \cup P) \cup Q$$

(iii) Doppelt Komplement: $(P^c)^c = P$

(iv) Komplement von Grund- und leerer Menge: $(U^\nu)^c = \emptyset$ und $\emptyset^c = U^\nu$

(v) Neutrale Elemente: $P \cup \emptyset = P$ und $P \cap U^\nu = P$

(vi) Fuzzy-Absorptionsgesetz: $P \cap P \subseteq P \subseteq P \cup P$

(vii) De-Morgan'sche Gesetze: $(P \cap Q)^c = P^c \cup Q^c$

$$(P \cup Q)^c = P^c \cap Q^c$$

(viii) Distributivgesetze

$$O \cap (P \cup Q) = (O \cap P) \cup (O \cap Q)$$

$$O \cup (P \cap Q) = (O \cup P) \cap (O \cup Q)$$

gelten genau dann, wenn $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ auch ein τ_{\min} -Relationensystem ist.

Dabei sei $\tau_{\min} = (t_{\min}, n, [0, 1])$.

Beweis: Die Aussagen (i) – (vii) folgen direkt aus den Aussagen über t - und s -Normen sowie Involutionen, die wir in Abschnitt 1.3 gezeigt haben.

Wir weisen die Behauptung (viii) nach. Nehmen wir zunächst an, daß $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ ein τ_{\min} -Relationensystem ist, so folgt die Gültigkeit der Distributivgesetze sofort aus der Bedingung (ii) der Definition 2.10 sowie den Distributivgesetzen für Minimum- und Maximum-Operator (vgl. Satz 1.24).

Sei nun umgekehrt ein τ -Relationensystem $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ gegeben, in dem die Distributivgesetze gelten. Ferner sei $\tau_{\min} = (t_{\min}, n, [0, 1])$. Wir weisen nach, daß $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ auch ein τ_{\min} -Relationensystem ist.

Nach Voraussetzung ist $\emptyset \in \mathcal{M}$. Sei $P \in \mathcal{M}$ beliebig, so folgt aus (i) – (vii):

$$P \cap P = (P \cup \emptyset) \cap (P \cup \emptyset) = P \cup (\emptyset \cap \emptyset) = P$$

Wir betrachten die Menge $M := \bigcup_{P \in \mathcal{M}} \text{Im}(P)$. Für alle $a \in M$ existiert nun ein $P \in \mathcal{M}$ und ein $u \in U^\nu$, so daß $P(u) = a$ gilt. Da $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ nach Voraussetzung ein τ -Relationensystem ist, folgt mit den Vorüberlegungen:

$$t(a, a) = P(u) \cap P(u) = P(u) = a$$

Also ist die Einschränkung von t auf M idempotent und wir erhalten analog zu den Schlüssen des Abschnitts 1.3: $t|_M = t_{\min}|_M$.

Lemma 1.23 liefert, daß die zu t duale s -Norm auf M mit s_{\max} übereinstimmt. Es folgt für alle $P, Q \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} P \cap Q(u) &= t(P(u), Q(u)) = t_{\min}(P(u), Q(u)) \\ P \cup Q(u) &= s_{t,n}(P(u), Q(u)) = s_{\max}(P(u), Q(u)) \\ P^c(u) &= n(P(u)) \end{aligned}$$

Da $M \subseteq [0, 1]$ ist, ist $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ ein τ_{\min} -Relationensystem. ■

Wir stellen Eigenschaften von τ -Relationensystemen zusammen, die eine algebraische Einordnung der verallgemeinerten Mengenoperationen erlauben.

2.16 Bemerkung *Es sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, {}^c)$ ein τ -Relationensystem. Dann gilt:*

- (i) *Es sind (\mathcal{M}, \cap) und (\mathcal{M}, \cup) kommutative Halbgruppen mit neutralen Elementen. Die neutralen Elemente sind U^ν bzw. \emptyset .⁴*
- (ii) *Es ist \subseteq eine Ordnung auf \mathcal{M} .⁵*

⁴ $U \neq \emptyset, * : U^2 \rightarrow U$. $(U, *)$ ist eine Halbgruppe gdw. $*$ assoziativ. Eine Halbgruppe $(U, *)$ heißt kommutativ, wenn $*$ kommutativ ist. Eine Halbgruppe besitzt ein neutrales Element, wenn $*$ ein neutrales Element besitzt. Vergleiche auch [Meyberg '80, S. 1 f.].

⁵ $O \subseteq U^2$ ist eine Ordnungsrelation gdw. für alle $x, y, z \in U$ gilt: (i) $(x, x) \in O$, (ii) $(x, y) \in O \wedge (y, x) \in O \Rightarrow (x = y)$, (iii) $(x, y) \in O \wedge (y, z) \in O \Rightarrow (x, z) \in O$. Vergleiche auch [Reinhardt '73, S. 43].

(iii) Es ist $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ genau dann ein Verband, wenn $\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$ ein τ_{\min} -Relationensystem ist. Der Verband ist dann distributiv und besitzt ein Null- und ein Einselement. Der Verband ist genau dann ein Boolescher Verband, wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}(U^\nu)$ gilt, wenn also nur klassische Teilmengen betrachtet werden.

Wir haben an dieser Stelle auf die Erläuterungen der verbandstheoretischen Begriffe verzichtet, da sie für das Weitere unwesentlich sind. Eine Erläuterung der entsprechenden Begriffe findet sich u. a. bei [McLane '79, S. 476 f.] oder [Reinhardt '73, S. 26].

2.3.2 Isomorphe Relationensysteme

Wir werden im folgenden verschiedene Klassen von Relationensystemen vergleichen. Zu diesem Zweck wird eine spezielle Art der Isomorphie der betreffenden Systeme betrachtet, die sogenannte *w-Isomorphie* von Relationensystemen. Dieser liegt eine ähnliche Motivation zugrunde, wie dies im Falle der Isomorphie von Wahrheitsräumen der Fall war, nämlich die monotone Transformation der Wahrheitswerte. Es wird sich zeigen, daß weitgehende Analogien zwischen der Isomorphie verschiedener Sprachen der Klasse MS einerseits und unterschiedlicher Relationensysteme andererseits bestehen.

2.17 Definition Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ Wahrheitsräume. Ferner seien $\mathfrak{R}_1 = (\mathcal{M}_1, \cap_1, \cup_1, ^{c_1})$ ein τ_1 -Relationensystem sowie $\mathfrak{R}_2 = (\mathcal{M}_2, \cap_2, \cup_2, ^{c_2})$ ein τ_2 -Relationensystem.

Die Relationensysteme \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 heißen **w-isomorph**⁶ (in Zeichen: $\mathfrak{R}_1 \simeq \mathfrak{R}_2$), wenn eine bijektive und monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ derart existiert, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gilt stets:

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{M}_1 &\Rightarrow \Omega \circ P \in \mathcal{M}_2 \\ Q \in \mathcal{M}_2 &\Rightarrow \Omega^{-1} \circ Q \in \mathcal{M}_1 \end{aligned}$$

(ii) Für alle $P, Q \in \mathcal{M}$ ist:

$$\begin{aligned} \Omega \circ (P \cap_1 Q) &= (\Omega \circ P) \cap_2 (\Omega \circ Q) \\ \Omega \circ (P \cup_1 Q) &= (\Omega \circ P) \cup_2 (\Omega \circ Q) \\ \Omega \circ (P^{c_1}) &= (\Omega \circ P)^{c_2} \end{aligned}$$

2.18 Bemerkung

(i) Es sind allgemeinere Konzepte der Isomorphie von Relationensystemen denkbar. Aus den oben skizzierten Gründen beschränken wir uns in dieser Arbeit auf die Untersuchung isomorpher Systeme nach Definition 2.17.

⁶W-isomorph sthet hier für Wahrheitswert-isomorph. Es soll so angedeutet werden, daß die Isomorphie durch eine monotone Transformation der Funktions- bzw. Wahrheitswerte der Relationen entsteht.

(ii) Die Abbildung Ω der Definition 2.17 legt eine Abbildung

$$\widehat{\Omega} : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \quad P \longmapsto P' \text{ mit } P' = \Omega \circ P$$

fest. Es ist $\widehat{\Omega}$ ein Halbgruppen-Isomorphismus zwischen den Halbgruppen (\mathcal{M}_1, \cap_1) und (\mathcal{M}_2, \cap_2) sowie zwischen den Halbgruppen (\mathcal{M}_1, \cup_1) und (\mathcal{M}_2, \cup_2) .

Zwischen der Isomorphie von Wahrheitsräumen und der w-Isomorphie von Relationensystemen besteht ein Zusammenhang, der im folgenden Satz beschrieben wird.

2.19 Satz - Isomorphiesatz von Relationensystemen

- (i) Es sei $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ ein Wahrheitsraum und $\mathfrak{R}_1 = (\mathcal{M}_1, \cap_1, \cup_1, {}^{c_1})$ ein τ_1 -Relationensystem. Es sei ferner ein Wahrheitsraum $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ mit $\tau_1 \simeq \tau_2$ gegeben. Dann existiert ein zu \mathfrak{R}_1 w-isomorphes τ_2 -Relationensystem $\mathfrak{R}_2 = (\mathcal{M}_2, \cap_2, \cup_2, {}^{c_2})$.
- (ii) Es sei $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ ein Wahrheitsraum und $\mathfrak{R}_1 = (\mathcal{M}_1, \cap_1, \cup_1, {}^{c_1})$ ein τ_1 -Relationensystem. Ist ein Relationensystem $\mathfrak{R}_2 = (\mathcal{M}_2, \cap_2, \cup_2, {}^{c_2})$ w-isomorph zu \mathfrak{R}_1 , so existiert ein zu τ_1 isomorpher Wahrheitsraum $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ derart, daß \mathfrak{R}_2 ein τ_2 -Relationensystem ist.

Beweis: zu (i): Es sei $\Omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ die den Isomorphismus von τ_1 und τ_2 definierende Abbildung.

Wir definieren die Menge \mathcal{M}_2 durch

$$\mathcal{M}_2 := \{P \in \mathcal{F}(U^\nu); \exists P' \in \mathcal{M}_1 \text{ mit } \Omega \circ P' = P\}$$

sowie die folgenden mehrwertigen Mengenoperationen

$$\begin{aligned} P \cap_2 Q &:= \Omega \circ (\Omega^{-1} \circ P \cap_1 \Omega^{-1} \circ Q) \\ P \cup_2 Q &:= \Omega \circ (\Omega^{-1} \circ P \cup_1 \Omega^{-1} \circ Q) \\ P^{c_2} &:= \Omega \circ ((\Omega^{-1} \circ P)^{c_1}) \end{aligned}$$

für alle $P, Q \in \mathcal{M}_2$.

Wegen der Isomorphie von τ_1 und τ_2 ergibt sich aus Satz 1.44 zunächst, daß $\mathfrak{R}_2 = (\mathcal{M}_2, \cap_2, \cup_2, {}^{c_2})$ ein τ_2 -Relationensystem ist. Die Isomorphie von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 folgt unmittelbar aus der Definition 2.17.

zu (ii): Es sei $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ ein Wahrheitsraum und $\mathfrak{R}_1 = (\mathcal{M}_1, \cap_1, \cup_1, {}^{c_1})$ ein τ_1 -Relationensystem. Ferner sei ein Relationensystem $\mathfrak{R}_2 = (\mathcal{M}_2, \cap_2, \cup_2, {}^{c_2})$ mit $\mathfrak{R}_1 \simeq \mathfrak{R}_2$ gegeben.

Es existiert dann eine monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, welche die Bedingungen der Definition 2.17 erfüllt.

Wir weisen nach, daß ein zu τ_1 isomorpher Wahrheitsraum $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ derart existiert, daß \mathfrak{R}_2 ein τ_2 -Relationensystem ist.

Es sei dazu für alle $a, b \in [0, 1]$ definiert:

$$\begin{aligned} t_2(a, b) &:= \Omega(t_1(\Omega^{-1}(a), \Omega^{-1}(b))) \\ n_2(a) &:= \Omega(n_1(\Omega^{-1}(a))) \\ T_2 &:= \bigcup_{a \in T_1} \{\Omega(a)\} \end{aligned}$$

Dann ist nach Satz 1.44 $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ ein Wahrheitsraum und es ist $\tau_1 \simeq \tau_2$.

Da die Relationensysteme isomorph sind, gilt ferner:

$$\bigcup_{P \in \mathcal{M}_1} \text{Im}(P) \subseteq T_1 \Rightarrow \bigcup_{P \in \mathcal{M}_2} \text{Im}(P) \subseteq T_2$$

Es ist zudem für alle $P, Q \in \mathcal{M}_1$ und $u \in U^\nu$:

$$\begin{aligned} \Omega(P(u)) \cap_2 \Omega(Q(u)) &= \Omega(P \cap_1 Q(u)) \\ &= \Omega(t_1(P(u), Q(u))) \\ &= t_2(\Omega(P(u)), \Omega(Q(u))) \end{aligned}$$

Entsprechend folgt:

$$\begin{aligned} \Omega(P(u)) \cup_2 \Omega(Q(u)) &= s_{t_2, n_2}(\Omega(P(u)), \Omega(Q(u))) \\ \Omega(P(u))^{c_2} &= n_2(\Omega(P(u))) \end{aligned}$$

Also ist $\mathfrak{R}_2 = (\mathcal{M}_2, \cap_2, \cup_2, c_2)$ ein τ_2 -Relationensystem. ■

Ein ausführliches Beispiel findet sich in Abschnitt 2.4. Zwischen den Eigenschaften von Relationen isomorpher Relationensysteme bestehen gewisse Beziehungen, die wir im folgenden Satz skizzieren. Diese folgen aus den spezifischen Eigenschaften der Abbildung Ω , die der Definition 2.17 zugrunde liegt.

2.20 Satz *Es sei $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine streng monoton steigende bijektive Abbildung. Dann gilt für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$:*

- (i) $\ker(P) = \ker(\Omega \circ P)$
- (ii) $\text{supp}(P) = \text{supp}(\Omega \circ P)$
- (iii) $\Omega(\mathbf{hgt}(P)) = \mathbf{hgt}(\Omega \circ P)$
- (iv) $P \subseteq Q \Leftrightarrow \Omega \circ P \subseteq \Omega \circ Q$
- (v) Für $\alpha \in]0, 1]$ und $u \in U^\nu$ gilt: $u \in [P]_\alpha \Leftrightarrow u \in [\Omega \circ P]_{\Omega(\alpha)}$

Beweis: Die Behauptungen folgen durch elementare Umformungen aus der Stetigkeit und Monotonie von Ω . ■

2.4 Ein Anwendungsbeispiel: Formen mehrwertiger Relationen

In jeder praktischen Anwendung der Fuzzy-Set-Theory besteht ein wesentlicher Schritt der Modellbildung in der Festlegung der Abbildungen, die die mehrwertigen Relationen darstellen. Da hier sehr viele Freiheitsgrade bestehen, wurde in der Forschung zur Fuzzy-Set-Theory häufig diskutiert, ob bestimmte Klassen von Abbildungen in einer spezifischen Anwendung besonders geeignet sind. Zahlreiche Untersuchungen zu dieser Fragestellung sind erfolgt. Stellvertretend für andere sei hier auf Hersh und Caramazza [Hersh '76], Zimmermann und Zysno [Zimmermann '82] sowie Leberling [Leberling '82] verwiesen. Eine ausführliche Übersicht über die unterschiedlichen Vorschläge zu den Formen der mehrwertigen Relationen finden sich unter anderem in den Büchern von Lai und Hwang [Lai '92, S. 30 f.] sowie Rommelfanger [Rommelfanger '94, S. 171 f.]. Im folgenden wollen wir diese Diskussion um einen neuen Aspekt erweitern. Während die oben genannten Untersuchungen ausschließlich empirischer Natur sind, wollen wir vor dem Hintergrund des Konzeptes der w -Isomorphie von Relationensystemen analysieren, ob verschiedene Klassen von Abbildungen tatsächlich zu unterschiedlichen Modellen führen. Wir werden exemplarisch nachweisen, daß dies im allgemeinen nicht der Fall ist. Hieraus ergeben sich insbesondere für algorithmische Fragestellungen weitreichende Konsequenzen. Die Diskussion erhebt dabei keinen Anspruch auf Vollständigkeit und erfolgt hier vor allem, um die Anwendbarkeit des Konzeptes der w -Isomorphie unter Beweis zu stellen. Eine Vertiefung erfolgt erst in Kapitel 4.

Wir werden im folgenden zwei Beispiele von Formen mehrwertiger Relationen betrachten, die bei der Modellbildung von symmetrischen Entscheidungsmodellen verwendet werden. Da wir auf den Begriff des symmetrischen Entscheidungsmodells in Kapitel 4 näher eingehen werden, sei an dieser Stelle lediglich darauf hingewiesen, daß in diesen Modellen eine Familie von mehrwertigen Relationen mit einem mehrwertigen Durchschnitt verknüpft wird. Dieser wird im allgemeinen durch den Minimum-Operator dargestellt, da sich dann die algorithmische Behandlung erleichtert [Rommelfanger '94, S. 170 ff.].

Es seien n Relationen $P_i \in \mathcal{F}(U^\nu)$ für $i = 1, \dots, n$ gegeben, die ein symmetrisches Entscheidungsmodell darstellen. So werden in einem symmetrischen Entscheidungsmodell die $x^* \in U$ als Lösung betrachtet, für die gilt:

$$\bigcap_{i=1}^n P_i(x^*) = \sup_{x \in U} \bigcap_{i=1}^n P_i(x)$$

Wir betrachten im folgenden zwei Beispiele von Relationen, die in symmetrischen Entscheidungsmodellen verwendet werden.

Es sei $U = \mathbb{R}$. Eine häufig benutzte Form von mehrwertigen Relationen sind stückweise lineare Relationen der Form

$$P_L^{b,d}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq b \\ \frac{-x+(b+d)}{d} & b < x \leq b+d \\ 0 & b+d < x \end{cases}$$

Dabei sind $b, d \in \mathbb{R}$ (vgl. u. a. [Bellman '70, Zimmermann '75, Zimmermann '76]).

Alternativ wurde von Sakava in [Sakava '83] die Verwendung von speziellen konkaven Relationen vorgeschlagen. Diese haben die Form

$$P_K^{b,d}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq b \\ \frac{1 - \exp\left(-\beta \frac{-x + (b+d)}{d}\right)}{1 - \exp(-\beta)} & b < x \leq b + d \\ 0 & b + d < x \end{cases}$$

Auch hier sind $b, d \in \mathbb{R}$. Über den Parameter $\beta > 0$ kann die Krümmung von $P_K^{b,d}$ beeinflusst werden.

Es sei nun $\beta > 0$ gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$\Omega_\beta : [0, 1] \mapsto [0, 1] \quad a \mapsto \frac{1 - \exp(-\beta a)}{1 - \exp(-\beta)}$$

Offenbar bildet Ω_β das Intervall $[0, 1]$ bijektiv auf sich selbst ab. Zudem ist Ω_β streng monoton steigend.

Es sei nun $n_\beta := \Omega_\beta \circ n_s \circ \Omega_\beta^{-1}$. Weil zudem $t_{\min} = \Omega_\beta \circ t_{\min} \circ \Omega_\beta^{-1}$ gilt, folgt aus Satz 1.44:

$$\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1]) \simeq \tau_\beta = (t_{\min}, n_\beta, [0, 1])$$

Zu dem τ_{\min} -Relationensystem $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \cap_{\min}, \cup_{\max}, {}^{c, n_s})$ (vgl. Beispiel 2.12) existiert nach Lemma 2.19 also ein w-isomorphes Relationensystem, daß ein τ_β -Relationensystem ist. Ein solches System ist $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \cap_{\min}, \cup_{\max}, {}^{c, n_\Omega})$. Dabei sei $P^{c, n_\Omega} := n_\Omega \circ P$ für alle $P \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Für diese Relationensysteme gilt:

$$\begin{aligned} \Omega_\beta \circ (P \cap_{\min} Q) &= (\Omega_\beta \circ P) \cap_{\min} (\Omega_\beta \circ Q) \\ \Omega_\beta \circ (P \cup_{\max} Q) &= (\Omega_\beta \circ P) \cup_{\max} (\Omega_\beta \circ Q) \\ \Omega_\beta \circ (P^{c, n_s}) &= (\Omega_\beta \circ P)^{c, n_\beta} \end{aligned}$$

Es gilt für alle $b, d \in \mathbb{R}$: $\Omega_\beta \circ P_L^{b,d} = P_K^{b,d}$. Wir erhalten daher für $d_1, d_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \Omega_\beta \circ (P_L^{b_1, d_1} \cap_{\min} P_L^{b_2, d_2}) &= P_K^{b_1, d_1} \cap_{\min} P_K^{b_2, d_2} \\ \Omega_\beta \circ (P_L^{b_1, d_1} \cup_{\max} P_L^{b_2, d_2}) &= P_K^{b_1, d_1} \cup_{\max} P_K^{b_2, d_2} \\ \Omega_\beta \circ ((P_L^{b_1, d_1})^{c, n_s}) &= (P_K^{b_1, d_1})^{c, n_\beta} \end{aligned}$$

Weil Ω_β streng monoton steigend ist, gilt für die beiden oben betrachteten Klassen von Relationen:

$$\begin{aligned} P_L^{b_1, d_1} \cap_{\min} P_L^{b_2, d_2}(x^*) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} P_L^{b_1, d_1} \cap_{\min} P_L^{b_2, d_2}(x) \\ \Leftrightarrow P_K^{b_1, d_1} \cap_{\min} P_K^{b_2, d_2}(x^*) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} P_K^{b_1, d_1} \cap_{\min} P_K^{b_2, d_2}(x) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt, daß im Falle eines symmetrischen Entscheidungsmodells beide Klassen von Relationen zu den gleichen Lösungen führen und zwar unabhängig von der Wahl des Parameters β .

Dieses Resultat führt zu verschiedenen Konsequenzen für die Anwendung. Zum einen könnte die oben skizzierte w -Isomorphie der Relationensysteme im Falle der Relationen $P_K^{b,d}$ dazu genutzt werden, das konvexe Modell in ein lineares Modell zu transformieren. Dies erlaubt, die Lösung des symmetrischen Entscheidungsmodells mit einem LP-Ansatz zu bestimmen (vgl. [Negoita '76]). Umgekehrt können offenbar aber auch beliebige bijektive und monoton steigende Abbildungen $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ verwendet werden, um neue Klassen von Relationen zu erzeugen, die ebenfalls isomorph zu den linearen Relationen sind. So können weitere Freiheitsgrade für die Modellbildung eröffnet werden, wobei dann stets ein effektives Lösungsverfahren bekannt ist.

Als einfaches Beispiel für das obige Verfahren sei auf s -förmige Fuzzy-Mengen verwiesen, wie sie etwa durch Splines der Form

$$\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \quad a \mapsto \begin{cases} 2a^2 & a \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2(1 - a)^2 & \frac{1}{2} < a \end{cases}$$

definiert sind (vgl. [Möllers '98]). Empirische Untersuchungen haben belegt, daß sich solche s -förmigen Abbildungen gut zur Darstellung von mehrwertigen Fuzzy-Mengen eignen. Da sie jedoch nicht konvex oder konkav sind, galt die Lösung solcher Modelle im allgemeinen als aufwendig (vgl. [Yang '91, Biswal '96]). Mit den Resultaten des vorausgegangenen Abschnittes lassen sich solche Problemstellungen allerdings algorithmisch effizient bestimmen.

2.5 Abschließende Bemerkungen

In dem vorausgegangenen Kapitel wurden mehrwertige Relationen vertieft betrachtet. Neben einer Motivation und der Einführung von Grundbegriffen, die in den Abschnitten 2.1 und 2.2 erfolgte, standen insbesondere die verschiedenen Möglichkeiten der Erweiterung der klassischen Mengenoperationen im Mittelpunkt der Untersuchungen. Diesem war der Abschnitt 2.3 gewidmet.

Grundansatz bei der Verallgemeinerung der Mengenoperationen war es, diese so zu konstruieren, daß die aus der klassischen Logik und Mengentheorie bekannte Beziehung zwischen den elementaren logischen Verknüpfungen und den Mengenoperationen auch für die verschiedenen mehrwertigen Sprachen der Klasse MS gilt. Dabei zeigte sich, daß verschiedene Verallgemeinerungen der Mengenoperationen möglich sind. Jede dieser Verallgemeinerungen kann als Mengenoperation bezüglich einer Klasse von äquivalenten Wahrheitsräumen interpretiert werden (Lemma 2.14). Viele der bekannten Eigenschaften der klassischen Mengenoperationen ließen sich auch für die mehrwertigen Operatoren zeigen (vgl. Lemma 2.15).

Bei den weiteren Untersuchungen stand ein spezielles Konzept der Vergleichbarkeit von Relationensystemen im Mittelpunkt, die w -Isomorphie von Relationensystemen. Zwei Relationensysteme sind w -isomorph, wenn stets von den Zugehörigkeitswerten der Relationen des einen Systems auf die entsprechenden Zugehörigkeitswerte im anderen geschlossen werden kann, und zwar derart, daß die entsprechende Abbildung streng monoton steigend ist. Es zeigt sich, daß ein relevanter Zusammenhang zwischen den Isomorphie-Konzepten von Wahrheitsräumen und Relationen existiert (Satz 2.19). Denn die Existenz von isomorphen Wahrheitsräumen ist eine notwendige Voraussetzung für die Existenz w -isomorpher Relationensysteme. Neben diesen theoretischen Resultaten wiesen wir exemplarisch in Abschnitt 2.4 die Bedeutung des w -Isomorphie-Konzeptes für die Anwendung nach.

Das hier vorgestellte Konzept der w -Isomorphie von Relationensystemen erlaubt erstmals die systematische Klassifizierung von Systemen mehrwertiger Relationen. Wir haben die Bedeutung dieses Konzepts für die Anwendung in dieser Arbeit lediglich an einem Beispiel belegt. Aufgrund der breiten Anwendung der Fuzzy-Set-Theory ist allerdings anzunehmen, daß sich die Ergebnisse auf andere Anwendungsfelder übertragen lassen. Hier sind weitere Untersuchungen notwendig.

Kapitel 3

Logische Maße

Zusammenfassung:

In dem folgenden Kapitel werden logische Maße und ihre Anwendung in der Fuzzy-Maßtheorie betrachtet. Bei der Untersuchung der logischen Maße wird ein Schwerpunkt auf logische Inklusionsmaße gelegt. Diese erweitern das Konzept der klassischen Mengeninklusion. Verschiedene Klassen solcher logischen Inklusionsmaße werden angegeben. Als wichtiger Vertreter der Inklusionsmaße wird die Klasse der *kanonischen Inklusionsmaße* vertieft betrachtet. Ferner werden Verknüpfungen zwischen verschiedenen Inklusionsmaßen definiert und strukturelle Eigenschaften dieser Verknüpfungen untersucht. Abschließend wird gezeigt, wie sich Wahrscheinlichkeits-, Möglichkeits- und Notwendigkeitsmaße durch logische Inklusionsmaße repräsentieren lassen. Die entsprechenden Darstellungssätze 3.40, 3.42 und 3.48 werden grundlegend für die weiteren Untersuchungen sein. Sie stellen einen grundsätzlich neuen Weg zur Interpretation und Darstellung der Wahrscheinlichkeits- und Fuzzy-Maßtheorie im Rahmen eines logischen Kontextes dar.

3.1 Logische Maße: ein erster Zugang

Während sich die Ausführungen des Kapitels 2 auf die Eigenschaften von mehrwertigen Relationen konzentriert haben, sollen im folgenden logische Maße betrachtet werden. Im Unterschied zu mehrwertigen Relationen, die logische Eigenschaften oder Beziehungen von *Objekten* eines Universums beschreiben, bilden logische Maße logische Eigenschaften oder Beziehungen von *Relationen* über einem Universum ab. Ähnlich wie bei den mehrwertigen Relationen erfolgt dies, indem den entsprechenden Argumenten (eben den Relationen) Werte aus dem Intervall $[0, 1]$ zugewiesen werden. Diese können als Wahrheitswerte einer mehrwertigen Logik interpretiert werden. Ein logisches Maß ist daher als Abbildung $\mathcal{F}(U^\kappa)^\nu \rightarrow [0, 1]$ definiert (vgl. Definition 1.57). Dabei bezeichnet $\kappa > 0$ die Dimension der betrachteten Relationen (d. h. die betreffenden Relationen sind κ -stellig) und $\nu > 0$ die Anzahl der Argumente. Wir werden im folgenden die Eigenschaften logischer Maße diskutieren, wollen jedoch zunächst den Begriff des logischen Maßes gegenüber den übrigen in der Mathematik üblichen Maßkonzepten abgrenzen.

Ein logisches Maß beschreibt die *logischen* Eigenschaften von Relationen. Es ist somit mit klassischen mengentheoretischen Konzepten wie etwa der Inklusion oder der Gleichheit von Mengen verwandt. Beide können als zweistellige (und zweiwertige) logische Maße aufgefaßt werden (vgl. auch Bemerkung 2.5).

Zumindest formal bestehen zudem Analogien zu dem in der Wahrscheinlichkeitstheorie verwendeten Terminus des Wahrscheinlichkeitsmaßes (vgl. [Bauer '90 B]) und zu dem Konzept des Fuzzy-Maßes in der Fuzzy-Maßtheorie, wie er etwa bei Klir [Klir '95], Kruse [Kruse '95] oder Weisbrod [Weisbrod '95] verwendet wird. Bei diesen Ansätzen werden Abbildungen $\wp(U) \rightarrow [0, 1]$ betrachtet. Da $\wp(U)$ mit der Menge $\mathcal{K}(U)$ identifiziert werden kann (vgl. S. 52), können diese Maße formal als spezielle einstellige logische Maße auf der Menge $\mathcal{K}(U)$ aufgefaßt werden.

Allerdings besteht ein wesentlicher konzeptioneller Unterschied zwischen den oben genannten Maßbegriffen und dem Konzept des logischen Maßes. Die Bilder eines logischen Maßes können in einer Sprache der Klasse MS als Wahrheitswerte interpretiert werden. Eine solche Interpretation läßt zunächst weder die Wahrscheinlichkeits- noch die Fuzzy-Maßtheorie zu. Daher können diese Maße auch nicht ohne weiteres als aussagenlogische Konzepte verstanden werden.

Wir werden in Abschnitt 3.4 die Beziehung von logischen Maßen, Wahrscheinlichkeitsmaßen und Fuzzy-Maßen genauer untersuchen. Es wird sich dabei zeigen, daß neben den begrifflichen und formalen Analogien der oben genannten Konzepte tatsächlich auch inhaltliche Parallelen existieren. Wir werden insbesondere nachweisen, daß die Theorie der mehrwertigen Maße als konzeptioneller Rahmen der beiden anderen Theorien verwendet werden kann, daß sich also die Wahrscheinlichkeits- und Fuzzy-Maßtheorie aus einem mehrwertigen logischen Konzept ableiten lassen.

In Abschnitt 3.2 werden wir zunächst einfache Beispiele von logischen Maßen angeben und zeigen, wie sich spezielle Konzepte der Theorie mehrwertiger Relationen in die Theorie der logischen Maße übertragen lassen. Im Anschluß wird eine wichtige Klasse von Maßen betrachtet – die sogenannten *logischen Inklusionsmaße*. Diese sind sowohl bei der beabsichtigten Formulierung des Entscheidungsmodells in Kapitel 4 als auch bei den Überlegungen des Abschnitts 3.4 von elementarer Bedeutung. In Abschnitt 3.4 werden wir das Verhältnis der Theorie der logischen Maße zu den Theorien der Wahrscheinlichkeits- und Fuzzy-Maße untersuchen. Es wird sich zeigen, daß sich die beiden zuletzt genannten Ansätze in die Theorie der logischen Maße einbetten lassen.

3.2 Grundbegriffe

Wir beginnen mit einfachen Beispielen von logischen Maßen.

3.1 Beispiel *Es sei U ein Universum und $\mathcal{F}(U^\nu)$ die Menge aller ν -stelligen Relationen über U . Die Höhe einer Relation, d.h. die Abbildung*

$$\mathbf{hgt} : \mathcal{F}(U^\nu) \longrightarrow [0, 1] \quad P \longmapsto \sup_{u \in U^\nu} P(u)$$

ist ein einstelliges Maß der Dimension ν . Die Abbildung

$$\mathbf{flat} : \mathcal{F}(U^\nu) \longrightarrow [0, 1] \quad P \longmapsto \inf_{u \in U^\nu} P(u)$$

ist ebenfalls ein einstelliges Maß der Dimension ν .

3.2 Bemerkung In der mehrwertigen Logik werden verschiedene Verallgemeinerungen des klassischen Begriffs des Quantors betrachtet (vgl. u. a. [Gottwald '89, S. 184 f.]). Ein mehrwertiger Quantor wird – in Analogie zu den Junktoren – durch ein Quantoren-Symbol und eine Bewertungsregel festgelegt. Diese Regel beschreibt, wie von den Wahrheitswerten der Teilausdrücke auf den Wahrheitswert des gesamten Quantorenausdrucks geschlossen werden kann.

Wesentlich bei der Formulierung dieser Bewertungsregeln ist das Konzept der **freien Variablen**. Unter einer freien Variablen eines Ausdrucks $\varphi \in \mathcal{F}$ versteht man ein Variablensymbol $x \in \mathcal{A}$, dem in einer Interpretation keine feste Bedeutung zugeordnet wird.¹ Ist $x \in \mathcal{A}$ eine freie Variable in einem Ausdruck φ , so wird dies durch die Notation $\varphi(x)$ verdeutlicht. Ist beispielsweise $\varphi = ((Px \wedge Qx) \vee Ry)$ ein Ausdruck, so bedeutet $\varphi(x)$, daß x in φ eine freie Variable ist, das Variablensymbol y hingegen nicht.

Bekannte Quantoren sind der Allquantor, der durch das Symbol \forall repräsentiert wird, und der Existenzquantor. Diesem wird das Symbol \exists zugeordnet. Mit diesen Quantorensymbolen lassen sich Ausdrücke der Form

$$\forall_U x\varphi(x) \quad \text{oder} \quad \exists_U x\varphi(x)$$

bilden. U bezeichnet das zugrunde liegende Universum. Die Bewertungsregeln des All- und Existenzquantors in der klassischen Logik sind bekannt. In der Fuzzy-Logik werden diese Quantoren häufig wie folgt bewertet:

$$\begin{aligned} \|\forall_U x\varphi(x)\| &:= \inf_{a \in U} \|\varphi(x/a)\| \\ \|\exists_U x\varphi(x)\| &:= \sup_{a \in U} \|\varphi(x/a)\|. \end{aligned}$$

Dabei bedeutet x/a , daß der freien Variablen x der Wert $a \in U$ zugeordnet wird (vgl. [Gottwald '93, S. 2 f.]).

Mit den Maßen **hgt** und **flat** lassen sich in einfachen Fällen Ausdrücke darstellen, die mit Ausdrücken mit Quantoren vergleichbar sind. Seien $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ Relationen, so gilt beispielsweise für einen Ausdruck der Form $\varphi = (\widehat{P}x \vee \widehat{Q}x)$ stets:

$$\begin{aligned} \|\forall_U x\varphi(x)\| &= \|\widehat{\mathbf{flat}} \widehat{P \cup Q}\| \\ \text{und} \quad \|\exists_U x\varphi(x)\| &= \|\widehat{\mathbf{hgt}} \widehat{P \cup Q}\|. \end{aligned}$$

Prinzipiell ist es möglich, mittels spezieller Maße Ausdrücke zu formulieren, die zu Ausdrücken äquivalent sind, in denen Quantoren vorkommen. Dies erlaubt einerseits eine weiterführende Interpretation dieser Maße, da ihnen ähnliche Funktion wie den Quantoren zugeordnet werden kann. Darüber hinaus wird klar, daß der durch das Fehlen der Quantoren geringere Sprachumfang der Sprachen der Klasse MS teilweise durch die Verwendung entsprechender Maße kompensiert werden kann.

Eine erschöpfende Diskussion und Gegenüberstellung des Maß- und Quantorenkonzepts unterbleibt an dieser Stelle wegen der notwendigen inhaltlichen Einschränkung dieser Arbeit.

¹Das Konzept der freien Variablen wird ausführlich in [Ebbinghaus '96, Kapitel II §5] dargestellt.

Es ist allerdings zu vermuten, daß trotz der Parallelen grundsätzliche Unterschiede zwischen beiden Ansätzen bestehen und eine Substitution des einen Konzepts durch das andere nicht vollständig möglich ist.

Als weiteres Beispiel für mehrwertige Maße betrachten wir mehrwertige Gleichheitsmaße. Diese repräsentieren eine mehrwertige Verallgemeinerung der in Definition 2.4 festgelegten Gleichheit von Relationen.

3.3 Definition *Es sei U ein Universum und $\mathcal{F}(U^\nu)$ die Menge aller ν -stelligen Relationen über U sowie $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm. Ein Maß $\mathbf{E} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ heißt ein **Gleichheitsmaß** (der Dimension ν) bezüglich t , wenn es für alle $O, P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

$$(i) \quad \mathbf{E}(P, P) = 1 \quad (\text{Reflexivität})$$

$$(ii) \quad \mathbf{E}(P, Q) = \mathbf{E}(Q, P) \quad (\text{Symmetrie})$$

$$(iii) \quad t(\mathbf{E}(O, P), \mathbf{E}(P, Q)) \leq \mathbf{E}(O, Q) \quad (\text{Transitivität})$$

Ähnlich wie Gleichheitsrelationen lassen sich Gleichheitsmaße in den Sprachen der Klasse MS interpretieren.

3.4 Bemerkung *Es sei $\mathbf{E} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein Gleichheitsmaß der Dimension ν bzgl. einer t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Ferner sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum und $O, P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$. Dann gilt für jede τ -Interpretation $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ von \mathbf{E}, O, P und Q :*

$$(i) \quad \|\widehat{\mathbf{E}}\widehat{P}\widehat{P}\| = 1$$

$$(ii) \quad \|(\widehat{\mathbf{E}}\widehat{P}\widehat{Q} \leftrightarrow \widehat{\mathbf{E}}\widehat{Q}\widehat{P})\| = 1$$

$$(iii) \quad \|((\widehat{\mathbf{E}}\widehat{O}\widehat{P} \wedge \widehat{\mathbf{E}}\widehat{P}\widehat{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbf{E}}\widehat{O}\widehat{Q})\| = 1$$

Dabei bezeichnet $\widehat{\mathbf{E}} \in \mathcal{A}$ ein Maßsymbol mit $\mathfrak{S}(\widehat{\mathbf{E}}) = \mathbf{E}$. Für $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ sei $\widehat{P} \in \mathcal{A}$ mit $\mathfrak{S}(\widehat{P}) = P$ (vgl. Bemerkung 1.62).

Wir geben zwei einfache Beispiele von Gleichheitsmaßen an.

3.5 Beispiel *Es sei U ein Universum.*

(i) *Wir definieren eine Abbildung $\mathbf{E}_=$ durch*

$$\mathbf{E}_= : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \mapsto \begin{cases} 1 & P = Q \\ 0 & P \neq Q \end{cases}$$

Die Abbildung $\mathbf{E}_=$ ist ein Gleichheitsmaß bezüglich jeder t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. Es entspricht der Gleichheitsrelation von mehrwertigen Relationen, die wir in Definition 2.4 angegeben haben.

(ii) Das Maß \mathbf{E} , mit

$$\mathbf{E} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \longmapsto \inf\{1 - |P(u) - Q(u)|; u \in U^\nu\}$$

ist ein Gleichheitsmaß der Dimension ν bzgl. t_B .

Beweis: Die Behauptung (i) folgt unmittelbar. Der Beweis von (ii) folgt durch einfache Umformungen (vgl. auch [Kruse '95, S. 63, Satz 2.69]). ■

3.6 Bemerkung Gleichheitsrelationen und Gleichheitsmaße sind mathematisch verwandte Konzepte. Ist nämlich U ein Universum und $V := \mathcal{F}(U^\nu)$, so definiert offenbar jede Gleichheitsrelation über V ein Gleichheitsmaß über U .

In der Fuzzy-Set-Theory sind Überlegungen bekannt, die diesen Sachverhalt verallgemeinern. In diesem Zusammenhang werden Fuzzy-Mengen (oder einstellige Relationen) als **Typ 1 Fuzzy-Mengen** bezeichnet. Unter einer **Fuzzy-Menge vom Typ m** für $m > 1$ versteht man eine einstellige Relation, die auf der Menge der Fuzzy-Mengen vom Typ $m-1$ definiert ist (vgl. [Rommelfanger '94, S. 64, Definition 1.47]). In diesem Sinne sind einstellige Maße also Fuzzy-Mengen vom Typ 2.

Wir haben in dieser Arbeit von der Betrachtung von Relationen des Typs k für $k > 2$ abgesehen, da sie nicht für die Formulierung des Entscheidungsmodells notwendig sind. Die Sprachen der Klasse MS ließen sich durch die Hinzunahme entsprechender Symbole jedoch so erweitern, daß auch solche Relationen innerhalb dieses Konzepts diskutiert werden könnten.

3.3 Logische Inklusionsmaße

Der folgende Abschnitt ist der Betrachtung einer speziellen Klasse von logischen Maßen, den logischen Inklusionsmaßen, gewidmet. Diese repräsentieren mehrwertige Erweiterungen der klassischen Mengen-Inklusion und sind in dieser Arbeit in mehrfacher Hinsicht von entscheidender Bedeutung. So werden sie es in Abschnitt 3.4 ermöglichen, eine konzeptionelle Brücke zwischen logischen Maßen auf der einen und dem Maßbegriff der Wahrscheinlichkeits- und der Fuzzy-Theorie auf der anderen Seite zu schlagen. Dies gestattet unter anderem die Abbildung verschiedener Kategorien von unvollständiger Information im Rahmen der Sprachen der Klasse MS. Zudem wird so erstmals ein einheitlicher theoretischer Rahmen bereitgestellt, der mehrwertige Logik, Wahrscheinlichkeits- und Fuzzy-Maßtheorie umfaßt. Inklusionsmaße bilden schließlich einen zentralen Baustein des Entscheidungsmodells des Kapitels 4.

Zunächst werden die grundlegenden Begriffe eingeführt und Beispiele von Inklusionsmaßen angegeben. Es wird sich zeigen, daß der Begriff des Inklusionsmaßes ein breites Spektrum von Abbildungen umfaßt, die über unterschiedliche Eigenschaften verfügen. Eine erschöpfende Diskussion *aller* Eigenschaften der Inklusionsmaße ist daher umfangreich und vor dem Hintergrund der Zielsetzung dieser Arbeit sicher nicht zweckdienlich. Es werden daher im folgenden lediglich die Eigenschaften einer speziellen Klasse von Inklusionsmaßen exemplarisch näher untersucht. Die Inklusionsmaße dieser Klasse, die sogenannten *kanonischen Inklusionsmaße*, verfügen über besondere logische und mengentheoretische Merkmale, die

es ermöglichen, die Parallelen zwischen Inklusionsmaßen und der klassischen Inklusion zu verdeutlichen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts werden verschiedene Verknüpfungen und Operationen auf Inklusionsmaßen beschrieben. Diese erlauben es, aus einer gegebenen Menge von Inklusionsmaßen weitere zu erzeugen. Diese *abgeleiteten Inklusionsmaße* eröffnen einen weiten Spielraum bei der mathematischen Analyse und Modellbildung. Der oben bereits erwähnte Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeits- und der Fuzzy-Maßtheorie wird erst in Abschnitt 3.4 beschrieben.

Für den Rest dieses Abschnitts setzen wir einen Wahrheitsraum $\tau = (t, n, [0, 1])$ und ein τ -Relationensystem der Gestalt $(\mathcal{F}(U^\nu), \cap, \cup, {}^n)$ voraus. Die t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ und die Involution $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ seien beliebig vorgegeben. Alle vorkommenden Mengenoperationen werden stets auf dieses Relationensystem bezogen, sofern nicht explizit ein anderes angegeben wird. Ferner identifizieren wir jede klassische Teilmenge eines Universums U mit ihrer charakteristischen Funktion (vgl. S. 52).

3.3.1 Grundlegende Definitionen

Ausgangspunkt der Überlegungen ist Bemerkung 2.5, in der darauf hingewiesen wurde, daß anstelle der zweiwertigen Inklusion „ \subseteq “ aus Definition 2.4 ein logisches Maß **I** zur Beschreibung der Inklusion verwendet werden kann. Die gesuchte Erweiterung sollte eine Verallgemeinerung der klassischen Inklusion sein. Für ein Inklusionsmaß **I** und alle klassischen Mengen $C, D \in \wp(U)$ mit $C, D \neq \emptyset$ soll gelten:

$$C \subseteq D \Rightarrow \mathbf{I}(C, D) = 1 \quad (3.1)$$

$$C \cap D = \emptyset \Rightarrow \mathbf{I}(C, D) = 0 \quad (3.2)$$

Die Gleichungen (3.1) und (3.2) werden gelegentlich zur Definition von verallgemeinerten Inklusionen verwendet (vgl. [Bandler '80, Tsiporkova '97]). Wir werden in dieser Arbeit jedoch einen anderen Zugang wählen, der aus unserer Sicht zwei Vorteile bietet: Zum einen werden mehrwertige Relationen (und keine klassischen Mengen) zur Definition benutzt, zum anderen fassen wir den Begriff enger, so daß die von uns definierten Inklusionsmaße über eine weitere wichtige Eigenschaft verfügen.

3.7 Definition *Es sei U ein Universum und $\mathcal{F}(U^\nu)$ die Menge aller ν -stelligen Relationen über U . Ein Maß $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ heißt ein **logisches Inklusionsmaß** (der Dimension ν), wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

$$(i) \forall P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu) : \text{supp}(P) \subseteq \text{ker}(Q) \Rightarrow \mathbf{I}(P, Q) = 1$$

$$(ii) \forall P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu), P \neq \emptyset : \text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset \Rightarrow \mathbf{I}(P, Q) = 0$$

$$(iii) \forall u \in U^\nu, Q \in \mathcal{F}(U^\nu) : \mathbf{I}(\{u\}, Q) = Q(u)$$

Dabei identifizieren wir die Menge $\{u\}$ mit ihrer charakteristischen Funktion $\chi_{\{u\}}$.

Jedes Inklusionsmaß nach Definition 3.7 erfüllt wegen der Eigenschaften (i) und (ii) die Gleichungen (3.1) und (3.2) und ist daher eine mehrwertige Inklusion im Sinne von [Bandler '80]

und [Tsiporkova '97]. Die zusätzliche Forderung (iii) in Definition 3.7 wird durch die Interpretation der Relationen als mehrwertige Mengen motiviert. Für jedes $u \in U^\nu$ und jede Relation $Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ läßt sich der Zugehörigkeitswert $Q(u)$ als graduelle Beschreibung der Zugehörigkeit des Elements u zur Menge (bzw. Relation) Q verstehen (vgl. etwa [Böhme '93, S. 1 f.]). Identifiziert man das Element $u \in U^\nu$ mit der Teilmenge $\{u\} \in \wp(U^\nu)$, so wird durch den Wert $Q(u)$ beschrieben, wie sehr die Menge $\{u\}$ zur Menge Q gehört, wie sehr also $\{u\}$ in Q enthalten ist.

Alle Inklusionsmaße genügen den Eigenschaften der Definition 3.7. Dennoch umfaßt der Begriff des Inklusionsmaßes sehr unterschiedliche Abbildungen. Wir geben zunächst konkrete Beispiele von Inklusionsmaßen an.

3.8 Lemma *Es sei U ein Universum. Die folgenden Abbildungen definieren mehrwertige Inklusionsmaße:*

$$(i) \mathbf{I}_u : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \longmapsto \begin{cases} 1 & P = \emptyset \\ Q(u_P) & P \neq \emptyset \end{cases}$$

Dabei sei $u_P \in \text{supp}(P)$.

$$(ii) \mathbf{I}_M : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \longmapsto \begin{cases} 1 & P = \emptyset \\ \frac{\mathbf{hgt}(P \cap Q)}{\mathbf{hgt}(P)} & P \neq \emptyset \end{cases}$$

$$(iii) \mathbf{I}_\alpha : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1]$$

$$(P, Q) \longmapsto \begin{cases} 1 & P = \emptyset \\ \frac{\sup \{ \alpha \in [0, 1]; [P]_\beta \subseteq [Q]_\alpha \text{ für alle } \beta \in [0, \alpha] \}}{\mathbf{hgt}(P)} & P \neq \emptyset \end{cases}$$

Beweis: Es seien $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$.

zu (i): Ist $\text{supp}(P) \subseteq \ker(Q)$, so gilt für alle $u_P \in \text{supp}(P)$: $Q(u_P) = 1$. Also gilt $\mathbf{I}_u(P, Q) = 1$.

Es sei $P \neq \emptyset$ und $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset$. Dann gilt für alle $u_P \in \text{supp}(P)$: $Q(u_P) = 0$. Folglich gilt $\mathbf{I}_u(P, Q) = 0$.

Ist $P = \{u\}$, so ist nach der Definition von \mathbf{I}_u : $u = u_P$. Es gilt dann $\mathbf{I}_u(\{u\}, Q) = Q(u)$.

Also ist \mathbf{I}_u ein Inklusionsmaß nach Definition 3.7.

zu (ii): Für den Fall $P = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Es sei also $P \neq \emptyset$. Es ist dann $\mathbf{hgt}(P) > 0$.

Ist $\text{supp}(P) \subseteq \ker(Q)$, so gilt $P \cap Q = P$. Insbesondere ist dann $\mathbf{I}_M(P, Q) = \frac{\mathbf{hgt}(P)}{\mathbf{hgt}(P)} = 1$.

Im Fall $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset$ ist $P \cap Q = \emptyset$. Wir erhalten $\mathbf{I}_M(P, Q) = \frac{\mathbf{hgt}(\emptyset)}{\mathbf{hgt}(P)} = 0$.

Betrachten wir nun den Fall $P = \{u\}$. Dann gilt $P(u) = 1$ und $P(u') = 0$ für alle $u' \neq u$. Es gilt also zunächst $\mathbf{hgt}(P) = 1$. Zudem folgt $P \cap Q(u) = Q(u)$ und $P \cap Q(u') = 0$ für alle $u' \neq u$. Also ist $\mathbf{hgt}(P \cap Q) = Q(u)$. Wir erhalten $\mathbf{I}_M(P, Q) = Q(u)$.

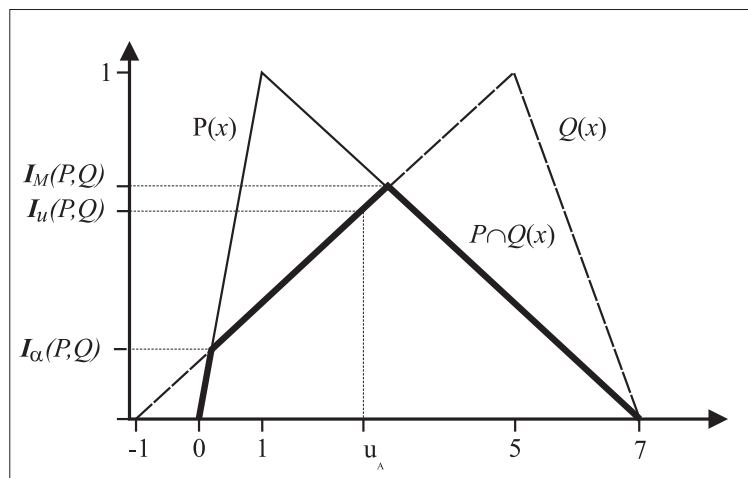


Abbildung 3.1: Darstellung von $\mathbf{I}_u(P, Q)$, $\mathbf{I}_M(P, Q)$ und $\mathbf{I}_\alpha(P, Q)$

Also definiert auch \mathbf{I}_M ein logisches Inklusionsmaß.

zu (iii): Für $P = \emptyset$ ist erneut nichts zu zeigen. Wir betrachten den Fall $P \neq \emptyset$. Es ist dann $\mathbf{hgt}(P) > 0$.

Sei $\text{supp}(P) \subseteq \text{ker}(Q)$. Dann gilt $[P]_\beta \subseteq [Q]_1 \subseteq [Q]_\alpha$ für alle $0 \leq \alpha \leq 1$ und $\beta \leq \mathbf{hgt}(P)$. Also ist

$$\sup \{ \alpha \in [0, 1]; [P]_\beta \subseteq [Q]_\alpha \text{ für alle } \beta \in [0, \alpha] \} = \mathbf{hgt}(P)$$

Wir erhalten $\mathbf{I}_\alpha(P, Q) = 1$.

Ist $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset$, so gilt für $\beta > 0$ stets $[P]_\beta \cap \text{supp}(Q) = \emptyset$. Daher folgt $\mathbf{I}_\alpha(P, Q) = 0$.

Es sei $P = \{u\}$. Dann ist für alle $\beta \in]0, 1[$: $[P]_\beta = \{u\}$. Daher ist $[P]_\beta \subseteq [Q]_\alpha$ für alle $\alpha \leq Q(u)$. Da zudem $\mathbf{hgt}(P) = 1$ ist, gilt $\mathbf{I}_\alpha(P, Q) = Q(u)$.

Demnach ist auch das Maß \mathbf{I}_α ein Inklusionsmaß. ■

Im Falle des Inklusionsmaßes \mathbf{I}_u hängt die Wahl des Punktes u_P im wesentlichen von der beabsichtigten Anwendung und den Eigenschaften des zugrunde liegenden Universums U ab. Ist U etwa ein reellwertiges Universum ($U = \mathbb{R}$), so können beispielsweise die Punkte

$$u_P = \frac{\int_{\mathbb{R}} xP(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} P(x) dx} \quad (\text{Schwerpunkt})$$

$$u'_P = \inf \{ x \in \mathbb{R}; x \in \text{supp}(P) \} \quad (\text{linker Eckwert})$$

$$u''_P = \sup \{ x \in \mathbb{R}; x \in \text{supp}(P) \} \quad (\text{rechter Eckwert})$$

gewählt werden.

Wir geben ein einfaches Beispiel für die Inklusionsmaße aus Lemma 3.8 an.

3.9 Beispiel Es sei $U = \mathbb{R}$ ein Universum und $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1])$. Wir betrachten ein τ_{\min} -Relationensystem $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \cap, \cup, ^c)$. Es seien die Relationen $P, Q \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ durch

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto \begin{cases} x & x \in [0, 1[\\ \frac{1}{6}(7-x) & x \in [1, 7[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{6}(x+1) & x \in [-1, 5[\\ \frac{1}{2}(7-x) & x \in [6, 7[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Ferner bezeichne u_P den Schwerpunkt von P (es ist $u_P \approx 2.66$). Für die Inklusionsmaße $\mathbf{I}_u(P, Q)$, $\mathbf{I}_M(P, Q)$ und $\mathbf{I}_\alpha(P, Q)$ ergeben sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_u(P, Q) &= Q(u_P) \approx 0.61 \\ \mathbf{I}_M(P, Q) &= \frac{2}{3} \\ \mathbf{I}_\alpha(P, Q) &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

In Abbildung 3.1 sind die Relationen sowie die Werte der Inklusionsmaße dargestellt.

Speziell für einstellige Relationen läßt sich noch ein weiteres Inklusionsmaß definieren. Wir beschränken uns dabei auf den im folgenden wichtigen Fall eines endlichen Universums.

3.10 Lemma Es sei U ein endliches Universum. Dann definiert die Abbildung

$$\mathbf{I}_P : \mathcal{F}(U)^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \longmapsto \begin{cases} 1 & P = \emptyset \\ \frac{|P \cap Q|}{|P|} & P \neq \emptyset \end{cases}$$

ein logisches Inklusionsmaß der Dimension 1. Dabei bezeichnet $|\cdot|$ die Kardinalität der Relationen (vgl. Definition 2.3).

Beweis: Es sei U ein endliches Universum. Ferner seien $P, Q \in \mathcal{F}(U)$.

Für den Fall $P = \emptyset$ ist nichts zu zeigen. Da U endlich ist, folgt aus $P \neq \emptyset$: $|P| = \sum_{u \in U} P(u) > 0$.

Ist $\text{supp}(P) \subseteq \text{ker}(Q)$, so gilt $P \cap Q = \emptyset$. Folglich ist $\mathbf{I}_P(P, Q) = \frac{|P \cap Q|}{|P|} = 0$.

Es sei $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) \neq \emptyset$. Dann gilt $P \cap Q \neq \emptyset$ und wir erhalten $|P \cap Q| > 0$. Somit gilt $\mathbf{I}_P(P, Q) > 0$.

Ist $P = \{u\}$, so gilt $P \cap Q(u) = Q(u)$ und $P \cap Q(u') = 0$ für alle $u' \neq u$. Da zudem $|\{u\}| = 1$ gilt (U ist endlich), folgt: $\mathbf{I}_P(P, Q) = Q(u)$.

Also ist \mathbf{I}_P ein Inklusionsmaß nach Definition 3.7. ■

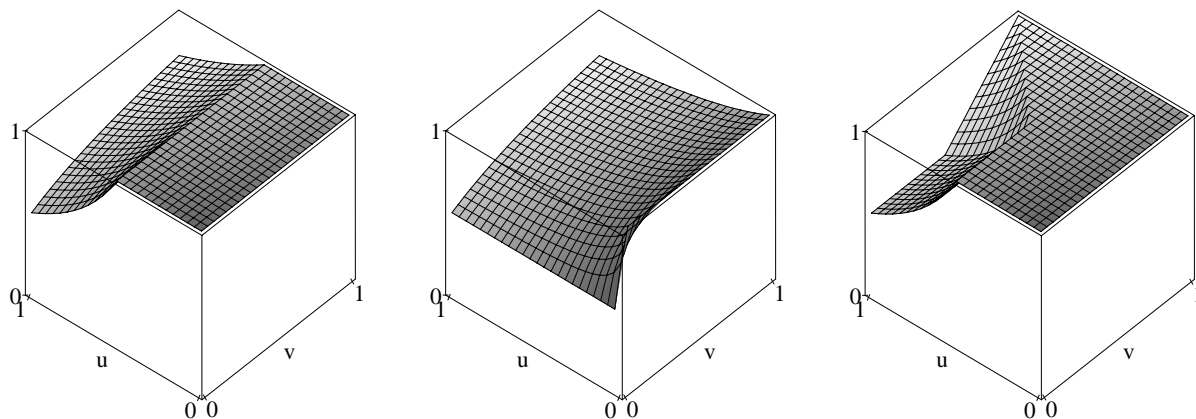


Abbildung 3.2: $\mathbf{I}_P(P, Q), \tau_{\min}$ Abbildung 3.3: $\mathbf{I}_P(P, Q), \tau_A$ Abbildung 3.4: $\mathbf{I}_M(P, Q), \tau_{\min}$

Wir geben auch hier ein Beispiel an. In diesem werden wir eine Methode zur graphischen Darstellung von Inklusionsmaßen einführen, die wir im folgenden stets verwenden, um Inklusionsmaße abzubilden.

3.11 Beispiel *Es sei ein zweielementiges Universum $U = \{u, v\}$ gegeben. In Beispiel 2.13 wurde bereits gezeigt, daß sich jede Fuzzy-Menge dieses Universums durch einen Punkt im zweidimensionalen Einheitswürfel repräsentieren läßt. Wir machen uns diese Art der Darstellung zunutze, um die Inklusionsmaße \mathbf{I}_P und \mathbf{I}_M graphisch darzustellen.*

Dazu betrachten wir die mehrwertige Relation $Q \in \mathcal{F}(U)$, die durch

$$Q(u) = 0.5 \quad \text{und} \quad Q(v) = 1$$

bestimmt ist. Für ein gegebenes Inklusionsmaß \mathbf{I} ordnen wir nun jeder mehrwertigen Relation $P \in \mathcal{F}(U)$ den Wert von $\mathbf{I}(P, Q)$ zu. Diese Werte lassen sich nun über dem Einheitswürfel auftragen. Die Abbildungen 3.2, 3.3 und 3.4 zeigen diese Art der Darstellung für die Inklusionsmaße \mathbf{I}_P und \mathbf{I}_M . Bei der Darstellung von \mathbf{I}_P wurde in Abbildung 3.2 der Wahrheitsraum $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1])$ und das τ_{\min} -Relationensystem $(\mathcal{F}(U), \cap, \cup, ^c)$ zugrunde gelegt. In Abbildung 3.3 ist \mathbf{I}_P mit dem Wahrheitsraum $\tau_A = (t_A, n_s, [0, 1])$ und dem entsprechenden τ_A -Relationensystem abgebildet. Das Inklusionsmaß \mathbf{I}_M ist in Abbildung 3.4 bezüglich des τ_{\min} -Relationensystems dargestellt.

Man beachte, daß für alle mehrwertigen Relationen $P \in \mathcal{F}(U)$ mit $P(u) = 0$ stets $\mathbf{I}(P, Q) = 1$ gilt, da in diesem Fall $\text{supp}(P) \subseteq \ker(Q)$ ist. Ferner gilt für die Mengen $\{u\}$ und $\{v\}$, die in der Darstellung durch die linke bzw. rechte Ecke des Einheitswürfels repräsentiert werden, $\mathbf{I}(\{u\}, Q) = Q(u) = \frac{1}{2}$ und $\mathbf{I}(\{v\}, Q) = Q(v) = 1$. Dies verdeutlicht die Eigenschaften (i) und (iii) aus Definition 3.7.

Die folgende Eigenschaft von Inklusionsmaßen wird in Abschnitt 3.4 von besonderer Bedeutung sein.

3.12 Definition *Es sei U ein Universum und $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein Inklusionsmaß der Dimension ν . \mathbf{I} heißt in der zweiten Komponente monoton steigend, wenn für alle $O, P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ gilt:*

$$P \subseteq Q \Rightarrow \mathbf{I}(O, P) \leq \mathbf{I}(O, Q)$$

Eine entsprechende Definition läßt sich auch für die erste Komponente formulieren. Allerdings ist ein solcher Begriff für das Weitere nicht wesentlich.

3.13 Lemma *Die Inklusionsmaße \mathbf{I}_u , \mathbf{I}_M , \mathbf{I}_P und \mathbf{I}_α sind in der zweiten Komponente monoton steigend. Dies gilt im Fall der Inklusion \mathbf{I}_u unabhängig von der Wahl des Referenzpunktes u_P .*

Der Beweis erfolgt durch elementare Umformungen. Eine graphische Veranschaulichung der Monotonie-Eigenschaft findet sich in Beispiel 3.17. Ein Beispiel für ein nicht-monotones Inklusionsmaß geben wir in Definition 3.34 an.

3.3.2 Kanonische Inklusionsmaße

Wir werden im folgenden eine spezielle Klasse von Inklusionsmaßen betrachten, die wir als *kanonische Inklusionsmaße* bezeichnen. Diese Maße wurden von Bandler und Kohout bei der ersten systematischen Untersuchung von mehrwertigen Inklusionen in [Bandler '80] vorgeschlagen. Wir werden die kanonischen Inklusionsmaße an dieser Stelle diskutieren, da sie sich durch besondere Eigenschaften in Bezug auf die Sprachen MS auszeichnen und sich an ihrem Beispiel viele Parallelen zu den klassischen Inklusionen aufzeigen lassen. Die Diskussion erfolgt ausführlich, da Bandler und Kohout in ihrer Arbeit die kanonischen Inklusionsmaße eingeführt haben, ohne daß die im folgenden aufgeführten Eigenschaften dargestellt wurden. Zudem wird die detaillierte Darlegung die Grundzüge des Konzepts des Inklusionsmaßes weiter verdeutlichen.

Wir weisen zunächst nach, daß Abbildungen einer bestimmten Klasse Inklusionsmaße sind.

3.14 Satz *Es sei U ein Universum und $\mathcal{F}(U^\nu)$ die Menge aller ν -stelligen Relationen über U . Ferner sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine t -Norm und $r_t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ das Residuum von t . Dann ist das Maß*

$$\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \mapsto \inf_{u \in U^\nu} r_t(P(u), Q(u))$$

ein Inklusionsmaß.

Beweis: Wir weisen die Eigenschaften aus Definition 3.7 nach.

Es seien $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$. Ferner sei $\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ wie oben gegeben.

zu (i): Ist $\text{supp}(P) \subseteq \text{ker}(Q)$, so gilt für alle $u \in \text{supp}(P)$: $Q(u) = 1$.

Nach Satz 1.16 (ii) gilt somit:

$$r_t(P(u), Q(u)) = r_t(P(u), 1) = 1$$

Ist $u \notin \text{supp}(P)$, so ist $P(u) = 0$ und Satz 1.16 (ii) liefert erneut:

$$r_t(P(u), Q(u)) = r_t(0, Q(u)) = 1$$

Insgesamt folgt für $\text{supp}(P) \subseteq \text{ker}(Q)$:

$$\mathbf{I}_{r_t}(P, Q) = \inf_{u \in U^\nu} \underbrace{r_t(P(u), Q(u))}_{=1} = 1$$

zu (ii): Sei nun $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset$ mit $P \neq \emptyset$. Für alle $u \in \text{supp}(P)$ ist dann $Q(u) = 0$ und es gilt dann:

$$r_t(P(u), Q(u)) = r_t(P(u), 0) = 0$$

Da nun $P \neq \emptyset$ gilt, ist $\text{supp}(P) \neq \emptyset$ und es folgt:

$$\mathbf{I}_{r_t}(P, Q) = \inf_{u \in U^\nu} r_t(P(u), Q(u)) = \min(0, \underbrace{\inf_{u \notin \text{supp}(P)} r_t(P(u), Q(u))}_{\geq 0}) = 0$$

zu (iii): Es sei $u \in U^\nu$ gegeben. Dann gilt für alle $u' \neq u$ nach Satz 1.16 (ii):

$$r_t(\chi_{\{u\}}(u'), Q(u')) = r_t(0, Q(u')) = 1$$

Ist nun $u = u'$, so liefert Satz 1.16 (iii):

$$r_t(\chi_{\{u\}}(u'), Q(u')) = r_t(1, Q(u')) = Q(u')$$

Insgesamt folgt:

$$\mathbf{I}_{r_t}(\{u\}, Q) = \inf_{u' \in U^\nu} r_t(\chi_{\{u\}}(u'), Q(u')) = \min(1, Q(u)) = Q(u)$$

■

Die Maße, die wir in Satz 3.14 beschrieben haben, werden als kanonische Inklusionsmaße bezeichnet.

3.15 Definition *Es sei U ein Universum und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum, dann heißt die Abbildung*

$$\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \longmapsto \inf_{u \in U^\nu} r_t(P(u), Q(u))$$

das **kanonische Inklusionsmaß** bzgl. τ .

Jeder Wahrheitsraum legt eindeutig ein Residuum r_t fest. Dieses definiert wiederum ein kanonisches Inklusionsmaß \mathbf{I}_{r_t} . Wir werden im folgenden nachweisen, daß ein kanonisches Inklusionsmaß in der Sprache der Klasse MS, die durch den Wahrheitsraum τ beschrieben wird, spezielle Eigenschaften besitzt. Diese zeigen deutlich die Parallelen zwischen der mehrwertigen und der klassischen Inklusion. Zunächst wird jedoch die Monotonie des Inklusionsmaßes nachgewiesen und ein Beispiel angeben.

3.16 Lemma *Es sei $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum und $\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1]$ das kanonische Inklusionsmaß bezüglich τ . Dann ist \mathbf{I}_{r_t} in der zweiten Komponente monoton steigend.*

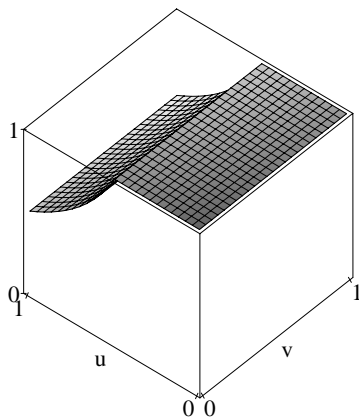
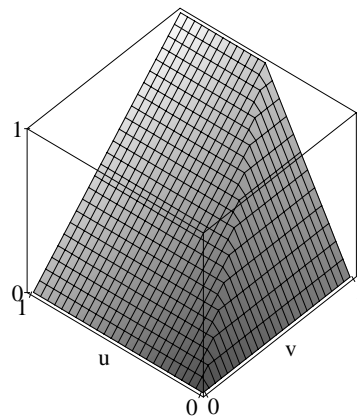
Beweis: Es sei $r_t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ ein Residuum bzgl. einer t -Norm $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$.

Nach Satz 1.16 (i) gilt für $a, b, c \in [0, 1]$ mit $b \leq c$: $r_t(a, b) \leq r_t(a, c)$.

Sind nun $O, P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ mit $P \subseteq Q$ gegeben, so folgt:

$$\begin{aligned} \forall u \in U^\nu : r_t(O(u), P(u)) &\leq r_t(O(u), Q(u)) \\ \Rightarrow \inf_{u \in U^\nu} r_t(O(u), P(u)) &\leq \inf_{u \in U^\nu} r_t(O(u), Q(u)) \\ \Rightarrow \mathbf{I}_{r_t}(O, P) &\leq \mathbf{I}_{r_t}(O, Q) \end{aligned}$$

■

Abbildung 3.5: $\mathbf{I}_{r_t}(P, Q), \tau_A$ Abbildung 3.6: $\mathbf{I}_{r_t}(Q, P), \tau_A$

3.17 Beispiel Wie in Beispiel 3.11 seien ein Universum $U = \{u, v\}$ und die Fuzzy-Menge $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q(u) = \frac{1}{2}$ und $Q(v) = 1$ gegeben. Analog zu dem Vorgehen in Beispiel 3.11 läßt sich das kanonische Inklusionsmaß \mathbf{I}_{r_t} darstellen. Dabei setzen wir den Wahrheitsraum $\tau_A = (t_A, n_s, [0, 1])$ als gegeben voraus. In Abbildung 3.5 ist der entsprechende Graph von $\mathbf{I}_{r_t}(P, Q)$ für $P \in \mathcal{F}(U)$ dargestellt. Erneut lassen sich die bereits in Beispiel 3.11 erwähnten Eigenschaften der Definition 3.7 erkennen.

Wir haben in Abbildung 3.6 zusätzlich den entsprechenden Graph für $\mathbf{I}_{r_t}(Q, P)$ aufgetragen. Dabei ist Q wie oben gegeben und P variabel. In Beispiel 2.13 haben wir darauf hingewiesen, daß die Menge derjenigen Fuzzy-Mengen, die in einer gegebenen Fuzzy-Menge $Q \in \mathcal{F}(U)$ enthalten sind, in dem Rechteck des Einheitswürfels liegen, dessen Eckpunkte $(0, 0)$, $(Q(u), 0)$, $(0, Q(v))$ und $(Q(u), Q(v))$ sind. Mit dieser Überlegung läßt sich in Abbildung 3.6 leicht die in Lemma 3.16 gezeigte Monotonie von \mathbf{I}_{r_t} ablesen.

Wir wenden uns den eingangs erwähnten Parallelen zwischen kanonischen Inklusionsmaßen und klassischen Inklusionen zu.

3.18 Satz Es sei U ein Universum, $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nach unten halbstetige t -Norm und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Ferner sei $\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ die kanonische Inklusion bzgl. τ . Dann gilt für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ und $u \in U^\nu$:

$$t(P(u), \mathbf{I}_{r_t}(P, Q)) \leq Q(u)$$

Beweis: Es sei $u \in U^\nu$ beliebig gewählt, dann gilt:

$$\begin{aligned} & t(P(u), \mathbf{I}_{r_t}(P, Q)) \\ = & t(P(u), \inf_{u' \in U^\nu} r_t(P(u'), Q(u'))) \\ \leq & t(P(u), r_t(P(u), Q(u))) \\ \stackrel{\text{Satz 1.17}}{\leq} & Q(u) \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. ■

3.19 Bemerkung Es sei $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum und $\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1]$ die kanonische Inklusion bzgl. τ .

- (i) Es seien $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ beliebig gewählt. Dann gilt nach Satz 3.18 für jede τ -Interpretation $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ von P, Q und \mathbf{I}_{r_t} :

$$\|((\widehat{P}q \wedge \widehat{\mathbf{I}}_{r_t} \widehat{P}\widehat{Q}) \rightarrow \widehat{Q}q)\| = 1 \quad (3.3)$$

Dabei ist q ein Variable oder Konstante und $\widehat{P}, \widehat{Q}, \widehat{\mathbf{I}}_{r_t} \in \mathcal{A}$ mit $\mathfrak{S}(\widehat{P}) = P$, $\mathfrak{S}(\widehat{Q}) = Q$ und $\mathfrak{S}(\widehat{\mathbf{I}}_{r_t}) = \mathbf{I}_{r_t}$ (vgl. Bem. 1.62).

- (ii) Ist t nach unten halbstetig, so ist für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$

$$\mathbf{I}_{r_t}(P, Q) = \sup \left\{ d \in [0, 1]; t(P(u), d) \leq Q(u), \text{ für alle } u \in U^\nu \right\}$$

\mathbf{I}_{r_t} ist in dieser Hinsicht ein maximales Maß. Insbesondere ist \mathbf{I}_{r_t} das maximale Maß, das eine Gleichung der Form (3.3) erfüllt.

- (iii) Die durch die Gleichung (3.3) beschriebene Schlußregel ist auch in der klassischen Logik zu finden. So findet sich im Klassenkalkül (vgl. [Hilbert '72, S. 43 f.]) ein analoger Schluß, der ebenfalls mittels einer Inklusion beschrieben wird. In diesem Sinne ist das kanonische Inklusionsmaß eine Erweiterung dieser klassischen, logischen Inklusion.

Auch in der traditionellen Aristoteles'schen Logik gibt es Schlußregeln der Form (3.3). Sie werden dort mit „barbara“, „celarent“, „darií“ usw. bezeichnet (vgl. [Hilbert '49, S. 36 f.]).

- (iv) Wir geben zur Illustration für eine Schlußregel der Form (3.3) ein Beispiel an, ohne dabei konkrete Wahrheitswerte zu verwenden:

$$\frac{\begin{array}{l} x \text{ ist eine rote Tomate} \\ \text{und jede rote Tomate ist eine reife Tomate} \end{array}}{x \text{ ist eine reife Tomate}}$$

Die Aussagen 'x ist eine rote Tomate' und 'x ist eine reife Tomate' können durch geeignete Relationen dargestellt werden. Die Aussage 'jede rote Tomate ist eine reife Tomate' wird durch die kanonische Inklusion der beiden Relationen abgebildet.

Man beachte, daß die oben genannten Aussagen nicht als im klassischen Sinne wahre oder falsche Aussagen betrachtet werden, sondern graduelle Übergänge möglich – und in diesem Falle sicher sinnvoll – sind.

Das kanonische Inklusionsmaß kann vom Standpunkt der klassischen Logik aus als Verallgemeinerung der *logischen* Inklusion verstanden werden. Der folgende Satz verdeutlicht zudem den engen Zusammenhang zwischen kanonischen Inklusionsmaßen und dem klassischen, *mengentheoretischen* Begriff der Inklusion.

3.20 Satz Es sei U ein Universum, $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ eine nach unten halbstetige t -Norm und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Ferner sei $\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1]$ die kanonische Inklusion bzgl. τ . Dann definiert die Abbildung

$$\mathbf{E}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \longmapsto t(\mathbf{I}_{r_t}(P, Q), \mathbf{I}_{r_t}(Q, P))$$

ein Gleichheitsmaß bzgl. t .

Beweis: Wir weisen die Eigenschaften (i) bis (iii) aus Definition 3.3 nach.

zu (i): Sei $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ gegeben. Dann ist nach Satz 1.16 (ii) für alle $u \in U^\nu$:

$$r_t(P(u), P(u)) = 1$$

Es gilt somit:

$$\mathbf{I}_{r_t}(P, P) = \inf_{u \in U^\nu} r_t(P(u), P(u)) = 1$$

Es folgt:

$$\mathbf{E}_{r_t}(P, P) = t(\mathbf{I}_{r_t}(P, P), \mathbf{I}_{r_t}(P, P)) = t(1, 1) = 1$$

zu (ii): Die Symmetrie des Maßes \mathbf{E}_{r_t} folgt sofort aus der Kommutativität der t -Normen (vgl. Definition 1.5).

zu (iii): Es seien $O, P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & t\left(\mathbf{E}_{r_t}(O, P), \mathbf{E}_{r_t}(P, Q)\right) \\ &= t\left(t(\mathbf{I}_{r_t}(O, P), \mathbf{I}_{r_t}(P, O)), t(\mathbf{I}_{r_t}(P, Q), \mathbf{I}_{r_t}(Q, P))\right) \\ &= t\left(t\left(\inf_{u \in U^\nu} r_t(O(u), P(u)), \inf_{u \in U^\nu} r_t(P(u), O(u))\right), \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. t\left(\inf_{u \in U^\nu} r_t(P(u), Q(u)), \inf_{u \in U^\nu} r_t(Q(u), P(u))\right)\right) \\ &\leq t\left(\underbrace{\inf_{u \in U^\nu} t(r_t(O(u), P(u)), r_t(P(u), Q(u)))}_{\leq r_t(O(u), Q(u)) \text{ (vgl. Satz 1.17 (iii))}}, \underbrace{\inf_{u \in U^\nu} t(r_t(Q(u), P(u)), r_t(P(u), O(u)))}_{\leq r_t(Q(u), O(u)) \text{ (vgl. Satz 1.17 (iii))}}\right) \\ &\leq t\left(\inf_{u \in U^\nu} r_t(O(u), Q(u)), \inf_{u \in U^\nu} r_t(Q(u), O(u))\right) \\ &= t\left(\mathbf{I}_{r_t}(O, Q), \mathbf{I}_{r_t}(Q, O)\right) \\ &= \mathbf{E}_{r_t}(O, Q) \end{aligned}$$

■

3.21 Bemerkung *Es sei $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum und $\mathbf{I}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ das kanonische Inklusionsmaß bzgl. τ . Dabei sei die t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ nach unten halbstetig. Ferner sei $\mathbf{E}_{r_t} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ wie in Satz 3.20 definiert und $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ beliebig gewählt.*

Dann gilt nach Satz 3.20 für jede τ -Interpretation $\mathfrak{I}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ von P, Q, \mathbf{E}_{r_t} und \mathbf{I}_{r_t} :

$$\|(\widehat{\mathbf{I}}_{r_t} \widehat{P} \widehat{Q} \wedge \widehat{\mathbf{I}}_{r_t} \widehat{Q} \widehat{P}) \leftrightarrow \widehat{\mathbf{E}}_{r_t} \widehat{P} \widehat{Q}\| = 1.$$

Für $A, B, C \in \wp(U)$ entspricht dieser Ausdruck der bekannten Formel:

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow (A = B)$$

der klassischen Mengenlehre.

Hier wird deutlich, daß kanonische Inklusionsmaße auch die klassische Inklusion im Sinne der Mengentheorie verallgemeinern und bekannte Gesetzmäßigkeiten der klassischen Theorie erhalten bleiben.

3.3.3 Abgeleitete Inklusionsmaße

In den vorausgegangenen Ausführungen sind verschiedene Inklusionsmaße eingeführt worden. Von diesen Maßen können durch gewisse Verknüpfungen weitere Inklusionsmaße abgeleitet werden. Wir beschränken uns auch in diesem Abschnitt auf die Festlegung der entsprechenden Begriffe und auf die Angabe einiger Beispiele.

3.22 Satz *Es sei U ein Universum und $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ seien mehrwertige Inklusionsmaße der Dimension ν . Die folgenden Abbildungen definieren ebenfalls mehrwertige Inklusionsmaße:*

$$(i) \quad \mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2 : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \mapsto \min(\mathbf{I}_1(P, Q), \mathbf{I}_2(P, Q))$$

$$(ii) \quad \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2 : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \mapsto \max(\mathbf{I}_1(P, Q), \mathbf{I}_2(P, Q))$$

$$(iii) \quad \mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2 : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \mapsto \gamma \mathbf{I}_1(P, Q) + (1 - \gamma) \mathbf{I}_2(P, Q), \text{ für } \gamma \in [0, 1]$$

Beweis: Wir beschränken uns hier auf den Nachweis von (iii). Die Behauptungen (i) und (ii) folgen durch analoge Schlüsse.

Es sei $\gamma \in [0, 1]$ beliebig gewählt. Wir weisen die Eigenschaften (i) bis (iii) aus Definition 3.7 für die Abbildung $\mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2$ nach.

zu (i): Es seien $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ mit $\text{supp}(P) \subseteq \text{ker}(Q)$. Da \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 nach Voraussetzung Inklusionsmaße sind, gilt:

$$\mathbf{I}_1(P, Q) = 1$$

$$\mathbf{I}_2(P, Q) = 1$$

Es folgt

$$\mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2(P, Q) = \gamma \mathbf{I}_1(P, Q) + (1 - \gamma) \mathbf{I}_2(P, Q) = \gamma + (1 - \gamma) = 1$$

zu (ii): Es seien $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ mit $P \neq \emptyset$ und $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset$. Da \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 nach Voraussetzung Inklusionsmaße sind, gilt:

$$\mathbf{I}_1(P, Q) = 0$$

$$\mathbf{I}_2(P, Q) = 0$$

Es folgt

$$\mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2(P, Q) = \gamma \mathbf{I}_1(P, Q) + (1 - \gamma) \mathbf{I}_2(P, Q) = 0 + 0 = 0$$

zu (iii): Es seien $u \in U^\nu$ und $Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ gegeben. Da \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 nach Voraussetzung Inklusionsmaße sind, gilt:

$$\mathbf{I}_1(\{u\}, Q) = Q(u)$$

$$\mathbf{I}_2(\{u\}, Q) = Q(u)$$

Es folgt

$$\mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2(\{u\}, Q) = \gamma \mathbf{I}_1(\{u\}, Q) + (1 - \gamma) \mathbf{I}_2(\{u\}, Q) = \gamma Q(u) + (1 - \gamma) Q(u) = Q(u)$$

■

3.23 Bemerkung Wir betrachten die Menge $\mathcal{I}(U^\nu)$ aller logischen Inklusionsmaße der Dimension ν über einem Universum U . Ferner seien \cap und \cup die Verknüpfungen, die wir in Satz 3.22 angegeben haben. Dann bildet das Tripel $(\mathcal{I}(U^\nu), \cap, \cup)$ einen Verband. Der Verband besitzt kein Eins- oder Nullelement und ist nicht komplementär. Allerdings gilt innerhalb des Verbandes das Distributivgesetz. Für die Definitionen der verbandstheoretischen Begriffe verweisen wir erneut auf [Reinhardt '73, S. 26].

Durch die Verknüpfungen, die wir in Satz 3.22 angegeben haben, bleiben die Monotonie-Eigenschaften der Inklusionsmaße erhalten.

3.24 Satz Es sei U ein Universum und $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ seien mehrwertige, in der zweiten Komponente monoton steigende Inklusionsmaße. Dann sind die Inklusionsmaße $\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2$ und $\mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2$ ebenfalls in der zweiten Komponente monoton steigend.

Beweis: Wir weisen die Eigenschaft auch hier nur für das Inklusionsmaß $\mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2$ nach.

Es seien $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ in der zweiten Komponente monoton steigende Inklusionsmaße.

Nach Voraussetzung gilt für $O, P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ mit $P \subseteq Q$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2(O, P) &= \gamma \mathbf{I}_1(O, P) + (1 - \gamma) \mathbf{I}_2(O, P) \\ &\leq \gamma \mathbf{I}_1(O, Q) + (1 - \gamma) \mathbf{I}_2(O, Q) = \mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2(O, Q) \end{aligned}$$

■

Ferner gilt die folgende Abschätzung:

3.25 Lemma Es sei U ein Universum und $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ seien mehrwertige Inklusionsmaße. Dann gilt für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ und $\gamma \in [0, 1]$:

$$\mathbf{I}_1 \cap \mathbf{I}_2(P, Q) \leq \mathbf{I}_1 \gamma \mathbf{I}_2(P, Q) \leq \mathbf{I}_1 \cup \mathbf{I}_2(P, Q)$$

Neben den zweistelligen Verknüpfungen, die wir in Satz 3.22 angegeben haben, läßt sich eine einstellige Operation auf den Inklusionsmaßen definieren. Wir weisen zunächst nach, daß die entsprechende Operation ein Inklusionsmaß festlegt.

3.26 Satz Es sei U ein Universum und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Ist dann $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein Inklusionsmaß, so definiert die Abbildung

$$\mathbf{I}^c : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \mapsto n(\mathbf{I}(P, Q^c))$$

ebenfalls ein Inklusionsmaß.

Beweis: Es seien $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ gegeben. Es sei ferner $P \neq \emptyset$. Es gilt dann für jede Involution $n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eines Wahrheitsraumes $\tau = (t, n, [0, 1])$:

$$\text{supp}(P) \subseteq \ker(Q) \Leftrightarrow \text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q^c) = \emptyset \quad (3.4)$$

$$\text{supp}(P) \subseteq \ker(Q^c) \Leftrightarrow \text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset \quad (3.5)$$

Wir weisen nun die Eigenschaften (i) bis (iii) aus Definition 3.7 für die Abbildung \mathbf{I}^c nach.

zu (i): Da \mathbf{I} nach Voraussetzung ein Inklusionsmaß ist, gilt:

$$\begin{aligned} \text{supp}(P) \subseteq \ker(Q) &\stackrel{\text{Gl. (3.4)}}{\Rightarrow} \text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q^c) = \emptyset \\ &\stackrel{\text{Def. 3.7 (i)}}{\Rightarrow} \mathbf{I}(P, Q^c) = 0 \\ &\stackrel{\text{Def. 1.10 (i)}}{\Rightarrow} n(\mathbf{I}(P, Q^c)) = \mathbf{I}^c(P, Q) = 1 \end{aligned}$$

zu (ii): Da \mathbf{I} nach Voraussetzung ein Inklusionsmaß ist, gilt:

$$\begin{aligned} \text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset &\stackrel{\text{Gl. (3.5)}}{\Rightarrow} \text{supp}(P) \subseteq \ker(Q^c) \\ &\stackrel{\text{Def. 3.7 (i)}}{\Rightarrow} \mathbf{I}(P, Q^c) = 1 \\ &\stackrel{\text{Def. 1.10 (i)}}{\Rightarrow} n(\mathbf{I}(P, Q^c)) = \mathbf{I}^c(P, Q) = 0 \end{aligned}$$

zu (iii): Seien $u \in U^\nu$ und $Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$, so gilt:

$$\mathbf{I}^c(\{u\}, Q) = n(\mathbf{I}(\{u\}, Q^c)) \stackrel{\text{Def. 3.7 (iii)}}{=} n(n(Q(u))) \stackrel{\text{Def. 1.10}}{=} Q(u)$$

■

3.27 Definition *Es sei U ein Universum und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Es sei ferner $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein Inklusionsmaß. Dann heißt die Abbildung*

$$\mathbf{I}^c : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1] \quad (P, Q) \mapsto n(\mathbf{I}(P, Q^c))$$

das zu \mathbf{I} duale Inklusionsmaß (bzgl. τ).

3.28 Bemerkung

- (i) *Obwohl zur Definition des dualen Inklusionsmaßes komplementäre Mengen und das logische Komplement verwendet werden², definiert das duale Inklusionsmaß kein Komplement in dem durch die Verknüpfungen \cap und \cup aus Definition 3.22 festgelegten Verband $(\mathcal{I}(U^\nu), \cap, \cup)$ (vgl. auch Bemerkung 3.23).*
- (ii) *Im allgemeinen sind ein Inklusionsmaß und das zugehörige duale Inklusionsmaß verschieden. Ein Inklusionsmaß stimmt offenbar mit seinem dualen Inklusionsmaß für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ genau dann überein, wenn gilt:*

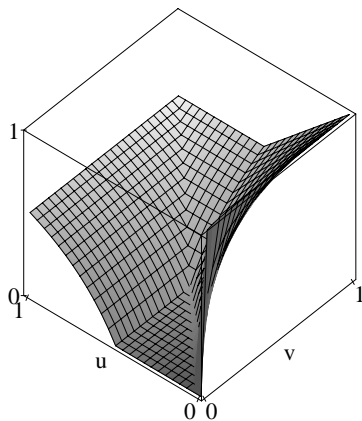
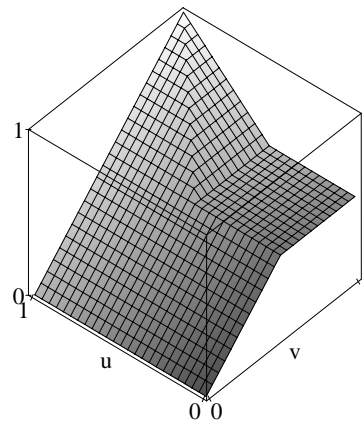
$$n(\mathbf{I}(P, Q)) = \mathbf{I}(P, Q^c)$$

für $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$.

²Es sei $\tau = (t, n, [0, 1])$ und $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein Inklusionsmaß bzgl. τ . Sind $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$, so gilt für jede τ -Interpretation $\mathfrak{J}_\tau = (\|\cdot\|, \mathfrak{S})$ von P, Q, Q^c, \mathbf{I} und \mathbf{I}^c :

$$\|\widehat{\mathbf{I}^c P Q}\| = \|(-\widehat{\mathbf{I} P Q^c})\|$$

In diesem Sinne wird das duale Inklusionsmaß durch das logische Komplement beschrieben.

Abbildung 3.7: $\mathbf{I}_M^c(P, Q)$, τ_{\min} Abbildung 3.8: $\mathbf{I}_M^c(Q, P)$, τ_{\min}

- (iii) Es sei $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum und U ein Universum. Es seien ferner $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein Inklusionsmaß sowie \mathbf{I}^c das zu \mathbf{I} duale Inklusionsmaß bezüglich τ . Wir betrachten das duale Maß zum dualen Inklusionsmaß \mathbf{I}^c bezüglich τ . Für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ gilt:

$$(\mathbf{I}^c)^c(P, Q) = n(\mathbf{I}^c(P, Q^c)) = n(n(\mathbf{I}(P, (Q^c)^c))) = \mathbf{I}(P, Q)$$

Das duale Inklusionsmaß eines dualen Inklusionsmaßes ist also identisch mit dem ursprünglichen Inklusionsmaß. In diesem Sinne rechtfertigt sich der Begriff der Dualität der Inklusionsmaße. Wie bei der Dualität von t - und s -Normen ist jedoch das duale Inklusionsmaß nicht eindeutig, sondern von der verwendeten Involution abhängig.

Wir geben Beispiele für duale Inklusionsmaße an. Abermals verwenden wir dabei die in Beispiel 3.11 eingeführte Methode zur Darstellung von Inklusionsmaßen.

3.29 Beispiel

- (i) Es sei $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1])$. Ferner seien das Universum $U = \{u, v\}$ und $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q(u) = \frac{1}{2}$ und $Q(v) = 1$ gegeben.

In den Abbildungen 3.7 und 3.8 sind die Graphen von $\mathbf{I}_M^c(P, Q)$ und $\mathbf{I}_M^c(Q, P)$ mit $P \in \mathcal{F}(U)$ dargestellt.

Erneut lassen sich die bereits in den Beispielen 3.11 und 3.17 erwähnten Eigenschaften der Inklusionsmaße ablesen.

- (ii) Es sei U ein endliches Universum und $\tau_A = (t_A, n_s, [0, 1])$. Wir betrachten das Inklusionsmaß \mathbf{I}_P aus Lemma 3.10. Es gilt dann für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_P(P, Q^c) &= \frac{\sum_{u \in U} (P(u) \cdot (1 - Q(u)))}{\sum_{u \in U} P(u)} \\ &= \frac{\sum_{u \in U} (P(u) - P(u) \cdot Q(u))}{\sum_{u \in U} P(u)} \\ &= 1 - \frac{\sum_{u \in U} P(u) \cdot Q(u)}{\sum_{u \in U} P(u)} \\ &= n(\mathbf{I}_P(P, Q)). \end{aligned}$$

Somit gilt in diesem Fall für alle $P, Q \in \mathcal{F}(U)$: $\mathbf{I}_P(P, Q) = \mathbf{I}_P^c(P, Q)$. Das Inklusionsmaß \mathbf{I}_P stimmt also mit seinem dualen Inklusionsmaß überein, wenn der Wahrheitsraum τ_A zur Beschreibung der entsprechenden Mengenoperationen verwendet wird.

Auch im Falle dualer Inklusionsmaße läßt sich wie bei den Verknüpfungen des Satzes 3.22 zeigen, daß sich die Monotonie des ursprünglichen Inklusionsmaßes an das duale Maß vererbt.

3.30 Satz *Es sei $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1]$ ein Inklusionsmaß und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Dann ist das zu \mathbf{I} duale Inklusionsmaß \mathbf{I}^c bzgl. τ genau dann monoton steigend in der zweiten Komponente, wenn dies \mathbf{I} auch ist.*

Beweis: „ \Rightarrow “: Wir weisen nach, daß das duale Inklusionsmaß \mathbf{I}^c zu einem in der zweiten Komponente monoton steigendem Inklusionsmaß \mathbf{I} selbst in der zweiten Komponente monoton steigend ist.

Es sei $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1]$ ein in der zweiten Komponente monoton steigendes Inklusionsmaß.

Seien nun $O, P, Q \in \mathcal{F}(U^\nu)$ mit $P \subseteq Q$. Da n streng monoton fallend ist, für jede Involution $n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ gilt:

$$P \subseteq Q \Leftrightarrow Q^c \subseteq P^c$$

Da \mathbf{I} monoton steigend in der zweiten Komponente ist, folgt unter der erneuten Nutzung der Monotonie von n :

$$\begin{aligned} P \subseteq Q &\Rightarrow \mathbf{I}(O, Q^c) \leq \mathbf{I}(O, P^c) \\ &\Rightarrow n(\mathbf{I}(O, P^c)) \leq n(\mathbf{I}(O, Q^c)) \\ &\Rightarrow \mathbf{I}^c(O, P^c) \leq \mathbf{I}^c(O, Q^c) \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Ist das duale Inklusionsmaß \mathbf{I}^c monoton steigend in der zweiten Komponente, so ist nach den obigen Überlegungen auch $(\mathbf{I}^c)^c$ in der zweiten Komponente monoton steigend. In Bemerkung 3.28 haben wir bereits gezeigt, daß $(\mathbf{I}^c)^c = \mathbf{I}$ gilt. Also ist auch \mathbf{I} monoton steigend in der zweiten Komponente. ■

3.3.4 Das Kartesische Produkt von Inklusionsmaßen

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Betrachtung des Kartesischen Produkts von Inklusionsmaßen ab. Zu diesem Zweck charakterisieren wir zunächst eine spezielle Klasse von t -Normen genauer.

3.31 Definition *Eine t -Norm $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ heißt **nullteilerfrei**, wenn für alle $a, b \in [0, 1]$ gilt:*

$$a = 0 \vee b = 0 \Leftrightarrow t(a, b) = 0$$

3.32 Bemerkung

- (i) Eine t -Norm ist nullteilerfrei, wenn die durch t auf dem Intervall $[0, 1]$ erklärte binäre Verknüpfung $*$: $[0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ $(a, b) \mapsto a * b = t(a, b)$ nullteilerfrei ist.
- (ii) Das Kartesische Produkt von Inklusionsmaßen kann nur bezüglich nullteilerfreier t -Normen gebildet werden. Der Begriff der nullteilerfreien t -Norm ist in der Literatur nicht üblich, da vergleichbare Problemstellungen dort nicht betrachtet werden.
- (iii) Der Minimum-Operator t_{\min} und das Algebraische Produkt t_A sind nullteilerfrei, das Drastische Produkt t_D und die Beschränkte Differenz t_B nicht (die entsprechenden Vorschriften wurden in Tabelle 1.1 angegeben).

3.33 Satz Es seien U und V zwei Universen. Ferner seien $\mathbf{I}_U : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \longrightarrow [0, 1]$ und $\mathbf{I}_V : \mathcal{F}(V^\kappa)^2 \longrightarrow [0, 1]$ zwei Inklusionsmaße und $t : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_U \otimes_t \mathbf{I}_V : (\mathcal{F}(U^\nu) \otimes_t \mathcal{F}(V^\kappa))^2 &\longrightarrow [0, 1] \\ (P_U \otimes_t P_V, Q_U \otimes_t Q_V) &\longmapsto t\left(\mathbf{I}_U(P_U, Q_U), \mathbf{I}_V(P_V, Q_V)\right) \end{aligned}$$

definiert ein Inklusionsmaß.

Dabei bezeichne $\mathcal{F}(U^\nu) \otimes_t \mathcal{F}(V^\kappa)$ die Menge aller Relationen $O \in \mathcal{F}(U^\nu \times V^\kappa)$, für die $P \in \mathcal{F}(U^\nu)$ und $Q \in \mathcal{F}(V^\kappa)$ derart existieren, daß $O = P \otimes_t Q$ gilt.

Beweis: Wir weisen die Eigenschaften (i) bis (iii) der Definition 3.7 nach. Zu diesem Zweck seien $P = P_U \otimes_t P_V$, $Q = Q_U \otimes_t Q_V \in \mathcal{F}(U^\nu) \otimes_t \mathcal{F}(V^\kappa)$ mit $P \neq \emptyset$ gegeben.

zu (i): Es sei $\text{supp}(P) \subseteq \ker(Q)$. Für $u \in U^\nu$ und $v \in V^\kappa$ mit $(u, v) \in \text{supp}(P)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} P_U(u) > 0 \wedge P_V(v) > 0 \\ \stackrel{1.9}{\Leftrightarrow} t(P_U(u), P_V(v)) > 0 \\ \Rightarrow t(Q_U(u), Q_V(v)) = 1 \\ \stackrel{1.9}{\Leftrightarrow} Q_U(u) = 1 \wedge Q_V(v) = 1 \end{aligned}$$

Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} \text{supp}(P) &\subseteq \ker(Q) \\ \Rightarrow (\text{supp}(P_U) \subseteq \ker(Q_U)) \wedge (\text{supp}(P_V) \subseteq \ker(Q_V)) \\ \Rightarrow \mathbf{I}_U(P_U, Q_U) = 1 \wedge \mathbf{I}_V(P_V, Q_V) = 1 \\ \Rightarrow t(\mathbf{I}_U(P_U, Q_U), \mathbf{I}_V(P_V, Q_V)) &= \mathbf{I}_U \otimes_t \mathbf{I}_V(P, Q) = 1 \end{aligned}$$

zu (ii): Es sei $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset$. Da t nullteilerfrei ist, gilt für $u \in U^\nu$ und $v \in V^\kappa$ mit $(u, v) \in \text{supp}(P)$ gilt:

$$\begin{aligned} & t(P_U(u), P_V(v)) > 0 \\ \Leftrightarrow & t(Q_U(u), Q_V(v)) = 0 \\ \Leftrightarrow & Q_U(u) = 0 \vee Q_V(v) = 0 \end{aligned}$$

Wir weisen nach, daß stets $\text{supp}(P_U) \cap \text{supp}(Q_U) = \emptyset$ oder $\text{supp}(P_V) \cap \text{supp}(Q_V) = \emptyset$ gilt.

O.B.d.A. sei $Q_U(u) > 0$. Existiert kein solches $u \in U^\nu$, so gilt bereits $\text{supp}(P_U) \cap \text{supp}(Q_U) = \emptyset$ und die Behauptung ist gezeigt.

Es sei also $Q_U(u) > 0$. Wir wählen $v' \in \text{supp}(P_V)$ beliebig. Dann ist $(u, v') \in \text{supp}(P)$ und wie oben folgt $Q_V(v') = 0$. Also gilt $\text{supp}(P_V) \cap \text{supp}(Q_V) = \emptyset$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \text{supp}(P) \cap \text{supp}(Q) = \emptyset \\ \Rightarrow & \text{supp}(P_U) \cap \text{supp}(Q_U) = \emptyset \vee \text{supp}(P_V) \cap \text{supp}(Q_V) = \emptyset \\ \Rightarrow & \mathbf{I}_U(P_U, Q_U) = 0 \vee \mathbf{I}_V(P_V, Q_V) = 0 \\ \Rightarrow & t(\mathbf{I}_U(P_U, Q_U), \mathbf{I}_V(P_V, Q_V)) = \mathbf{I}_U \otimes_t \mathbf{I}_V(P, Q) = 0 \end{aligned}$$

zu (iii): Es sei $(u, v) \in U^\nu \times V^\kappa$. Dann gilt:

$$\mathbf{I}_U \otimes_t \mathbf{I}_V((u, v), Q) = t(\mathbf{I}_U(\{u\}, Q_U), \mathbf{I}_V(\{v\}, Q_V)) = t(Q_U(u), Q_V(v)) = Q(u, v)$$

■

3.34 Definition *Es seien U und V zwei Universen. Ferner seien $\mathbf{I}_U : \mathcal{F}(U^\nu)^2 \rightarrow [0, 1]$ und $\mathbf{I}_V : \mathcal{F}(V^\kappa)^2 \rightarrow [0, 1]$ zwei Inklusionsmaße und $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_U \otimes_t \mathbf{I}_V : & (\mathcal{F}(U^\nu) \otimes_t \mathcal{F}(V^\kappa))^2 \rightarrow [0, 1] \\ & (P_U \otimes_t P_V, Q_U \otimes_t Q_V) \mapsto t(\mathbf{I}_U(P_U, Q_U), \mathbf{I}_V(P_V, Q_V)) \end{aligned}$$

heißt das **Kartesische Produkt** der Inklusionsmaße \mathbf{I}_U und \mathbf{I}_V .

3.35 Bemerkung *Im allgemeinen ist das kartesische Produkt monotoner Inklusionsmaße selbst nicht monoton.*

3.4 Logische Maße und Fuzzy-Maße

In der Fuzzy-Set-Theorie werden verschiedene Konzepte bereitgestellt, die es erlauben, *ungeheure oder unvollständige Informationen über an sich präzise Aussagen* mathematisch abzubilden (vgl. [Kruse '95, S. 145]). Zu diesem Zweck werden spezielle Abbildungen $\wp(U) \rightarrow [0, 1]$ betrachtet, die als Fuzzy-Maße bezeichnet werden. Fuzzy-Maße stellen dabei spezielle Verallgemeinerungen von Wahrscheinlichkeitsmaßen dar. Insbesondere lassen sich Wahrscheinlichkeitsmaße als Spezialfälle von Fuzzy-Maßen verstehen (vgl. [Klir '95, S. 200 f.]).

Die zeitlich gesehen erste dieser Verallgemeinerungen des klassischen Wahrscheinlichkeitsmaßes wurde von L.A. Zadeh in [Zadeh '78] auf einem zunächst intuitiven Niveau vorgeschlagen. In der Folgezeit wurde das Konzept von verschiedenen Autoren verfeinert (u. a. [Zadeh '81, Higashi '83, Yager '83, Delgado '87]) und schließlich zu einer eigenständigen Theorie weiterentwickelt. Eine axiomatische Ableitung der Fuzzy-Maßtheorie findet sich in [Dubois '87]. Verschiedene Anwendungsgebiete der Fuzzy-Maße werden bei [Tanaka '99] und [Wolkenhauer '98] beschrieben. Darstellungen, die insbesondere auf die inhaltlichen Unterschiede der verschiedenen Maße sowie die konzeptionellen Unterschiede eingehen, sind in [Chuaqui '91] und [Weisbrod '95] zu finden. Die Werke von [Klir '95] und [Kruse '95] enthalten eine übersichtliche Einführung in das Themenfeld.

Die von uns in dieser Arbeit eingeführten logischen Maße unterscheiden sich zunächst in mehrfacher Hinsicht grundlegend von dem Konzept des Fuzzy-Maßes. So bewerten logische Maße *Eigenschaften und Beziehungen von unscharfen Aussagen* und repräsentieren somit nicht zwingend unvollständige Informationen. Zudem kann das Bild eines logischen Maßes stets als Wahrheitswert verstanden werden. Eine solche Interpretation der Funktionswerte erscheint im Falle der Fuzzy-Maße zunächst nicht plausibel.

Wir werden in dem folgenden Abschnitt die Beziehung von logischen Maßen, Wahrscheinlichkeitsmaßen und Fuzzy-Maßen näher untersuchen. Dabei wird sich zeigen, daß neben den zunächst rein begrifflichen Analogien auch inhaltliche Parallelen existieren. Insbesondere werden wir nachweisen, daß sich Wahrscheinlichkeits- und Fuzzy-Maße aus dem Konzept des logischen Maßes ableiten lassen und logische Maße daher als Grundlage der beiden anderen Theorien verstanden werden können.

Wir beginnen die Darstellung mit einer kurzen Einführung der wesentlichen Grundbegriffe der Theorie der Fuzzy-Maße. Anschließend werden wir uns mit der Repräsentation verschiedener Fuzzy-Maße durch Inklusionsmaße zuwenden. Wesentlich sind hier die Darstellungssätze von Möglichkeits-, Notwendigkeits- und Wahrscheinlichkeitsmaßen, die in dieser Arbeit erstmals formuliert und bewiesen werden. Neben der Ableitung einiger wesentlicher Eigenschaften der Fuzzy-Maße wird der Schwerpunkt der Untersuchungen auf den Erweiterungsmöglichkeiten der Fuzzy-Maße liegen, die durch unseren Ansatz entstehen.

3.4.1 Grundlegende Definitionen

Wir werden uns bei der folgenden Darstellung auf die Einführung der wesentlichen Begriffe beschränken. Ferner werden wir nur den Fall eines endlichen Universums U betrachten und daher stets die gesamte Potenzmenge $\wp(U)$ als Definitionsbereich aller Maße zulassen. Diese Einschränkung vereinfacht die Diskussion im folgenden erheblich. Zudem werden wir uns in

Abschnittes 3.4.2 ohnehin auf den Fall eines endlichen Universums beschränken. Wir beginnen mit der Einführung der Begriffe des Fuzzy-Maßes und des Wahrscheinlichkeitsmaßes.

3.36 Definition *Es sei U ein endliches Universum. Eine Abbildung $m : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ heißt ein **Fuzzy-Maß** auf $\wp(U)$, wenn gilt:*

$$(M1) \quad m(\emptyset) = 0 \text{ und } m(U) = 1$$

$$(M2) \quad \text{Für alle } A, B \in \wp(U) \text{ mit } A \subseteq B \text{ gilt: } m(A) \leq m(B)$$

*Eine Abbildung $p : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ heißt ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf $\wp(U)$, wenn gilt:*

$$(W1) \quad p(\emptyset) = 0 \text{ und } p(U) = 1$$

$$(W2) \quad \text{Für alle } A, B \in \wp(U) \text{ mit } A \cap B = \emptyset \text{ gilt: } p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Die entsprechenden Definitionen für unendliche Universen finden sich u.a. in [Klir '95].

3.37 Bemerkung

(i) *Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß ist ein Fuzzy-Maß.*

Für $A, B \in \wp(U)$ mit $A \subseteq B$ gilt: $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Aus (W2) folgt für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß p :

$$p(B) = p(A \cup (B \setminus A)) = p(A) + p(B \setminus A)$$

Wegen $p(B \setminus A) \geq 0$ erhalten wir $p(A) \leq p(B)$. Folglich erfüllt jedes Wahrscheinlichkeitsmaß (M2) und ist ein Fuzzy-Maß.

(ii) *Fuzzy-Maße sind nach Definition 3.36 nur auf klassische Mengen anwendbar. Sie bilden daher Eigenschaften scharfer Aussagen ab.*

Wir geben zwei Klassen von Fuzzy-Maßen an. Die Definitionen sind [Klir '95] bzw. [Kruse '95] entnommen.

3.38 Definition *Es sei U ein endliches Universum.*

(i) *Ein Fuzzy-Maß $m : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ heißt ein **Möglichkeitsmaß** auf $\wp(U)$, wenn für alle $A, B \in \wp(U)$ gilt:*

$$m(A \cup B) = \max(m(A), m(B))$$

(ii) *Ein Fuzzy-Maß $m : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ heißt ein **Notwendigkeitsmaß** auf $\wp(U)$, wenn für alle $A, B \in \wp(U)$ gilt:*

$$m(A \cap B) = \min(m(A), m(B))$$

Zwischen Möglichkeits- und Notwendigkeitsmaßen besteht die folgende Beziehung:

3.39 Lemma *Ist $m : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ ein Möglichkeitsmaß, so definiert die Abbildung*

$$m' : \wp(U) \rightarrow [0, 1] \quad A \mapsto 1 - m(A^c)$$

ein Notwendigkeitsmaß. Dabei bezeichnet A^c das (klassische) Komplement von A .

Offenbar ist die in Lemma 3.39 angedeutete Abbildung von der Menge der Möglichkeitsmaße in die Menge der Notwendigkeitsmaße bijektiv. Ein Beweis dieses Lemmas sowie weitere Ausführungen zu Möglichkeits-, Notwendigkeits- und Wahrscheinlichkeitsmaßen finden sich in [Klir '95, S. 177 ff.].

3.4.2 Darstellungssätze von Fuzzy-Maßen

Wir wenden uns der angekündigten Untersuchung der Beziehung von logischen Maßen und Fuzzy-Maßen zu. Zu diesem Zweck werden wir für den Rest dieses Abschnitts die Menge $\mathcal{K}(U)$ stets mit der Menge $\wp(U)$ identifizieren. Der folgende Satz bildet den Ausgangspunkt unserer Überlegungen.

3.40 Satz - Darstellungssatz von Fuzzy-Maßen

Es sei U ein endliches Universum und $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein in der zweiten Komponente monoton steigendes Inklusionsmaß. Dann definiert für jedes $P \in \mathcal{F}(U)$ mit $P \neq \emptyset$ die Abbildung

$$m_P : \wp(U) \rightarrow [0, 1] \quad A \mapsto \mathbf{I}(P, A)$$

ein Fuzzy-Maß auf $\wp(U)$.

Beweis: Es sei $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U)^2 \rightarrow [0, 1]$ ein in der zweiten Komponente monoton steigendes Inklusionsmaß und $P \in \mathcal{F}(U)$ mit $P \neq \emptyset$. Ferner sei die Abbildung m_P wie in der Behauptung gegeben.

Wir weisen die Eigenschaften der Definition 3.36 nach.

zu (i): Ist $A = \emptyset$, so gilt $\text{supp}(P) \cap \emptyset = \emptyset$. Da \mathbf{I} ein Inklusionsmaß ist, folgt nach Definition 3.7 (ii):

$$m_P(\emptyset) = \mathbf{I}(P, \emptyset) = 0$$

Es ist $\text{supp}(P) \subseteq U$. Für $A = U$ folgt somit:

$$m_P(A) = \mathbf{I}(P, A) = 1$$

zu (ii): Es seien $A, B \in \wp(U)$ mit $A \subseteq B$ gegeben. Da \mathbf{I} in der zweiten Komponente monoton steigend ist, folgt:

$$m_P(A) = \mathbf{I}(P, A) \leq \mathbf{I}(P, B) = m_P(B)$$

Also definiert m_P ein Fuzzy-Maß. ■

Jedes logische Inklusionsmaß definiert nach Satz 3.40 zusammen mit einer mehrwertigen Relation ein Fuzzy-Maß. Im allgemeinen läßt sich nicht nachweisen, daß jedes Fuzzy-Maß auf diese Weise darstellbar ist. In speziellen Fällen ist dies jedoch möglich. Wir werden im folgenden zeigen, daß sich Möglichkeits-, Notwendigkeits- sowie Wahrscheinlichkeitsmaße eindeutig durch spezielle Inklusionsmaße darstellen lassen.

Wir beginnen mit der Diskussion der Möglichkeits- und Notwendigkeitsmaße.

3.41 Satz *Es sei U ein endliches Universum. Für jede mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U)$ mit $P \neq \emptyset$ definiert die Abbildung*

$$m : \wp(U) \longrightarrow [0, 1] \quad A \longmapsto \mathbf{I}_M(P, A) = \frac{\mathbf{hgt}(P \cap A)}{\mathbf{hgt}(P)}$$

ein Möglichkeitsmaß auf $\wp(U)$.

Beweis: Es sei $P \in \mathcal{F}(U)$, $P \neq \emptyset$. Da das Inklusionsmaß \mathbf{I}_M nach Lemma 3.16 in der zweiten Komponente monoton steigend ist, ist nach Satz 3.40 die Abbildung m ein Fuzzy-Maß.

Seien nun $A, B \in \wp(U)$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= \frac{1}{\mathbf{hgt}(P)} \sup_{u \in A \cup B} P(u) \\ &= \max \left(\frac{\sup_{u \in A} P(u)}{\mathbf{hgt}(P)}, \frac{\sup_{u \in B} P(u)}{\mathbf{hgt}(P)} \right) \\ &= \max(m(A), m(B)) \end{aligned}$$

Folglich ist m ein Möglichkeitsmaß. ■

Nach Satz 3.41 können mit den Inklusionsmaßen \mathbf{I}_M Möglichkeitsmaße beschrieben werden. Umgekehrt läßt sich jedes Möglichkeitsmaß in eindeutiger Weise durch das Inklusionsmaß \mathbf{I}_M und eine mehrwertige normalisierte Relation darstellen.

3.42 Satz - Darstellungssatz von Möglichkeitsmaßen

Es sei U ein endliches Universum. Eine Abbildung $m : \wp(U) \longrightarrow [0, 1]$ ist genau dann ein Möglichkeitsmaß, wenn eine normalisierte mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U)$ derart existiert, daß für alle $A \in \wp(U)$ gilt: $m(A) = \mathbf{I}_M(P, A)$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Es sei $m : \wp(U) \longrightarrow [0, 1]$ ein Möglichkeitsmaß.

Wir definieren $P \in \mathcal{F}(U)$ durch $P(u) := m(\{u\})$.

Wir weisen nach, daß P normalisiert ist. Da m ein Möglichkeitsmaß ist, gilt:

$$1 = m(U) = m \left(\bigcup_{u \in U} \{u\} \right) = \max_{u \in U} m(\{u\})$$

Da U nach Voraussetzung endlich ist, existiert ein $u^* \in U$ mit $m(\{u^*\}) = 1$. Es ist dann $P(u^*) = 1$ und P ist normalisiert.

Wir weisen nach, daß $m(A) = \mathbf{I}_M(P, A)$ für alle $A \in \wp(U)$ gilt. Nach Definition 3.38 gilt für alle $A \in \wp(U)$:

$$m(A) = m\left(\bigcup_{u \in A} \{u\}\right) = \max_{u \in A} m(\{u\})$$

Andererseits ist, wie oben gezeigt, $\mathbf{hgt}(P) = 1$, so daß aus der Definition von P folgt:

$$\mathbf{I}_M(P, A) = \frac{\mathbf{hgt}(P \cap A)}{\mathbf{hgt}(P)} = \mathbf{hgt}(P \cap A) = \sup_{u \in A} P(u) = \max_{u \in A} m(\{u\}) = m(A)$$

Wir erhalten insgesamt $m(A) = \mathbf{I}_M(P, A)$ und die Behauptung ist gezeigt.

„ \Leftarrow “: Für jede normalisierte Relation $P \in \mathcal{F}(U)$ erklärt die Abbildung $m(A) = \mathbf{I}_M(P, A)$ nach Satz 3.41 ein Möglichkeitsmaß. ■

3.43 Bemerkung *Es sei U ein endliches Universum.*

(i) *Die Aussage des Satzes 3.42 ist von der konkreten Definition des mehrwertigen Durchschnitts \cap , der dem Inklusionsmaß \mathbf{I}_M zugrunde liegt, unabhängig. Denn sind \cap_1 und \cap_2 beliebige mehrwertige Durchschnittsoperationen sowie $P \in \mathcal{F}(U)$ und $A \in \wp(U)$, so gilt: $P \cap_1 A = P \cap_2 A$. Jede mögliche Festlegung des Durchschnitts führt somit in Satz 3.42 zur gleichen Darstellung des Möglichkeitsmaßes.*

(ii) *Es sei $\mathcal{F}_N(U)$ die Menge aller normalisierten Relationen über U und $\text{Pos}(\wp(U))$ die Menge aller Möglichkeitsmaße auf $\wp(U)$. Die Abbildung*

$$\mathcal{F}_N(U) \longrightarrow \text{Pos}(\wp(U)) \quad P \longmapsto m \quad \text{mit} \quad m(A) := \mathbf{I}_M(P, A)$$

ist bijektiv.

(iii) *Es sei $A \in \wp(U)$. In der Fuzzy-Set-Theory wird der Wert $m(A)$ eines Möglichkeitsmaßes m als Bewertung für die Möglichkeit des Eintretens des Ereignisses A verstanden. Analog läßt sich nun der Wert von $\mathbf{I}_M(P, A)$ für alle $P \in \mathcal{F}(U)$ und $A \in \wp(U)$ nach Satz 3.42 als Beschreibung einer Möglichkeit verstehen.*

Andererseits entspricht der Wert des logischen Inklusionsmaßes \mathbf{I}_M auch stets einem Wahrheitswert in einer Sprache der Klasse MS. In diesem Sinne ist also die Bewertung der Möglichkeit ein Wahrheitswert. Das Konzept des Möglichkeitsmaßes wird so logisch interpretierbar und die Verknüpfung von Möglichkeitsbewertungen durch mehrwertige logische Operatoren wird legitimiert.

(iv) *Für ein normalisiertes $P \in \mathcal{F}(U)$ definiert die Abbildung*

$$\mathbf{M}_P : \mathcal{F}(U) \longrightarrow [0, 1] \quad Q \longmapsto \mathbf{I}_M(P, Q)$$

ein einstelliges Maß auf $\mathcal{F}(U)$. Die Einschränkung eines solchen Maßes auf die Menge $\mathcal{K}(U)$ (bzw. $\wp(U)$) ist gleich einem Möglichkeitsmaß m_P . Daher kann das Maß \mathbf{M}_P als Erweiterung des Konzepts des Möglichkeitsmaßes auf mehrwertige Relationen verstanden werden. Die Erweiterung ist nicht eindeutig, da sie von dem mehrwertigen Durchschnitt abhängt, der der Inklusion \mathbf{I}_M zugrunde liegt (siehe (i) und Lemma 3.8).

Wir verzichten an dieser Stelle auf die graphische Darstellung und die Angabe von Beispielen erweiterter Möglichkeitsmaße und verweisen stattdessen auf die Beispiele 3.1 und 3.29, in denen das Inklusionsmaß \mathbf{I}_M bereits angesprochen wurde.

In Analogie zu den Möglichkeitsmaßen können auch Notwendigkeitsmaße durch das Inklusionsmaß \mathbf{I}_M und eine normalisierte Fuzzy-Menge dargestellt werden.

3.44 Satz - Darstellungssatz von Notwendigkeitsmaßen

Es sei U ein endliches Universum und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Für das Inklusionsmaß \mathbf{I}_M sei \mathbf{I}_M^c das zu \mathbf{I}_M duale Inklusionsmaß bezüglich τ .

Eine Abbildung $m : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ ist genau dann ein Notwendigkeitsmaß, wenn eine normalisierte mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U)$ derart existiert, daß für alle $A \in \wp(U)$ gilt: $m(A) = \mathbf{I}_M^c(P, A)$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Es sei $m : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ ein Notwendigkeitsmaß.

Wir definieren eine mehrwertige Relation $P \in \mathcal{F}(U)$ durch $P(u) := n(m(\{u\}^c))$. Dabei bezeichnet $\{u\}^c$ das klassisch Komplement von $\{u\}$, d. h. $\{u\}^c = U \setminus \{u\}$.

Wir weisen nach, daß P normalisiert ist. Da m ein Notwendigkeitsmaß ist, gilt:

$$0 = m(\emptyset) = m\left(U \setminus \bigcup_{u \in U} \{u\}\right) = m\left(\bigcap_{u \in U} \{u\}^c\right) = \min_{u \in U} m(\{u\}^c) = \min_{u \in U} m(\{u\}^c)$$

Folglich existiert ein $u^* \in U$, so daß $m(\{u^*\}^c) = 0$ gilt. Andererseits ist $n(0) = 1$ (vgl. Definition 1.10). Also folgt $P(u^*) = n(m(\{u^*\}^c)) = 1$ und P ist normalisiert.

Wir weisen nach, daß $m(A) = \mathbf{I}_M^c(P, A)$ für alle $A \in \wp(U)$ gilt. Nach Definition 3.38 gilt für alle $A \in \wp(U)$:

$$m(A) = m\left(U \setminus \bigcup_{u \in A^c} \{u\}\right) = m\left(\bigcap_{u \in A^c} \{u\}^c\right) = \min_{u \in A^c} m(\{u\}^c)$$

Da P normalisiert ist, ist $\mathbf{hgt}(P) = 1$. Da n nach Voraussetzung stetig und streng monoton fallend ist (vgl. Definition 1.10), können wir wie folgt schließen:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_M^c(P, A) &= n(\mathbf{I}_M(P, A^c)) = n\left(\frac{\mathbf{hgt}(P \cap A^c)}{\mathbf{hgt}(P)}\right) \\ &= n(\mathbf{hgt}(P \cap A^c)) = n\left(\sup_{u \in A^c} P(u)\right) \\ &= \min_{u \in A^c} n(P(u)) = \min_{u \in A^c} m(\{u\}^c) \end{aligned}$$

Wir erhalten für alle $A \in \wp(U)$: $m(A) = \mathbf{I}_M^c(P, A)$ und die Behauptung ist bewiesen.

„ \Leftarrow “: Da \mathbf{I}_M in der zweiten Komponente monoton steigend ist, liefert Satz 3.30, daß \mathbf{I}_M^c ebenfalls in der zweiten Komponente monoton steigend ist. Aus Satz 3.41 folgt, daß

$$m : \wp(U) \rightarrow [0, 1] \quad A \mapsto \mathbf{I}_M^c(P, A)$$

für alle $P \in \mathcal{F}(U)$ mit $P \neq \emptyset$ ein Fuzzy-Maß definiert. Insbesondere ist m für ein normalisiertes P ein Fuzzy-Maß.

Wir weisen nach, daß m ein Notwendigkeitsmaß ist. Es seien $A, B \in \wp(U)$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m(A \cap B) &= n(\mathbf{I}_M(P, A^c \cup B^c)) \\ &= n\left(\sup_{u \in A^c \cup B^c} P(u)\right) \\ &\stackrel{\text{Satz 3.42}}{=} n(\max(\mathbf{I}(P, A^c), \mathbf{I}(P, B^c))) \\ &= \min(m(A), m(B)) \end{aligned}$$

Folglich ist m ein Notwendigkeitsmaß. ■

3.45 Bemerkung *Es sei U ein endliches Universum.*

(i) *Das Maß $m(A) := \mathbf{I}_M^c(P, A)$ ist für alle $P \in \mathcal{F}(U)$ mit $P \neq \emptyset$ von der konkreten Festlegung des mehrwertigen Durchschnitts unabhängig (vgl. Bemerkung 3.43 (i)).*

(ii) *Es sei $\mathcal{F}_N(U)$ die Menge aller normalisierten Relationen über U und $\text{Nec}(\wp(U))$ die Menge aller Notwendigkeitsmaße auf $\wp(U)$. Die Abbildung*

$$\mathcal{F}_N(U) \longrightarrow \text{Nec}(\wp(U)) \quad P \longmapsto m \quad \text{mit} \quad m(A) := \mathbf{I}_M^c(P, A)$$

ist bijektiv.

(iii) *Es sei $A \in \wp(U)$. In der Fuzzy-Set-Theory wird der Wert $m(A)$ eines Notwendigkeitsmaßes m als Bewertung für die Notwendigkeit des Eintretens des Ereignisses A verstanden. Folglich läßt sich der Wert von $\mathbf{I}_M^c(P, A)$ ebenfalls als Bewertung der Notwendigkeit verstehen. Insbesondere ist diese Bewertung ein Wahrheitswert in einer Sprache der Klasse MS (vgl. Bemerkung 3.43 (iii)).*

(iv) *Für ein normalisiertes $P \in \mathcal{F}(U)$ definiert die Abbildung*

$$\mathbf{N}_P : \mathcal{F}(U) \longrightarrow [0, 1] \quad Q \longmapsto \mathbf{I}_M^c(P, Q)$$

ein einstelliges Maß auf $\mathcal{F}(U)$. Dieses kann als mehrwertige Erweiterung des Konzepts des Notwendigkeitsmaßes verstanden werden. Die Erweiterung ist nicht eindeutig, sondern vom mehrwertigen Durchschnitt abhängig, der dem Maß \mathbf{I}_M zugrunde liegt (vgl. Bemerkung 3.43 (iv)).

Als einfache Folgerung des Satzes 3.44 können wir eine Verallgemeinerung des Lemmas 3.39 beweisen. Dieses zeigt, daß jede Involution – und nicht nur die Involution n_s – einem Möglichkeitsmaß ein Notwendigkeitsmaß zuordnet. Auch hier kann man von einer Dualität von Möglichkeitsmaßen und Notwendigkeitsmaßen sprechen, die wie die Dualität von t - und s -Normen sowie die Dualität von Inklusionsmaßen von der verwendeten Involution abhängig ist (vgl. Satz 1.12 und Satz 3.26). Tatsächlich zeigt sich, daß die Dualität von Möglichkeits- und Notwendigkeitsmaßen eine Konsequenz der Dualität von Inklusionsmaßen ist.

3.46 Lemma *Es sei U ein endliches Universum. Ist $m : \wp(U) \longrightarrow [0, 1]$ ein Möglichkeitsmaß und $n : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ eine Involution. Die Abbildung*

$$m' : \wp(U) \longrightarrow [0, 1] \quad A \longmapsto n(m(A^c))$$

ist ein Notwendigkeitsmaß. Dabei bezeichnet A^c das (klassische) Komplement von A .

Beweis: Ist m ein Möglichkeitsmaß, so existiert nach Satz 3.42 ein normalisiertes $P \in \mathcal{F}(U)$, so daß für alle $A \in \wp(U)$ gilt $m(A) = \mathbf{I}_M(P, A)$.

Satz 3.44 liefert, daß die Abbildung

$$m'(A) = n(m(A^c)) = n(\mathbf{I}_M(P, A^c)) = \mathbf{I}_M^c(P, A)$$

ein Notwendigkeitsmaß ist. ■

Wir wenden uns der Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu. Ähnlich wie Möglichkeits- und Notwendigkeitsmaße sind diese durch ein entsprechendes Inklusionsmaß darstellbar.

3.47 Satz *Es sei U ein endliches Universum. Für jede mehrwertige Relation $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q \neq \emptyset$ definiert die Abbildung*

$$p_Q : \wp(U) \longrightarrow [0, 1] \quad A \longmapsto \mathbf{I}_P(Q, A) = \frac{|Q \cap A|}{|Q|}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\wp(U)$.

Beweis: Da \mathbf{I}_P in der zweiten Komponente monoton steigend ist, folgt aus Satz 3.40, daß p_Q ein Fuzzy-Maß ist. Es bleibt die Eigenschaft (W2) der Definition 3.36 nachzuweisen.

Es seien $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q \neq \emptyset$ und $A, B \in \wp(U)$ beliebig, mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_Q(A \cup B) &= \frac{|Q \cap (A \cup B)|}{|Q|} \\ &= \frac{\sum_{u \in A \cup B} Q(u)}{\sum_{u \in U} Q(u)} \\ &\stackrel{A \cap B = \emptyset}{=} \frac{\sum_{u \in A} Q(u) + \sum_{u \in B} Q(u)}{\sum_{u \in U} Q(u)} \\ &= p_Q(A) + p_Q(B) \end{aligned}$$

■

Wahrscheinlichkeitsmaße lassen sich durch spezielle mehrwertige Relationen eindeutig darstellen.

3.48 Satz - Darstellungssatz von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Es sei U ein endliches Universum. Eine Abbildung $p : \wp(U) \longrightarrow [0, 1]$ ist genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn eine mehrwertige Relation $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $|Q| = 1$ derart existiert, daß für alle $A \in \wp(U)$ gilt: $p(A) = \mathbf{I}_P(Q, A)$.

Beweis: „ \Rightarrow “: Sei $p : \wp(U) \longrightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Wir definieren eine Relation $Q \in \mathcal{F}(U)$ durch $Q(u) := p(\{u\})$ für alle $u \in U$.

Da p ein Wahrscheinlichkeitsmaß und U endlich ist, gilt:

$$1 = p(U) = \sum_{u \in U} p(\{u\}) = \sum_{u \in U} Q(u) = |Q|$$

Also ist $|Q| = 1$.

Wir weisen nach, daß $p(A) = \mathbf{I}_P(Q, A)$ für alle $A \in \wp(U)$ gilt. Nach Definition 3.36 folgt für alle $A \in \wp(U)$:

$$p(A) = p\left(\bigcup_{u \in A} \{u\}\right) = \sum_{u \in A} p(\{u\})$$

Andererseits ist, wie oben gezeigt, $|Q| = 1$, so daß aus der Definition von Q folgt:

$$\mathbf{I}_P(Q, A) = \frac{|Q \cap A|}{|Q|} = \sum_{u \in A} Q(u) = \sum_{u \in A} p(\{u\})$$

Wir erhalten insgesamt $p(A) = \mathbf{I}_P(Q, A)$ und die Behauptung ist gezeigt.

„ \Leftarrow “: Für jede Relation $Q \in \mathcal{F}(U)$ erklärt die Abbildung $p_Q(A) := \mathbf{I}_P(Q, A)$ nach Satz 3.47 ein Wahrscheinlichkeitsmaß. ■

3.49 Bemerkung *Es sei U ein endliches Universum.*

(i) *Das Maß $p_Q(A) := \mathbf{I}_P(Q, A)$ ist für alle $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q \neq \emptyset$ von der Festlegung des mehrwertigen Durchschnitts unabhängig, der zur Darstellung von \mathbf{I}_P verwendet wird (vgl. auch Bemerkung 3.43 und 3.45 (i)).*

(ii) *Es sei \mathcal{F}_E die Menge aller Relationen über U , deren Kardinalität gleich 1 ist. Ferner sei $\text{Prob}(\wp(U))$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\wp(U)$. Die Abbildung*

$$\mathcal{F}_E(U) \longrightarrow \text{Prob}(\wp(U)) \quad Q \longmapsto p \quad \text{mit} \quad p(A) := \mathbf{I}_P(Q, A)$$

ist bijektiv.

(iii) *Für jede Relation $Q \in \mathcal{F}(U)$ und jede Teilmenge $A \in \wp(U)$ kann der Wert von $\mathbf{I}_P(Q, A)$ als Maß für die Wahrscheinlichkeit der Menge A aufgefaßt werden. Da umgekehrt der Wert eines logischen Inklusionsmaßes ein Wahrheitswert ist, kann die Wahrscheinlichkeit der Aussage A als Wahrheitswert im Sinne der Sprachen MS interpretiert werden.*

(iv) *Für jede Relation $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q \neq \emptyset$ definiert die Abbildung*

$$\mathbf{P}_Q : \mathcal{F}(U) \longrightarrow [0, 1] \quad O \longmapsto \mathbf{I}_P(Q, O)$$

ein einstelliges Maß auf $\mathcal{F}(U)$. Dieses logische Maß \mathbf{P}_Q kann als Erweiterung des Begriffs des Wahrscheinlichkeitsmaßes auf mehrwertige Relationen aufgefaßt werden. Diese ist nicht eindeutig, sondern von der verwendeten Erweiterung des mehrwertigen Durchschnitts in \mathbf{I}_P abhängig.

In den Bemerkungen 3.43, 3.45 und 3.49 wurde bereits angedeutet, daß verschiedene Alternativen zur Erweiterung des Konzepts der Möglichkeits-, Notwendigkeits- und Wahrscheinlichkeitsmaße bestehen. Diese nutzen die mögliche Repräsentation der Fuzzy-Maße durch logische Inklusionsmaße. Zum Abschluß dieses Abschnitts werden wichtige Eigenschaften dieser Erweiterungen betrachtet.

3.50 Lemma *Es sei U ein endliches Universum und $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q \neq \emptyset$. Ferner seien die einstelligen Maße*

$$\mathbf{M}_Q : \mathcal{F}(U) \longrightarrow [0, 1] \quad O \longmapsto \mathbf{I}_M(Q, O)$$

$$\mathbf{N}_Q : \mathcal{F}(U) \longrightarrow [0, 1] \quad O \longmapsto \mathbf{I}_M^c(Q, O)$$

$$\mathbf{P}_Q : \mathcal{F}(U) \longrightarrow [0, 1] \quad O \longmapsto \mathbf{I}_P(Q, O)$$

gegeben. Dabei wird \mathbf{I}_M^c bzgl. eines Wahrheitsraumes $\tau = (t, n, [0, 1])$ gebildet. Dann gilt:

$$(i) \quad \mathbf{M}_Q(U) = \mathbf{N}_Q(U) = \mathbf{P}_Q(U) = 1$$

$$(ii) \quad \mathbf{M}_Q(\emptyset) = \mathbf{N}_Q(\emptyset) = \mathbf{P}_Q(\emptyset) = 0$$

(iii) Für alle $A, B \in \mathcal{F}(U)$ mit $A \subseteq B$ gilt:

$$\mathbf{M}_Q(A) \leq \mathbf{M}_Q(B) \quad \mathbf{N}_Q(A) \leq \mathbf{N}_Q(B) \quad \mathbf{P}_Q(A) \leq \mathbf{P}_Q(B)$$

(iv) Für $A, B \in \mathcal{F}(U)$ mit $\text{supp}(A) \cap \text{supp}(B) = \emptyset$ gilt:

$$\mathbf{P}_Q(A \cup B) = \mathbf{P}_Q(A) + \mathbf{P}_Q(B)$$

(v) Für $A, B \in \mathcal{F}(U)$ gilt:

$$\mathbf{M}_Q(A \cup B) \geq \max(\mathbf{M}_Q(A), \mathbf{M}_Q(B))$$

$$\mathbf{N}_Q(A \cap B) \leq \min(\mathbf{N}_Q(A), \mathbf{N}_Q(B))$$

Beweis: Die Aussagen (i) – (iii) folgen unmittelbar aus den Eigenschaften der logischen Inklusionsmaße, die den Abbildungen zugrunde liegen. Wir weisen die Eigenschaften (iv) und (v) nach.

zu (iv): Es seien $A, B \in \mathcal{F}(U)$ mit $\text{supp}(A) \cap \text{supp}(B) = \emptyset$. $\mathbf{P}_Q : \mathcal{F}(U) \longrightarrow [0, 1]$ sei wie oben definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_Q(A \cup B) &= \frac{|Q \cap (A \cup B)|}{|Q|} \\ &= \frac{\sum_{u \in U} (Q \cap (A \cup B))(u)}{\sum_{u \in U} Q(u)} \\ &= \frac{\sum_{u \in \text{supp}(A)} (Q \cap A)(u) + \sum_{u \in \text{supp}(B)} (Q \cap B)(u)}{\sum_{u \in U} Q(u)} \\ &= \mathbf{P}_Q(A) + \mathbf{P}_Q(B) \end{aligned}$$

zu (v): Es seien $A, B \in \mathcal{F}(U)$ gegeben. Ferner sei die Abbildung $\mathbf{M}_Q : \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ wie oben definiert. Dann ist für $A \in \mathcal{F}(U)$ $\mathbf{M}_Q(A) = \mathbf{I}_M(Q, A)$. Wir nehmen an, daß der mehrwertige Durchschnitt, der dem Inklusionsmaß \mathbf{I}_M zugrunde liegt, bezüglich eines Wahrheitsraumes $\tau = (t, n, [0, 1])$ gebildet wird. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_Q(A \cup B) &= \frac{\mathbf{hgt}(Q \cap (A \cup B))}{\mathbf{hgt}(Q)} \\
&= \frac{1}{\mathbf{hgt}(Q)} \sup_{u \in U} t(Q(u), s_{t,n}(A(u), B(u))) \\
&\stackrel{\text{Satz 1.8}}{\geq} \frac{1}{\mathbf{hgt}(Q)} \sup_{u \in U} t(Q(u), \max(A(u), B(u))) \\
&= \frac{1}{\mathbf{hgt}(Q)} \sup_{u \in U} \max(t(Q(u), A(u)), t(Q(u), B(u))) \\
&= \max(\mathbf{M}_Q(A), \mathbf{M}_Q(B))
\end{aligned}$$

Es gilt weiter für alle $A, B \in \mathcal{F}(U)$:

$$\mathbf{N}_Q(A \cap B) = n(\mathbf{M}_Q(A^c \cup B^c)) \leq n(\max(\mathbf{M}_Q(A^c), \mathbf{M}_Q(B^c))) = \min(\mathbf{N}_Q(A), \mathbf{N}_Q(B))$$

Damit ist die Behauptung nachgewiesen. ■

Die charakteristischen Bedingungen für Wahrscheinlichkeits-, Notwendigkeits- und Möglichkeitsmaße der Definitionen 3.36 und 3.38 finden bei den Verallgemeinerungen dieser Maße auf mehrwertige Relationen ihre jeweilige Entsprechung. Allerdings gelten sie hier im allgemeinen nur in abgeschwächter Form (siehe Lemma 3.50 z. B. (v)). In speziellen Wahrheitsräumen können jedoch weitergehende Aussagen abgeleitet werden. Liegt beispielsweise der Wahrheitsraum $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1])$ den Mengenoperationen zugrunde, so gilt für alle $A, B \in \mathcal{F}(U)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_Q(A \cup B) &= \max(\mathbf{M}_Q(A), \mathbf{M}_Q(B)) \\
\mathbf{N}_Q(A \cap B) &= \min(\mathbf{N}_Q(A), \mathbf{N}_Q(B))
\end{aligned}$$

Dies läßt sich durch einfache Umformungen zeigen.

3.5 Ein Anwendungsbeispiel: Zur Wahrscheinlichkeit mehrwertiger Ereignisse

In der Fuzzy-Set-Theory unterscheidet man verschiedene Klassen von Vagheit. So wird bei Kruse, Gebhardt, Klawonn [Kruse '95, S. 12] zwischen

- *objektbezogener Unschärfe*, d. h. es liegen genaue Informationen über ein Objekt vor, das selbst nicht genau abgegrenzt werden kann, und
- *epistemischer Unschärfe*, d. h. es liegen ungenaue Informationen über im Prinzip klar unterscheidbare Objekte vor,

unterschieden. Während objektbezogene Unschärfe durch unscharfe Mengen – also mehrwertigen Relationen – beschrieben werden kann, wird epistemische Unschärfe im allgemeinen durch Fuzzy-Maße ausgedrückt (vgl. [Kosko '90]). Offenbar sind jedoch die Grenzen zwischen objektbezogener und epistemischer Unschärfe fließend und es stellt sich die Frage, wie in solchen Fällen zu verfahren ist, in denen ungenaue Informationen über ungenaue Objekte abgebildet werden sollen.

In der Forschung zur Fuzzy-Set-Theory wurde diese Frage zunächst von Zadeh in [Zadeh '68] erörtert, der insbesondere die Wahrscheinlichkeit eines Fuzzy-Ereignisses untersuchte. Von Smets [Smets '82] wurde ein Axiomensystem für diesen Ansatz angegeben.³ Wir haben oben bereits darauf hingewiesen, daß durch das Konzept der Inklusionsmaße verschiedene Wege der Erweiterungen der Wahrscheinlichkeit auch für mehrwertige Relationen ermöglicht werden (vgl. Bemerkung 3.49). Im folgenden weisen wir nach, daß sich der Zadeh'sche Ansatz in dieses Konzept einbetten läßt und sich als ein Spezialfall der Erweiterung der Wahrscheinlichkeit durch Inklusionen auffassen läßt.

Es sei U ein endliches Universum und $p : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Zadeh [Zadeh '68] definierte die Wahrscheinlichkeit eines unscharfen Ereignisses $P \in \mathcal{F}(U)$ als den Erwartungswert der Zugehörigkeitsfunktion von P , d. h.

$$p(P) := \sum_{u \in U} p(\{u\}) \cdot P(u)$$

Wir betrachten nun den Wahrheitsraum $\tau_A = (t_A, n, [0, 1])$. Nach Satz 3.48 existiert ein $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $|Q| = 1$, so daß für alle $A \in \mathcal{F}(U)$ gilt:

$$\mathbf{P}_Q(A) := \mathbf{I}_P(Q, A) = \frac{|Q \cap A|}{|Q|} = p(A)$$

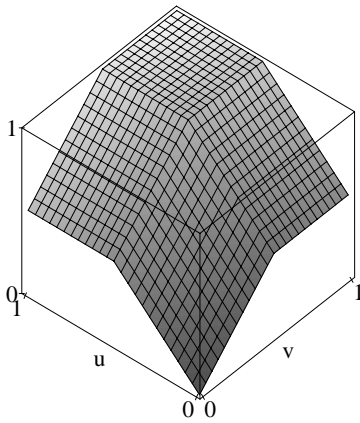
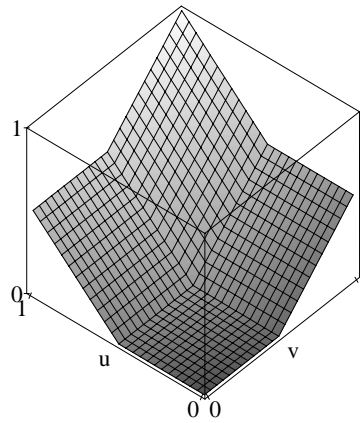
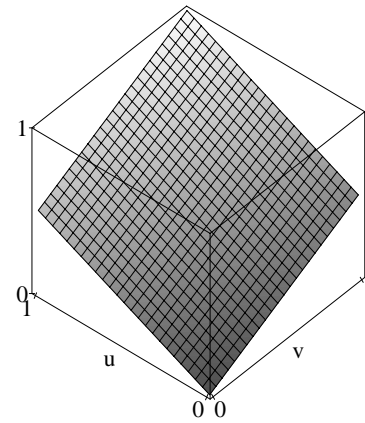
Für dieses Maß \mathbf{P}_Q gilt dann wegen $|Q| = 1$ für alle $P \in \mathcal{F}(U)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_Q(P) &= \mathbf{I}_P(Q, P) \\ &= |Q \cap P| \\ &= \sum_{u \in U} Q(u) \cdot P(u) \\ &= \sum_{u \in U} p(\{u\}) \cdot P(u) \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß $Q(u) = p(\{u\})$ für alle $u \in U$ gilt (vgl. den Beweis zu Satz 3.48).

Dies stimmt offenbar mit der Zadeh'schen Definition der Wahrscheinlichkeit eines Fuzzy-Ereignisses überein. Folglich entspricht der Ansatz Zadehs einer Möglichkeit zur Erweiterung von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf mehrwertige Relationen. Legt man andere Wahrheitsräume zugrunde, ergeben sich jedoch davon verschiedene Erweiterungen. Wir wollen dies anhand dreier Beispiele zeigen.

³Vom Zadeh'schen Ansatz verschiedene Konzepte wurden von Smets [Smets '81] und Kosko [Kosko '90] entwickelt.

Abbildung 3.9: $\mathbf{P}_Q, \tau_{\min}$ Abbildung 3.10: \mathbf{P}_Q, τ_B Abbildung 3.11: \mathbf{P}_Q, τ_A

Es sei $U = \{u, v\}$ ein endliches Universum sowie $Q \in \mathcal{F}(U)$ mit $Q(u) = Q(v) = \frac{1}{2}$. Ferner sei das einstellige logische Maß $\mathbf{P}_Q : \mathcal{F}(U) \rightarrow [0, 1]$ wie oben gegeben.

Wir betrachten das Maß \mathbf{P}_Q für verschiedene erweiterte Mengenoperationen. Diesen sollen die Wahrheitsräume $\tau_{\min} = (t_{\min}, n, [0, 1])$, $\tau_B = (t_B, n, [0, 1])$ bzw. $\tau_A = (t_A, n, [0, 1])$ zugrunde liegen. Mit der in Beispiel 3.11 beschriebenen Methode kann das Maß \mathbf{P}_Q für die verschiedenen Wahrheitsräume dargestellt werden. In den Abbildungen 3.9, 3.10 und 3.11 finden sich die entsprechenden Graphen.

Man erkennt, daß die drei Maße Erweiterungen einer Gleichverteilung sind, denn es ist in allen Fällen $\mathbf{P}_Q(\{u\}) = \mathbf{P}_Q(\{v\}) = \frac{1}{2}$. Ferner ist $\mathbf{P}_Q(U) = \mathbf{P}_Q(\{u, v\}) = 1$ und $\mathbf{P}_Q(\emptyset) = 0$.

Man erkennt zudem, daß die Monotonie-Eigenschaft für Fuzzy-Maße gilt, d. h. es gilt für alle $P, P' \in \mathcal{F}(U)$ die Implikation $P \subseteq P' \Rightarrow \mathbf{P}_Q(P) \leq \mathbf{P}_Q(P')$.

Schließlich kann man die in Lemma 3.50 (iv) nachgewiesene Additivität des Maßes \mathbf{P}_Q ablesen. Dazu seien $P, P' \in \mathcal{F}(U)$ mit $\text{supp}(P) \cap \text{supp}(P') = \emptyset$ und $P, P' \neq \emptyset$. Da $|U| = 2$ gilt, ist dies offenbar nur dann möglich, wenn eine der beiden Bedingungen

$$P(u) = 0 \wedge P'(u) \neq 0 \quad \text{oder} \quad P(u) \neq 0 \wedge P'(u) = 0$$

erfüllt ist. Diese Fuzzy-Mengen liegen sämtlich auf der u - bzw. v -Achse des Einheitswürfels. In diesem Fall ist

$$P \cup P'(u) = \max(P(u), P'(u))$$

$$P \cup P'(v) = \max(P(v), P'(v))$$

und zwar unabhängig von der dem mehrwertigen Durchschnitt zugrunde liegenden t -Norm (vgl. Definition 1.6). Für diese Menge gilt offenbar

$$\mathbf{P}_Q(P \cup P') = \mathbf{P}_Q(P) + \mathbf{P}_Q(P')$$

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das Konzept der logischen Inklusionsmaße die Basis verschiedener Erweiterungen von Fuzzy-Maßen auf mehrwertige Relationen ermöglicht. Dabei kann das von Zadeh vorgeschlagene Konzept zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeit mehrwertiger Aussagen als ein Spezialfall der möglichen Erweiterungen aufgefaßt werden. Die logischen Inklusionsmaße eröffnen hier einen weiten Spielraum für die mathematische Modellierung, dessen Potentiale noch zu erschließen sind.

3.6 Abschließende Bemerkungen

In dem zurückliegenden Kapitel 3 wurde die Theorie der logischen Maße mit ihrer Anwendung in der Fuzzy-Maßtheorie untersucht. Während durch die mehrwertige Mengentheorie Methoden zur Verknüpfung von mehrwertigen Relationen bereitgestellt wurden, wurde es durch die Theorie der logischen Maße ermöglicht, Aussagen über die mehrwertigen Relationen im Rahmen der Sprachen der Klasse MS abzubilden. Der Schwerpunkt der Untersuchungen lag auf der Betrachtung von logischen Inklusionsmaßen. Wir haben hier eine Klasse von Verknüpfungen dieser Maße definiert (Abschnitt 3.3.3) und die Darstellung von Fuzzy-Maßen durch Inklusionsmaße untersucht (Abschnitt 3.4). Während die Verknüpfungen es erlauben, von bekannten Inklusionsmaßen zu neuen Maßen überzugehen und so die mathematischen Modellbildungsmöglichkeiten zu erweitern, können mit Hilfe der Darstellungssätze 3.42, 3.44 und 3.48 Fuzzy-Maße auf mehrwertige Relationen erweitert werden. Dies erlaubt beispielsweise die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten unscharfer Aussagen (Abschnitt 3.5).

Neben der möglichen Erweiterung der Fuzzy-Maße berühren die Darstellungssätze ein weiteres wichtiges Themengebiet der Fuzzy-Set-Theory, nämlich das der Interpretation der Zugehörigkeitswerte von Fuzzy-Relationen. In den Darstellungssätzen 3.42, 3.44 und 3.48 wurde gezeigt, daß bijektive Abbildungen zwischen der Menge der jeweiligen Fuzzy-Maße und einer Teilmenge der mehrwertigen Relationen existieren (vgl. die Bemerkungen 3.43, 3.45 und 3.48 jeweils (ii)). Die betreffenden Relationen haben in dem von uns betrachteten Fall eines endlichen Universums U die Eigenschaft, daß ihr Zugehörigkeitswert an einer Stelle $u \in U$ dem Wert eines Fuzzy-Maßes an der Stelle $\{u\} \in \wp(U)$ entspricht. Dementsprechend kann dem Zugehörigkeitswert an dieser Stelle die gleiche Bedeutung zugeordnet werden, wie dem korrespondierenden Fuzzy-Maß. *Die zur Darstellung der Fuzzy-Maße verwendeten mehrwertigen Relationen beschreiben im Falle eines endlichen Universums also lokal die Möglichkeit, Notwendigkeit oder Wahrscheinlichkeit des Elementes u .* In diesem Sinne sind die Zugehörigkeitswerte dieser mehrwertigen Relationen also stets interpretierbar.

Die Darstellungssätze ermöglichen eine weitere Interpretation der Fuzzy-Maße. Ist U ein endliches Universum, so existiert zu jedem Möglichkeits-, Notwendigkeits- oder Wahrscheinlichkeitsmaß $m : \wp(U) \rightarrow [0, 1]$ eine mehrwertige Menge $Q \in \mathcal{F}(U)$ und ein Inklusionsmaß $\mathbf{I} : \mathcal{F}(U)^2 \rightarrow [0, 1]$, so daß für alle $A \in \wp(U)$ gilt:

$$m(A) = \mathbf{I}(Q, A)$$

Das Inklusionsmaß \mathbf{I} beschreibt, zu welchem Grad die Menge Q in A enthalten ist. Folglich beschreibt dieses Maß eine mengentheoretische Relation. Die Begriffe der Wahrscheinlichkeit, Möglichkeit und Notwendigkeit können so inhaltlich motiviert werden, ohne daß Konzepte wie beispielsweise ein Zufallsexperiment benötigt werden. Im Falle der Wahrscheinlichkeit können sowohl das Konzept der subjektiven Wahrscheinlichkeit, das auf Bayes zurück geht, wie auch das der klassischen statistischen Wahrscheinlichkeit als ein einfaches mengentheoretisches Konzept aufgefaßt werden. Insbesondere werden die Unterschiede zwischen der mehrwertigen Logik auf der einen und der subjektiven Wahrscheinlichkeit auf der andere Seite deutlich. *Das Konzept der Wahrscheinlichkeit – gleich welcher Interpretation – ist ein Spezialfall eines logischen Maßes.* Die mehrwertige Logik kann als Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie verstanden werden, zumindest kann jedoch das Konzept der Wahrscheinlichkeit in eine mehrwertige Logik integriert werden.

Kapitel 4

Relationale Entscheidungstheorie

Zusammenfassung:

In dem folgenden Kapitel wird eine neuartige Methode zur mathematischen Darstellung von Entscheidungsproblemen eingeführt. Da die wesentlichen mathematischen Konzepte, die in dem Entscheidungsmodell verwendet werden, mehrwertige Relationen, deren Verknüpfungen und deren Vergleich sind, wird das Entscheidungsmodell als *relationales Entscheidungsmodell* bezeichnet. Es wird gezeigt, wie sich verschiedene Klassen von Entscheidungsproblemen in dem relationalen Modell abbilden lassen. Hier werden insbesondere Entscheidungen bei Sicherheit, Unsicherheit und Risiko sowie multikriterielle Entscheidungen betrachtet. Ferner werden strukturelle Eigenschaften von relationalen Entscheidungsmodellen untersucht. Wesentlich sind hier die Begriffe der Äquivalenz und Isomorphie von Entscheidungsmodellen sowie die entsprechenden Äquivalenz- und Isomorphiesätze 4.19 und 4.25. Durch diese wird ein mathematisches Konzept bereitgestellt, das einen systematischen Vergleich verschiedener Ansätze erlaubt. Schließlich werden zwei Anwendungsbeispiele angegeben.

4.1 Mathematische Entscheidungsmodelle

Unter Optimieren im allgemeinen Sinne wird eine Form des Entscheidens verstanden. Entscheiden heißt, unter mindestens zwei Alternativen eine Auswahl zu treffen. Jeder Entscheidung liegen ein oder mehrere Kriterien zugrunde, die entweder beschreiben, ob eine Alternative im Hinblick auf ein Kriterium einer anderen vorzuziehen ist, oder ob eine Alternative überhaupt erlaubt ist. Kriterien im erstgenannten Sinne heißen *Ziele*, die Kriterien der zweiten Art werden *Restriktionen* genannt (vgl. [Richter '70]).

Eine *Optimierung* – oder eine *optimale Entscheidung* – liegt dann vor, wenn unter der Voraussetzung, daß eine beste, zulässige Alternative im Sinne der Kriterien existiert, diese gewählt wird. Ein mathematisches Modell, das zur Auswahl einer Alternative verwendet wird, heißt *mathematisches Optimierungsmodell* oder *Entscheidungsmodell*.

Die Kriterien einer Entscheidung bewerten im allgemeinen nicht direkt die Alternativen, sondern gewisse aus der Wahl der Alternativen resultierende *Konsequenzen*. In einem Entscheidungsmodell sind daher die Kriterien der Entscheidung im allgemeinen nur mittelbar

mit den Alternativen verknüpft. Neben der Schwierigkeit, die verschiedenen Kriterien geeignet zu repräsentieren, ergibt sich in den Anwendungen zudem häufig das Problem, daß die Zuordnung von Konsequenzen zu Alternativen nicht exakt bekannt ist. Dementsprechend muß ein mathematisches Entscheidungsmodell die Möglichkeit bieten, die unterschiedlichen Kategorien von Kriterien ebenso abzubilden wie die verschiedenen Arten der Information über die Beziehung von Konsequenzen und Alternativen.

Die Grundidee des hier vorgestellten Ansatzes ist es, die Kriterien eines Entscheidungsmodells durch mehrwertige Relationen zu beschreiben. Dieses Konzept geht auf Bellman und Zadeh [Bellman '70] zurück. Wir werden im Verlaufe des Abschnitts 4.2 zeigen, daß ihr *symmetrisches Optimierungsmodell* sich in den Rahmen des relationalen Entscheidungsmodells einbetten läßt. Im Gegensatz zum Bellman/Zadeh'schen Ansatz wird es das relationale Entscheidungsmodell jedoch ermöglichen, verschiedene Arten von Information über die Beziehung von Alternativen und Konsequenzen abzubilden. Dabei werden mehrwertige Inklusionsmaße verwendet.

Der relationale Ansatz wird es ferner gestatten, auf der Basis eines einzigen mathematischen Konzepts verschiedene Klassen von Information bei der Modellbildung zu berücksichtigen. Es können also sowohl Entscheidungen bei Sicherheit als auch Entscheidungen bei Risiko oder Unsicherheit modelliert werden. Insbesondere ist es daher möglich, solche Problemstellungen abzubilden, bei denen verschiedene Klassen von Information parallel auftreten. Da relationale Entscheidungsmodelle zudem stets als Anwendung der mehrwertigen Logik und Mengentheorie der Kapiteln 1 bis 3 zu verstehen sind, können die Methoden dieser Konzepte auch in der relationalen Entscheidungstheorie verwendet werden. Hierdurch erhalten wir einen konzeptionellen Rahmen, der es uns erlauben wird, relationale Entscheidungsmodelle selbst als mathematische Objekte zu verstehen und so Ansätze zur Analyse ihrer Eigenschaften abzuleiten.

In Abschnitt 4.2 wird zunächst das relationale Entscheidungsmodell definiert und Erläuterungen zur Modellbildung gegeben. Hier wird insbesondere auf die verschiedenen Möglichkeiten der Darstellung unterschiedlicher Kategorien von Information im relationalen Entscheidungsmodell eingegangen. Im Anschluß wenden wir uns den mathematischen Eigenschaften von relationalen Entscheidungsmodellen zu. Relationale Entscheidungsmodelle können als mathematische Struktur verstanden werden und als solche zum Gegenstand eines mathematischen Formalismus gemacht werden. Insbesondere ist es möglich, Verknüpfungen auf gewissen Klassen von Entscheidungsmodellen zu definieren. Das *Kartesische Produkt* relationaler Entscheidungsmodelle wird hier in Abschnitt 4.3 von entscheidender Bedeutung sein. Das Kartesische Produkt erlaubt es unter anderem, Entscheidungen mit mehreren Zielen oder Restriktionen im Rahmen des relationalen Entscheidungsmodells zu behandeln.

Bei den Untersuchungen des Kartesischen Produktes werden wir insbesondere untersuchen, inwieweit verschiedene Entscheidungsmodelle zu vergleichbaren Ergebnissen führen (Abschnitt 4.5). Dabei werden zwei Konzepte für die Vergleichbarkeit von relationalen Entscheidungsmodellen formuliert. Dies sind die *Äquivalenz* und die *Isomorphie* von Entscheidungsmodellen. Wir werden hier insbesondere einen Zusammenhang zu den Begriffen der Äquivalenz und der Isomorphie von Wahrheitsräumen herstellen und so nachweisen, daß die strukturellen Eigenschaften der Sprachen der Klasse MS sich letztlich auch in ihrer Anwendung in der Entscheidungstheorie niederschlagen. Im Anschluß erläutern wir in Abschnitt 4.6 die Begriffe des Abschnitts 4.5 vor dem Hintergrund des Konzeptes der *Indifferenzkurven* von Entscheidungsproblemen.

4.2 Das relationale Entscheidungsmodell

Wir beginnen mit der Definition des relationalen Entscheidungsmodells. Detaillierte Bemerkungen zu den Begriffen und zur Modellbildung erfolgen im Anschluß.

4.1 Definition Ein relationales Entscheidungsmodell $\mathfrak{D} = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}, C, F, \mathbf{I})$ besteht aus:

- (i) einer nichtleeren Menge $\mathcal{A}\mathcal{L}$ von **Alternativen**,
- (ii) einer nichtleeren Menge \mathcal{C} von **Konsequenzen**,
- (iii) einer mehrwertigen Relation $C \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, die als **mehrwertiges Kriterium** bezeichnet wird,
- (iv) einer Abbildung $F : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C})$, die als **mehrwertige Konsequenzenfunktion** bezeichnet wird
- (v) und einem Inklusionsmaß $\mathbf{I} : \mathcal{F}(\mathcal{C})^2 \rightarrow [0, 1]$.

Eine Alternative $a^* \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ heißt (**fuzzy-**) **effizient**, wenn gilt:

$$\mathbf{I}(F[a^*], C) = \sup_{a \in \mathcal{A}\mathcal{L}} \mathbf{I}(F[a], C)$$

Dabei bezeichnet $F[a] \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ das Bild von a unter der Abbildung F .

Die Menge aller relationalen Entscheidungsmodelle bezüglich einer Menge von Alternativen $\mathcal{A}\mathcal{L}$ wird mit $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ bezeichnet.

Wir legen zusätzlich den Begriff der Gleichheit von relationalen Entscheidungsmodellen fest.

4.2 Definition Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen. Wir nennen zwei relationale Modelle $\mathfrak{D}_1 = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}_1, C_1, F_1, \mathbf{I}_1)$ und $\mathfrak{D}_2 = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}_2, C_2, F_2, \mathbf{I}_2)$ **gleich** (in Zeichen: $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$), wenn gilt:

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 \text{ und } C_1 = C_2 \text{ und } F_1 = F_2 \text{ und } \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2$$

4.3 Bemerkung Sind U, V Universen, so läßt sich jede Abbildung $F : V \rightarrow \mathcal{F}(U)$ als mehrwertige Relation $F' \in \mathcal{F}(V \times U)$ verstehen. Diese wird für alle $(v, u) \in V \times U$ definiert durch $F'(v, u) := F[v](u)$. Dabei bezeichnet $F[v]$ das Bild von F mit dem Argument v .

Wir wollen zunächst die in Definition 4.1 vorkommenden Begriffe erläutern und näher spezifizieren. Beispiele für die Modellbildung werden im Anschluß gegeben.

Die Menge $\mathcal{A}\mathcal{L}$ repräsentiert die Menge der zur Verfügung stehenden Alternativen eines Entscheidungsproblems. Aus der Wahl einer Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ entstehen gewisse Konsequenzen, die sämtlich in der Menge \mathcal{C} liegen. Wir nehmen an, daß einer Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ ihre Konsequenzen im allgemeinen nicht eindeutig¹ zugeordnet werden können.² Diese ungenaue Beziehung zwischen einer Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ und den von ihr erzeugten Konsequenzen aus \mathcal{C} wird durch die mehrwertige Konsequenzenfunktion F abgebildet. Für jedes $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ repräsentiert die mehrwertige Relation $F[a] \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ das vorhandene Wissen über die etwaigen Konsequenzen. Dabei besitze $F[a]$ für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ die folgenden Eigenschaften:

¹im Sinne von: die Wahl von $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ erzeugt eine eindeutige Konsequenz $c_a \in \mathcal{C}$

²Die Ursache dieser Mehrdeutigkeit mag ebenso in der Unvollständigkeit der vorliegenden Information wie in einem prinzipiell ungenauen Systemverhalten liegen. Die mathematische Modellbildung ist jedoch von der Ursache unabhängig und eine genauere Differenzierung daher hier nicht notwendig.

- (F1) Eine Konsequenz $c \in \mathcal{C}$ resultiert genau dann nicht aus der Alternative $a \in \mathcal{AL}$, wenn gilt: $F[a](c) = 0$.
- (F2) Für $a \in \mathcal{AL}$ und $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ ist $F[a](c_1) > F[a](c_2)$ genau dann, wenn es realistischer ist anzunehmen, daß a die Konsequenz c_1 erzeugt, als daß a die Konsequenz c_2 erzeugt.

F definiert so für jedes $a \in \mathcal{AL}$ eine mehrwertige Relation, die mit der mehrwertigen Aussage

„ c ist eine Konsequenz der Alternative a “

identifiziert werden kann.

Wie eingangs erläutert, werden die Kriterien des Entscheidungsmodells mittels der mehrwertigen Relation $C \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ beschrieben. Die Relation C kann sowohl Restriktionen als auch die Ziele des Entscheidungsproblems abbilden. Wir werden in Abschnitt 5 Beispiele für die entsprechende Modellbildung angeben. Unabhängig von der konkreten Problemstellung sollen die Relationen jedoch die folgenden Eigenschaften besitzen:

- (C1) Eine Konsequenz $c_1 \in \mathcal{C}$ einer Konsequenz $c_2 \in \mathcal{C}$ genau dann vorzuziehen, wenn gilt: $C(c_1) > C(c_2)$.
- (C2) Eine Konsequenz $c \in \mathcal{C}$ besitzt genau dann die maximale Qualität, d. h. es existiert keine Konsequenz $c' \in \mathcal{C}$, die der Konsequenz c vorzuziehen ist, wenn gilt: $C(c) = 1$.
- (C3) Eine Konsequenz $c \in \mathcal{C}$ ist genau dann nicht zulässig, wenn gilt: $C(c) = 0$.

Die Relation C läßt sich mit diesen Vorgaben als quantitative Darstellung der Aussage

„ c ist eine optimale Konsequenz bezüglich des Kriteriums C “

auffassen.

Es ist das Ziel jeder Entscheidung, eine Alternative $a \in \mathcal{AL}$ derart zu bestimmen, daß die etwaigen Konsequenzen von a möglichst optimal sind. Die Beziehung zwischen den durch $F[a]$ modellierten Konsequenzen der Alternative a und den durch C abgebildeten Kriterien wird im relationalen Entscheidungsmodell durch ein Inklusionsmaß \mathbf{I} dargestellt. Aus mengentheoretischer Sicht beschreibt das Inklusionsmaß \mathbf{I} , inwieweit die Menge der erwarteten Konsequenzen in der Menge der optimalen Konsequenzen liegt (vgl. Abschnitt 3.3). Offenbar sind solche Alternativen $a \in \mathcal{AL}$ bei einer Entscheidung optimal, für die die Menge der erwarteten Konsequenzen $F[a]$ möglichst vollständig in der Menge der optimalen Konsequenzen C liegt. Diese Alternativen $a \in \mathcal{AL}$ maximieren also den Wert von

$$\mathbf{I}(F[a], C)$$

und sind nach Definition 4.1 fuzzy-effizient.

Die Eigenschaften der Inklusionsmaße aus Definition 3.7 können in dieser Anwendung der Inklusionsmaße leicht inhaltlich interpretiert werden. Ist jede erwartete Konsequenz auch optimal, ist also $\text{supp}(F[a]) \subseteq \text{ker}(C)$, so gilt $\mathbf{I}(F[a], C) = 1$. Ist keine der erwarteten Konsequenzen erwünscht (in diesem Fall gilt $\text{supp}(F[a]) \cap \text{supp}(C) = \emptyset$), so ist $\mathbf{I}(F[a], C) = 0$. Wenn die Konsequenz einer Alternative genau bekannt ist, d. h. für $a \in \mathcal{AL}$ ist $F[a] = \{c_a\}$

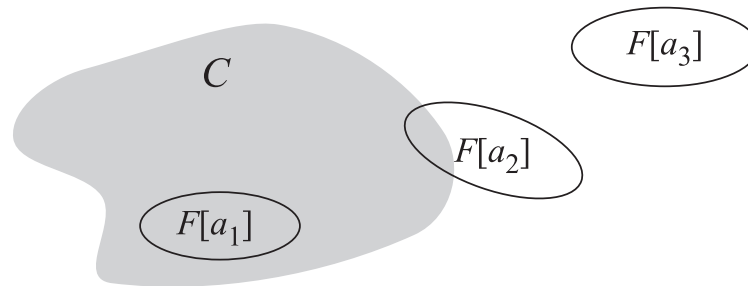


Abbildung 4.1: Ein einfaches Entscheidungsproblem

mit $c_a \in \mathcal{C}$, so gilt $\mathbf{I}(F[a], \mathcal{C}) = \mathbf{I}(\{c_a\}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}(c_a)$. Einer solchen Alternative wird somit die Qualität zugeordnet, die auch ihrer Konsequenz zugeordnet ist.

Das Konzept der Beschreibung der Optimalität durch Inklusionsmaße wird in Abbildung 4.1 verdeutlicht. In dem dort dargestellten Fall gehen wir von einer Menge von Alternativen $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ aus. Wir nehmen an, daß die Konsequenzenfunktion F eines relationalen Entscheidungsmodells stets klassische Bilder hat (d. h. für alle $a \in \mathcal{A}$ ist $F[a]$ eine klassische Teilmenge von \mathcal{C}). Ferner sei \mathcal{C} ebenfalls eine klassische Menge. In der Abbildung 4.1 ist ein solcher Fall skizziert. Offenbar sind alle möglichen Konsequenzen von a_1 auch optimal (es ist $F[a_1] \subset \mathcal{C}$) und daher ist a_1 den beiden anderen Alternativen vorzuziehen. Umgekehrt ist a_3 die einzige Alternative, bei der keine der in Frage kommenden Konsequenzen auch optimal ist. Daher sind a_1 und a_2 der Alternative a_3 vorzuziehen. Es gilt in diesem Fall

$$1 = \mathbf{I}(F[a_1], \mathcal{C}) \geq \mathbf{I}(F[a_2], \mathcal{C}) \geq \mathbf{I}(F[a_3], \mathcal{C}) = 0$$

und zwar unabhängig von dem verwendeten Inklusionsmaß \mathbf{I} . Also führen alle Inklusionsmaße zu einer im obigen Sinne plausiblen Entscheidung.

Wir geben weitere Beispiele an, die das Konzept des relationalen Entscheidungsmodells verdeutlichen, und zeigen, wie verschiedene Klassen von Information in der relationalen Entscheidungstheorie abgebildet werden können. Es sei darauf hingewiesen, daß das Beispiel keineswegs die Relation zwischen klassischer und relationaler Entscheidungstheorie klärt. Eine solche Diskussion erfolgt erst in Abschnitt 5.

4.4 Beispiel *Es sei \mathcal{A} eine endliche Menge von Alternativen und \mathcal{C} eine endliche Menge von Konsequenzen. Es sei ferner ein mehrwertiges Kriterium $C \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ gegeben. Wir betrachten Entscheidungsmodelle der Form $\mathcal{D} = (\mathcal{A}, \mathcal{C}, C, F, \mathbf{I})$. Dabei gehen wir von verschiedenen Klassen von Information über die Beziehung zwischen Alternativen und Konsequenzen aus. Die Bezeichnungen dieser Klassen orientieren sich an den entsprechenden Begriffen der klassischen Entscheidungstheorie (vgl. u. a. [Laur '95, S. XIX]).*

(i) Entscheidung bei Sicherheit

Eine Entscheidung bei Sicherheit liegt vor, wenn jeder Alternative eindeutig eine Konsequenz zugeordnet werden kann, d. h. für alle $a \in \mathcal{A}$ existiert ein $c_a \in \mathcal{C}$, so daß gilt: $F[a] = \{c_a\}$.

Nach Definition 3.7 ist dann für $a \in \mathcal{A}$ stets $\mathbf{I}(F[a], C) = \mathbf{I}(\{c_a\}, C) = C(c_a)$, und zwar unabhängig von der Wahl des Inklusionsmaßes \mathbf{I} .

Für jede fuzzy-effiziente Lösung $a^* \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mathbf{I}(F[a^*], C) = \sup_{a \in \mathcal{A}} C(c_a)$$

Folglich existiert keine Alternative $a' \in \mathcal{A}$, die zu einer Konsequenz höherer Qualität führt als eine fuzzy-effiziente Lösung a^* .

(ii) **Entscheidung bei Risiko**

Eine Entscheidung bei Risiko liegt vor, wenn die Relation zwischen Alternativen und Konsequenzen durch Wahrscheinlichkeitsmaße beschrieben werden kann. Jeder Alternative $a \in \mathcal{A}$ wird dabei ein Wahrscheinlichkeitsmaß $p_a : \wp(\mathcal{C}) \rightarrow [0, 1]$ zugeordnet, welches die Wahrscheinlichkeit des Eintretens der Konsequenzen bei der Wahl von a angibt.

In diesem Fall sei die mehrwertige Konsequenzenfunktion gegeben durch:

$$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}) \quad a \mapsto F[a] \quad \text{mit } F[a](c) = p_a(\{c\}) \text{ für alle } c \in \mathcal{C}.$$

Dann gilt nach Satz 3.48 für alle $A \in \wp(\mathcal{C})$: $p_a(A) = \mathbf{I}_P(F[a], A)$. Die Wahrscheinlichkeitsmaße p_a können so durch das Inklusionsmaß \mathbf{I}_P sowie die oben definierte Konsequenzenfunktion F repräsentiert werden.

Nach den Ausführungen des Abschnitts 3.4 läßt sich der Wert von $\mathbf{I}_P(F[a], C)$ auch als Wahrheitswert der Aussage

„die Wahl von a führt wahrscheinlich zu einer optimalen Konsequenz“

in einer Sprache der Klasse MS interpretieren. In diesem Fall sind diejenigen Alternativen fuzzy-effizienten, die den Wahrheitswert dieser Aussage maximieren, die also am „wahrscheinlichsten“ zu optimalen Konsequenzen führen.

(iii) **Entscheidung bei Unsicherheit**

In der klassischen Theorie spricht man von einer Entscheidung bei Unsicherheit, wenn keine Entscheidung bei Sicherheit oder bei Risiko vorliegt, wenn also die Relation zwischen Alternativen und Konsequenzen weder exakt noch stochastisch beschrieben werden kann. Die Ausführungen des Abschnitts 3.4 haben gezeigt, daß damit die Art der vorhandenen Information keineswegs eindeutig bestimmt ist. Tatsächlich existieren auch in der klassischen Theorie unterschiedliche Ansätze zur Darstellung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit. Wir geben zunächst an, wie sich die entsprechenden klassischen Konzepte im relationalen Entscheidungsmodell repräsentieren lassen. Anschließend gehen wir auf einen Ansatz aus der Fuzzy-Set-Theory ein, der sich ebenfalls zur Beschreibung von Entscheidungen bei Unsicherheit eignet.

(a) **Ansatz von Laplace**

Der Grundgedanke des auf Laplace [Laplace 1825] zurückgehenden Ansatzes ist es, bei Entscheidungen unter Unsicherheit eine Gleichverteilung aller in Frage kommenden Konsequenzen anzunehmen.

Dieser Fall kann daher wie in (ii) durch die Wahl des Inklusionsmaßes \mathbf{I}_P dargestellt werden.

(b) Ansatz von Wald

Die von Wald [Wald '50] vorgeschlagene Methode wird auch als Maximin-Regel oder Minimax-Regel [Laur '95, S. 116] bezeichnet. Eine Alternative wird bei diesem Ansatz durch die Qualität ihrer ungünstigsten in Frage kommenden Konsequenz bewertet.

Um das Konzept Wald's im Rahmen des relationalen Modells abzubilden, nehmen wir zunächst an, daß das Bild der Konsequenzenfunktion F stets eine klassische Menge ist, d. h. es ist $\text{Im}(F) \subseteq \mathcal{K}(C)$. Insbesondere ist $F[a]$ dann für alle $a \in \mathcal{AL}$ normal (d. h. $\text{hgt}(F[a]) = 1$).

Die Maximin-Regel kann unter dieser Voraussetzung mittels des Inklusionsmaßes \mathbf{I}_M^c dargestellt werden. Dabei setzen wir eine beliebige Involution n voraus. Es ist für alle $a \in \mathcal{AL}$:

$$\mathbf{I}_M^c(F[a], C) = n\left(\sup_{c \in \text{supp}(F[a])} n(C(c))\right) = \inf_{c \in \text{supp}(F[a])} C(c)$$

Jeder Alternative wird so die Qualität ihrer ungünstigsten realistischen Konsequenz zugewiesen. Dies entspricht offenkundig dem Ansatz von Wald.

Die Ausführungen des Abschnitts 3.4 gestatten uns eine weitergehende Interpretation des Wald'schen Ansatzes. Wie dort dargelegt, kann der Wert von $\mathbf{I}_M^c(F[a], C)$ als Notwendigkeit dafür interpretiert werden, daß die Wahl von a zu einer optimalen Konsequenz führt. Der Wert von $\mathbf{I}_M^c(F[a], C)$ läßt sich als Wahrheitswert der Aussage

„die Wahl von a führt notwendig zu einer optimalen Konsequenz“

interpretieren. Fuzzy-effizient sind bei diesem Ansatz solche Alternativen, welche „notwendig“ zu der besten Konsequenz führen.

(c) Ansatz von Hurwicz

Ein Ansatz, der eng mit dem Wald'schen Konzept verwandt ist, geht auf Hurwicz [Hurwicz '51] zurück. Neben der Maximin-Regel empfiehlt er die Berücksichtigung der sog. Maximax-Regel [French '86, S. 37]. Diese ordnet jeder Alternative die die maximal erwartende Qualität zu. Hurwicz schlägt vor, zur Bewertung der Optimalität der Alternativen eine Konvexkombination aus Maximin- und Maximax-Regel zu verwenden.

Wie schon bei Wald kann auch hier davon ausgegangen werden, daß das Bild der Konsequenzenfunktion F stets eine klassische Menge ist. Die Maximax-Regel läßt sich dann durch das Inklusionsmaß \mathbf{I}_M repräsentieren. Es ist für alle $a \in \mathcal{AL}$:

$$\mathbf{I}_M(F[a], C) = \sup_{c \in \text{supp}(F[a])} C(c),$$

Dieses entspricht der oben genannten Maximax-Regel.

Die Konvexkombination von Maximin- und Maximax-Regel ist für alle $a \in \mathcal{AL}$ durch das Inklusionsmaß $\mathbf{I}_M \gamma \mathbf{I}_M^c$ darstellbar (vgl. Satz 3.22). Es ist für $\gamma \in [0, 1]$:

$$\mathbf{I}_M \gamma \mathbf{I}_M^c(F[a], C) = \gamma \mathbf{I}_M(F[a], C) + (1 - \gamma) \mathbf{I}_M^c(F[a], C)$$

Dies entspricht dem Ansatz von Hurwicz.

Auch hier gestatten die Überlegungen des Abschnittes 3.4 eine weitergehende Interpretation des klassischen Ansatzes. Der Wert von $\mathbf{I}_M(F[a], C)$ kann im relationalen Modell als Maß für die Möglichkeit dafür interpretiert werden, daß die Wahl der Alternative a zu einer optimalen Konsequenz führt. Er beschreibt den Wahrheitswert der Aussage

„die Wahl von a führt möglicherweise zu einer optimalen Konsequenz“.

Die von Hurwicz vorgeschlagene Konvexkombination der Maximin- und der Maximax-Regel führt so im relationalen Modell zu einer Gewichtung zwischen der Möglichkeit und der Notwendigkeit der Optimalität der Alternativen.

(d) **Durchschnittserfolg / Mittelwert**

Ein weiteres gängiges Konzept zur Beurteilung der Qualität von Alternativen ist es, den Mittelwert der Qualität der realistischen Konsequenzen (den sog. Durchschnittserfolg [Laux '95, S. 151]) zu betrachten.

Da auch hier keine graduelle Bewertung der Realisierungschancen der Konsequenzen verwendet wird, setzen wir voraus, daß die Bilder der Konsequenzenfunktion F stets klassische Mengen sind. Die mittlere Qualität der Konsequenzen einer Alternative $a \in \mathcal{A}$ läßt sich dann durch das Inklusionsmaß \mathbf{I}_P darstellen. Für $a \in \mathcal{A}$ sei $\nu_a := |F[a]| \in \mathbb{N}$ die Mächtigkeit der Menge $F[a]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_P(F[a], C) &= \frac{|F[a] \cap C|}{|F[a]|} \\ &= \frac{1}{\nu_a} \sum_{c \in \text{supp}(F[a])} C(c) \end{aligned}$$

Dies entspricht dem Mittelwert der Zugehörigkeitswerte von C bezogen auf die durch $F[a]$ repräsentierten realistischen Konsequenzen.

Eine Interpretation von \mathbf{I}_P haben wir bereits in (a) und (ii) gegeben, so daß wir an dieser Stelle darauf verzichten.

(e) **Ansatz von Rommelfanger**

Während die Methoden (a) bis (d) klassischen Konzepten entlehnt sind, entstammt der Ansatz von Rommelfanger [Rommelfanger '94] der Fuzzy-Set-Theory. Voraussetzung für diesen Ansatz ist die Existenz einer vollständigen Ordnung auf der Menge der Konsequenzen \mathcal{C} . Zudem soll für jedes $a \in \mathcal{A}$ das Bild der Konsequenzenfunktion F eine normalisierte Relation sein, d. h. es ist für $a \in \mathcal{A}$ stets $\mathbf{hgt}(F[a]) = 1$.

Nimmt man beispielsweise $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ an, so kann der Rommelfanger'sche Ansatz durch das Inklusionsmaß \mathbf{I}_u im relationalen Modell dargestellt werden. In Abhängigkeit von der entsprechenden Anwendung definiert man dann den charakteristischen Punkt u von $F[a]$ als

$$u_{F[a]}^{(1)} = \inf\{x \in \mathbb{R}; x \in \ker(F[a])\}$$

oder

$$u_{F[a]}^{(2)} = \sup\{x \in \mathbb{R}; x \in \ker(F[a])\}$$

Es ergibt sich dann

$$\mathbf{I}_u(F[a], C) = C(u_{F[a]}^{(i)}),$$

mit $i = 1$ oder $i = 2$. Das relationale Entscheidungsmodell ist mit dieser Modellbildung mit dem Rommelfanger'schen Ansatz identisch. Das Konzept des relationalen Entscheidungsmodells stellt insofern eine Verallgemeinerung des Entscheidungsmodells von Rommelfanger dar (vgl. auch Abschnitt 4.4).

Offenbar decken die oben aufgeführten Ansätze nur einen Teil der Möglichkeiten zur Modellbildung ab, die durch das relationale Modell gegeben werden. Insbesondere die abgeleiteten Inklusionsmaße (vgl. Abschnitt 3.3), die verschiedenen Erweiterungen der Fuzzy-Maße durch Inklusionen (vgl. Abschnitt 3.5) sowie das Kartesische Produkt von Inklusionsmaßen bieten hier einen weiten Spielraum für die mathematische Modellbildung.

4.3 Das Kartesische Produkt von relationalen Entscheidungsmodellen

Wir beginnen mit der Einführung des Kartesischen Produkts von relationalen Entscheidungsmodellen.

4.5 Definition *Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen sowie $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm. Die Abbildung*

$$\otimes_t : \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})^2 \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L}) \quad (\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2) \mapsto (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1 \otimes_t \mathcal{C}_2, F_1 \otimes_t F_2, \mathbf{I}_1 \otimes_t \mathbf{I}_2)$$

heißt das **Kartesische Produkt** von \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 .

Dabei sei $F_1 \otimes_t F_2 : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}_1) \otimes_t \mathcal{F}(\mathcal{C}_2) \quad a \mapsto F_1[a] \otimes_t F_2[a]$.

Das Kartesische Produkt weist einfache algebraische Eigenschaften auf, die wir zunächst darstellen.

4.6 Lemma *Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen und $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm. Für Entscheidungsmodelle $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ gilt:*

$$(i) \quad \mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_2 \otimes_t \mathfrak{D}_1 \quad (\text{Kommutativität})$$

$$(ii) \quad (\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2) \otimes_t \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 \otimes_t (\mathfrak{D}_2 \otimes_t \mathfrak{D}_3) \quad (\text{Assoziativität})$$

Dabei legen die Klammern die Reihenfolge der Anwendung fest.

Beweis: Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften der verwendeten Kartesischen Produkte. ■

4.7 Bemerkung

(i) Aus Lemma 4.6 folgt, daß für jede Menge von Alternativen $\mathcal{A}\mathcal{L}$ und jede nullteilerfreie t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ das Tupel $(\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L}), \otimes_t)$ eine kommutative Halbgruppe ist. Die Halbgruppe $(\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L}), \otimes_t)$ besitzt kein neutrales Element.

(ii) Da das Kartesische Produkt von relationalen Entscheidungsmodellen assoziativ ist, verzichten wir bei der Verknüpfung von mehreren Entscheidungsmodellen gelegentlich auf die Klammern, um so eine größere Übersichtlichkeit zu erhalten. Es gilt in diesem Sinne für $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_\nu \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$:

$$\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_{\nu-1} \otimes_t \mathfrak{D}_\nu := (((\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2) \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_{\nu-1}) \otimes_t \mathfrak{D}_\nu)$$

Mit Hilfe des Kartesischen Produkts können Entscheidungsprobleme mit mehreren Kriterien abgebildet werden. Es sei dazu ein Entscheidungsproblem mit $\nu \in \mathbb{N}$ Kriterien gegeben. Die Menge der Alternativen sei \mathcal{AL} . Wir nehmen an, daß für jedes Kriterium i mit $i \in \{1, \dots, \nu\}$ ein relationales Modell $\mathfrak{D}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ angegeben werden kann, welches das entsprechende Kriterium repräsentiert. In dem relationalen Modell $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ mit

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu$$

werden dann alle Kriterien des vorliegenden Entscheidungsproblems abgebildet. Dabei sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm. Dieses Modell wird in der relationalen Entscheidungstheorie als das Entscheidungsmodell verstanden, welches das zugrunde liegende multikriterielle Entscheidungsproblem modelliert. Bei der Modellbildung muß dabei formal nicht zwischen Zielen und Restriktionen des Entscheidungsproblems unterschieden werden.

Wir wollen dieses Konzept der Modellbildung von multikriteriellen Entscheidungsproblemen im weiteren näher untersuchen. Dabei wird unter anderem aufgezeigt, daß das Kartesische Produkt von relationalen Modellen in den Sprachen der Klasse MS als Konjunktion von mehrwertigen Aussagen verstanden werden kann. Dies macht den Ansatz insgesamt plausibel und vereinfacht seine Anwendung. Wir führen zu diesem Zweck zunächst den Begriff der mehrwertigen Entscheidung ein.

4.8 Definition *Es sei \mathcal{AL} eine Menge von Alternativen. Ferner sei ein relationales Entscheidungsmodell $\mathfrak{D} = (\mathcal{AL}, \mathcal{C}, C, F, \mathbf{I}) \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ gegeben. Die mehrwertige Relation $D_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{F}(\mathcal{AL})$, mit*

$$D_{\mathfrak{D}}(a) := \mathbf{I}(F[a], C) \quad \text{für alle } a \in \mathcal{AL}$$

*heißt die **mehrwertige Entscheidung** des Entscheidungsmodells \mathfrak{D} .*

Wir erläutern die Begriffsbildung.

4.9 Bemerkung

- (i) *Der Begriff der mehrwertigen Entscheidung lehnt sich an den von Bellman und Zadeh [Bellman '70] eingeführten Terminus der Fuzzy-Entscheidung (engl.: fuzzy decision) an (vgl. auch Abschnitt 4.4).*
- (ii) *Es sei \mathcal{AL} eine Menge von Alternativen. Eine mehrwertige Entscheidung $D_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{F}(\mathcal{AL})$ eines Entscheidungsmodells $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ läßt sich als Darstellung der mehrwertigen Aussage*

„a ist eine optimale Alternative des Modells \mathfrak{D} “

verstehen. Jede fuzzy-effiziente Alternative eines relationalen Entscheidungsmodells maximiert den Wahrheitswert dieser Aussage.

- (iii) Die Lösung eines relationalen Entscheidungsmodells $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ läßt sich vollständig durch die zugehörige mehrwertige Entscheidung $D_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{F}(\mathcal{AL})$ bestimmen. Es ist a^* genau dann eine fuzzy-effiziente Lösung von \mathfrak{D} , wenn $D_{\mathfrak{D}}(a^*) = \sup_{a \in \mathcal{AL}} D_{\mathfrak{D}}(a)$ gilt.

Jedem relationalen Entscheidungsmodell kann eine mehrwertige Entscheidung zugeordnet werden. Darüber hinaus zeigt sich, daß die Verknüpfung von relationalen Modellen durch das Kartesische Produkt mit einer entsprechenden Verknüpfung der mehrwertigen Entscheidungen identifiziert werden kann. Dies ist der Gegenstand des folgenden Homomorphiesatzes von relationalen Entscheidungsmodellen.

4.10 Satz - Homomorphiesatz von relationalen Entscheidungsmodellen

Es sei \mathcal{AL} eine Menge von Alternativen und $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum. Die t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ sei nullteilerfrei. Wir betrachten ferner ein τ -Relationensystem der Gestalt $(\mathcal{F}(\mathcal{AL}), \cap, \cup, ^c)$. Unter diesen Voraussetzungen definiert die Abbildung

$$\Delta : \mathcal{D}(\mathcal{AL}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{AL}) \quad \mathfrak{D} \mapsto D_{\mathfrak{D}}$$

einen Halbgruppen-Epimorphismus der Halbgruppen $(\mathcal{D}(\mathcal{AL}), \otimes_t)$ und $(\mathcal{F}(\mathcal{AL}), \cap)$.

Beweis: Es seien $\tau = (t, n, [0, 1])$ und $(\mathcal{F}(\mathcal{AL}), \cap, \cup, ^c)$ wie oben gegeben. Wir betrachten die relationalen Entscheidungsmodelle $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$.

Es seien $\mathfrak{D}_1 := (\mathcal{AL}, \mathcal{C}_1, C_1, F_1, \mathbf{I}_1)$ und $\mathfrak{D}_2 := (\mathcal{AL}, \mathcal{C}_2, C_2, F_2, \mathbf{I}_2)$. Ferner sei

$$\Delta(\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2) := D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2}$$

Dann gilt für alle $a \in \mathcal{AL}$:

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2}(a) &= \mathbf{I}_1 \otimes_t \mathbf{I}_2(F_1[a] \otimes_t F_2[a], C_1 \otimes_t C_2) \\ &= t(\mathbf{I}_1(F_1[a], C_1), \mathbf{I}_2(F_2[a], C_2)) \\ &= t(D_{\mathfrak{D}_1}(a), D_{\mathfrak{D}_2}(a)) \end{aligned}$$

Da wir das τ -Relationensystem $(\mathcal{F}(\mathcal{AL}), \cap, \cup, ^c)$ betrachten, erhalten wir

$$\Delta(\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2) = D_{\mathfrak{D}_1} \cap D_{\mathfrak{D}_2} = \Delta(\mathfrak{D}_1) \cap \Delta(\mathfrak{D}_2)$$

Also ist Δ ein Halbgruppen-Homomorphismus.

Wir weisen nach, daß Δ ein Epimorphismus, also surjektiv, ist. Für $P \in \mathcal{F}(\mathcal{AL})$ ist

$$\mathfrak{D}_P = (\mathcal{AL}, \mathcal{AL}, P, F, \mathbf{I}) \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$$

ein relationales Entscheidungsmodell. Dabei sei $F : \mathcal{AL} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{AL}) \quad a \mapsto \{a\}$ und \mathbf{I} ein beliebiges Inklusionsmaß. Es ist für alle $a \in \mathcal{AL}$

$$D_{\mathfrak{D}_P}(a) = \mathbf{I}(\{a\}, P) = P(a)$$

Also ist $D_{\mathfrak{D}_P} = P$ und wir erhalten $\Delta(\mathfrak{D}_P) = P$. Somit ist Δ surjektiv und daher ein Epimorphismus. ■

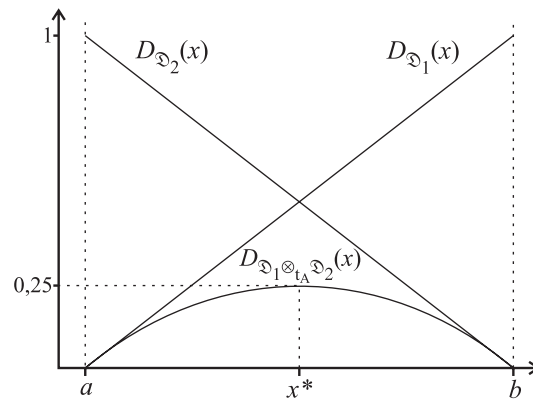


Abbildung 4.2: Mehrwertige Entscheidungen

Diese Interpretation des Homomorphiesatzes zeigt, daß ein relationales Entscheidungsmodell in sehr einfacher und naheliegender Weise die intuitive Vorstellung von Entscheidung mit mehreren Kriterien abbildet.

In Abschnitt 5.4 wird ein ausführliches Beispiel für die Modellbildung von multikriteriellen Entscheidungsproblemen in der relationalen Entscheidungstheorie angegeben. Wir geben daher an dieser Stelle lediglich ein sehr einfaches Beispiel für ein multikriterielles Entscheidungsproblem an.

4.12 Beispiel Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ eine Menge von Alternativen. Wir nehmen an, daß Entscheidungsmodelle $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}([a, b])$ derart gegeben seien, daß für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$D_{\mathfrak{D}_1}(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad D_{\mathfrak{D}_2}(x) = \frac{b - x}{b - a}$$

Wir betrachten das Entscheidungsmodell $\mathfrak{D}_1 \otimes_{t_A} \mathfrak{D}_2$. Dabei sei t_A das Algebraische Produkt. Nach dem Homomorphiesatz 4.10 gilt dann für alle $x \in [a, b]$:

$$D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_{t_A} \mathfrak{D}_2}(x) = D_{\mathfrak{D}_1}(x) \cdot D_{\mathfrak{D}_2}(x) = \frac{(x - a)(b - x)}{(b - a)^2}$$

Die eindeutige fuzzy-effiziente Lösung $x^* \in [a, b]$ des Entscheidungsmodells $\mathfrak{D}_1 \otimes_{t_A} \mathfrak{D}_2$ ist die Alternative $x^* = \frac{1}{2}(b + a)$. Es ist $D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_{t_A} \mathfrak{D}_2}(x^*) = \frac{1}{4}$. In Abbildung 4.2 sind zur Verdeutlichung die Graphen der mehrwertigen Entscheidungen von \mathfrak{D}_1 , \mathfrak{D}_2 und $\mathfrak{D}_1 \otimes_{t_A} \mathfrak{D}_2$ aufgetragen.

4.4 Symmetrische Entscheidungsmodelle

In dem folgenden Abschnitt soll als eine Anwendung des Homomorphiesatzes 4.10 gezeigt werden, daß sich das symmetrische Entscheidungsmodell nach Bellman und Zadeh sowie seine Erweiterungen von Zimmermann und Rommelfanger in den Rahmen der relationalen Entscheidungstheorie einbetten lassen. Dabei verfolgen wir bei der Diskussion zwei Zielsetzungen. Erstens soll das Konzept der Darstellung von Entscheidungsproblemen mit mehreren Kriterien weiter illustriert werden. Zum zweiten werden wir die relationale Entscheidungstheorie gegenüber dem Konzept der symmetrischen abgrenzen und Parallelen und

Unterschiede verdeutlichen. So werden wir insbesondere nachweisen, daß eine bestimmte Klasse von relationalen Entscheidungsmodellen isomorph zur Menge aller symmetrischen Entscheidungsmodelle ist. Wir beschreiben zunächst den Bellman-Zadeh'schen Ansatz des symmetrischen Entscheidungsmodells.

Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen. Der Grundgedanke des symmetrischen Ansatzes zur Entscheidungstheorie ist, die Restriktionen eines gegebenen Entscheidungsproblems durch Fuzzy-Mengen $C_i \in \mathcal{F}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ für $i = 1, \dots, \nu$ und die Ziele durch Fuzzy-Mengen $G_j \in \mathcal{F}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ für $j = 1, \dots, \kappa$ abzubilden. Die Modellierung der Fuzzy-Mengen entspricht dabei den Vorgaben (C1)-(C3) (vgl. Seite 108), die wir für mehrwertige Kriterien aufgestellt haben. Die Fuzzy-Menge $D \in \mathcal{F}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ mit

$$D := (((C_1 \cap C_2) \cap \dots \cap C_{\nu-1}) \cap C_\nu) \cap (((G_1 \cap G_2) \cap \dots \cap G_{\kappa-1}) \cap G_\kappa)$$

wird die *Fuzzy-Entscheidung* (engl.: *fuzzy decision*) des Entscheidungsmodells genannt. Dabei ist \cap der mehrwertige Durchschnitt eines geeigneten τ -Relationensystems.

Als optimale Lösung werden die $a^* \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ betrachtet, für die gilt:

$$D(a^*) = \sup_{a \in \mathcal{A}\mathcal{L}} D(a)$$

Wegen der identischen Modellbildung von Restriktionen und Zielen wird dieser Ansatz zur Optimierung als *symmetrisches Entscheidungsmodell* bezeichnet.

Nach Satz 4.10 läßt sich offenbar jedes relationale Entscheidungsmodell auf ein symmetrisches Modell abbilden. Umgekehrt läßt sich jede Fuzzy-Menge $P \in \mathcal{F}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ mit einem Entscheidungsmodell $(\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{A}\mathcal{L}, P, F[a], \mathbf{I}) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ identifizieren. Dabei ist \mathbf{I} beliebig und $F : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}\mathcal{L}) \quad a \mapsto \{a\}$ (vgl. den Beweis zu Satz 4.10). Daher können alle Restriktionen C_i und Ziele G_j eines symmetrischen Modells durch relationale Entscheidungsmodelle

$$\mathfrak{D}_{C_i} = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{A}\mathcal{L}, C_i, F[a], \mathbf{I}) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$$

beziehungsweise

$$\mathfrak{D}_{G_j} = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{A}\mathcal{L}, G_j, F[a], \mathbf{I}) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$$

für $i = 1, \dots, \nu$ und $j = 1, \dots, \kappa$ dargestellt werden. Ist nun

$$\mathfrak{D} := (\mathfrak{D}_{C_1} \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_{C_\nu}) \otimes_t (\mathfrak{D}_{G_1} \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_{G_\kappa})$$

so gilt nach dem Homomorphiesatz 4.10:

$$D_{\mathfrak{D}} = (((C_1 \cap C_2) \cap \dots \cap C_{\nu-1}) \cap C_\nu) \cap (((G_1 \cap G_2) \cap \dots \cap G_{\kappa-1}) \cap G_\kappa)$$

Daher ist $D_{\mathfrak{D}}$ gleich der Fuzzy-Entscheidung des entsprechenden symmetrischen Entscheidungsmodells. Insbesondere stimmen die fuzzy-effizienten beziehungsweise die optimalen Lösungen beider Ansätze überein.

Die obigen Überlegungen zeigen, daß sich die Menge aller symmetrischen Entscheidungsmodelle über einer Menge von Alternativen $\mathcal{A}\mathcal{L}$ bijektiv auf eine echte Teilmenge von $\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ abbilden läßt. In diesem Sinne kann das relationale Entscheidungsmodell als Erweiterung des symmetrischen Entscheidungsmodells verstanden werden. Allerdings gibt es wesentliche inhaltliche und konzeptionelle Unterschiede. So erlaubt es das symmetrische Modell in seiner ursprünglichen Form nicht, unvollständige Information bei der Modellbildung zu

berücksichtigen. Zudem ist es die Grundidee des symmetrischen Ansatzes, Kriterien durch mehrwertige Mengen und deren Verknüpfungen darzustellen. Hingegen sind mehrwertige Inklusionsmaße und das Kartesische Produkt von relationalen Modellen zentrale Elemente der relationalen Entscheidungstheorie. Sie lassen sich zwar nach Satz 4.10 homomorph auf Mengenverknüpfungen abbilden, sind jedoch nicht mit diesen identisch. Ähnlich werden wir in Abschnitt 5 zeigen, daß auch gewisse Mengen von klassischen Entscheidungsmodellen ihre Entsprechung in der relationalen Entscheidungstheorie finden. Daher sollte die relationale Entscheidungstheorie als ein eigenständiger Ansatz zur mathematischen Beschreibung von Entscheidungsproblemen verstanden werden, in dessen Rahmen Entscheidungsmodelle beschrieben werden können, die homomorph zum symmetrischen Ansatz sind.

Wir weisen zum Abschluß nach, wie sich die oben genannten Erweiterungen des symmetrischen Entscheidungsmodells nach Zimmermann und Rommelfanger im Rahmen des relationalen Modells abbilden lassen. Da beiden Ansätzen das symmetrische Entscheidungsmodell zugrunde liegt und wir dieses bereits oben betrachtet haben, verzichten wir auf eine ausführliche Diskussion und geben im folgenden jeweils ein homomorphes relationales Entscheidungsmodell an.

Wir betrachten zunächst den Zimmermann'schen Ansatz. Für $b, d \in \mathbb{R}$ mit $d > 0$ sei die mehrwertige Relation $P_L^{b,d} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ mit

$$P_L^{b,d}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq b \\ \frac{-x+(b+d)}{d} & b < x \leq b+d \\ 0 & b+d < x \end{cases}$$

gegeben (vgl. auch Abschnitt 2.4).

Ferner sei für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}$ die mehrwertige Abbildung

$$F_f : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}) \quad x \longmapsto \{f(x)\}$$

definiert.

Mit diesen Vorgaben läßt sich jede Restriktion und jedes Ziel eines Zimmermann'schen Entscheidungsmodells durch relationale Modelle der Form

$$\mathfrak{D}_i = (\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}, P_L^{b_i, d_i}, F_{f_i}, \mathbf{I})$$

mit $b_i, d_i \in \mathbb{R}$, $d_i > 0$ und $f_i : \mathbb{R}^\nu \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, \mu$ darstellen. Dabei werden alle Abbildungen als linear vorausgesetzt und die Parameter d_i und b_i für $i = 1, \dots, \mu$ derart bestimmt, daß für das vorliegende Entscheidungsproblem die Bedingungen (C1)-(C3) erfüllt sind.

Das relationale Gesamtmodell wird definiert durch

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{D}_1 \otimes_{t_{\min}} \dots \otimes_{t_{\min}} \mathfrak{D}_\mu$$

Dabei sei $t_{\min} : [0, 1]^2 \longrightarrow [0, 1]$ der Minimum-Operator. Dieses Modell entspricht einem Entscheidungsmodell nach Zimmermann (vgl. u. a. [Zimmermann '75, Zimmermann '76], [Lai '92, 95 f.] bzw. [Rommelfanger '94, S. 170 f.]).

Der Ansatz von Rommelfanger ist die einzige bisher bekannte Erweiterung des symmetrischen Entscheidungsmodells, in der eine Klasse von ungenauer Information berücksichtigt

werden kann. Wir haben darauf bereits in Beispiel 4.4 (iii.e) hingewiesen. Wir beschreiben auch hier, wie sich ein Entscheidungsmodell nach Rommelfanger im Rahmen des relationalen Ansatzes darstellen läßt.

Zu diesem Zweck sei \mathbb{R}^ν eine Menge von Alternativen. Alle Kriterien eines Entscheidungsproblems sollen bezüglich der Menge von Konsequenzen \mathbb{R} dargestellt werden. Für jedes der μ Kriterien der Entscheidung sei dann $C_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ für $i = 1, \dots, \mu$ ein mehrwertiges Kriterium. Ferner seien $F_i : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ für $i = 1, \dots, \mu$ mehrwertige Konsequenzfunktionen derart, daß die Bilder von F_i stets normalisiert sind, d. h. für alle $x \in \mathbb{R}^\nu$ und $i = 1, \dots, \mu$ ist $\mathbf{hgt}(F_i(x)) = 1$.

Wir betrachten das Inklusionsmaß \mathbf{I}_u . Von der entsprechenden Anwendung abhängig definiert man den charakteristischen Punkt von $F_i[x]$ für alle $x \in \mathbb{R}^\nu$ durch

$$u_{F_i[x]}^{(1)} = \inf\{y \in \mathbb{R}; y \in \ker(F_i[x])\}$$

oder

$$u_{F_i[x]}^{(2)} = \sup\{y \in \mathbb{R}; y \in \ker(F_i[x])\}$$

(vgl. Beispiel 4.4) für $i = 1, \dots, \mu$.

Wir definieren die relationalen Entscheidungsmodelle

$$\mathfrak{D}_i = (\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}, C_i, F_i, \mathbf{I}_u)$$

für $i = 1, \dots, \mu$.

Das Entscheidungsmodell

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \otimes_{t_{\min}} \dots \otimes_{t_{\min}} \mathfrak{D}_\mu$$

entspricht dann einem Entscheidungsmodell nach Rommelfanger.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß alle gängigen Verallgemeinerungen des symmetrischen Entscheidungsmodells im Rahmen der relationalen Entscheidungstheorie dargestellt werden können. Allerdings wurde bereits in Beispiel 4.4 angedeutet, daß die relationale Theorie weitere Möglichkeiten zur Modellbildung bietet. Zu diesen existieren im symmetrischen Ansatz keine Entsprechung.

Neben dem symmetrischen Ansatz sind verschiedene weitere Methoden zur Darstellung von Entscheidungsproblemen in der Fuzzy-Set-Theory bekannt. Hierzu gehört beispielsweise die Klasse der Modelle, die auf dem Konzept von erweiterten Kleiner-Gleich-Relationen beruhen (vgl. [Lai '92, S. 187 ff.] und [Rommelfanger '94, S. 218 ff.]). Diese lassen sich nicht in die relationale Entscheidungstheorie integrieren und wir haben sie daher in dieser Arbeit nicht betrachtet. Ohnehin erscheinen uns viele dieser Ansätze auf spezifische Anwendungssituationen ausgerichtet zu sein und es ist zweifelhaft, ob sie in allgemeinen Situationen zu plausiblen Modellbildungen führen.

4.5 Äquivalenz und Isomorphie von relationalen Entscheidungsmodellen

Mit dem Kartesischen Produkt von relationalen Entscheidungsmodellen lassen sich Entscheidungsmodelle mit mehreren Kriterien im Rahmen der relationalen Entscheidungstheorie abbilden. Liegt etwa ein Entscheidungsproblem mit ν Kriterien vor, so kann dieses nach den Überlegungen des Abschnitts 4.3 durch ein Modell der Form

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu$$

abgebildet werden. Dabei repräsentiert jedes Entscheidungsmodell \mathfrak{D}_i für $i = 1, \dots, \nu$ ein Kriterium des Entscheidungsproblems.

Die Lösung eines solchen relationalen Entscheidungsmodells hängt von mehreren Parametern ab. Dies sind zum einen die Entscheidungsmodelle \mathfrak{D}_i mit $i = 1, \dots, \nu$, deren Festlegung Einfluß auf die mehrwertige Lösung von \mathfrak{D} und damit auf die Menge der fuzzy-effizienten Lösungen hat. Hier ist denkbar, solche Modelle zu klassifizieren, die vergleichbaren Einfluß auf die Modellbildung haben.

Ein zweiter wesentlicher Parameter der Entscheidung ist die Art der t -Norm, die zur Definition des Kartesischen Produkts verwendet wird. Hier stellt sich Frage, ob verschiedene t -Normen unterschiedliche Entscheidungen hervorrufen und ob umgekehrt die Verknüpfung von unterschiedlichen Klassen von Entscheidungsmodellen mit verschiedenen t -Normen nicht dennoch zu vergleichbaren Gesamtmodellen führt. Als Motivation können die Ausführungen des Abschnitts 2.4 dienen, in dem wir bereits ein Beispiel für diese Problemstellung angegeben haben.

Die genauere Untersuchung dieser beiden Fragestellungen wird Gegenstand des folgenden Abschnitts sein. Im Mittelpunkt der Überlegungen stehen dabei die Begriffe der Äquivalenz und Isomorphie von Entscheidungsmodellen. Beide beschreiben verschiedene Konzepte des Vergleichs von Entscheidungsmodellen. Sie sind eng mit den entsprechenden Konzepten für Wahrheitsräume und Relationensysteme verwandt.

Wir beginnen mit der Einführung des Begriffes der Äquivalenz. Äquivalente Modelle beschreiben die gleiche mehrwertige Entscheidung und besitzen daher stets die gleichen fuzzy-effizienten Lösungen.

4.13 Definition *Es sei \mathcal{AL} eine Menge von Alternativen. Für $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ seien ferner die mehrwertigen Entscheidungen $D_{\mathfrak{D}_1}, D_{\mathfrak{D}_2} \in \mathcal{F}(\mathcal{AL})$ gegeben. Die Entscheidungsmodelle $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ heißen **äquivalent** (in Zeichen: $\mathfrak{D}_1 \sim \mathfrak{D}_2$), wenn $D_{\mathfrak{D}_1} = D_{\mathfrak{D}_2}$ gilt.*

Wir stellen einfache Eigenschaften äquivalenter Entscheidungsmodelle zusammen, die die Begriffsbildung verdeutlichen.

4.14 Bemerkung

- (i) *Äquivalente Modelle beschreiben stets die gleiche mehrwertige Entscheidung. Daher besitzen sie insbesondere die gleichen fuzzy-effizienten Lösungen.*
- (ii) *Die Relation ‘ \sim ’ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{D}(\mathcal{AL})$.*

(iii) Für $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$ bezeichne

$$\mathfrak{D}_{\sim} := \{\mathfrak{D}' \in \mathcal{D}(\mathcal{AL}); \mathfrak{D}' \sim \mathfrak{D}\}$$

die Äquivalenzklasse aller zu \mathfrak{D} äquivalenten Entscheidungsmodelle. Die Menge aller dieser Äquivalenzklassen sei mit $\mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}$ bezeichnet.

Für eine nullteilerfrei t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ sei ferner die Abbildung

$$\otimes_t^{\sim} : \mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}^2 \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim} \quad (\mathfrak{D}_{1\sim}, \mathfrak{D}_{2\sim}) \mapsto (\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2)_{\sim}$$

definiert. Dann gilt:

- (a) Es ist $(\mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}, \otimes_t^{\sim})$ eine kommutative Halbgruppe mit einem neutralen Element.
- (b) Ist $\tau = (t, n, [0, 1])$ ein Wahrheitsraum und $(\mathcal{F}(\mathcal{AL}), \cap, \cup, {}^c)$ ein τ -Relationensystem, so sind die Halbgruppen $(\mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}, \otimes_t^{\sim})$ und $(\mathcal{F}(\mathcal{AL}), \cap)$ isomorph.

Beweis: Wir weisen nur (iii) nach. Dabei ist zunächst klar, daß durch $(\mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}, \otimes_t^{\sim})$ eine kommutative Halbgruppe definiert wird. Dies folgt unmittelbar aus der Kommutativität und Assoziativität des Kartesischen Produkts der relationalen Entscheidungsmodelle. Es bleibt die Existenz eines neutralen Elements $\mathfrak{D}_{\varepsilon\sim} \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}$ nachzuweisen. Wir geben einen Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse explizit an.

Zu diesem Zweck sei $F : \mathcal{AL} \rightarrow \mathcal{AL}$ beliebig. Dann ist

$$\mathfrak{D}_{\varepsilon} := (\mathcal{AL}, \mathcal{AL}, \mathcal{AL}, F, \mathbf{I})$$

ein relationales Entscheidungsmodell. Für die mehrwertige Entscheidung $D_{\mathfrak{D}_{\varepsilon}} \in \mathcal{F}(\mathcal{AL})$ ist

$$D_{\mathfrak{D}_{\varepsilon}}(a) = \mathbf{I}(F[a], \mathcal{AL}) = 1$$

für alle $a \in \mathcal{AL}$. Daher ist $D_{\mathfrak{D}_{\varepsilon}} = \mathcal{AL}$, wobei wir die Menge \mathcal{AL} mit ihrer charakteristischen Funktion identifizieren. Aus dem Homomorphiesatz 4.10 folgt zusammen mit Lemma 2.15 (v) für alle $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})$:

$$D_{\mathfrak{D}_{\varepsilon} \otimes_t \mathfrak{D}} = D_{\mathfrak{D}_{\varepsilon}} \cap D_{\mathfrak{D}} = D_{\mathfrak{D}}$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{D}_{\varepsilon\sim} \otimes_t^{\sim} \mathfrak{D}_{\sim} = \mathfrak{D}_{\sim}$$

für alle $\mathfrak{D}_{\sim} \in \mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}$. Also ist $\mathfrak{D}_{\varepsilon\sim}$ das neutrale Element der Halbgruppe $(\mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}, \otimes_t^{\sim})$.

Die Isomorphie der Halbgruppen $(\mathcal{D}(\mathcal{AL})|_{\sim}, \otimes_t^{\sim})$ und $(\mathcal{F}(\mathcal{AL}), \cap)$ läßt sich wie die Homomorphie in Satz 4.10 nachweisen und soll hier nicht gezeigt werden. ■

Bei speziellen Fällen von Kartesischen Produkten führt die Verknüpfung äquivalenter Modelle wieder zu einem äquivalenten Gesamtmodell. Solche Verknüpfungen sollen im folgenden charakterisiert werden. Zu diesem Zweck führen wir zunächst den Begriff des Entscheidungssystems ein.

4.15 Definition Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ mit $\mathcal{S} \neq \emptyset$ und $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm. Ferner sei $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum. Wir definieren die Mengen

$$\bar{\mathcal{S}} := \left\{ \mathcal{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L}); \exists \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_\nu \in \mathcal{S}, \nu \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathcal{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathcal{D}_\nu = \mathcal{D} \right\}$$

sowie

$$S := \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathcal{S}} \text{Im}(D_{\mathcal{D}})$$

Das Tupel $\mathfrak{E} = (\mathcal{S}, \otimes_t)$ heißt ein τ -Entscheidungssystem, wenn gilt $S \subseteq T$.

4.16 Bemerkung Es sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ mit $\mathcal{S} \neq \emptyset$, $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm und $\tau = (t, n, T)$ ein Wahrheitsraum.

(i) Ist (\mathcal{S}, \otimes_t) ein τ -Entscheidungssystem, so kann jede Komposition von Entscheidungsmodellen aus \mathcal{S} in einer durch τ beschriebenen Sprache als Konjunktion logischer Aussagen interpretiert werden (vgl. Abschnitt 4.3).

(ii) Es ist $\mathcal{S} \subseteq \bar{\mathcal{S}}$.

(iii) $(\bar{\mathcal{S}}, \otimes_t)$ ist eine Unterhalbgruppe der Halbgruppe $(\mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L}), \otimes_t)$. Man bezeichnet $(\bar{\mathcal{S}}, \otimes_t)$ auch als die von \mathcal{S} erzeugte Unterhalbgruppe (vgl. [Meyberg '80, S. 41]).

Wir können nunmehr solche Entscheidungssysteme charakterisieren, die durch Mengen äquivalenter Entscheidungsmodelle bestimmt werden und die zudem über eine Verknüpfung verfügen, die diese Eigenschaft erhält. Dabei beschränken wir unsere Betrachtungen auf Systeme mit endlichen Mengen von erzeugenden Entscheidungsmodellen.

4.17 Definition Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen. Ferner seien Wahrheitsräume $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ sowie ein τ_1 -Entscheidungssystem $\mathfrak{E}_1 = (\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1})$ und ein τ_2 -Entscheidungssystem $\mathfrak{E}_2 = (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$ gegeben. Es sei $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{D}_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ und $\mathcal{S}_2 = (\mathcal{D}'_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$.

Die Entscheidungssysteme \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 heißen **äquivalent** (in Zeichen: $\mathfrak{E}_1 \sim \mathfrak{E}_2$), wenn für alle $\kappa \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$ gilt:

$$\mathcal{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathcal{D}_{i_\kappa} \sim \mathcal{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathcal{D}'_{i_\kappa}$$

Wir erläutern zunächst die Begriffsbildung der Definition 4.17.

4.18 Bemerkung Es seien $\mathcal{S}_1 = \{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_\nu\}$ und $\mathcal{S}_2 = \{\mathcal{D}'_1, \dots, \mathcal{D}'_\nu\}$ sowie $(\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1}) \sim (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$.

(i) Dann ist $\mathcal{D}_i \sim \mathcal{D}'_i$ für alle $i = 1, \dots, \nu$.

(ii) Die Halbgruppen $(\bar{\mathcal{S}}_1, \otimes_{t_1})$ und $(\bar{\mathcal{S}}_2, \otimes_{t_2})$ sind isomorph. Allerdings gibt es Entscheidungssysteme deren erzeugte Halbgruppen ebenfalls isomorph sind, ohne daß die Systeme selbst äquivalent wären.

Der folgende Satz charakterisiert äquivalente Entscheidungssysteme.

4.19 Satz - Äquivalenzsatz von Entscheidungssystemen

Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen und $\mathcal{S}_1 = (\mathfrak{D}_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ eine Menge von Entscheidungsmodellen. Für $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ sei $\mathfrak{E}_1 = (\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1})$ ein τ_1 -Entscheidungssystem. Es seien ferner $\mathcal{S}_2 = (\mathfrak{D}'_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ gegeben.

Ist $\tau_1 \sim \tau_2$ und $\mathfrak{D}_i \sim \mathfrak{D}'_i$ für alle $i = 1, \dots, \nu$, so gilt:

(i) Es ist $(\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$ ein τ_2 -Entscheidungssystem.

(ii) Es ist $\mathfrak{E}_1 \sim \mathfrak{E}_2$.

Beweis: Da $\tau_1 \sim \tau_2$ ist, ist nach dem Äquivalenzsatz 1.34 insbesondere $t_1|_T = t_2|_T$. Da \mathfrak{E}_1 ein τ_1 -Entscheidungssystem ist, ist daher $t_1|_{S_1} = t_2|_{S_1}$. Dabei ist S_1 wie in Definition 4.15 definiert. Wegen des Homomorphiesatz 4.10 gilt somit für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ und $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$:

$$\begin{aligned} & D_{\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a) \\ &= t_1(D_{\mathfrak{D}_{i_1}}(a), t_1(D_{\mathfrak{D}_{i_2}}(a), \dots, t_1(D_{\mathfrak{D}_{i_{\kappa-1}}}(a), D_{\mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a)))) \\ &= t_2(D_{\mathfrak{D}_{i_1}}(a), t_2(D_{\mathfrak{D}_{i_2}}(a), \dots, t_2(D_{\mathfrak{D}_{i_{\kappa-1}}}(a), D_{\mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a)))) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist nun $\mathfrak{D}_i \sim \mathfrak{D}'_i$ für alle $i = 1, \dots, \nu$. Also ist $D_{\mathfrak{D}_i} = D_{\mathfrak{D}'_i}$ für alle $i = 1, \dots, \nu$. Es folgt daher weiter:

$$\begin{aligned} & t_2(D_{\mathfrak{D}_{i_1}}(a), t_2(D_{\mathfrak{D}_{i_2}}(a), \dots, t_2(D_{\mathfrak{D}_{i_{\kappa-1}}}(a), D_{\mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a)))) \\ &= t_2(D_{\mathfrak{D}'_{i_1}}(a), t_2(D_{\mathfrak{D}'_{i_2}}(a), \dots, t_2(D_{\mathfrak{D}'_{i_{\kappa-1}}}(a), D_{\mathfrak{D}'_{i_\kappa}}(a)))) \\ &= D_{\mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}}(a) \end{aligned}$$

Wir erhalten für alle $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$:

$$D_{\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa}} = D_{\mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}}$$

Hieraus folgt, daß $S_1 = S_2$ gilt. Daher ist \mathfrak{E}_2 ein τ_2 -Entscheidungssystem. Zudem folgt für alle $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$:

$$\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa} \sim \mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}$$

Also ist $\mathfrak{E}_1 \sim \mathfrak{E}_2$. ■

4.20 Beispiel Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen.

(i) Es seien $\tau_1 = (t_1, n_1, T)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ Wahrheitsräume mit $\tau_1 \sim \tau_2$. Ferner sei eine endliche Menge von Entscheidungsmodellen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ gegeben. Nach Satz 4.19 ist $(\mathcal{S}, \otimes_{t_1})$ genau dann ein τ_1 -Entscheidungssystem, wenn $(\mathcal{S}, \otimes_{t_2})$ ein τ_2 -Entscheidungssystem ist. In diesem Fall gilt für alle $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_\nu \in \mathcal{S}$:

$$\mathfrak{D}_1 \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_\nu \sim \mathfrak{D}_1 \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}_\nu$$

Die Abbildungen \otimes_{t_1} und \otimes_{t_2} sind in diesem Sinne austauschbar.

(ii) Äquivalente relationale Entscheidungsmodelle sind bei der Modellierung von Entscheidungsproblemen austauschbar. Es sei dazu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ eine endliche Menge von Entscheidungsmodellen. Ferner seien $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}' \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ mit $\mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}'$. Ist dann für $\tau = (t, n, T)$ das System $(\mathcal{S} \cup \{\mathfrak{D}\}, \otimes_t)$ ein τ -Entscheidungssystem, so ist nach Satz 4.19 auch das System $(\mathcal{S} \cup \{\mathfrak{D}'\}, \otimes_t)$ ein τ -Entscheidungssystem und es ist $(\mathcal{S} \cup \{\mathfrak{D}\}, \otimes_t) \sim (\mathcal{S} \cup \{\mathfrak{D}'\}, \otimes_t)$.

Also gilt für alle $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_\nu \in \mathcal{S}$ und $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu \otimes_t \mathfrak{D} \sim \mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu \otimes_t \mathfrak{D}'$$

Insbesondere stimmen die fuzzy-effizienten Lösungen der entsprechenden Entscheidungsmodelle stets überein.

4.21 Bemerkung Die Bedingung für die Äquivalenz von Entscheidungssystemen, die wir in Satz 4.19 formuliert haben, ist hinreichend, aber nicht notwendig. Sind beispielsweise $\tau_1 = (t, n_1, T)$ und $\tau_2 = (t, n_2, T)$ mit $n_1|_T \neq n_2|_T$ gegeben, so ist jedes τ_1 -Entscheidungssystem auch ein τ_2 -Entscheidungssystem. Allerdings ist nach Satz 1.34 $\tau_1 \not\sim \tau_2$.

Äquivalente Modelle beschreiben die gleiche mehrwertige Entscheidung und repräsentieren in diesem Sinne vergleichbare relationale Entscheidungsmodelle. Unter dem Blickwinkel der Entscheidungstheorie erscheint es jedoch sinnvoll, eine zusätzliche, schwächere Charakterisierung von Vergleichbarkeit festzulegen. Dabei steht die Überlegung im Vordergrund, daß zwei Entscheidungsmodelle \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 im Prinzip schon dann vergleichbar sind, wenn eine Alternative a einer Alternative a' in \mathfrak{D}_1 genau dann vorzuziehen ist, wenn dies auch im Modell \mathfrak{D}_2 der Fall ist. Diese Überlegung motiviert den Begriff der isomorphen Entscheidungsmodelle, den wir im folgenden prägen.

4.22 Definition Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen. Zwei Entscheidungsmodelle $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ heißen **isomorph** (in Zeichen: $\mathfrak{D}_1 \simeq \mathfrak{D}_2$), wenn eine monoton steigende, bijektive Abbildung $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ derart existiert, daß gilt:

$$\Omega \circ D_{\mathfrak{D}_1} = D_{\mathfrak{D}_2}$$

Sind zwei relationale Entscheidungsmodelle $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ im Sinne der Definition 4.22 isomorph, so folgt aus den Eigenschaften der Abbildung Ω aus Definition 4.22:

- (i) Für alle $a, a' \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ ist: $D_{\mathfrak{D}_1}(a) > D_{\mathfrak{D}_1}(a') \Leftrightarrow D_{\mathfrak{D}_2}(a) > D_{\mathfrak{D}_2}(a')$.
- (ii) Die Menge der fuzzy-effizienten Lösungen beider Modelle sind gleich.

In diesem Sinne sind die Modelle vergleichbar, denn sie führen offenbar stets zu den gleichen Entscheidungen.

Ähnlich wie bei äquivalenten Entscheidungsmodellen bleibt die Eigenschaft der Isomorphie von Entscheidungsmodellen bei speziellen Verknüpfungen der Modelle erhalten. Systeme solcher Entscheidungsmodelle sollen als isomorph bezeichnet werden.

4.23 Definition *Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen. Ferner seien Wahrheitsräume $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ sowie ein τ_1 -Entscheidungssystem $\mathfrak{E}_1 = (\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1})$ und ein τ_2 -Entscheidungssystem $\mathfrak{E}_2 = (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$ gegeben. Es seien $\mathcal{S}_1 = (\mathfrak{D}_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ und $\mathcal{S}_2 = (\mathfrak{D}'_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$.*

*Die Entscheidungssysteme \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 heißen **isomorph** (in Zeichen: $\mathfrak{E}_1 \simeq \mathfrak{E}_2$), wenn eine bijektive und monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ derart existiert, daß für alle $\kappa \in \mathbb{N}$ und $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$ gilt:*

$$\Omega \circ D_{\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa}} = D_{\mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}}$$

Die Begriffe der Isomorphie und Äquivalenz von Entscheidungssystemen besitzen konzeptionelle Parallelen.

4.24 Bemerkung *Es seien $\mathcal{S}_1 = \{\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_\nu\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\mathfrak{D}'_1, \dots, \mathfrak{D}'_\nu\}$ sowie $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T_2)$ gegeben.*

(i) *Ist $(\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1}) \sim (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$, so ist $(\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1}) \simeq (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$.*

(ii) *Ist $(\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1}) \simeq (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$, so ist*

$$\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa} \simeq \mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}$$

für alle $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$. Insbesondere gilt $\mathfrak{D}_i \simeq \mathfrak{D}'_i$ für alle $i = 1, \dots, \nu$.

(iii) *Ist $(\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1}) \simeq (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$, so sind die Halbgruppen $(\bar{\mathcal{S}}_1, \otimes_{t_1})$ und $(\bar{\mathcal{S}}_2, \otimes_{t_2})$ isomorph.*

Wie schon bei der Äquivalenz von Entscheidungssystemen ist es auch bei isomorphen Entscheidungssystemen möglich, die Isomorphie auf Eigenschaften der zugrunde liegenden Wahrheitsräume zurückzuführen. Dies zeigt der folgende Satz.

4.25 Satz - Isomorphiesatz für Entscheidungssysteme

Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine Menge von Alternativen und $\mathcal{S}_1 = (\mathfrak{D}_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ eine Menge von Entscheidungsmodellen. Für $\tau_1 = (t_1, n_1, T_1)$ sei $\mathfrak{E}_1 = (\mathcal{S}_1, \otimes_{t_1})$ ein τ_1 -Entscheidungssystem. Es seien ferner $\mathcal{S}_2 = (\mathfrak{D}'_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ und $\tau_2 = (t_2, n_2, T)$ gegeben.

Ist $\tau_1 \simeq \tau_2$, wobei $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ den Isomorphismus definiert³, und ist zudem $D_{\mathfrak{D}_i} = \Omega \circ D_{\mathfrak{D}'_i}$ für alle $i = 1, \dots, \nu$, so gilt:

(i) *Es ist $\mathfrak{E}_2 = (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$ ein τ_2 -Entscheidungssystem.*

(ii) *Es ist $\mathfrak{E}_1 \simeq \mathfrak{E}_2$.*

³d. h. es gilt: $\|\cdot\| \in \tau_1 \Leftrightarrow \Omega \circ \|\cdot\| \in \tau_2$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\tau_1 \simeq \tau_2$ mit $\|\cdot\| \in \tau_1 \Leftrightarrow \Omega \circ \|\cdot\| \in \tau_2$.

Nach dem Isomorphiesatz 1.44 von Wahrheitsräumen gilt dann für alle $a, b \in T_1$:

$$\begin{aligned} t_1(a, b) &= \Omega^{-1}(t_2(\Omega(a), \Omega(b))) \\ n_1(a) &= \Omega^{-1}(n_2(\Omega(a))) \end{aligned}$$

und

$$T_2 = \bigcup_{a \in T_1} \{\Omega(a)\} \quad (4.1)$$

Für alle Alternativen $a \in \mathcal{AL}$ und für alle Indizes $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$ gilt somit:

$$\begin{aligned} &D_{\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a) \\ &= t_1(D_{\mathfrak{D}_{i_1}}(a), t_1(D_{\mathfrak{D}_{i_2}}(a), \dots, t_1(D_{\mathfrak{D}_{i_{\kappa-1}}}(a), D_{\mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a)))) \\ &= \Omega^{-1}(t_2(\Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_1}}(a)), t_2(\Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_2}}(a)), \dots, t_2(\Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_{\kappa-1}}}(a), \Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a))))))) \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt für alle $i = 1, \dots, \nu$: $\Omega \circ D_{\mathfrak{D}_i} = D_{\mathfrak{D}'_i}$. Daher folgt weiter:

$$\begin{aligned} &\Omega^{-1}(t_2(\Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_1}}(a)), t_2(\Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_2}}(a)), \dots, t_2(\Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_{\kappa-1}}}(a), \Omega(D_{\mathfrak{D}_{i_\kappa}}(a))))))) \\ &= \Omega^{-1}(t_2(D_{\mathfrak{D}'_{i_1}}(a), t_2(D_{\mathfrak{D}'_{i_2}}(a), \dots, t_2(D_{\mathfrak{D}'_{i_{\kappa-1}}}(a), D_{\mathfrak{D}'_{i_\kappa}}(a)))))) \\ &= \Omega^{-1}(D_{\mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}}(a)) \end{aligned}$$

Wir erhalten für alle $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$:

$$\Omega \circ D_{\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa}} = D_{\mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}} \quad (4.2)$$

Da nach Voraussetzung \mathfrak{E}_1 ein τ_1 -Entscheidungssystem ist, gilt $\text{Im}(D_{\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa}}) \in T_1$ für alle $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$. Nach den obigen Überlegungen folgt zusammen mit Gleichung (4.1):

$$\text{Im}(D_{\mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_2} \dots \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}}) = \text{Im}(\Omega \circ D_{\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_1} \dots \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_{i_\kappa}}) \in T_2$$

Somit ist $\mathfrak{E}_2 = (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_2})$ ein τ_2 -Entscheidungssystem. Die Isomorphie von \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_2 folgt aus Gleichung (4.2). \blacksquare

4.26 Bemerkung Die Bedingungen des Satzes 4.25 sind hinreichend, aber nicht notwendig (vgl. auch Bemerkung 4.21).

Wir betrachten ein Beispiel für isomorphe Entscheidungssysteme.

4.27 Beispiel Wir betrachten erneut das Anwendungsbeispiel aus Abschnitt 2.4. Zu diesem Zweck seien für $b, d \in \mathbb{R}$ mit $d > 0$ definiert:

$$P_L^{b,d}(x) := \begin{cases} 1 & x \leq b \\ \frac{-x+(b+d)}{d} & b < x \leq b+d \\ 0 & b+d < x \end{cases} \quad P_K^{b,d}(x) := \begin{cases} 1 & x \leq b \\ \frac{1-\exp(-\beta \frac{-x+(b+d)}{d})}{1-\exp(-\beta)} & b < x \leq b+d \\ 0 & b+d < x \end{cases}$$

Dabei sei $\beta > 0$ fest gewählt.

Es sei nun \mathbb{R} die Menge von Alternativen eines Entscheidungsproblems. Wir nehmen an, daß Mengen von Entscheidungsmodellen $\mathcal{S}_1 = (\mathfrak{D}_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{S}_2 = (\mathfrak{D}'_i)_{1 \leq i \leq \nu} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ derart gegeben sind, daß für $i = 1, \dots, \nu$ gilt:

$$D_{\mathfrak{D}_i} = P_L^{b_i, d_i} \quad \text{und} \quad D_{\mathfrak{D}'_i} = P_K^{b_i, d_i}$$

Solche Familien von Entscheidungsmodellen lassen sich nach dem Homomorphiesatz 4.10 stets finden.

Wir betrachten die Abbildung

$$\Omega_\beta(a) := \frac{1 - \exp(-\beta a)}{1 - \exp(-\beta)}$$

Ω_β ist streng monoton steigend und bijektiv (vgl. Abschnitt 2.4) und es gilt für alle $i = 1, \dots, \nu$:

$$\Omega_\beta \circ D_{\mathfrak{D}_i} = \Omega_\beta \circ P_L^{b_i, d_i} = P_K^{b_i, d_i} = D_{\mathfrak{D}'_i}$$

Es sei nun $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1])$. Dann ist $\mathfrak{E}_1 = (\mathcal{S}_1, \otimes_{t_{\min}})$ ein τ_1 -Entscheidungssystem. Ist nun $\tau_{\Omega_\beta} = (t_{\min}, n_{\Omega_\beta}, [0, 1])$ mit $n_{\Omega_\beta}(a) = \Omega^{-1}(n_s(\Omega(a)))$ für alle $a \in [0, 1]$, so ist nach den Ausführungen von Abschnitt 2.4 $\tau_{\min} \simeq \tau_{\Omega_\beta}$. Aus dem Isomorphiesatz 4.25 folgt, daß $\mathfrak{E}_2 = (\mathcal{S}_2, \otimes_{t_{\min}})$ ein τ_{Ω_β} -Entscheidungssystem ist und daß $\mathfrak{E}_1 \simeq \mathfrak{E}_2$ gilt.

Es ist also für alle $i_1, \dots, i_\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$:

$$\mathfrak{D}_{i_1} \otimes_{t_{\min}} \dots \otimes_{t_{\min}} \mathfrak{D}_{i_\kappa} \simeq \mathfrak{D}'_{i_1} \otimes_{t_{\min}} \dots \otimes_{t_{\min}} \mathfrak{D}'_{i_\kappa}$$

Insbesondere stimmen die fuzzy-effizienten Lösungen solcher Modelle stets überein.

Wir schließen die Ausführungen zur Isomorphie von relationalen Entscheidungsmodellen mit einem Anwendungsbeispiel ab, das wesentliche Eigenschaften isomorpher Entscheidungsmodelle verdeutlicht.

4.6 Ein Anwendungsbeispiel: Indifferenzkurven isomorpher Systeme

In der klassischen Entscheidungs- und Wirtschaftstheorie werden gelegentlich sogenannte Indifferenzkurven betrachtet, um Entscheidungen mit zwei Zielen zu modellieren (vgl. [Laux '95, S. 76 ff.]). Insbesondere im Bereich der Mikroökonomie finden solche graphischen Modelle ihre häufige Verwendung (vgl. z. B. [Schneider '86, Laux '95]). Wir werden diese Methode hier betrachten, um einige Eigenschaften der Isomorphie von Entscheidungssystemen zu verdeutlichen. Zu diesem Zweck skizzieren wir zunächst das grundlegende Konzept und schildern dann seine mögliche Verwendung bei der Analyse von relationalen Entscheidungsmodellen.

Zur Darstellung der Methode der Indifferenzkurven gehen wir davon aus, daß ein Entscheidungsproblem über einer endlichen Menge von Alternativen $\mathcal{A}\mathcal{L}$ mit zwei Zielen gegeben ist. Beide Ziele sollen durch reellwertige Konsequenzen beschrieben werden, die sämtlich in einem Intervall $[c, d] \subset \mathbb{R}$ liegen. Wir gehen ferner davon aus, daß eine Entscheidung bei

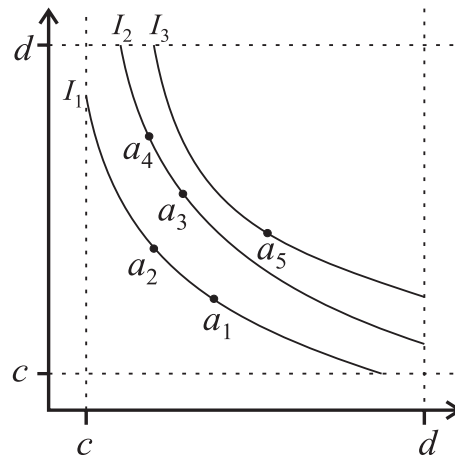


Abbildung 4.3: Indifferenzkurven

Sicherheit vorliegt. Jeder Alternative $a \in \mathcal{A}$ kann also eindeutig ein Tupel $(x_1^a, x_2^a) \in [c, d]^2$ zugeordnet werden, welches die Konsequenzen aus der Wahl einer Alternative a bezüglich beider Ziele beschreibt. Indifferenzkurven werden in der Entscheidungstheorie in solchen Fällen verwendet, um Alternativen so zu bestimmen, daß sie bezüglich beider Kriterien optimal sind. Unter einer Indifferenzkurve $I \subseteq [c, d]^2$ versteht man dabei die Menge der Konsequenzenpaare $(x_1, x_2) \in [c, d]^2$, denen gegenüber der Entscheider bezüglich beider Ziele indifferent ist (vgl. [Laux '95, S. 76]). Bei der Modellierung sind hier vor allem solche Indifferenzkurven I von Interesse, für die mindestens ein $a \in \mathcal{A}$ mit $(x_1^a, x_2^a) \in I$ existiert.

In Abbildung 4.3 ist ein Beispiel für Indifferenzkurven dargestellt. Dabei haben wir angenommen, daß der Nutzen in beiden Zielen streng monoton mit den Zahlenwerten der entsprechenden Konsequenzen wächst. Man überlegt sich leicht, daß die Steigung der Indifferenzkurven in diesem Fall negativ sein muß (vgl. [Laux '95, S. 77-78]). Bei der Darstellung haben wir jede Alternative $a_i \in \mathcal{A}$ für $i = 1, \dots, 5$ mit dem Punkt $(x_1^{a_i}, x_2^{a_i}) \in [c, d]^2$ identifiziert. I_1, I_2 und I_3 bezeichnen die drei relevanten Indifferenzkurven. Die Alternativen a_1 und a_2 sowie a_3 und a_4 sind im Beispiel der Abbildung 4.3 paarweise indifferent. Daher liegen diese paarweise auf den Indifferenzkurven I_1 beziehungsweise I_2 . Die Alternative a_5 ist den übrigen Alternativen vorzuziehen, da es zu jeder Alternative a_1, \dots, a_4 Paare von Konsequenzen aus I_3 gibt, die die Konsequenzen der Alternativen a_1, \dots, a_4 in beiden Komponenten übertreffen, d. h. für $i = 1, \dots, 4$ existiert stets ein Paar $(x_1^i, x_2^i) \in I_3$ mit $x_1^i > x_1^{a_i}$ und $x_2^i > x_2^{a_i}$.

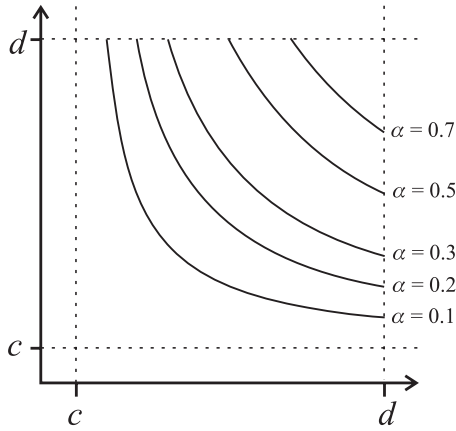
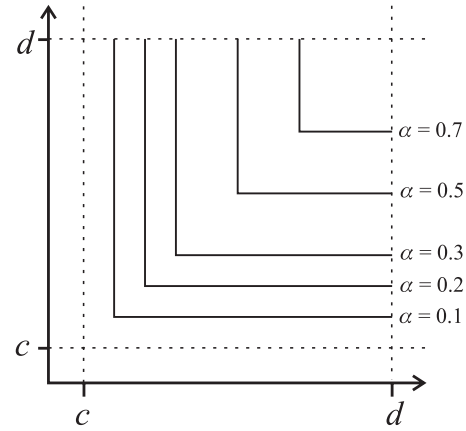
Die Methode der Indifferenzkurven wird in der Entscheidungstheorie unter anderem dann verwendet, wenn keine *quantitative* Bewertung des Nutzens der Konsequenzen bekannt ist. Allerdings lassen sich auch Indifferenzkurven in Situationen erzeugen, in denen solche quantitativen Bewertungen vorliegen. Wir werden dieses im folgenden ausnutzen, um so spezielle Eigenschaften relationaler Entscheidungsmodelle aufzuzeigen.

Der Fall eines Entscheidungsproblems der oben skizzierten Art kann wie folgt in einem relationalen Entscheidungsmodell dargestellt werden. Es seien $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ definiert durch

$$\mathfrak{D}_i = (\mathcal{A}, [c, d], C_i, F_i, \mathbf{I})$$

für $i = 1, 2$. Dabei ist

$$F_i : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{F}([c, d]) \quad a \longmapsto \{x_i^a\}$$

Abbildung 4.4: Indifferenzkurven $t_1 = t_A$ Abbildung 4.5: Indifferenzkurven $t_1 = t_{\min}$

für $i = 1, 2$ und \mathbf{I} ein beliebiges Inklusionsmaß. Die mehrwertigen Kriterien $C_i \in \mathcal{F}([c, d])$ seien für $i = 1, 2$ gegeben durch $C_i(x) = g(x)$. Dabei sei $g : [c, d] \rightarrow [0, 1]$ streng monoton steigend mit $g(c) = 0$ und $g(d) = 1$.

Es sei $t_1 : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine nullteilerfreie t -Norm. Dann beschreibt das Modell

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_2$$

ein Entscheidungsproblem, in dem beide Ziele repräsentiert werden. Für die mehrwertige Entscheidung $D_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{F}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ von \mathfrak{D} gilt:

$$D_{\mathfrak{D}}(a) = t_1(D_{\mathfrak{D}_1}(a), D_{\mathfrak{D}_2}(a)) = t_1(\mathbf{I}(F_1[a], C_1), \mathbf{I}(F_2[a], C_2)) = t_1(C_1(x_1^a), C_2(x_2^a))$$

Jede Indifferenzkurve I eines solchen Entscheidungsmodells wird durch

$$I := \{(x_1, x_2) \in [c, d]^2; t_1(C_1(x_1), C_2(x_2)) = \alpha\}$$

mit $\alpha \in [0, 1]$ bestimmt.

In den Abbildungen 4.4 und 4.5 sind die Indifferenzkurven von Modellen der oben beschriebenen Art dargestellt. Dabei haben wir die mehrwertigen Kriterien $C_i(x) = \frac{x-c}{d-c}$ für $i = 1, 2$ vorausgesetzt. In Abbildung 4.4 ist das Algebraische Produkt zur Definition des Kartesischen Produkts verwendet worden. In Abbildung 4.5 liegt der Minimum-Operator zugrunde.

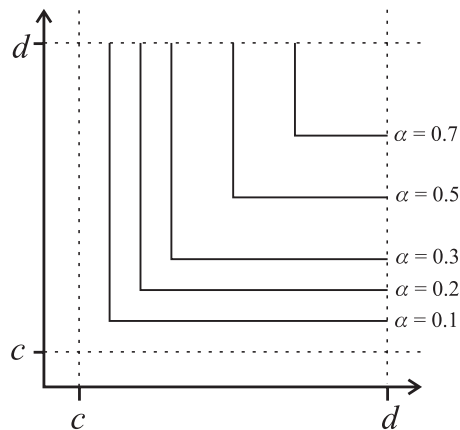
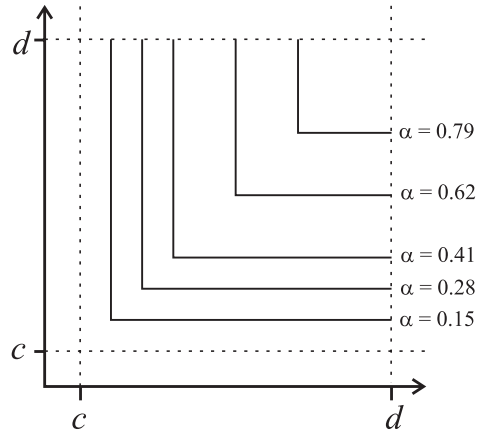
Wir wollen nun betrachten, wie sich Indifferenzkurven isomorpher Entscheidungssysteme verhalten. Zu diesem Zweck seien \mathfrak{D}_1 und \mathfrak{D}_2 wie oben gegeben. Dann ist $\mathfrak{E}_1 = (\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}, \otimes_{t_1})$ ein Entscheidungssystem. Wir nehmen ferner an, daß $\mathfrak{E}_2 = (\{\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2\}, \otimes_{t_2})$ ein weiteres Entscheidungssystem ist. Dabei soll für $i = 1, 2$ gelten

$$\mathfrak{D}'_i = (\mathcal{A}\mathcal{L}, [c, d], C'_i, F_i, \mathbf{I}),$$

wobei F_i wie oben definiert ist und $C'_i(x) = h(x)$ für alle $x \in [c, d]$ gilt. Auch die Abbildung $h : [c, d] \rightarrow [0, 1]$ soll streng monoton steigend mit $h(c) = 0$ und $h(d) = 1$ sein.

Wir nehmen an, daß $\mathfrak{E}_1 \simeq \mathfrak{E}_2$ ist. Dann existiert eine streng monoton steigende Abbildung $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit

$$\Omega \circ D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_{t_1} \mathfrak{D}_2} = D_{\mathfrak{D}'_1 \otimes_{t_2} \mathfrak{D}'_2}$$

Abbildung 4.6: Indifferenzkurven des Modells $\mathfrak{D}_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}_2$ Abbildung 4.7: Indifferenzkurven des Modells $\mathfrak{D}'_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}'_2$

Es gilt für alle $a \in \mathcal{AL}$:

$$\Omega(D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2}(a)) = \Omega(t_1(D_{\mathfrak{D}_1}(a), D_{\mathfrak{D}_2}(a))) = t_2(D_{\mathfrak{D}'_1}(a), D_{\mathfrak{D}'_2}(a)) = t_2(C'_1(x_1^a), C'_2(x_2^a))$$

und wir erhalten

$$t_1(C_1(x_1^a), C_2(x_2^a)) = \alpha \Leftrightarrow t_2(C'_1(x_1^a), C'_2(x_2^a)) = \Omega(\alpha)$$

Liegen die Konsequenzen zweier Alternativen auf der gleichen Indifferenzkurve in dem Modell $\mathfrak{D}_1 \otimes_t \mathfrak{D}_2$, so gilt dies auch für eine Indifferenzkurve des Modells $\mathfrak{D}'_1 \otimes_{t'} \mathfrak{D}'_2$. Insbesondere ist daher die Menge aller fuzzy-effizienten Entscheidungen in beiden Modellen die gleiche. Liegen umgekehrt Alternativen in zwei relationalen Modellen auf unterschiedlichen Indifferenzkurven, so können diese nicht aus isomorphen Entscheidungssystemen gebildet werden. Man erkennt so leicht, daß die Entscheidungsmodelle der Abbildungen 4.3 und 4.4 im allgemeinen nicht isomorph sind (dies hängt allerdings von der Menge der Alternativen und Funktionen F_i ab).

Als konkretes Beispiel weisen wir nach, daß die Systeme $\mathfrak{E}_1 = (\{\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\}, \otimes_{\min})$ und $\mathfrak{E}_2 = (\{\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2\}, \otimes_{\min})$ stets isomorph sind und daß daher die Indifferenzkurven der Modelle $\mathfrak{D}_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}'_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}'_2$ immer übereinstimmen. Dabei seien die Modelle $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ sowie $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2$ wie oben definiert und \otimes_{\min} durch den Minimum-Operator bestimmt.

Es sei dazu $\Omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\Omega := h \circ g^{-1}$ gegeben. Ω ist nach Konstruktion streng monoton steigend und bijektiv. Zudem gilt für alle $x \in [c, d]$ und $i = 1, 2$:

$$\Omega(C_i(x)) = ((h \circ g^{-1}) \circ g)(x) = h(x) = C'_i(x)$$

Wir betrachten die Wahrheitsräume $\tau_{\min} = (t_{\min}, n_s, [0, 1])$ sowie $\tau_{\Omega} = (t_{\min}, n_{\Omega}, [0, 1])$. Dabei sei $n_{\Omega}(a) := \Omega^{-1}(n_s(\Omega(a)))$ für alle $a \in [0, 1]$. Dem Isomorphiesatz von Wahrheitsräumen entnimmt man, daß $\tau_{\min} \simeq \tau_{\Omega}$ ist. Da zudem \mathfrak{E}_1 ein τ_{\min} -Entscheidungssystem ist, ist \mathfrak{E}_2 nach Satz 4.25 ein τ_{Ω} -Entscheidungssystem und es ist $\mathfrak{E}_1 \simeq \mathfrak{E}_2$. Insbesondere stimmen die Indifferenzkurven der Modelle $\mathfrak{D}_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{D}'_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}'_2$ überein.

In den Abbildungen 4.6 und 4.7 ist der oben beschriebene Fall für

$$g(x) = \frac{x - c}{d - c} \quad \text{und} \quad h(x) = \frac{1 - \exp(\frac{x-c}{d-c})}{1 - \exp(-1)}$$

aufgetragen. Man erkennt leicht, daß die entsprechenden Indifferenzkurven übereinstimmen.

4.7 Abschließende Bemerkungen

In dem vorausgegangenen Kapitel wurde ein Entscheidungsmodell formuliert, in dem ausschließlich mehrwertige Relationen und Maße zur Abbildung von Entscheidungsproblemen verwendet werden. Ein solches Entscheidungsmodell wurde als *relationales Entscheidungsmodell* bezeichnet. Leitender Gedanke dabei war, daß eine Entscheidung dann optimal ist, wenn die Menge der möglichen Konsequenzen aus der Wahl einer Alternative möglichst in der Menge der optimalen Konsequenzen liegt. Es wurde gezeigt, daß verschiedene Kategorien von Entscheidungsproblemen durch ein relationales Entscheidungsmodell darstellbar sind. Insbesondere wurden Entscheidungen bei Sicherheit und Risiko sowie verschiedene Ansätze für Entscheidungen bei Unsicherheit betrachtet (vgl. Bsp. 4.4).

In der relationalen Entscheidungstheorie lassen sich alle Entscheidungsprobleme auf der Basis eines einheitlichen Grundmodells darstellen. Daher besitzen relationale Entscheidungsmodelle stets die gleiche Struktur, die die Verknüpfung und den systematischen Vergleich verschiedener Entscheidungsmodelle ermöglicht. Diese Verknüpfung – das *Kartesische Produkt relationaler Entscheidungsmodelle* – erlaubt es insbesondere, multikriterielle Entscheidungsprobleme innerhalb der relationalen Theorie darzustellen. Innerhalb eines Modells können dabei verschiedene Klassen von Information dargestellt werden. Es ist also möglich, Entscheidungsmodelle zu formulieren, bei denen verschiedene Kriterien sowohl unsicherheits- oder risikobehaftet als auch sicher⁴ sein können. *Die relationale Entscheidungstheorie ist die einzige uns bekannte Methode zur Beschreibung von Entscheidungsproblemen, die eine derart große Klasse von Modellierungsmöglichkeiten auf der Basis einer einheitlichen Theorie bereitstellt.*

Mit den Begriffen der *Äquivalenz* bzw. der *Isomorphie* von Entscheidungsmodellen wurden schließlich Konzepte eingeführt, die einen systematischen Vergleich verschiedener Entscheidungsmodelle erlauben. Hierdurch wird Raum für die mathematische Analyse von Entscheidungsmodellen geschaffen. Wir haben dies für den Fall von multikriteriellen Entscheidungsproblemen getan und gezeigt, wie sich die Strukturen der Sprachen MS entsprechend in Systemen von Entscheidungsmodellen widerspiegeln (vgl. die Sätze 4.19 und 4.25). Weitere Untersuchungen sind hier möglich. So können verschiedene Ansätze für Entscheidungen bei Unsicherheit, Sicherheit und Risiko konzeptionell gegenübergestellt und die Modelle verglichen werden. Schließlich haben wir bereits im Anwendungsbeispiel 2.4 auf die Bedeutung des Isomorphiekonzeptes für algorithmische Problemstellungen hingewiesen. Wir gehen davon aus, daß hier durch geeignete Transformationen auch in allgemeineren Fällen Fortschritte erreicht werden können.

⁴im Sinne von: Entscheidungen bei Sicherheit

Kapitel 5

Relationale und klassische Entscheidungstheorie

Zusammenfassung:

Gegenstand des folgenden Abschnittes ist der Vergleich von relationalen Entscheidungsmodellen mit klassischen Modellen mit Nutzenfunktion. Dabei werden Modelle für Entscheidungen bei Sicherheit, Risiko und Unsicherheit sowie Modelle mit Restriktionen und mehreren Zielfunktionen betrachtet. Es wird gezeigt, daß sich zu jedem Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion, das nur ein Zielkriterium besitzt, ein isomorphes relationales Entscheidungsmodell finden läßt. Insbesondere beschreiben relationale und klassische Theorie in diesen Fällen stets die gleiche Menge von effizienten Lösungen. Im Falle der Entscheidung mit mehreren Zielen existieren solche einfachen Zusammenhänge zwischen relationaler und klassischer Theorie nicht mehr. Im allgemeinen führen hier beide Ansätze zu verschiedenen Lösungen. Es werden Beispiele hierfür angegeben und es wird an einem Anwendungsbeispiel gezeigt, daß beide Modellierungsansätze zu plausiblen Lösungen führen können.

5.1 Entscheidungsmodelle mit Nutzenfunktion

In Kapitel 4 wurden die Grundzüge einer relationalen Theorie der Entscheidung skizziert. Wir haben dort dargelegt, daß sich verschiedene Klassen von Entscheidungsproblemen im Rahmen der relationalen Entscheidungstheorie abbilden lassen. So können Entscheidungen bei Sicherheit, Risiko und Unsicherheit sowie multikriterielle Entscheidungsprobleme dargestellt werden. Allerdings ist bisher der systematische Vergleich und eine Abgrenzung zu den klassischen Ansätzen der Modellierung von Entscheidungsproblemen nicht erfolgt. Dieser Gesichtspunkt soll in dem nun folgenden Kapitel 5 untersucht werden.

Bei dem angestrebten Vergleich der relationalen Entscheidungstheorie mit den Methoden der klassischen Entscheidungstheorie ergibt sich zunächst die Aufgabe, den Begriff der *klassischen* Entscheidungstheorie, die im folgenden betrachtet werden soll, genauer abzugrenzen.

Problematisch dabei ist, daß unter dem Begriff Entscheidungstheorie im allgemeinen verschiedene Methoden zusammengefaßt werden, die zur mathematischen Abbildung von Entscheidungsproblemen verwendet werden. Diese unterscheiden sich hinsichtlich der Verfahren zur Beschreibung der Qualität von Alternativen¹, in den Möglichkeiten und Konzepten zur Darstellung von unvollständiger oder ungenauer Information² sowie – im Falle von Modellen mit mehreren Entscheidungskriterien – in den Ansätzen zur Gesamtbeurteilung der Alternativen bezüglich aller Kriterien³. Ein Überblick über verschiedene Ansätze findet sich unter anderem in den Büchern von S. French [French '86], A. Rapoport [Rapoport '89] sowie K. Manz [Manz '93] und H. Laux [Laux '95]. Eine ausführliche Diskussion von Verfahren zur Beschreibung von Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielen ist beispielsweise bei O. Huber [Huber '77] oder bei H.-J. Zimmermann und L. Gutsche in [Zimmermann '91] zu finden. Vor dem Hintergrund dieses breiten Spektrums an Methoden, Ansätzen und Modellen wird klar, daß ein Vergleich der relationalen Entscheidungstheorie mit sämtlichen Verfahren sicher nicht im Rahmen dieser Arbeit möglich ist. Wir werden uns daher auf einen Vergleich mit einer speziellen Klasse von Entscheidungsmodellen beschränken, den Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion (oder kardinalen Nutzen). Hier werden wir insbesondere Entscheidungsmodelle bei Sicherheit, Risiko und Unsicherheit (Abschnitt 5.2) sowie einen einfachen Fall von Entscheidungsmodellen mit mehreren Kriterien (Abschnitt 5.3) betrachten.

Der Vergleich zwischen relationaler und klassischer Entscheidungstheorie⁴ wird im folgenden Kapitel auf der Modellebene erfolgen. Das heißt, es wird untersucht, ob die klassischen und relationalen Methoden der Beschreibung von Entscheidungsproblemen im Anwendungsfall zu vergleichbaren Modellen führen und wo gegebenenfalls Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Modellbildungen zu finden sind. Hierzu gilt es zunächst ein Kriterium zu formulieren, das geeignet ist, etwaige Parallelen zwischen den Modellen zu charakterisieren. Zu diesem Zweck skizzieren wir zunächst den Grundansatz der Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktion und leiten im Anschluß ein geeignetes Vergleichskriterium her.

Wir gehen zunächst davon aus, daß ein Entscheidungsproblem mit einem Ziel gegeben ist. Es sei \mathcal{A} die Menge der Alternativen und \mathcal{C} die Menge von Konsequenzen. Die Menge \mathcal{C} sei mit einer vollständigen Ordnung \preceq derart versehen, daß eine Konsequenz $c_1 \in \mathcal{C}$ bezüglich des Ziels einer Konsequenz $c_2 \in \mathcal{C}$ genau dann vorzuziehen ist, wenn $c_2 \preceq c_1$ und $c_1 \not\preceq c_2$ gilt. Eine Abbildung $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *Nutzenfunktion*, wenn für alle $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ gilt:

$$c_2 \preceq c_1 \Leftrightarrow u(c_2) \leq u(c_1) \quad (5.1)$$

Bei Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion ist es ebenso wie bei relationalen Modellen möglich, verschiedene Arten der Information über die Relation von Alternativen und Konsequenzen zu repräsentieren. Allerdings sind die verwendeten Konzepte untereinander sehr verschieden, so daß kein einheitlicher theoretischer Rahmen existiert⁵. Gemeinsam ist allen Ansätzen jedoch, daß in Abhängigkeit von der Nutzenfunktion u eine geeignete Abbildung

¹Hier sind unter anderem Modelle mit verschiedenen Nutzenskalen bekannt. Eine mögliche Einteilung besteht in der Differenzierung nach *nominalem*, *ordinalem* und *kardinalem* Nutzen (vgl. [Zimmermann '91, S. 13]).

²Wir haben auf verschiedene Ansätze für die Entscheidung bei Unsicherheit bereits im Rahmen des Beispiels 4.4 hingewiesen.

³Hier sei auf lexikographische Methoden, auf verschiedene Verfahren mit Anspruchsniveaus, auf Nutzenmodelle, auf die verschiedenen Methoden des Goal-Programming usw. verwiesen.

⁴im obigen Sinne

⁵Wir werden verschiedene Ansätze im folgenden Abschnitt 5.2 beschreiben.

$\hat{u} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ konstruiert wird, die beschreibt, ob eine Alternative $a_1 \in \mathcal{A}$ einer Alternative $a_2 \in \mathcal{A}$ vorzuziehen ist. Dies soll genau dann der Fall sein, wenn für $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\hat{u}(a_2) \leq \hat{u}(a_1) \text{ und } \hat{u}(a_1) \not\leq \hat{u}(a_2) \quad (5.2)$$

Eine Alternative $a^* \in \mathcal{A}$ heißt *effizient* (oder *optimal*), wenn keine Alternative $a \in \mathcal{A}$ derart existiert, daß $\hat{u}(a^*) \leq \hat{u}(a)$ gilt. Als einfaches Beispiel für ein Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion sei auf den Fall der Entscheidung bei Sicherheit verwiesen. Dort definiert man die Abbildung $\hat{u}(a) := u(f(a))$ mit $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C} \quad a \longmapsto c_a$. Dabei ist $c_a \in \mathcal{C}$ die Konsequenz, die aus der Wahl der Alternative $a \in \mathcal{A}$ folgt (vgl. auch Beispiel 4.4 (i) oder Abschnitt 5.2.1).

In der klassischen Theorie finden sich unterschiedliche Ansätze zur Ableitung einer solchen Nutzenfunktion und zu den verschiedenen Skalen, auf denen der Nutzen aufgetragen werden kann. Wir wollen an dieser Stelle lediglich auf die grundlegenden Werke von J. von Neumann und O. Morgenstern [Neumann '53] sowie von Savage [Savage '72] verweisen, in denen dieser Ansatz zur Entscheidungstheorie axiomatisch abgeleitet wird. Aussagen über die Existenz etwaiger Nutzenfunktionen finden sich bei D. Bridges und G. Mehta [Bridges '95], wo auch ein weiter Überblick über den aktuellen Stand der Forschung im Bereich der Nutzentheorie zu finden ist. Standardwerke zur Einführung in das Themengebiet sind sicher im deutschsprachigen Raum das oben bereits genannte Werk von Laux [Laux '95] sowie das Buch von French [French '86].

Bei dem beabsichtigten Vergleich von relationaler Entscheidungstheorie und der Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktionen wird die Gleichung (5.2) von zentraler Bedeutung sein. Ist \hat{u} wie oben gegeben und ist $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ ein entsprechendes relationales Entscheidungsmodell, so werden wir die beiden zugrunde liegenden Modelle als *isomorph* bezeichnen, wenn für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\hat{u}(a_2) \leq \hat{u}(a_1) \Leftrightarrow D_{\mathfrak{D}}(a_2) \leq D_{\mathfrak{D}}(a_1) \quad (5.3)$$

Unter den Voraussetzungen der Gleichung (5.3) ist eine Alternative $a_1 \in \mathcal{A}$ einer Alternative $a_2 \in \mathcal{A}$ genau dann im Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion vorzuziehen, wenn dies auch im relationalen Modell der Fall ist. Insbesondere ist eine Alternative genau dann im Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion effizient, wenn sie eine fuzzy-effiziente Lösung des entsprechenden relationalen Modells ist. In diesem Sinne sind dann das Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion und das relationale Modell vergleichbar.

In dem folgenden Kapitel werden wir diese Art der Charakterisierung von Entscheidungsmodellen verwenden, um die Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktion dem relationalen Entscheidungsmodell gegenüberzustellen. In Abschnitt 5.2 werden Entscheidungsprobleme mit einem Zielkriterium betrachtet. Hier werden insbesondere Entscheidungsprobleme unter Sicherheit, Risiko und Unsicherheit untersucht und nachgewiesen, daß zu jedem Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion in diesen Fällen ein isomorphes relationales Modell existiert. Im Anschluß werden Entscheidungsmodelle mit mehreren Kriterien analysiert. Bei der Diskussion wird zwischen Entscheidungsmodellen mit Restriktionen (Abschnitt 5.3.1) und Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielen (Abschnitt 5.3.2) unterschieden. Dabei wird sich zeigen, daß die relationale Theorie und die Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktion im zuletzt genannten Fall zu grundsätzlich verschiedenen Modellen führen können. Diese Unterschiede sollen abschließend vor dem Hintergrund eines Anwendungsbeispiels (Abschnitt 5.4) diskutiert werden.

5.2 Entscheidungen mit einem Kriterium

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Untersuchung des Zusammenhangs von Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion und relationalen Entscheidungsmodellen für den Fall eines Entscheidungsproblems mit einem Ziel. Die Grundidee ist dabei, jeder Nutzenfunktion ein spezielles mehrwertiges Kriterium derart zuzuordnen, daß die entsprechenden Entscheidungsmodelle isomorph im Sinne der Gleichung (5.3) sind. Ein solches mehrwertiges Kriterium wird im folgenden Lemma festgelegt.

5.1 Lemma *Es sei \mathcal{C} eine endliche Menge von Konsequenzen und $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion eines Entscheidungsmodells. Wir definieren*

$$u_{\min} := \min_{c \in \mathcal{C}} u(c)$$

sowie

$$u_{\max} := \max_{c \in \mathcal{C}} u(c)$$

Es sei ferner

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}},$$

wenn $u_{\min} \neq u_{\max}$ gilt, und

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{x}{u_{\max}},$$

wenn $u_{\min} = u_{\max}$ ist. Dann definiert die Abbildung

$$C_{\Phi, u} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1] \quad c \mapsto \Phi(u(c))$$

ein mehrwertiges Kriterium im Sinne der Definition 4.1.

Beweis: Wir weisen die Bedingungen (C1) bis (C3) (vgl. Seite 108) für $C_{\Phi, u}$ nach. Dabei ist der Fall $u_{\min} = u_{\max}$ trivial, da in diesem Fall alle Konsequenzen indifferent sind. Es ist dann $C_{\Phi, u}(c) = 1$ für alle $c \in \mathcal{C}$. Diese mehrwertige Relation erfüllt (C1) bis (C3).

Es sei $u_{\min} \neq u_{\max}$. Dann ist Φ streng monoton steigend. Aus der Monotonie folgt zusammen mit Gleichung (5.1) für alle $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$:

$$c_2 \preceq c_1 \Leftrightarrow u(c_2) \leq u(c_1) \Leftrightarrow C_{\Phi, u}(c_2) \leq C_{\Phi, u}(c_1)$$

Also gilt:

$$(c_2 \preceq c_1 \wedge c_1 \not\preceq c_2) \Leftrightarrow C_{\Phi, u}(c_2) < C_{\Phi, u}(c_1)$$

Somit ist (C1) für $C_{\Phi, u}$ erfüllt.

Wegen der strengen Monotonie von Φ folgt zudem $C_{\Phi, u}(c) = 1 \Leftrightarrow u(c) = u_{\max}$. Somit ist auch (C2) erfüllt.

Die Bedingung (C3) ist klar.



5.2 Bemerkung

- (i) Es sei $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion eines Entscheidungsmodells und $u_{\min}, u_{\max} \in \mathbb{R}$ wie in Lemma 5.1 definiert. Ist $u_{\min} \neq u_{\max}$ und $\Psi : [u_{\min}, u_{\max}] \rightarrow [0, 1]$ streng monoton steigend mit $\Psi(u_{\max}) = 1$, so läßt sich analog zum Beweis des Lemmas 5.1 nachweisen, daß $C_{\Psi, u} := \Psi \circ u$ stets ein mehrwertiges Kriterium definiert. Alle folgenden Überlegungen lassen sich prinzipiell auch für diese mehrwertigen Kriterien anstellen und führen zu analogen Ergebnissen. Man kann zudem zeigen, daß alle im folgenden diskutierten relationalen Entscheidungsmodelle, die wir durch $C_{\Phi, u}$ festlegen, isomorph zu Modellen sind, die durch ein mehrwertiges Kriterium $C_{\Psi, u}$ bestimmt werden.
- (ii) Jedes mehrwertige Kriterium, das ein Ziel repräsentiert, kann formal als Nutzenfunktion im Sinne der klassischen Theorie verstanden werden. Die Einschränkung auf das Intervall $[0, 1]$ ist dabei nicht relevant, sofern Entscheidungsprobleme mit beschränktem Nutzen betrachtet werden, da diese Entscheidungsmodelle mit Nutzenfunktion im allgemeinen invariant gegenüber linearen, streng monoton steigenden Transformationen des Wertebereichs der Nutzenfunktion sind (vgl. [Neumann '53]). Diese Interpretation von mehrwertigen Entscheidungen als Nutzenfunktionen erlaubt es beispielsweise, Methoden zur Bestimmung von Nutzenfunktionen auch zur Festlegung von mehrwertigen Entscheidungen zu verwenden.

Trotz dieser Analogien sind die Konzepte von Nutzenfunktionen auf der einen und mehrwertigen Entscheidungen auf der anderen Seite nicht identisch. So können durch mehrwertige Kriterien sowohl die Restriktionen als auch die Ziele eines Entscheidungsproblems abgebildet werden⁶. Dies ist in der Nutzentheorie nicht möglich. Zudem ist das Verständnis eines mehrwertigen Kriteriums als eine mehrwertige Relation ein wesentlicher Teil des Konzepts der relationalen Entscheidungstheorie. Eine ähnliche Interpretation ist im allgemeinen für Nutzenfunktionen nicht möglich.

Wir wenden uns nun den verschiedenen Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion zu. Dabei werden wir die gleichen Kategorien betrachten, die auch schon Gegenstand des Beispiels 4.4 waren.

Zur Vereinfachung der Diskussion dieses Abschnitts treffen wir die folgenden Konventionen: Es sei im weiteren stets eine endliche Menge von Alternativen $\mathcal{A}\mathcal{L}$ und eine endliche Menge \mathcal{C} von Konsequenzen gegeben. Ist dann $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion eines Entscheidungsmodells, so sei $C_{\Phi, u}$ stets das entsprechende nach Lemma 5.1 definierte mehrwertige Kriterium. Um triviale Fälle zu vermeiden, gehen wir ferner davon aus, daß mit den Bezeichnungen des Lemmas 5.1 stets $u_{\min} \neq u_{\max}$ gilt.

5.2.1 Entscheidungen bei Sicherheit

Bei Entscheidungen bei Sicherheit wird in Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion die Relation von Alternativen zu Konsequenzen durch eine Abbildung

$$f : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C} \quad a \mapsto c_a$$

⁶Dieser Aspekt wird ausführlich in Abschnitt 5.3.1 betrachtet.

abgebildet (vgl. Beispiel 4.4 (i)). Dabei ist $c_a \in \mathcal{C}$ die Konsequenz, die bei der Wahl der Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ eintritt. Optimal sind solche Alternativen $a^* \in \mathcal{A}\mathcal{L}$, die den Wert der Abbildung $\hat{u} := u \circ f$ maximieren (vgl. [Laux '95, S. 25 f.]). Es gilt für diese Alternativen:

$$\hat{u}(a^*) = u(f(a^*)) = \max_{a \in \mathcal{A}\mathcal{L}} u(f(a)).$$

Es sei nun ein Entscheidungsproblem bei Sicherheit und ein entsprechendes Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion gegeben. Wir definieren $F : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C})$ durch $F[a] := \{f(a)\}$ und betrachten das relationale Entscheidungsmodell $\mathfrak{D} = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}, C_{\Phi, u}, F, \mathbf{I})$, wobei \mathbf{I} ein beliebiges Inklusionsmaß ist (vgl. Bsp. 4.4 (a)). Für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ gilt:

$$D_{\mathfrak{D}}(a) = \mathbf{I}(F[a], C_{\Phi, u}) = C_{\Phi, u}(f(a)) = \Phi(u(f(a))) = \Phi(\hat{u}(a))$$

Wegen der strengen Monotonie der Abbildung Φ erhalten wir für $a_1, a_2 \in \mathcal{A}\mathcal{L}$:

$$D_{\mathfrak{D}}(a_1) \geq D_{\mathfrak{D}}(a_2) \Leftrightarrow \hat{u}(a_1) \geq \hat{u}(a_2)$$

Also ist das relationale Entscheidungsmodell \mathfrak{D} im Sinne der Gleichung (5.3) isomorph zum Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion. Insbesondere ist eine Alternative $a^* \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ genau dann eine fuzzy-effiziente Lösung des relationalen Entscheidungsmodells \mathfrak{D} , wenn a^* eine optimale Lösung des entsprechenden Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion ist.

5.2.2 Entscheidungen bei Risiko

Wie in Beispiel 4.4 bereits dargestellt, liegt eine Entscheidung bei Risiko vor, wenn die Relation zwischen Alternativen und Konsequenzen durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß beschrieben werden kann. Zu diesem Zweck ordnet man bei Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion jeder Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ eine (diskrete) Zufallsvariable $X_a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ sowie eine Verteilungsfunktion $\zeta_a : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ derart zu, daß für alle $c \in \mathcal{C}$ der Wert von $\zeta_a(X_a = c) := p_a(c)$ die Wahrscheinlichkeit angibt, mit der die Konsequenz c bei Wahl der Alternative a eintritt. Ziel der Optimierung ist es dann, eine Alternative $a^* \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ derart zu bestimmen, daß der entsprechende Erwartungswert $E_{a^*}(u) := \sum_{c \in \mathcal{C}} p_{a^*}(c) \cdot u(c)$ maximiert wird. Im Sinne der Gleichung (5.2) wird also die Abbildung

$$\hat{u} : \mathcal{A}\mathcal{L} \mapsto \mathbb{R} \quad a \mapsto E_a(u)$$

maximiert (vgl. [Laux '95, S. 149])⁷.

Wir definieren die Abbildung $F : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C})$ durch $F[a](c) := p_a(c)$ für alle $c \in \mathcal{C}$ sowie $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ und betrachten das relationale Entscheidungsmodell $\mathfrak{D} = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}, C_{\Phi, u}, F, \mathbf{I}_P)$. Dabei verwenden wir das Algebraische Produkt zur Darstellung des Inklusionsmaßes \mathbf{I}_P . Für $O, Q \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$ ist stets

$$\mathbf{I}_P(O, Q) = \frac{\sum_{c \in \mathcal{C}} O(c) \cdot Q(c)}{\sum_{c \in \mathcal{C}} O(c)}$$

⁷Wir betrachten in dieser Arbeit nur diesen einfachen Fall der Modellbildung bei Entscheidung unter Risiko. Es sind andere Ansätze bekannt, die zum Beispiel zusätzlich zum Erwartungswert die Standardabweichung der betreffenden Verteilungen berücksichtigen (vgl. [Laux '95, 158 f.]). Auch diese Ansätze können prinzipiell durch die Berücksichtigung weiterer Kriterien bei der Modellbildung in einem relationalen Entscheidungsmodell abgebildet werden.

Für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_P(F[a], C_{\Phi, u}) &= \frac{\sum_{c \in \mathcal{C}} F[a](c) \cdot C_{\Phi, u}(c)}{\sum_{c \in \mathcal{C}} F[a](c)} \\
&= \frac{\sum_{c \in \mathcal{C}} p_a(\{c\}) \cdot \Phi(u(c))}{\sum_{c \in \mathcal{C}} p_a(\{c\})} \\
&= \sum_{c \in \mathcal{C}} p_a(\{c\}) \cdot \frac{u(c) - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}} \\
&= \frac{1}{u_{\max} - u_{\min}} \cdot \left(\sum_{c \in \mathcal{C}} p_a(\{c\}) \cdot u(c) - \sum_{c \in \mathcal{C}} p_a(\{c\}) \cdot u_{\min} \right) \\
&= \frac{E_a(u) - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}} \\
&= \Phi(E_a(u)) \\
&= \Phi(\hat{u}(a))
\end{aligned}$$

Da Φ streng monoton steigend ist, folgt auch in diesem Fall für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}\mathcal{L}$:

$$D_{\mathfrak{D}}(a_1) \geq D_{\mathfrak{D}}(a_2) \Leftrightarrow \hat{u}(a_1) \geq \hat{u}(a_2)$$

Somit ist das relationale Entscheidungsmodell \mathfrak{D} im Sinne der Gleichung (5.3) isomorph zum Modell mit Nutzenfunktion.

5.2.3 Entscheidungen bei Unsicherheit

In Beispiel 4.4 haben wir verschiedene Methoden zur Abbildung von Entscheidungsmodellen unter Unsicherheit beschrieben. Wir wollen an dieser Stelle nicht alle Ansätze diskutieren, sondern lediglich die Maximin-Regel von Wald näher betrachten. Für die übrigen Ansätze lassen sich leicht analoge Schlüsse ziehen.

Entscheidungen bei Unsicherheit liegen vor, wenn keine Entscheidungssituation unter Risiko oder Sicherheit besteht. Wie bereits in Beispiel 4.4 erläutert, sieht es der Ansatz von Wald vor, in diesem Fall die Qualität einer Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ durch die Qualität der ungünstigsten Konsequenz zu bewerten, die sich als Ergebnis der Wahl von a ergeben kann.

In einem Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion kann der Wald'sche Ansatz dargestellt werden, indem zunächst die Relation zwischen Alternativen und Konsequenzen durch eine Abbildung $f : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \wp(\mathcal{C})$ beschreiben wird. Diese weist jeder Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ die Menge der Konsequenzen $C_a \in \wp(\mathcal{C})$ zu, die bei Wahl von a realistisch sind. Ziel der Optimierung ist es dann, die Abbildung

$$\hat{u} : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \longmapsto \min_{c \in C_a} u(c)$$

zu maximieren (vgl. [Wald '50] bzw. [Laux '95, S. 116 f.]).

Für die Modellbildung in einem relationalen Entscheidungsmodell definieren wir die Abbildung $F : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C})$ durch $F[a] := C_a$ für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$. Es sei dann $\mathfrak{D} = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}, C_{\Phi, u}, F, \mathbf{I}_M^c)$ (vgl. Bsp. 4.4 (iii.b)). Wegen der Monotonie von Φ gilt für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{D}}(a) &= \mathbf{I}_M^c(F[a], C_{\Phi, u}) \\ &= \min_{c \in \text{supp}(F[a])} C_{\Phi, u}(c) \\ &= \min_{c \in f_a} \Phi(u(c)) \\ &= \Phi(\min_{c \in f_a} u(c)) = \Phi(\hat{u}(a)) \end{aligned}$$

Wir erhalten auch hier für alle $a_1, a_2 \in \mathcal{A}\mathcal{L}$:

$$D_{\mathfrak{D}}(a_1) \geq D_{\mathfrak{D}}(a_2) \Leftrightarrow \hat{u}(a_1) \geq \hat{u}(a_2)$$

Das relationale Modell \mathfrak{D} ist also zu dem entsprechenden Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion isomorph. Alle in Beispiel 4.4 beschriebenen klassischen Ansätze zur Entscheidung unter Unsicherheit lassen sich analog in ein entsprechendes relationales Modell abbilden.

5.3 Bemerkung *Wir fassen die Ergebnisse der obigen Überlegungen zusammen. Wir haben in den Abschnitten 5.2.1 bis 5.2.3 gezeigt, daß sich zu jedem der oben angesprochenen Entscheidungsmodelle mit Nutzenfunktion ein im Sinne der Gleichung (5.3) isomorphes relationales Entscheidungsmodell angeben läßt, sofern die Mengen der Alternativen und Konsequenzen endlich sind. Demzufolge lassen sich zumindest die Entscheidungsprobleme in relationalen Modellen abbilden, die auch in den entsprechenden Modellen mit Nutzenfunktion abgebildet werden können. Gegenüber den klassischen Modellen besitzt der relationale Ansatz den Vorteil, daß er innerhalb eines einheitlichen theoretischen Rahmens formuliert wird. Dies erlaubt einerseits eine weitergehende Interpretation der bereits vorhandenen Modellansätze (vgl. Beispiel 4.4), erschließt aber andererseits auch neue Möglichkeiten für die mathematische Modellbildung. Hier ist die mögliche Verwendung von weiteren Inklusionsmaßen ebenso zu nennen wie die Abbildung von Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielen, bei denen heterogene Klassen von Information zur Verfügung stehen. Zudem sind die Konzepte des Abschnitts 4.3 ausschließlich auf relationale Entscheidungsmodelle anwendbar.*

5.3 Entscheidungen mit mehreren Kriterien

In diesem Abschnitt werden multikriterielle Entscheidungsprobleme betrachtet. Dabei unterscheiden wir zwischen zwei Klassen von Problemstellungen, den Entscheidungen mit Restriktionen und den Entscheidungen mit mehreren Zielfunktionen. Diese Differenzierung ist unter dem Gesichtspunkt der relationalen Entscheidungstheorie nicht notwendig, vereinfacht jedoch die Diskussion. Im weiteren sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine endliche Menge von Alternativen. Ferner seien alle vorkommenden Mengen von Konsequenzen ebenfalls endlich.

5.3.1 Entscheidungsprobleme mit Restriktionen

Es sei ein Entscheidungsproblem mit $\nu \geq 1$ Restriktionen und einem Ziel gegeben. Wir skizzieren zunächst das prinzipielle Vorgehen bei der Darstellung von Restriktionen in relationalen Modellen.

Jede Restriktion wird durch eine Menge von Konsequenzen \mathcal{C}_i sowie eine Konsequenzenfunktion $F_i : \mathcal{A}\mathcal{L} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{C}_i)$ dargestellt. Wir definieren für $i = 1, \dots, \nu$ eine Relation $C_i \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_i)$, welche die Zulässigkeit der jeweiligen Konsequenz beschreibt. Ist eine Konsequenz $c \in \mathcal{C}_i$ zulässig, so soll $C_i(c) = 1$ gelten. Ist eine Konsequenz $c \in \mathcal{C}_i$ nicht zulässig, so soll $C_i(c) = 0$ gelten. Im Gegensatz zu klassischen Ansätzen ist hier auch ein gradueller Übergang von „zulässig“ zu „nicht zulässig“ möglich. Die Relationen C_i sind offenbar mehrwertige Kriterien im Sinne der Definition 4.1. Für jede Restriktion definieren wir nun ein relationales Entscheidungsmodell $\mathfrak{D}_i = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}_i, C_i, F_i, I_i)$. Dabei sind F_i und I_i für alle $i \in \{1, \dots, \nu\}$ von der Klasse der Information abhängig, die über die Relation von Alternative zu Konsequenzen bekannt ist. Hier können die gleichen Ansätze verwendet werden, die auch bei der Darstellung von Zielen ihre Anwendung finden (vgl. Abschnitt 5.2). Das relationale Entscheidungsmodell, das alle Kriterien abbildet wird dann durch das Modell

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{D}_0 \otimes_t \mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu$$

gegeben. Dabei beschreibt $\mathfrak{D}_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ das Ziel des Entscheidungsproblems. Das Kartesische Produkt \otimes_t sei bezüglich einer nullteilerfreien t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definiert.

Um den relationalen Ansatz mit dem Ansatz zur Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktion zu vergleichen, betrachten wir den Spezialfall eines Entscheidungsproblems bei Sicherheit. Wir beschreiben zunächst ein entsprechendes Modell mit Nutzenfunktion.

Das Ziel wird dazu wie in den vorausgegangenen Abschnitten mittels einer Nutzenfunktion $u : \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie einer Abbildung $f_0 : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}_0$ beschrieben. Zur Definition der Restriktionen betrachtet man für $i = 1, \dots, \nu$ eine Menge von Konsequenzen \mathcal{C}_i , eine Teilmenge $\mathcal{C}'_i \subseteq \wp(\mathcal{C}_i)$, welche die zulässigen Konsequenzen bezüglich der i -ten Restriktion umfaßt, sowie eine Abbildung $f_i : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}_i$, die jeder Alternative ihre Konsequenzen zuordnet. Eine Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ wird für $i \in \{1, \dots, \nu\}$ als zulässig bezüglich der i -ten Restriktion bezeichnet, wenn $f_i(a) \in \mathcal{C}'_i$ gilt.

Es sei nun

$$A' := \{a \in \mathcal{A}\mathcal{L}; f_i(a) \in \mathcal{C}'_i \text{ für alle } i = 1, \dots, \nu\}$$

Die Menge A' umfaßt alle Alternativen, die bezüglich jeder Restriktion gültig sind. Sie wird als *die Menge der zulässigen Alternativen* bezeichnet. Wir nehmen an, daß $A' \neq \emptyset$ ist. Als optimale Lösung des Entscheidungsproblems betrachtet man diejenigen Alternativen $a^* \in \mathcal{A}\mathcal{L}$, für die gilt:

$$u(f_0(a^*)) = \max_{a \in A'} u(f_0(a)) = \max_{a \in A'} \hat{u}(a)$$

Dabei ist $\hat{u} := u \circ f_0$ (vgl. Abschnitt 5.2.1).

Wir wenden uns der Modellbildung im relationalen Ansatz zu. Es sei dazu zunächst $\mathfrak{D}_0 = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}_0, C_{\Phi, u}, F, \mathbf{I})$ das isomorphe relationale Modell des Entscheidungsproblems *ohne* Berücksichtigung der Restriktionen (vgl. Abschnitt 5.2.1). Zur Modellierung der Restriktionen sei $F_i[a] := \{f_i(a)\}$ für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ sowie $\mathcal{C}'_i := \mathcal{C}'_i$ für alle $i = 1, \dots, \nu$. Dabei identifizieren wir die betreffenden Mengen mit ihrer Zugehörigkeitsfunktion (vgl. S. 52). Die

relationalen Modelle $\mathfrak{D}_i := (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}_i, C_i, F_i, \mathbf{I}_i)$ sind unter diesen Voraussetzungen von der Wahl der Inklusionsmaße \mathbf{I}_i unabhängig (vgl. Bsp. 4.4).

Wir erhalten das relationale Entscheidungsmodell

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \otimes_t \mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu$$

Dabei sei $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ eine beliebige, nullteilerfreie t -Norm. In diesem Entscheidungsmodell sind alle Kriterien des Entscheidungsproblems abgebildet. Nach dem Homomorphiesatz 4.10 gilt für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu}(a) &= (D_{\mathfrak{D}_1} \cap \dots \cap D_{\mathfrak{D}_\nu})(a) \\ &= \begin{cases} 1 & f_i(a) \in C'_i \text{ für alle } i = 1, \dots, \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist also $D_{\mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu} = A'$. Für die mehrwertige Entscheidung $D_{\mathfrak{D}}$ des Entscheidungsmodells \mathfrak{D} gilt:

$$D_{\mathfrak{D}}(a) = \begin{cases} C_{\Phi, u}(a) & a \in A' \\ 0 & a \notin A' \end{cases} = \begin{cases} \Phi(u(f_0((a)))) & a \in A' \\ 0 & a \notin A' \end{cases}$$

Für alle $a_1, a_2 \in A'$ gilt wegen der Monotonie von Φ :

$$D_{\mathfrak{D}}(a_1) \geq D_{\mathfrak{D}}(a_2) \Leftrightarrow \hat{u}(a_1) \geq \hat{u}(a_2)$$

Da nach Voraussetzung $A' \neq \emptyset$ ist, ist $a^* \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ genau dann eine fuzzy-effiziente Lösung des Modells \mathfrak{D} , wenn a^* auch eine optimale Lösung des Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion ist. Man kann daher auch in diesem Fall von einer Isomorphie des relationalen Modells und des Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion sprechen, die inhaltlich der Isomorphie nach Gleichung (5.3) entspricht.

5.4 Bemerkung

- (i) *In einem relationalen Entscheidungsmodell sind Restriktionen abbildbar, die risiko- oder unsicherheitsbehaftet sind. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf die Ausführungen des Abschnittes 4.1. Da im relationalen Modell methodisch nicht zwischen Zielen und Restriktionen unterschieden wird, sind die dort angestellten Überlegungen universell auf alle Klassen von Kriterien anwendbar. Bei der Modellbildung ist es daher nicht notwendig, daß alle Kriterien mit dem gleichen Inklusionsmaß beschrieben werden. So sind auch Probleme darstellbar, bei denen verschiedene Kategorien von Ungenauigkeit vorliegen.*
- (ii) *Im relationalen Entscheidungsmodell können auch Restriktionen mit graduellen Übergängen dargestellt werden. Wir wollen an dieser Stelle auf eine Diskussion dieser Möglichkeit verzichten und auf [Bellman '70], [Lai '92] und [Rommelfanger '94] verweisen, wo sich ausführliche Darstellungen dieser Thematik finden. Dort werden auch Anwendungsbeispiele für mehrwertige Restriktionen angegeben.*

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse des Abschnittes 5 zusammen.

5.5 Bemerkung *Jedes Entscheidungsproblem mit einem Zielkriterium, das durch ein Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion abgebildet werden kann, ist auch innerhalb der relationalen Entscheidungstheorie formulierbar. Dies kann so geschehen, daß die relationalen Modell isomorph zu den Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktionen sind. Gegenüber der Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktionen verfügt die relationale Entscheidungstheorie jedoch über erheblich mehr Möglichkeiten zur Modellbildung sowie über ein einheitliche konzeptionelle Grundlagen. Im einzelnen ergeben sich hieraus aus unserer Sicht die folgenden Vorteile:*

- *Die Theorie der Inklusionsmaße und ihre Anwendung für die Darstellung von Ungenauigkeit und Information, die wir in Abschnitt 3.4 beschrieben haben, erlauben es, neuartige Beschreibungen von unvollständiger Information bei der Darstellung von Entscheidungsmodellen zu verwenden und bekannte Methoden vor einem neuen Hintergrund zu interpretieren (vgl. Beispiel 4.4). So lassen insbesondere das Konzept des dualen Inklusionsmaßes (vgl. Definition 3.27) sowie die möglichen Verknüpfungen verschiedener Inklusionsmaße (vgl. Satz 3.22) eine für die Anwendung spezifische Modellierung der Informationsklasse zu. Hier gilt es, in weiteren Untersuchungen ein tieferes Verständnis für diese Methoden zu entwickeln.*
- *In einem relationalen Entscheidungsmodell lassen sich auch Entscheidungsprobleme abbilden, deren Kriterien durch verschiedene Arten von Information charakterisiert werden. So können beispielsweise Restriktionen durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen modelliert werden, während zur Darstellung des Ziels ein Ansatz gewählt wird, der mit dem Wald'schen Kriterium vergleichbar ist (vgl. Abschnitt 5.2.3).*
- *Im relationalen Entscheidungsmodell sind auch unscharfe Restriktionen abbildbar. Auf diese Weise kann eine genauere Beschreibung des Entscheidungsproblems ermöglicht werden (vgl. [Bellman '70, Lai '92, Rommelfanger '94]).*

5.3.2 Entscheiden mit mehreren Zielen

In den vorausgegangenen Abschnitten haben wir weitreichende Parallelen zwischen der relationalen Entscheidungstheorie und den Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion festgestellt. Unsere Betrachtungen haben sich dabei auf Entscheidungsmodelle mit einem Ziel beschränkt. Demgegenüber werden die Überlegungen des folgenden Abschnittes zeigen, daß sich im Falle der Modellierung von Entscheidungsmodellen mit mehreren Zielkriterien im allgemeinen wesentliche Unterschiede zwischen relationalen Modellen und Modellen mit Nutzenfunktion ergeben. Dazu werden wir zunächst das Grundproblem der Entscheidungsprobleme mit mehreren Zielen skizzieren und notwendige Begriffe einführen. Im Anschluß werden wichtige Eigenschaften relationaler Modelle mit mehreren Zielen gezeigt. Wir werden insbesondere nachweisen, daß fuzzy-effiziente Lösungen eines relationalen Entscheidungsmodells unter gewissen Voraussetzungen stets als optimale Lösungen des zugrunde liegenden Entscheidungsproblems verstanden werden können. Anhand von Beispielen werde dann die Unterschiede zur klassischen Theorie mit Nutzenfunktion verdeutlicht. Abschließend wird in Abschnitt 5.4 ein ausführliches Anwendungsbeispiel angegeben.

Wir werden die folgenden Betrachtungen bewußt auf die Diskussion grundlegender Eigenschaften von Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielen bei Sicherheit sowie auf Angabe eines einfachen Beispiels beschränken. Diese Einschränkung läßt sich mit Hilfe des Homomorphiesatzes 4.10 begründen. Dort wurde gezeigt, daß sich die mehrwertige Entscheidung eines multikriteriellen Entscheidungsproblems durch den Durchschnitt der mehrwertigen Entscheidungen bestimmen läßt, die die einzelnen Kriterien charakterisieren. Dabei hängen zwar die einzelnen mehrwertigen Entscheidungen von der Methode der Repräsentation der Information ab, der verwendete Durchschnitt ist davon jedoch unabhängig. Daher erscheint es nicht notwendig, im folgenden Entscheidungsmodelle bei Unsicherheit oder Risiko gesondert zu betrachten. Wir haben zudem bereits in Abschnitt 4.4 darauf hingewiesen, daß jedem relationalen Entscheidungsmodell ein symmetrisches Entscheidungsmodell zugeordnet werden kann. Auch dieses ist unabhängig von der Klasse der zur Verfügung stehenden Information möglich. Symmetrische Entscheidungsmodelle sowie ihre Unterschiede und Parallelen zur klassischen Entscheidungstheorie sind jedoch seit längerem Gegenstand von Untersuchungen und die Diskussion erscheint hier weitestgehend abgeschlossen. Eine detaillierte Beschreibung findet sich unter anderem in dem bereits genannten Buch von L. Gutsche und H.-J. Zimmermann [Zimmermann '91].

Wir präzisieren zunächst die Problemstellung und führen wesentliche Begriffe ein. Es sei Entscheidungsproblem über einer Menge von Alternativen \mathcal{A} gegeben. Wir nehmen an, daß das Entscheidungsproblem $\nu > 1$ Ziele besitzt. Jedes Ziel werde durch eine Menge von Konsequenzen \mathcal{C}_i sowie eine vollständige Ordnung \preceq_i beschrieben. Dabei soll für $i = 1, \dots, \nu$ eine Konsequenz $c_1^{(i)} \in \mathcal{C}_i$ genau dann bezüglich des i -ten Ziels einer Konsequenz $c_2^{(i)} \in \mathcal{C}_i$ vorzuziehen sein, wenn $c_2^{(i)} \preceq_i c_1^{(i)}$ und $c_1^{(i)} \not\preceq_i c_2^{(i)}$ gilt. Da wir ausschließlich Entscheidungen bei Sicherheit betrachten, gehen wir ferner davon aus, daß die Relation zwischen der Wahl einer Alternative und ihren Konsequenzen bezüglich des i -ten Ziels durch eine Abbildung

$$f^{(i)} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}_i \quad a \longmapsto c_a^{(i)}$$

für $i = 1, \dots, \nu$ beschrieben wird. Jedes der ν Ziele kann also wie ein Ziel eines Entscheidungsproblems mit einem Zielkriterium modelliert werden. Wir gehen schließlich davon aus, daß eine Nutzenunabhängigkeit zwischen den Zielen besteht, d. h., daß die Qualität bezüglich eines Ziels $\kappa \in \{1, \dots, \nu\}$ ausschließlich von den Konsequenzen aus \mathcal{C}_κ nicht aber von Konsequenzen aus \mathcal{C}_λ für $\lambda \in \{1, \dots, \nu\} \setminus \{\kappa\}$ abhängt.

Unter den obigen Voraussetzungen heißt eine Alternative $a \in \mathcal{A}$ *effizient* (oder eine *effiziente Lösung*), wenn keine Alternative $a' \in \mathcal{A}$ derart existiert, daß gilt:

- (i) $\forall i \in \{1, \dots, \nu\} : f_i(a) \preceq_i f_i(a')$
- (ii) $\exists i \in \{1, \dots, \nu\} : f_i(a) \preceq_i f_i(a') \wedge f_i(a') \not\preceq_i f_i(a)$.

Ist eine Alternative effizient, so existiert keine Alternative, die in allen Kriterien besser ist. Offenbar sollte die Lösung des zugrunde liegenden Entscheidungsproblems eine effiziente Lösung sein. Existieren Alternativen a' und a derart, daß (i) und (ii) gelten, daß a also *keine* effiziente Lösung ist, so sagt man auch, daß a' die Alternative a *dominiert*.

Wir zeigen nun, daß jede fuzzy-effiziente Lösung eines geeigneten relationalen Modells unter gewissen Voraussetzungen eine effiziente Lösung des Entscheidungsproblems ist.

5.6 Satz *Es sei $\mathcal{A}\mathcal{L}$ eine endliche Menge von Alternativen. Es sei ferner ein Entscheidungsproblem mit $\nu > 1$ Zielen gegeben. Diese sollen für $i = 1, \dots, \nu$ durch Mengen von Konsequenzen \mathcal{C}_i , durch Abbildungen $f_i : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}_i$ sowie durch vollständige Ordnungsrelationen \preceq_i beschrieben werden. Für $i = 1, \dots, \nu$ sei $\mathfrak{D}_i \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ ein relationales Entscheidungsmodell, das das i -te Ziel beschreibt. Für eine nullteilerfreie t -Norm $t : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ sei ferner:*

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu$$

Dann gilt:

- (i) *Es existiert eine fuzzy-effiziente Lösung des Entscheidungsmodells \mathfrak{D} , die auch eine effiziente Lösung des ursprünglichen Entscheidungsproblems ist.*
- (ii) *Ist $t|_{[0,1]^2}$ streng monoton steigend in beiden Komponenten und $D_{\mathfrak{D}} \neq \emptyset$, so ist jede fuzzy-effiziente Lösung von \mathfrak{D} eine effiziente Lösung des Entscheidungsproblems.*

Beweis: zu (i): Es sei ein Entscheidungsproblem mit mehreren Zielen gegeben, das in der obigen Form beschrieben sei. Ferner sei $\mathfrak{D}_i = (\mathcal{A}\mathcal{L}, \mathcal{C}_i, C_i, F_i, \mathbf{I}_i) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}\mathcal{L})$ für $i = 1, \dots, \nu$ ein Entscheidungsmodell des i -ten Ziels. Dabei sei für $i = 1, \dots, \nu$

$$F_i : \mathcal{A}\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C}_i) \quad a \mapsto \{f_i(a)\}$$

Das Inklusionsmaß $\mathbf{I}_i : \mathcal{F}(\mathcal{C}_i)^2 \rightarrow [0, 1]$ ist beliebig für $i = 1, \dots, \nu$. Wir betrachten die mehrwertige Entscheidung von \mathfrak{D}_i . Es ist für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$ und $i = 1, \dots, \nu$:

$$D_{\mathfrak{D}_i}(a) = \mathbf{I}_i(F_i[a], C_i) = C_i(f_i(a))$$

Für die mehrwertige Entscheidung des Modells $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \otimes_t \dots \otimes_t \mathfrak{D}_\nu$ gilt für alle $a \in \mathcal{A}\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{D}}(a) &= t(D_{\mathfrak{D}_1}(a), t(D_{\mathfrak{D}_2}(a), \dots, t(D_{\mathfrak{D}_{\nu-1}}(a), D_{\mathfrak{D}_\nu}(a)))) \\ &= t(C_1(f_1(a)), t(C_2(f_2(a)), \dots, t(C_{\nu-1}(f_{\nu-1}(a)), C_\nu(f_\nu(a)))))) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Menge $E_F \subseteq \mathcal{A}\mathcal{L}$ der fuzzy-effizienten Lösungen von \mathfrak{D} , d. h.

$$E_F = \left\{ a \in \mathcal{A}\mathcal{L}; D_{\mathfrak{D}}(a) = \sup_{a' \in \mathcal{A}\mathcal{L}} D_{\mathfrak{D}}(a') \right\}$$

Da $\mathcal{A}\mathcal{L}$ endlich ist, ist $E_F \neq \emptyset$. Wir betrachten ferner die Menge $E' \subseteq E_F$, der effizienten Lösungen des Entscheidungsproblems, das entsteht, wenn man die Menge der Alternativen des ursprünglichen Entscheidungsproblems auf E_F einschränkt. Da E_F endlich ist, ist auch $E' \neq \emptyset$. Wir weisen nach, daß jedes Element $a \in E'$ eine effiziente Lösung des ursprünglichen Entscheidungsproblems ist. Wegen $E' \subseteq E_F$ ist dann die Behauptung (i) gezeigt.

Zunächst ist nach Konstruktion klar, das es kein $a \in E_F \setminus E'$ geben kann, das ein Element $a' \in E'$ dominiert, da sonst a' nicht effizient sein würde, also $a' \notin E'$ gilt.

Wir weisen nach, daß es auch keine Alternative $a \in \mathcal{A}\mathcal{L} \setminus E_F$ und kein $a' \in E'$ gibt, so daß a die Alternative $a' \in E'$ dominiert. Es folgt dann die Behauptung. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß es ein $a \in \mathcal{A}\mathcal{L} \setminus E_F$ und ein $a' \in E'$ derart gibt, daß a die Alternative a' dominiert, d. h. es ist

$$(a) \quad \forall i \in \{1, \dots, \nu\} : f_i(a') \preceq_i f_i(a)$$

(b) $\exists i \in \{1, \dots, \nu\} : f_i(a') \preceq_i f_i(a) \wedge f_i(a') \not\prec_i f_i(a)$.

Wir weisen nach, daß aus dieser Annahme ein Widerspruch folgt.

Für jedes mehrwertige Kriterium $C_i \in \mathcal{F}(\mathcal{C}_i)$ mit $i = 1, \dots, \nu$ gilt wegen der Bedingung (C1) für alle $c_1^{(i)}, c_2^{(i)} \in \mathcal{C}_i$:

$$C_i(c_1^{(i)}) \leq C_i(c_2^{(i)}) \Leftrightarrow c_1^{(i)} \preceq_i c_2^{(i)}$$

Es gilt also insbesondere für alle $a, a' \in \mathcal{AL}$ und für alle $i = 1, \dots, \nu$:

$$C_i(f_i(a')) \leq C_i(f_i(a)) \Leftrightarrow f_i(a') \preceq_i f_i(a)$$

Da jede t -Norm monoton steigend in beiden Komponenten ist, erhalten wir daher aus (a):

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{D}}(a) &= t(C_1(f_1(a)), t(C_2(f_2(a)), \dots, t(C_{\nu-1}(f_{\nu-1}(a)), C_{\nu}(f_{\nu}(a)))))) \\ &\geq t(C_1(f_1(a')), t(C_2(f_2(a')), \dots, t(C_{\nu-1}(f_{\nu-1}(a')), C_{\nu}(f_{\nu}(a'))))) \\ &= D_{\mathfrak{D}}(a') \end{aligned}$$

Da $a' \in E' \subseteq E_F$ ist, erhalten wir somit:

$$D_{\mathfrak{D}}(a) \geq D_{\mathfrak{D}}(a') = \sup_{a'' \in \mathcal{AL}} D_{\mathfrak{D}}(a'')$$

Also ist $D_{\mathfrak{D}}(a) = \sup_{a'' \in \mathcal{AL}} D_{\mathfrak{D}}(a'')$ und es folgt $a \in E_F$ im Widerspruch zur Annahme.

zu (ii): Es sei $E_F \subseteq \mathcal{AL}$ wie oben die Menge aller fuzzy-effizienten Lösungen. Wir weisen nach, daß keine Alternativen $a \in \mathcal{AL} \setminus E_F$ und $a' \in E_F$ derart existieren, daß a die Alternative a' dominiert. Dann ist jede Alternative $a' \in E_F$ nach Definition eine effiziente Lösung. Auch hier zeigen wir die Behauptung durch die Konstruktion eines Widerspruchs.

Wir nehmen an, daß Alternativen $a \in \mathcal{AL} \setminus E_F$ und $a' \in E_F$ derart existieren, daß a die Alternative a' dominiert. Da nach Voraussetzung $D_{\mathfrak{D}} \neq \emptyset$ gilt, ist dann für alle $i = 1, \dots, \nu$:

$$0 < C_i(f_i(a')) \leq C_i(f_i(a))$$

Zudem existiert ein $i \in \{1, \dots, \nu\}$ derart, daß gilt:

$$C_i(f_i(a')) < C_i(f_i(a))$$

Da nach Voraussetzung $t|_{[0,1]^2}$ streng monoton steigend ist, gilt:

$$\begin{aligned} D_{\mathfrak{D}}(a') &= t(C_1(f_1(a')), t(C_2(f_2(a')), \dots, t(C_{\nu-1}(f_{\nu-1}(a')), C_{\nu}(f_{\nu}(a'))))) \\ &< t(C_1(f_1(a)), t(C_2(f_2(a)), \dots, t(C_{\nu-1}(f_{\nu-1}(a)), C_{\nu}(f_{\nu}(a))))) = D_{\mathfrak{D}}(a) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt wegen $D_{\mathfrak{D}}(a') < D_{\mathfrak{D}}(a)$, daß $\sup_{a'' \in \mathcal{AL}} D_{\mathfrak{D}}(a'') > D_{\mathfrak{D}}(a')$ gilt. Also ist $a' \notin E_F$ im Widerspruch zur Annahme. ■

5.7 Bemerkung

(i) Es ist $t_{\min}|_{[0,1]^2}$ nicht streng monoton steigend. $t_A|_{[0,1]^2}$ ist streng monoton steigend in beiden Komponenten.

(ii) Ist die fuzzy-effiziente Lösung des Modells \mathfrak{D} eindeutig, so ist sie stets eine effiziente Lösung des Entscheidungsproblems.

Wir wenden uns nun der Modellierung von Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielen im Rahmen der Theorie der Entscheidungsmodelle mit Nutzenfunktion zu. Im Anschluß skizzieren wir Unterschiede und Parallelen zur relationalen Entscheidungstheorie.

Erneut sei ein Entscheidungsproblem über einer endlichen Menge \mathcal{AL} von Alternativen mit $\nu > 1$ Zielen gegeben. Jedes Ziel werde wie oben durch eine Menge \mathcal{C}_i von Konsequenzen, durch eine Abbildung $f_i : \mathcal{AL} \rightarrow \mathcal{C}_i$ $a \mapsto c_a^{(i)}$ sowie durch eine vollständige Ordnung \preceq_i beschrieben. Wie oben seien die Ziele nutzenunabhängig. Wir gehen schließlich davon aus, daß Nutzenfunktionen $u_i : \mathcal{C}_i \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben seien, die für $i = 1, \dots, \nu$ die jeweiligen Ziele gemäß Gleichung (5.1) beschreiben.

Ein häufig verwendeter Ansatz ist in diesem Fall, eine Abbildung

$$\hat{u} : \mathcal{AL} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \mapsto \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i \cdot u_i(f_i(a)) \quad (5.4)$$

mit $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $\gamma_i > 0$ für $i = 1, \dots, \nu$ zu definieren (vgl. [Laux '95, S. 86 f.]). Zudem wird häufig $\sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i = 1$ angenommen. Es sind diejenigen Alternativen $a^* \in \mathcal{AL}$ optimal, für die gilt:

$$\hat{u}(a^*) = \sup_{a \in \mathcal{AL}} \hat{u}(a)$$

Mit dieser Art der Modellierung ist das Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion im allgemeinen nicht zu einem entsprechenden relationalen Entscheidungsmodell isomorph. Die Mengen der optimalen Lösungen und der fuzzy-effizienten Lösungen sind im allgemeinen verschieden. Wir geben zur Verdeutlichung ein einfaches Beispiel an.

5.8 Beispiel *Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge von Alternativen. Wir betrachten ein Entscheidungsproblem mit zwei Zielen. Diese seien bezüglich der Mengen von Konsequenzen $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = [c, d] \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Wir nehmen an, daß die Relation zwischen Alternativen und Konsequenzen durch die linearen Abbildungen*

$$f_1 : [a, b] \rightarrow [c, d] \quad x \mapsto \frac{(d-c)(x-a)}{b-a} + c$$

$$f_2 : [a, b] \rightarrow [c, d] \quad x \mapsto \frac{(d-c)(b-x)}{b-a} + c$$

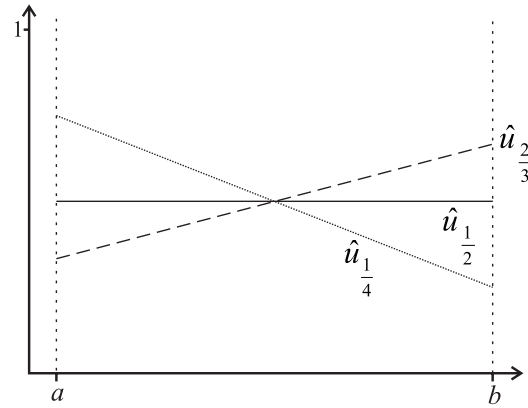
beschrieben werden. Es ist dann $f_1(a) = f_2(b) = c$ und $f_1(b) = f_2(a) = d$. Ferner seien mehrwertige Kriterien $C_i \in \mathcal{F}([c, d])$ sowie Nutzenfunktionen $u_i : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ derart gegeben, daß für $x \in [c, d]$ und $i = 1, 2$ gilt:

$$C_i(x) = u_i(x) = \frac{x-c}{d-c}$$

Wir definieren die relationalen Entscheidungsmodelle $\mathfrak{D}_i := ([a, b], [c, d], C_i, f_i, \mathbf{I}_i)$ für $i = 1, 2$ mit beliebigen Inklusionsmaßen $\mathbf{I}_i : \mathcal{F}([c, d])^2 \rightarrow [0, 1]$. Es ist dann

$$D_{\mathfrak{D}_1}(x) = C_1(f_1(x)) = u_1(f_1(x)) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$D_{\mathfrak{D}_2}(x) = C_2(f_2(x)) = u_2(f_2(x)) = \frac{b-x}{b-a}$$

Abbildung 5.1: Graph von \hat{u}_γ für $\gamma = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

Da für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 \neq x_2$ stets

$$C_1(f_1(x_1)) = u_1(f_1(x_1)) > C_1(f_1(x_2)) = u_1(f_1(x_2))$$

$$\vee C_2(f_2(x_1)) = u_2(f_2(x_1)) > C_2(f_2(x_2)) = u_2(f_2(x_2))$$

gilt, ist jede Alternative $x \in [a, b]$ eine effiziente Lösung des Entscheidungsproblems. Wir wollen im folgenden untersuchen, welche fuzzy-effizienten bzw. optimalen Lösungen durch ein relationales Modell und durch verschiedene Modelle mit Nutzenfunktion beschrieben werden.

Wir betrachten zunächst das relationale Entscheidungsmodell $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 \otimes_{t_A} \mathfrak{D}_2$. Dabei ist $t_A : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ das Algebraische Produkt. Gemäß Beispiel 4.12 gilt dann für alle $x \in [a, b]$:

$$D_{\mathfrak{D}}(x) = \frac{(x-a)(b-x)}{(b-a)^2}$$

Die eindeutige fuzzy-effiziente Lösung des Entscheidungsmodells \mathfrak{D} lautet $x^* = \frac{1}{2}(b+a)$. In Abbildung 4.2 (S. 117) sind die Graphen der mehrwertigen Entscheidungen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ und \mathfrak{D} aufgetragen.

Wir wenden uns dem Ansatz mit Nutzenfunktion zu. Zu diesem Zweck sei für $\gamma \in]0, 1[$ definiert:

$$\hat{u}_\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad x \rightarrow \gamma \cdot u_1(f_1(x)) + (1 - \gamma) \cdot u_2(f_2(x))$$

Dies ist stets eine Nutzenfunktion im Sinne der Gleichung (5.4). Über den Parameter γ können die Ziele unterschiedlich gewichtet werden. Wir wollen untersuchen, welche optimalen Lösungen durch die Abbildung \hat{u}_γ in Abhängigkeit von γ beschrieben werden.

Es ist für alle $\gamma \in]0, 1[$:

$$\hat{u}_\gamma(x) = \frac{2\gamma - 1}{b - a} x + \frac{(1 - \gamma)b - \gamma a}{(b - a)}$$

Die Abbildung \hat{u}_γ ist also stets linear. Für $\gamma < \frac{1}{2}$ ist die Steigung negativ, für $\gamma > \frac{1}{2}$ positiv. Für $\gamma = \frac{1}{2}$ ist sie Null. Wir erhalten daher in Abhängigkeit von γ die folgenden Mengen $X^* \subseteq [a, b]$ als Menge der optimalen Lösungen des Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion:

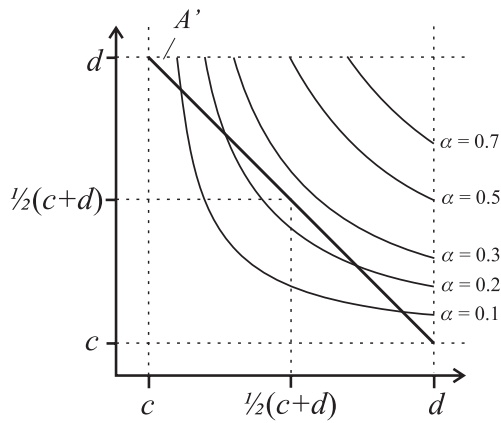


Abbildung 5.2: Indifferenzkurven von \mathfrak{D}

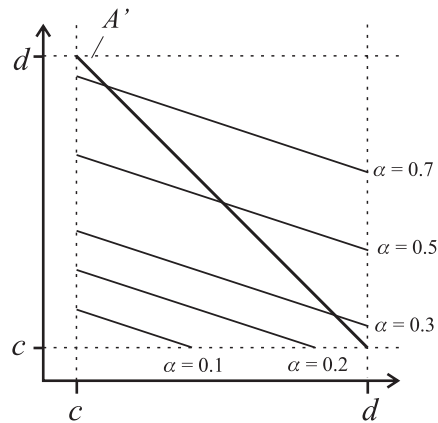


Abbildung 5.3: Indifferenzkurven $\gamma = \frac{1}{4}$

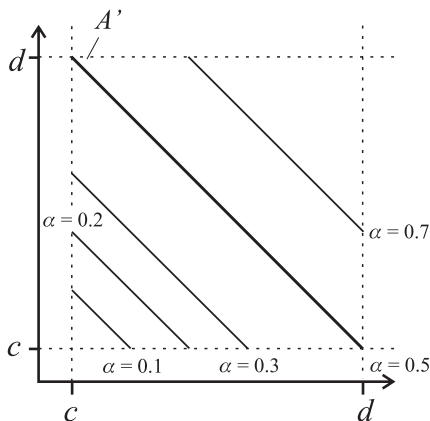


Abbildung 5.4: Indifferenzkurven $\gamma = \frac{1}{2}$

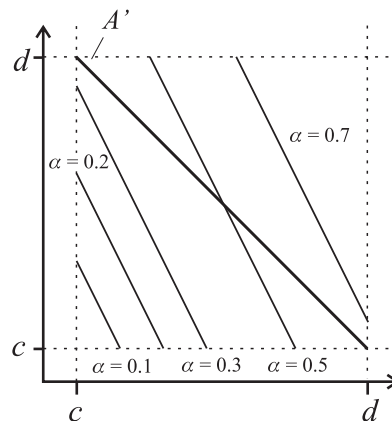


Abbildung 5.5: Indifferenzkurven $\gamma = \frac{2}{3}$

Parameter	Lösungen
$0 < \gamma < \frac{1}{2}$	$X^* = \{a\}$
$\gamma = \frac{1}{2}$	$X^* = [a, b]$
$\frac{1}{2} < \gamma < 1$	$X^* = \{b\}$

Insbesondere existiert kein Parameter $\gamma \in]0, 1[$ derart, daß die Menge der fuzzy-effizienten Lösungen von \mathfrak{D} mit der Menge X^* der optimalen Lösung des Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion übereinstimmt. Zur Veranschaulichung der Überlegung ist in Abbildung 5.1 die Funktion \hat{u}_γ für $\gamma = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ aufgetragen. Man kann die Gültigkeit der obigen Tabelle für die eingezeichneten Funktionen leicht ablesen.

Um die Unterschiede zwischen dem relationalen Ansatz und den Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion weiter zu verdeutlichen, wollen wir die Indifferenzkurven der verschiedenen Modelle miteinander vergleichen. Zu diesem Zweck stellen wir für den Falle des relationalen Modells diejenigen Tupel $(c_1, c_2) \in [c, d]^2$ dar, für die gilt:

$$t_A(C_1(c_1), C_2(c_2)) = \alpha$$

Dabei ist $\alpha \in [0, 1]$ (vgl. Abschnitt 4.6). Im Falle der Entscheidungsmodelle mit Nutzenfunktion kennzeichnen wir diejenigen Tupel $(c_1, c_2) \in [c, d]^2$, für die

$$\gamma \cdot u_1(c_1) + (1 - \gamma) \cdot u_2(c_2) = \alpha$$

mit $\alpha \in [0, 1]$ ist. Für $\gamma \in]0, 1[$ sind dies diejenigen Konsequenzen, bezüglich derer der Gesamtnutzen indifferent ist. Wir betrachten hier wie oben die Fälle $\gamma = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$.

In Abbildung 5.2 sind die Indifferenzkurven des relationalen Entscheidungsmodells \mathfrak{D} aufgetragen. Um eine größere Übersichtlichkeit zu gewährleisten, haben wir lediglich die Indifferenzkurven für $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ und 0.7 in die Abbildung eingetragen. Zudem ist die Menge

$$A' := \bigcup_{x \in [a, b]} \{(f_1(x), f_2(x))\}$$

in die Abbildung eingezeichnet. Sie umfaßt alle Paare von Konsequenzen, die aus der Wahl einer Alternative $x \in [a, b]$ entstehen können.

Man erkennt, daß das optimale Paar von Konsequenzen aus A' das Paar $(\frac{1}{2}(c+d), \frac{1}{2}(c+d))$ ist. Es gilt

$$f_1(\frac{1}{2}(a+b)) = f_2(\frac{1}{2}(a+b)) = \frac{1}{2}(c+d)$$

Folglich bestätigt sich, daß $x^* = \frac{1}{2}(a+b)$ die fuzzy-effiziente Lösung von \mathfrak{D} ist.

In den Abbildungen 5.3, 5.4 und 5.5 sind die Indifferenzkurven der Entscheidungsmodelle mit Nutzenfunktion für die Parameter $\gamma = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ dargestellt. Auch hier haben wir lediglich die Indifferenzkurven für $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ und 0.7 in die Abbildungen eingetragen.

Es läßt sich erkennen, daß im Falle $\gamma = \frac{1}{4}$ (Abbildung 5.3) das Paar (c, d) das optimale Konsequenzenpaar aus A' ist. Es ist $f_1(a) = c$ und $f_2(a) = d$. Folglich ist a die optimale Lösung des Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion. Das optimale Konsequenzenpaar im Falle $\gamma = \frac{2}{3}$ (Abbildung 5.4) wird durch (d, c) gegeben. Hier folgt, daß b die optimale Lösung ist. Schließlich wird klar, daß alle Paare von Konsequenzen aus A' im Falle $\gamma = \frac{1}{2}$ indifferent sind, da sie sämtlich auf der Indifferenzkurve von $\alpha = \frac{1}{2}$ liegen.

Keines der dargestellten Entscheidungsmodelle ist zu dem anderen isomorph, da sich in allen Fällen die Indifferenzkurven zweier Modelle schneiden. Daher wird klar, daß in dem hier skizzierten Fall kein, zum relationalen Entscheidungsmodell isomorphes Modell mit Nutzenfunktion existiert, das mittels des obigen Ansatzes modelliert werden kann.

5.9 Bemerkung

- (i) Wir haben in Beispiel 5.8 gezeigt, daß sich relationale Entscheidungsmodelle im allgemeinen von Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion unterscheiden. Dies ist keineswegs notwendig, sondern vom zugrunde liegenden Entscheidungsproblem abhängig. So existieren Entscheidungsprobleme, bei denen beide Konzepte zu isomorphen Modellen führen (dies ist insbesondere bei nur einem Ziel der Fall). Diese Vergleichbarkeit ist jedoch empirischer und nicht grundsätzlicher Natur.
- (ii) Wie bereits erwähnt, sind zahlreiche andere Ansätze zur Beschreibung der optimalen Lösung bei Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielen im Rahmen der Nutzentheorie bekannt. So wird beispielsweise im Falle von ν Zielkriterien gelegentlich eine beliebige (streng) monoton steigende Abbildung $g : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet (vgl. [Zimmermann '91, S. 110]). Man definiert dann

$$\hat{u}(a) := g(u_1(a), \dots, u_\nu(a))$$

Eine Lösung $a^* \in \mathcal{AL}$ heißt *optimal*, wenn $\hat{u}(a^*) = \sup_{a \in \mathcal{AL}} \hat{u}(a)$ gilt. Wie im Beweis zu Satz 5.6 kann man nachweisen, daß jede optimale Lösung dieser Art eine effiziente Lösung des Entscheidungsproblems ist, wenn die Abbildung g streng monoton ist. Die oben betrachtete Funktion aus Gleichung (5.4) ist ein Spezialfall dieses Verfahrens.

Offenbar kann vor dem Hintergrund eines solchen, sehr allgemeinen Ansatzes jedes relationale Entscheidungsmodell letztlich als Modell mit Nutzenfunktion interpretiert werden, da jede t -Norm – und damit auch jede Verkettung von t -Normen – monoton steigend ist. Allerdings erscheint uns diese Auffassung aus mehreren Gründen nicht zweckmäßig. So unterscheiden sich die Ansätze zur Entscheidungstheorie mit Nutzenfunktion methodisch grundsätzlich von dem Ansatz der relationalen Entscheidungstheorie. Kein klassischer Ansatz läßt sich aus der Anwendung einer mehrwertigen Logik ableiten, wie dies bei der relationalen Theorie der Fall ist. Die t -Normen sind daher auch keine beliebigen Abbildungen, sondern sie unterliegen einer genauen Axiomatik, aus welcher sich letztlich die Plausibilität des gesamten Ansatzes ableiten läßt.

Schließlich zeigen sich insbesondere im Falle der Beschreibung von Ungenauigkeit und unvollständiger Information weitere grundsätzliche Unterschiede. Im relationalen Ansatz können beliebige Klassen von Information im Rahmen eines einheitlichen theoretischen Konzeptes abgebildet werden. Dies ist in der klassischen Theorie nicht möglich.

5.4 Ein Anwendungsbeispiel: Online-Routing-Systeme

Die Überlegungen des Abschnittes 5.3.2 haben deutlich gemacht, daß sich relationale Entscheidungsmodelle von Modellen mit Nutzenfunktion unterscheiden. Sie haben nicht gezeigt, daß einer der beiden Ansätze prinzipiell sinnvoller als der andere ist oder zwangsläufig zu zweckmäßigen Ergebnissen führt. Eine solche Aussage kann letztlich nur vor dem Hintergrund der spezifischen Problemstellung erfolgen und auch hier wird ein endgültiges Urteil nicht zu erwarten sein, wenn die optimale Entscheidung nicht a priori bekannt ist. In diesen Fällen erscheint es jedoch ohnehin sinnvoller, einen deskriptiven⁸ Ansatz zur Entscheidungstheorie zu wählen. Demgegenüber handelt es sich sowohl bei den vorgestellten Modellen mit Nutzenfunktion wie auch bei den relationalen Ansätzen um normative Ansätze zur Entscheidungstheorie, d. h. es handelt sich um Methoden, die zeigen, wie Entscheidungen bei Entscheidungsproblemen rational getroffen werden können (vgl. [Laux '95, S. 3,4]). Daher wird man auch in der Anwendung selten zu objektiven Aussagen über die Eignung der verschiedenen Ansätze gelangen können, da die Rationalität und mithin auch die Objektivität selbst Gegenstand der Modelle ist.

Vor diesem Hintergrund ergeben sich für den folgenden Abschnittes zweierlei Zielsetzungen. Zum einen soll ein konkretes Beispiel für die Anwendung der relationalen Entscheidungstheorie in der Praxis gegeben werden. Dies wird die Methode der Modellierung verdeutlichen.

⁸Bei Laux [Laux '95, S. 3] findet sich die folgende Definition:

„Die *deskriptive Entscheidungstheorie* will beschreiben, wie in der Realität Entscheidungen getroffen werden, und erklären, warum sie gerade so und nicht anders zustande kommen. Ihr Ziel ist es, empirisch gehaltvolle Hypothesen über das Verhalten von Individuen und Gruppen im Entscheidungsprozess zu finden, mit deren Hilfe bei Kenntnis der jeweiligen konkreten Entscheidungssituation Entscheidungen prognostiziert werden können.“

Auch in der deskriptiven Entscheidungstheorie finden mathematische Modelle ihre Anwendung (vgl. z. B. [Hersh '76, Zimmermann '82]).

Zum zweiten sollen erneut die Unterschiede zwischen einem relationalen Modell und einem Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion aufgezeigt und verdeutlicht werden. Dabei ist es aus den oben genannten Gründen nicht unser Ziel, ein endgültiges Urteil über die Eignung der beiden Methoden zu fällen.

Bei der angesprochenen Anwendung handelt es sich um die Modellierung eines Online-Routing-Systems für den Straßenverkehr. Dieses wurde im Rahmen einer Kooperation der Fachbereiche Physik und Mathematik an der Gerhard-Mercator-Universität Duisburg entwickelt und anhand realistischer Verkehrsdaten getestet. Ansatzpunkt für die Untersuchung war, daß die Zunahme des Straßenverkehrs in den letzten Jahren, das steigende Bedürfnis nach Mobilität innerhalb der Bevölkerung sowie die erkennbaren Kapazitätsgrenzen des Verkehrsträgers Straße in der jüngeren Vergangenheit zu einem wachsenden Interesse an Online-Routing-Systemen für den Straßenverkehr geführt haben [Esser '97 B]. Das Ziel solcher Systeme ist es, den Verkehrsteilnehmer kontinuierlich mit Informationen über den aktuellen Verkehrszustand zu versorgen und auf Basis dieser Informationen Vorschläge für den zur Zeit besten Reiseweg zu unterbreiten. Ein „bester“ Reiseweg wird im allgemeinen von verschiedenen Kriterien abhängen. Wichtig sind dabei sicher die aktuelle *Reisezeit* und die *Länge* des betreffenden Weges. Zusätzlich können Kriterien wie die *Einfachheit* des Weges (dies sind zum Beispiel Wege mit wenigen Abbiegungen), der verwendete *Straßentyp* (so ist es etwa nur in Ausnahmefällen zweckmäßig, Routen durch verkehrsberuhigte Straßen zu wählen), die *Verkehrsdichte* sowie der *zukünftige Verkehrszustand* eine Rolle bei der Bewertung der Routen spielen (vgl. [Laak '97]). Aus dem Blickwinkel der Entscheidungstheorie handelt es sich hier um ein Entscheidungsproblem mit einer endlichen Menge von Alternativen (den verschiedenen möglichen Wegen) und mehreren Zielkriterien, die gegebenenfalls unsicherheitsbehaftet sind.

Wir werden im folgenden Ansätze zur mathematischen Modellierung eines Online-Routing-Systems auf der Basis von Nutzenfunktionen einerseits und im Rahmen der relationalen Entscheidungstheorie andererseits vorstellen und vor dem Hintergrund realistischer Verkehrsdaten miteinander vergleichen. Dabei werden wir uns auf die Betrachtung von lediglich zwei der möglichen Kriterien beschränken, um den beabsichtigten Vergleich zu vereinfachen. Diese werden die Reisezeit und die Länge der entsprechenden Wege sein⁹. Das Vorgehen wird das folgende sein. Wir werden zunächst die mathematische Modellierung der Entscheidungsmodelle für die vorliegende Anwendung beschreiben. Im Anschluß skizzieren wir die wesentlichen Parameter der Testdaten sowie die verwendeten Methoden zu ihrer Erzeugung. Schließlich werden wir die Ergebnisse der Untersuchung vorstellen und diskutieren.

Modellierung der Entscheidungsmodelle. Wir beginnen mit der Modellierung des Verkehrsnetzes und seiner relevanten Daten.

Darstellung des Verkehrsnetzes. Das Verkehrsnetz wird durch einen gerichteten Graphen dargestellt. Die Menge der Knoten des Graphen sei mit K bezeichnet. Sie stellt die Menge der möglichen Start- und Zielorte im Verkehrsnetz dar. Das Paar $(i, j) \in K^2$ gehört genau dann zur Menge $V \subseteq K^2$ der Kanten des Graphen, wenn der Knoten j von dem Knoten i aus erreicht werden kann, ohne daß dabei ein weiterer Knoten berührt wird. Es sei ferner die Abbildung

$$L_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

⁹Untersuchungen, die auch andere Kriterien berücksichtigen, finden sich bei [Laak '97] und [Annen '99].

gegeben, die jeder Kante die Länge des korrespondierenden realen Weges zuordnet. Schließlich sei

$$T_V : V \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

gegeben. Für $v \in V$ und $t \in \mathbb{R}^+$ sei $T_V(v, t)$ die Zeit, die benötigt wird, um die Kante v zum Zeitpunkt t zu passieren.

Unter einem Weg vom Start $i \in K$ zum Ziel $j \in K$ mit $i \neq j$ verstehen wir eine Familie von Kanten $W = (i_\kappa, j_\kappa)_{(1 \leq \kappa \leq \nu)} \subseteq V$, für die gilt:

- (i) $i_1 = i$ und $j_\nu = j$
- (ii) Für alle $1 \leq \kappa < \nu$ ist $j_\kappa = i_{\kappa+1}$

Wir nennen den Weg *kreisfrei*, wenn zudem gilt:

- (iii) Für alle $\kappa, \lambda \in \{i_1, \dots, i_\nu\}$ mit $\kappa \neq \lambda$ ist $i_\kappa \neq i_\lambda$.

Die Menge aller kreisfreien Wege in einem Graphen von einem Start i zu einem Ziel j sei mit \mathfrak{W}_{ij} bezeichnet. Es ist $\mathfrak{W}_{ij} \subseteq \wp(V)$. Die Länge eines kreisfreien Weges von i nach j ist dann gegeben durch

$$L : \mathfrak{W}_{ij} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad W \longmapsto \sum_{v \in W} L_V(v)$$

Entsprechend läßt sich die aktuelle Reisezeit zum einem Zeitpunkt t eines Weges durch

$$T : \mathfrak{W}_{ij} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad W \longmapsto \sum_{v \in W} T_V(v, t)$$

beschreiben.

Formulierung des Entscheidungsproblems. Mit den obigen Bezeichnungen läßt sich das Entscheidungsproblem wie folgt formulieren. Finde zu gegebenem Start $i \in K$ und Ziel $j \in K$ zu einem Zeitpunkt t denjenigen Weg $W \in \mathfrak{W}_{ij}$, der Reisezeit und Weglänge gleichermaßen minimiert. Diese Zielsetzung wird formal durch die Formel

$$(L(W), T(W, t)) \xrightarrow{W \in \mathfrak{W}_{ij}} \min \tag{5.5}$$

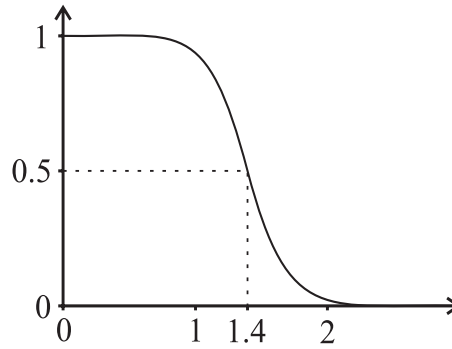
wiedergegeben.

Das Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion. Wir wenden uns der Modellierung eines Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion für das Entscheidungsproblem (5.5) zu. Dabei gehen wir davon aus, daß der Nutzen in beiden Zielen negativ proportional zu den jeweiligen Zielgrößen wächst. Um die Vergleichbarkeit der Ziele herzustellen, werden die beiden Zielgrößen zudem normiert. Es sei zu diesem Zweck für einen gegebenen Start $i \in K$, ein Ziel $j \in K$ sowie einen Zeitpunkt t

$$L_{ij}^{\min} := \min_{W \in \mathfrak{W}_{ij}} L(W) \tag{5.6}$$

und

$$T_{ij,t}^{\min} := \min_{W \in \mathfrak{W}_{ij}} T(W, t) \tag{5.7}$$

Abbildung 5.6: Zugehörigkeitsfunktion $M_{3.4, 1.4}$

Die Zielfunktion des Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion wird dann gegeben durch

$$\hat{u} : \mathfrak{W}_{ij} \longrightarrow \mathbb{R} \quad W \longmapsto - \left(\frac{1}{7} \frac{L(W)}{L_{ij}^{\min}} + \frac{6}{7} \frac{T(W, t)}{T_{ij, t}^{\min}} \right) \quad (5.8)$$

Dabei haben wir eine starke Präferenz auf die Reisezeit des Weges gelegt, was durch die Faktoren $\frac{1}{7}$ bzw. $\frac{6}{7}$ ausgedrückt wird. Ein Weg $W^* \in \mathfrak{W}_{ij}$ ist eine optimale Lösung des Entscheidungsmodells mit Nutzenfunktion, wenn gilt:

$$\hat{u}(W^*) = \max_{W \in \mathfrak{W}_{ij}} \hat{u}(W)$$

Das relationale Entscheidungsmodell. Im folgenden beschreiben wir die Modellierung eines relationalen Entscheidungsmodells für das Entscheidungsproblem (5.5). Zu diesem Zweck definieren wir zunächst die Abbildung

$$M_{\beta, d} : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto \frac{1}{2}(1 - \tanh(\beta(x - d)))$$

Mehrwertige Relationen, welche Zugehörigkeitsfunktionen von der Klasse $M_{\beta, d}$ besitzen, wurden bereits häufiger zur Darstellung von Entscheidungsproblemen verwendet (vgl. [Rommelfanger '94, S. 173]). Es handelt sich um so genannte *s-förmige* Funktionen. Abbildungen mit ähnlichen Formen erwiesen sich in empirischen Untersuchungen als besonders geeignet zur Darstellung von mehrwertigen Kriterien (vgl. [Hersh '76]). Man beachte, daß $M_{\beta, d}(d) = 0.5$ gilt. Der Wert von β bestimmt die Krümmung der Kurve. In Abbildung 5.6 ist eine entsprechende Zugehörigkeitsfunktion für die Parameter $\beta = 3.4$ und $d = 1.4$ aufgezeichnet.

Wir betrachten erneut das Entscheidungsproblem (5.5) für einen vorgegebenen Start i , ein Ziel j sowie einen Zeitpunkt t . Die mehrwertigen Kriterien des relationalen Modells werden über der Menge von Konsequenzen $[L_{ij}^{\min}, \infty]$ im Falle der Weglänge und $[T_{ij, t}^{\min}, \infty]$ für die Reisezeit definiert. Dabei sind L_{ij}^{\min} und $T_{ij, t}^{\min}$ wie in (5.6) und (5.7) definiert. Es sei

$$C_L(x) := \left(\frac{M_{3.4, 1.4} \left(\frac{x}{L_{ij}^{\min}} \right)}{M_{3.4, 1.4}(1)} \right)^{\frac{1}{7}}$$

das mehrwertige Kriterium zur Beurteilung der Weglängen und

$$C_T(x) := \left(\frac{M_{3.4, 1.4} \left(\frac{x}{T_{ij, t}^{\min}} \right)}{M_{3.4, 1.4}(1)} \right)^{\frac{6}{7}}$$

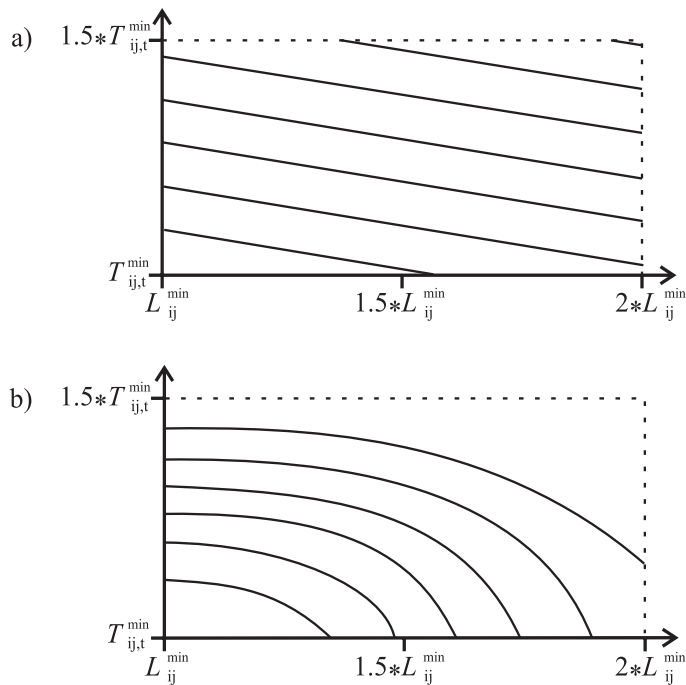


Abbildung 5.7: Indifferenzkurven der Entscheidungsmodelle

das mehrwertige Kriterium, welches die Reisezeiten beurteilt. Dabei geben die Exponenten $\frac{1}{7}$ und $\frac{6}{7}$ eine unterschiedliche Gewichtung der Kriterien wieder, die nach Yager (vgl. [Yager '78]) der Gewichtung der linearen Nutzenfunktion aus Gleichung (5.8) entsprechen soll. Durch die Division mit $M_{3.4,1.4}(1)$ erfolgt eine Normierung der mehrwertigen Relationen, d. h. es ist

$$C_L(L_{ij}^{\min}) = C_T(T_{ij,t}^{\min}) = 1$$

Zur Darstellung des Kriteriums Weglänge betrachten wir ein relationales Entscheidungsmodell $\mathfrak{D}_L \in \mathcal{D}(\mathfrak{W}_{ij})$ mit

$$\mathfrak{D}_L = (\mathfrak{W}_{ij}, [L_{ij}^{\min}, \infty], C_L, L', \mathbf{I})$$

Dabei ist $L' : \mathfrak{W}_{ij} \rightarrow \wp([L_{ij}^{\min}, \infty])$ $W \mapsto \{L(W)\}$ und \mathbf{I} ein beliebiges Inklusionsmaß. Entsprechend wird das Kriterium Reisezeit durch ein relationales Entscheidungsmodell $\mathfrak{D}_T \in \mathcal{D}(\mathfrak{W}_{ij})$ der Form

$$\mathfrak{D}_T = (\mathfrak{W}_{ij}, [T_{ij,t}^{\min}, \infty], C_T, T', \mathbf{I})$$

mit $T' : \mathfrak{W}_{ij} \rightarrow \wp([T_{ij,t}^{\min}, \infty])$ $W \mapsto \{T(W, t)\}$ beschrieben. Auch hier ist \mathbf{I} ein beliebiges Inklusionsmaß.

Das relationale Entscheidungsmodell zur Bewertung beider Kriterien wird dann durch

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_L \otimes_{t_A} \mathfrak{D}_T$$

gegeben. Hierbei wird das Algebraische Produkt zur Darstellung der entsprechenden Kartesischen Produkte verwendet. Mit dem Homomorphiesatz 4.10 folgt für die mehrwertige Entscheidung $D_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{F}(\mathfrak{W}_{ij})$ des Modells \mathfrak{D} für alle $W \in \mathfrak{W}_{ij}$:

$$D_{\mathfrak{D}}(W) = C_L(L(W)) \cdot C_T(T(W, t))$$

$$= \left(\frac{M_{3.4,1.4} \left(\frac{L(W)}{L_{ij}^{\min}} \right)}{M_{3.4,1.4}(1)} \right)^{\frac{1}{7}} \cdot \left(\frac{M_{3.4,1.4} \left(\frac{T(W,t)}{T_{ij,t}^{\min}} \right)}{M_{3.4,1.4}(1)} \right)^{\frac{6}{7}}$$

Fuzzy-effizient sind diejenigen Wege $W^* \in \mathfrak{W}_{ij}$, für die gilt:

$$D_{\mathfrak{D}}(W^*) = \sup_{W \in \mathfrak{W}_{ij}} D_{\mathfrak{D}}(W)$$

In Abbildung 5.7 sind zur Verdeutlichung die Indifferenzkurven beider Modellansätze aufgetragen. In Abbildung 5.7 a) sind die Kurven des klassischen Modells mit Nutzenfunktion dargestellt. In Abbildung 5.7 b) finden sich die entsprechenden Indifferenzkurven für den relationalen Ansatz. Wie schon in Abschnitt 4.6 und Beispiel 5.8 wird deutlich, daß die beiden Modellbildungen nicht isomorph sind.

Beschreibung des Versuchsumfeldes. Als Datengrundlage für den Vergleich der beiden Entscheidungsmodelle werden Verkehrsdaten aus dem Innenstadtbereich der Stadt Duisburg verwendet. Prinzipiell ist die flächendeckende Erhebung von Verkehrsdaten in Form von direkten Messungen mit großem technischen Aufwand verbunden. In dem vorliegenden Fall wurde daher der aktuelle Verkehrszustand aus lokalen Messungen durch eine mikroskopische Simulation extrapoliert. Eingabedaten waren dabei die Daten von 205 kommunalen Zählschleifen aus dem Duisburger Stadtgebiet. Diese wurden zu 51 Meßpunkten zusammengefaßt. Bei den verwendeten Daten handelt es sich also nicht um reale Verkehrsdaten, sondern um Daten, die den realen Verkehrsdaten ähnlich sind und ein realistisches Bild der Verkehrslage wiedergeben. Grundlegende Informationen zu dem verwendeten Verfahren finden sich in [Nagel '92]. Detaillierte Ausführungen zu der Simulation der Innenstadt von Duisburg sowie Abschätzungen zur Qualität der erzeugten Daten sind den Arbeiten [Esser '97 A] und [Esser '97 B] zu entnehmen.¹⁰ Das betrachtet Straßennetz und die Meßstellen sind in Abbildung 5.8 dargestellt.

Das Straßennetz der Stadt Duisburg wurde für die Untersuchung in einem vereinfachten Graphen mit 107 Knoten und 280 Kanten abgebildet. Die berücksichtigten Straßen sind ebenfalls in Abbildung 5.8 zu erkennen. Auf Basis des oben erwähnten Modells wurden für den Zeitraum von Dienstag, dem 1.4.1997 (12.00 Uhr), bis zum Mittwoch, dem 2.4.1997 (12.00 Uhr), die Reisezeiten auf allen Kanten in minütlichen Abständen berechnet. Das verwendete Verfahren zur Messung der Reisezeiten ist ebenfalls in [Esser '97 B] zu finden.

Ergebnisse. Im folgenden sollen die Ergebnisse der beiden Entscheidungsmodelle miteinander verglichen werden. Zu diesem Zweck werden zufällig 2994 Knotenpaare und Zeitpunkte ausgewählt und jeweils ein optimaler Weg bezüglich des Modells mit Nutzenfunktion sowie ein fuzzy-effizienter Weg im relationalen Modell bestimmt.

In 465 (15,5%) Fällen ergeben sich dabei bei beiden Verfahren unterschiedliche Wege. In allen übrigen Fällen sind die gewählten Wege identisch. Hierunter fallen 474 (15,8%) Fälle, in denen Wege gewählt werden, die sowohl die optimale Reisezeit als auch die optimale Wegstrecke besitzen. Diese (trivialen) Fälle werden stets von beiden Ansätzen ermittelt.

¹⁰Weitere Informationen zu den Grundlagen und der Implementierung der Simulation sind unter der Internetadresse <http://www.traffic.uni-duisburg.de/OLSIM/olsim.html> abrufbar. Dort wird auch der aktuelle Verkehrszustand im Innenstadtbereich dargestellt.

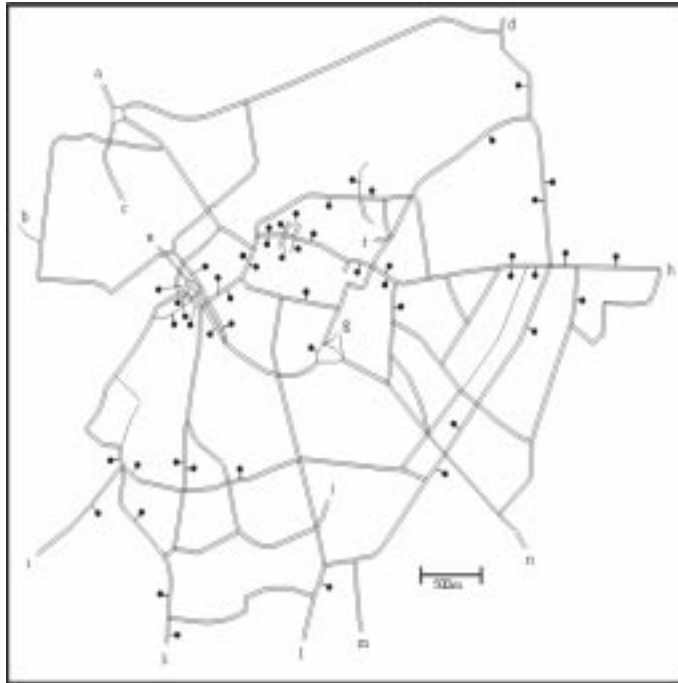


Abbildung 5.8: Das Straßennetz der Stadt Duisburg mit Meßstellen

Alle Reisezeiten liegen in dem Intervall von 3 Minuten 45 Sekunden bis 12 Minuten und 9 Sekunden. Die mittlere Reisezeit aller Wege ist 6 Minuten und 8 Sekunden. Die Länge der Wege liegt zwischen 3 und 8.49 km bei einem Mittel von 4.3 km.

Wir wollen im folgenden vor allem die Fälle betrachten, für die der optimale Weg und der fuzzy-effiziente Weg verschieden sind. Zu diesem Zweck werden zu allen berechneten Wegen die entsprechenden Reisezeiten und die Weglänge ermittelt. Zusätzlich wird jeweils die minimal mögliche Reisezeit ($T_{ij,t}^{\min}$) und die minimal mögliche Wegstrecke (L_{ij}^{\min}) bestimmt. Für jeden Weg W_{ij} , der berechnet wurde, wird das Tupel

$$\left(\frac{L(W)}{L_{ij}^{\min}}, \frac{T(W, t)}{T_{ij,t}^{\min}} \right)$$

bestimmt. Dieses gibt in beiden Koordinaten die relative Abweichung dieses Weges zu dem Weg an, der in beiden Größen optimal wäre¹¹.

In Abbildung 5.9 haben wir diese Art der Darstellung verwendet, um die Wege darzustellen, bei denen der fuzzy-effiziente Weg und der optimale Weg übereinstimmen. Deutlich ist zu erkennen, daß die Reisezeit der gewählten Wege die jeweils optimale Reisezeit höchstens um 10% übertreffen. Hingegen sind in der Weglänge Abweichungen von bis zu ca. 70% zu beobachten. Hier schlägt sich die höhere Gewichtung der Reisezeit in beiden Modellen nieder.

Um die Wege zu vergleichen, in denen beide Ansätze zu verschiedenen Resultaten führen, haben wir in Abbildung 5.10 und Abbildung 5.11 jeweils die entsprechenden Werte für das Modell mit Nutzenfunktion (Abbildung 5.10) und für das relationale Modell (Abbildung 5.11) aufgetragen. Zudem wird die Häufigkeit des Vorkommens der jeweiligen Abweichung

¹¹Ein solcher Weg existiert tatsächlich nur in 474 Fällen (s. o.).

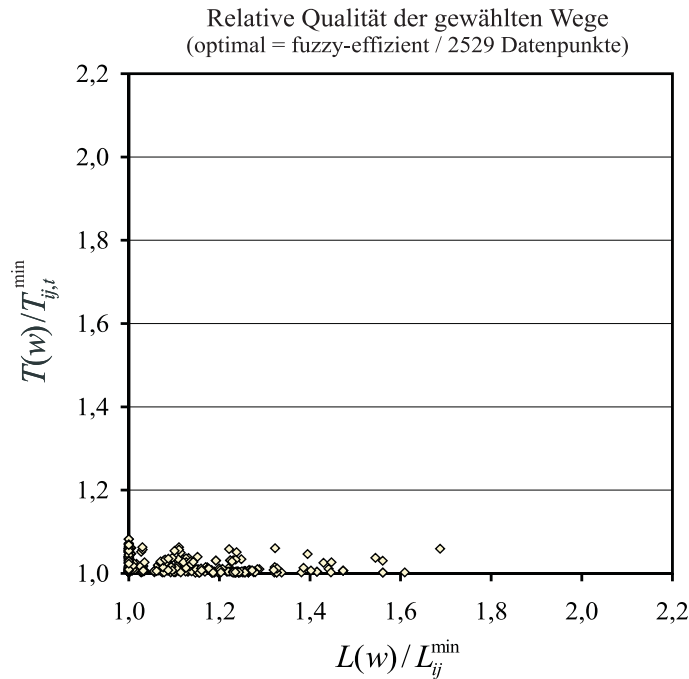


Abbildung 5.9: Routen mit gleicher Qualität

vom Optimum erfaßt. Eine Darstellung der entsprechenden Histogramme wird in den Abbildungen 5.12 und 5.13 gegeben. Die entsprechenden Zahlen finden sich in den Tabellen 5.1 und 5.2.

Erneut läßt sich in beiden Fällen die starke Gewichtung des Kriteriums Reisezeit gegenüber dem Kriterium Weglänge erkennen. Dies bestätigt sich bei der Betrachtung der entsprechenden Histogramme. So wird in dem Modell mit Nutzenfunktion in 83 % der Fälle der Weg mit der optimalen Reisezeit gewählt. Bei den übrigen 17 % der Fälle liegt die Abweichung vom Optimum unterhalb von 10 %. Im Mittel läßt das Modell mit Nutzenfunktion lediglich eine Abweichung von 0,202 % gegenüber der optimalen Reisezeit zu. Betrachtet man demgegenüber die entsprechenden Weglängen, so ist auffällig, daß die größte Klasse der auftretenden Längen (34 % der betreffenden Wege) um 20 % bis 30 % oberhalb des Minimums liegen. Auch der Mittelwert der Abweichung von 34,5 % macht die hohe Gewichtung des Kriteriums Reisezeit gegenüber der Weglänge deutlich. Im Maximum liegt die Überschreitung der minimalen Weglänge bei 120 % (Faktor 2,2). Es wird nie der kürzeste Weg gewählt.

Bei der Betrachtung des relationalen Modells bestätigen sich zwar die grundsätzlichen Beobachtungen, allerdings fällt die Priorisierung des Kriteriums Reisezeit gegenüber der Weglänge nicht ganz so extrem wie im Modell mit Nutzenfunktion aus. So ist auch hier festzustellen, daß die Reisezeit bei 84 % aller Wege höchstens um 10 % von der optimalen Reisezeit abweicht. Allerdings wird nie der Weg mit der optimalen Reisezeit gewählt. Die mittlere Abweichung der Reisezeit liegt mit 5 % deutlich über dem entsprechenden Wert des Modells mit Nutzenfunktion. Auch die maximale Überschreitung des zeitlichen Minimums fällt mit 37% höher aus, als dies in dem anderen Modell der Fall ist. Im Vergleich zu dem Kriterium Weglänge wird dennoch die stärkere Gewichtung der Reisezeit deutlich. Die mittlere Abweichung liegt hier mit 16,3 % ebenso wie die maximale Abweichung mit

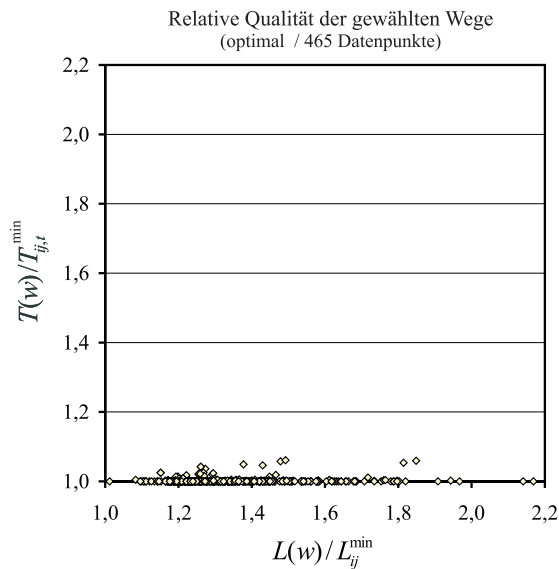


Abbildung 5.10: Modell mit Nutzenfunktion

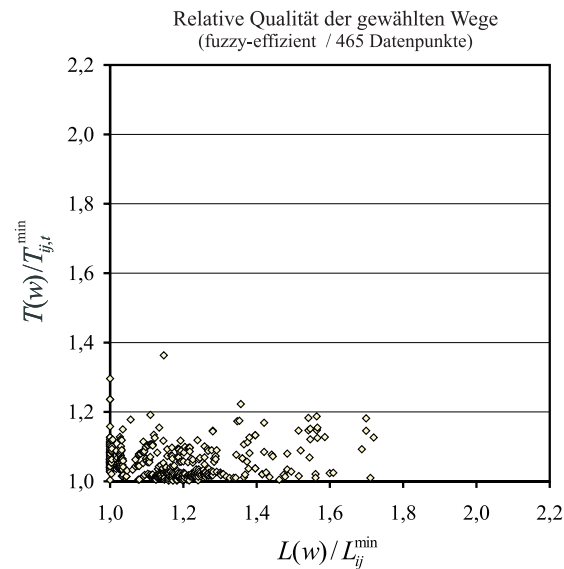


Abbildung 5.11: Relationales Modell

72 % deutlich über den entsprechenden Werten der Reisezeit. Die am häufigsten auftretende Klasse von Weglängen ist mit einem Anteil von 29 % die Klasse von 10 bis 20 % Abweichung. Auch dieser Wert übertrifft die entsprechende Größe der Reisezeit. Es ist weiter festzustellen, daß der Mittelwert und die maximale Abweichung der Weglängen deutlich unter den entsprechenden Werten des Modells mit Nutzenfunktion liegen. So ist der Mittelwert der Weglängen hier um 18,2 % niedriger als bei dem Modell mit Nutzenfunktion. Auch die maximale Abweichung ist um 48 % kleiner als die des Modells mit Nutzenfunktion. Zudem wird im relationalen Modell viermal ein Weg mit optimaler Weglänge gewählt. Dies ist im Modell mit Nutzenfunktion nie der Fall.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die unterschiedliche Gewichtung der Zielgrößen Reisezeit und Weglänge in beiden Modellen deutlich wird. Allerdings zeigt sich, daß diese Präferenz bei dem Modell mit Nutzenfunktion deutlich stärker ausgeprägt ist als bei dem relationalen Modell. Zudem ist die hohe Zahl der Wege mit optimaler Reisezeit (83 %) auffällig, die vom Modell mit Nutzenfunktion gewählt wird. Ein Optimum in dieser Zielgröße ist in dem Ansatz mit Nutzenfunktion folglich kaum durch eine entsprechende Verbesserung des anderen Kriteriums zu kompensieren. Hier liegt ein deutlicher Unterschied zum relationalen Modell. Die im Mittel um 5 % verschlechterten Reisezeiten werden hier zugunsten einer mittleren Verbesserung der Weglängen um 18,2 % in Kauf genommen. Die stärkere Kompensation zwischen den beiden Kriterien wird zudem darin deutlich, daß in vier Fällen Wege mit optimaler Weglänge gewählt werden, obwohl dieses Kriterium deutlich schwächer gewichtet ist als die Reisezeit.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei noch einmal betont, daß aus unserer Sicht aufgrund der obigen Ausführungen kein endgültiges Urteil über die „bessere“ Methode zur Beschreibung von Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielen gefällt werden kann. Gleichwohl meinen wir feststellen zu dürfen, daß das relationale Entscheidungsmodell im obigen Fall stets zu plausiblen Ergebnissen geführt und seine Tauglichkeit für die Praxis unterstrichen hat. Da sich relationale Entscheidungsmodelle für Entscheidungsprobleme mit mehreren Zielen homomorph auf symmetrische Entscheidungsmodelle abbilden lassen, verweisen wir im übrigen auf die Ausführungen in den Büchern von [Rommelfanger '94] und [Lai '92] zu

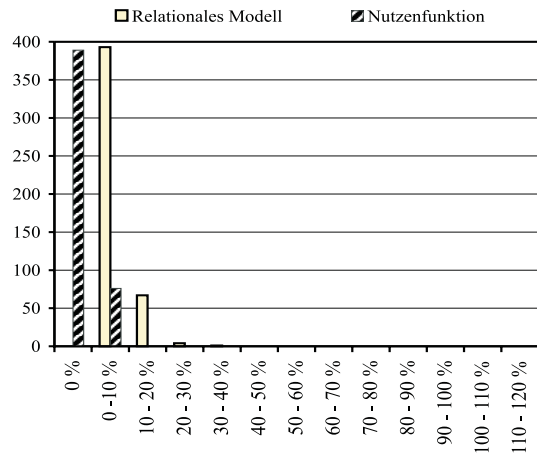


Abbildung 5.12: Histogramm / Reisezeit

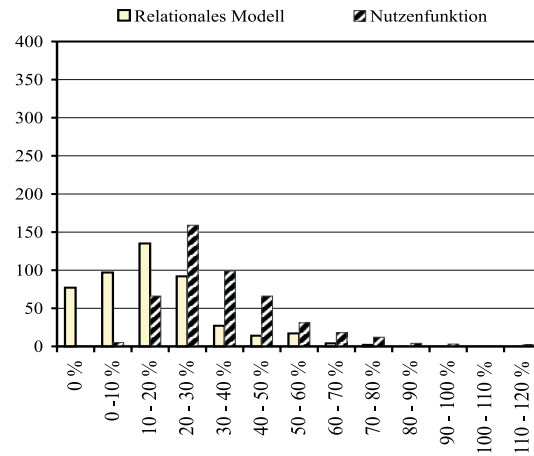


Abbildung 5.13: Histogramm / Weglänge

Daten des Histogramms Reisezeiten		
Klasse	Relationales Modell	Modell mit Nutzen
0 %	0	389
0 – 10 %	393	76
10 – 20 %	67	0
20 – 30 %	4	0
30 – 40 %	1	0
40 – 50 %	0	0
50 – 60 %	0	0
60 – 70 %	0	0
70 – 80 %	0	0
80 – 90 %	0	0
90 – 100 %	0	0
100 – 110 %	0	0
110 – 120 %	0	0

Tabelle 5.1: Abweichung der Reisezeiten nach Klassen

Daten des Histogramms Weglängen		
Klasse	Relationales Modell	Modell mit Nutzen
0 %	77	0
0 – 10 %	97	5
10 – 20 %	135	66
20 – 30 %	92	159
30 – 40 %	27	99
40 – 50 %	14	66
50 – 60 %	17	31
60 – 70 %	4	18
70 – 80 %	2	12
80 – 90 %	0	4
90 – 100 %	0	3
100 – 110 %	0	0
110 – 120 %	0	2

Tabelle 5.2: Abweichung der Weglängen nach Klassen

diesem Thema.

5.5 Abschließende Bemerkungen

Gegenstand des Kapitels 5 war der Vergleich von relationalen Entscheidungsmodellen und Entscheidungsmodellen mit Nutzenfunktion. Dieser Vergleich erfolgte auf einer Modellebene, d. h. es wurden die Entscheidungsmodelle selbst und nicht etwa ihr konzeptioneller Hintergrund miteinander verglichen. Dabei haben wir zunächst festgestellt, daß für die betrachteten Entscheidungsprobleme mit einem Zielkriterium zu jedem klassischen Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion ein isomorphes relationales Entscheidungsmodell existiert. Es kann also in diesen Fällen stets ein relationales Modell gefunden werden, welches die gleichen effizienten Lösungen wie der klassische Ansatz besitzt. Insbesondere lassen sich alle Entscheidungsprobleme, die durch ein Entscheidungsmodell mit Nutzenfunktion beschrieben werden, auch durch ein relationales Entscheidungsmodell beschreiben. Gegenüber dem klassischen Ansatz besitzt die relationale Entscheidungstheorie jedoch den Vorteil der

einheitlichen mathematischen Formulierung sowie der eindeutigen mathematischen Grundlagen. Zudem verfügt die relationale Theorie über zusätzliche Modellierungsmöglichkeiten, so daß die relationale Entscheidungstheorie als das umfassendere der beide Konzepte verstanden werden kann.

Im Falle der Entscheidungen mit mehreren Zielkriterien ergeben sich zwischen klassischer und relationaler Entscheidungstheorie deutliche Unterschiede. Zwar lassen sich auch hier zu jedem klassischen Entscheidungsmodell relationale Gegenstücke finden, im allgemeinen kann jedoch nicht davon ausgegangen werden, daß die Lösungen beider Modelle übereinstimmt. Allerdings können einfache Kriterien angegeben werden, unter denen die fuzzy-effiziente Lösung des relationalen Entscheidungsmodells auch eine effiziente Lösung im Sinne der Mehrzieloptimierung ist. Unter diesem Blickwinkel sind die entsprechenden Lösungen plausibel.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß jede Problemstellung, die durch ein Modell mit Nutzenfunktion beschrieben werden kann, auch angemessen durch ein relationales Entscheidungsmodell modelliert werden kann. Gegenüber der Theorie mit Nutzenfunktion besitzt der relationale Ansatz jedoch wesentliche Vorteile. Dies sind zum einen die *einheitliche Struktur und mathematische Grundlage der Modelle*. Diese erlauben – wie wir in Kapitel 4 gezeigt haben – die systematische Analyse und den Vergleich verschiedener Modellierungen. Zudem gestattet die Einbettung der Entscheidungstheorie in die mehrwertige Logik die Anwendung eines breiten mathematischen Instrumentariums, das in dieser Art in der Theorie mit Nutzenfunktion nicht zur Verfügung steht. So werden insbesondere *zusätzliche Methoden zur Modellierung von Entscheidungsproblemen* zur Verfügung gestellt. Dies betrifft zum einen die *Darstellung von unvollständiger Information in der Entscheidungstheorie*, wo durch das Konzept der logischen Inklusionsmaße neue Möglichkeiten eröffnet werden. Dies betrifft aber insbesondere auch die Modellierung von Entscheidungsproblemen mit mehreren Zielkriterien. Hier werden zum einen mit den *t-Normen erweiterte Konzepte zur Verknüpfung der Kriterien* zur Verfügung gestellt. Zum anderen gestattet der relationale Ansatz die einfache Modellierung von Entscheidungsproblemen mit mehreren Kriterien, für die *verschiedene Arten der Information zur Verfügung* stehen. Eine derart einfache Integration solcher Problemstellungen in die Theorie ist für den Ansatz mit Nutzenfunktion nicht bekannt.

Schlußbemerkungen

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein neuer Ansatz zur mathematischen Darstellung von Entscheidungsproblemen beschrieben. Dieser beruht auf Konzepten der mehrwertigen Logik. Er erweitert das symmetrische Entscheidungsmodell von Bellman und Zadeh um die Möglichkeit, in ihm sämtliche Arten von ungenauer Information repräsentieren zu können. Dies geschieht vor einem einheitlichen konzeptionellen Hintergrund, der es erlaubt, alle Entscheidungsprobleme auf der Basis eines Grundmodells abzubilden. Hierdurch werden insbesondere strukturelle Untersuchungen von Entscheidungsmodellen ermöglicht. Das Konzept der relationalen Entscheidungstheorie besitzt also die in der Einleitung skizzierten Schwachstellen des symmetrischen Ansatzes nicht mehr und wir sind daher der Meinung, der dort formulierten Zielsetzung der Arbeit zumindest nahegekommen zu sein.

Allerdings erscheinen nach wie vor zusätzliche Untersuchungen zweckmäßig. Diese betreffen zunächst weitere strukturelle Analysen von relationalen Entscheidungsmodellen. Zwar sind hier mit den Sätzen 4.19 und 4.25 erste Grundlagen gelegt worden. Allerdings könnten diese erweitert werden, indem der Gebrauch und ein Vergleich verschiedener Inklusionsmaße in Entscheidungsmodellen weiter untersucht wird. Zudem haben wir uns in dieser Arbeit im wesentlichen auf konzeptionelle Fragestellungen konzentriert. Weitere Untersuchungen könnten die Konsequenzen der Resultate für die Anwendung näher beleuchten. Beispielsweise können algorithmische Aspekte im Zusammenhang mit der Bestimmung fuzzy-effizienter Lösungen von Interesse sein (vgl. hierzu auch Abschnitt 2.4). Schließlich kann der hier begonnene Vergleich der relationalen Entscheidungstheorie mit anderen Ansätzen zur Beschreibung von Entscheidungsproblemen fortgesetzt werden.

Neben der Beschreibung des Ansatzes war die Entwicklung der notwendigen theoretischen Grundlagen ein Schwerpunkt dieser Arbeit. Dabei wurde einerseits Wert auf eine möglichst vollständige und systematische Darstellung gelegt. Darüberhinaus wurden jedoch neue Konzepte in die Diskussion eingeführt, die zur Darstellung der Entscheidungstheorie notwendig waren, deren mögliche Anwendungen aber sicher darüberhinaus gehen.

Dies ist zum einen das Konzept der Wahrheitsräume und die darauf aufbauende Klassifizierung der Sprachen der Klasse MS. Wichtige Aussagen sind hier der Äquivalenzsatz 1.34, durch den verschiedene Darstellungsformen der gleichen Sprache charakterisiert werden, sowie der Isomorphiesatz 1.44, der ein weiteres wesentliches Kriterium zur Vergleichbarkeit von mehrwertigen logischen Sprachen umfaßt. Wir haben in dieser Arbeit an verschiedenen Stellen die Konsequenzen dieser Klassifizierung der Sprachen dargelegt. Zu nennen sind hier die Überlegungen zu parametrisierten t -Normen (Abschnitt 1.5), das Konzept der w -Isomorphie von Relationensystemen (Abschnitt 2.3.2), die Überlegungen zu den Formen mehrwertiger Relationen (Abschnitt 2.4) sowie die oben bereits erwähnten Untersuchungen zur Struktur von Entscheidungsmodellen. Da die mehrwertigen logischen Sprachen der Klasse MS allerdings als Grundlage vieler in der Fuzzy-Set-Theory gebräuchlicher Konzepte bilden, gehen

wir davon aus, daß weitere Untersuchungen hier zu fruchtbaren Resultaten führen können. Schließlich wurde unter Verwendung von logischen Maßen – und hier insbesondere von logischen Inklusionsmaßen – ein neuer Ansatz zur Repräsentation von Information durch logische Konzepte vorgeschlagen. Hierdurch war es uns möglich, das Konzept der Fuzzy-Maße und vor allem des Wahrscheinlichkeitsmaßes auf mehrwertige Relationen zu erweitern. Zudem erlaubt es der hier gewählte Ansatz, das Konzept der Fuzzy-Maße in eine Theorie zu integrieren, die sowohl Fuzzy-Maße als auch Fuzzy-Mengen umfaßt und welche die Zusammenhänge und Unterschiede zwischen beiden Konzepten verdeutlicht (vgl. auch Abschnitt 3.5). Wir sind der Auffassung, daß der hier skizzierte Weg zur Modellierung von Information die einschlägige Diskussion bereichern und die Entwicklung neuer Methoden für die Anwendung vorantreiben kann. Als Beispiel mag die relationalen Entscheidungstheorie selbst dienen, mit deren Formulierung wir bereits ein ausführliches Anwendungsbeispiel angegeben haben.

Symbole

\simeq	Äquivalenz von Wahrheitsräumen	29
\simeq	Äquivalenz von Entscheidungsmodellen	121
\simeq	Äquivalenz von Entscheidungssystemen	123
\cong	Isomorphie von Wahrheitsräumen	35
\cong	Isomorphie von Relationensystemen	62
\cong	Isomorphie von Entscheidungsmodellen	125
\cong	Isomorphie von Entscheidungssystemen	126
\circ	Komposition von Abbildungen	
\diamond	leere Zeichenreihe	11
$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$	Junktoren	11
$\ \cdot \ $	Wahrheitsfunktion	25
\emptyset	Leere Relation	54
\subseteq	Teilmenge	54
\cap, \cup	τ -Durchschnitt, τ -Vereinigung	57
\cap, \cup	Durchschnitt, Vereinigung von Inklusionsmaßen	84
\otimes_t	Kartesisches Produkt von Relationen	55
\otimes_t	Kartesisches Produkt von Inklusionsmaßen	90
\otimes_t	Kartesisches Produkt von Entscheidungsmodellen	113
\mathcal{A}	Alphabet	11
\mathcal{A}^+	Menge aller Wörter von \mathcal{A}	11
\mathcal{AL}	Menge von Alternativen	107
\mathcal{C}	Menge von Konsequenzen	107
C	Mehrwertiges Kriterium	107
$\mathfrak{D} = (\mathcal{AL}, \mathcal{C}, C, F, \mathbf{I})$	Relationales Entscheidungsmodell	107
$\mathcal{D}(\mathcal{AL})$	Klasse aller relationalen Entscheidungsmodelle bzgl. \mathcal{AL}	107
$D_{\mathfrak{D}}$	Mehrwertige Entscheidung des Modells \mathfrak{D}	107
$\mathfrak{E} = (\mathcal{S}, \otimes_t)$	τ -Entscheidungssystem	123
\mathcal{F}	Menge aller Ausdrücke	12
\mathcal{F}_a	Menge aller atomare Ausdrücke	12
$\mathcal{F}(U^\nu)$	Klasse aller mehrwertigen ν -stelligen Relationen	44
$\mathcal{F}_N(U^\nu)$	Klasse aller mehrwertigen, normalisierten Relationen	95

$\mathcal{F}_E(U^\nu)$	Klasse aller mehrwertigen Relationen mit Kardinalität 1	99
$\mathfrak{I}_\tau = (\ \cdot\ , \mathfrak{S})$	τ -Interpretation	46
$\mathcal{K}(U^\nu)$	Klasse aller klassischen ν -stelligen Relationen	52
$\mathfrak{R} = (\mathcal{M}, \cap, \cup, ^c)$	τ -Relationensystem	57
n	Involution	17
P^c	τ -Komplement	57
$[P]_\alpha$	α -Niveau-Menge	53
$ P $	Kardinalität	53
\hat{P}	Urbild von P unter \mathfrak{S}	47
$\mathbf{hgt}(P)$	Höhe einer Relation	53
$\ker(P)$	Kern einer Relation	53
$\text{supp}(P)$	Träger einer Relation	53
$\text{Pos}(\wp(U))$	Klasse aller Möglichkeitsmaße über U	95
$\text{Prob}(\wp(U))$	Klasse aller Wahrscheinlichkeitsmaße über U	99
r_t	Residuum von t	20
s	s -Norm	15
$s_{t,n}$	zu t duale s -Norm bzgl. n	18
\mathfrak{S}	Struktur	46
t	t -Norm	15
T	Menge von Wahrheitswerten	25
$\tau = (t, n, T)$	Wahrheitsraum	25
χ_P	Charakteristische Funktion von P	52

Abbildungsverzeichnis

1.1	$t_{\min}(a, b)$ und $s_{\max}(a, b)$	16
2.1	Darstellung mehrwertiger Relationen nach Kosko	59
3.1	Darstellung von $\mathbf{I}_u(P, Q)$, $\mathbf{I}_M(P, Q)$ und $\mathbf{I}_\alpha(P, Q)$	76
3.2	$\mathbf{I}_P(P, Q), \tau_{\min}$	78
3.3	$\mathbf{I}_P(P, Q), \tau_A$	78
3.4	$\mathbf{I}_M(P, Q), \tau_{\min}$	78
3.5	$\mathbf{I}_{r_t}(P, Q), \tau_A$	81
3.6	$\mathbf{I}_{r_t}(Q, P), \tau_A$	81
3.7	$\mathbf{I}_M^c(P, Q), \tau_{\min}$	87
3.8	$\mathbf{I}_M^c(Q, P), \tau_{\min}$	87
3.9	$\mathbf{P}_Q, \tau_{\min}$	103
3.10	\mathbf{P}_Q, τ_B	103
3.11	\mathbf{P}_Q, τ_A	103
4.1	Ein einfaches Entscheidungsproblem	109
4.2	Mehrwertige Entscheidungen	117
4.3	Indifferenzkurven	129
4.4	Indifferenzkurven $t_1 = t_A$	130
4.5	Indifferenzkurven $t_1 = t_{\min}$	130
4.6	Indifferenzkurven des Modells $\mathfrak{D}_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}_2$	131
4.7	Indifferenzkurven des Modells $\mathfrak{D}'_1 \otimes_{\min} \mathfrak{D}'_2$	131
5.1	Graph von \hat{u}_γ für $\gamma = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$	148
5.2	Indifferenzkurven von \mathfrak{D}	149
5.3	Indifferenzkurven $\gamma = \frac{1}{4}$	149
5.4	Indifferenzkurven $\gamma = \frac{1}{2}$	149
5.5	Indifferenzkurven $\gamma = \frac{2}{3}$	149
5.6	Zugehörigkeitsfunktion $M_{3.4, 1.4}$	154

5.7	Indifferenzkurven der Entscheidungsmodelle	155
5.8	Das Straßennetz der Stadt Duisburg mit Meßstellen	157
5.9	Routen mit gleicher Qualität	158
5.10	Modell mit Nutzenfunktion	159
5.11	Relationales Modell	159
5.12	Histogramm / Reisezeit	160
5.13	Histogramm / Weglänge	160

Literaturverzeichnis

- [Annen '99] **O. Annen, O. van Laak, Ch. Schuster**, A Fuzzy Decision Modell for dynamic Traffic Networks, in: A. Adamski, A. Rudnicki, J. Zak (Editors) *Modelling and Management in Transportation*, Vol. 1, 199-204 (Poznan, Krakow, 1999)
- [Bauer '90 A] **H. Bauer**, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. Auflage (de Gruyter, Berlin, 1990)
- [Bauer '90 B] **H. Bauer**, *Maß- und Integrationstheorie* (de Gruyter, Berlin, 1990)
- [Bandemer '93] **H. Bandemer, S. Gottwald** *Einführung in Fuzzy Methoden* (Akademie Verlag, Berlin, 1993)
- [Bandler '80] **W. Bandler, L. Kohout**, Fuzzy power sets and fuzzy implication operators, *Fuzzy Sets and Systems*, **4**, 13-30 (1980)
- [Bellman '70] **R. Bellman, L. A. Zadeh**, Decision-Making in a Fuzzy Environment, *Management Science* 17, n. 4, B141-B164 (1970)
- [Biswal '96] **M.P. Biswal, S.B. Shina**, Fuzzy programming approach to some multi-objective nonlinear programming problems, *Journal of Fuzzy Mathematics*, **4**, No.2, 315-312 (1996)
- [Böhme '93] **G. Böhme**, *Fuzzy-Logik* (Springer, Berlin, 1993)
- [Bridges '95] **D.S. Bridges, G.B. Mehta**, *Representation of Preference Orderings* (Springer-Verlag, Berlin, 1995)
- [Buckley '90] **J.J. Buckley**, Stochastic versus Possibilistic Programming, *Fuzzy Sets and Systems*, **34** 173-177 (1990)
- [Carnap '68] **R. Carnap**, *Einführung in die symbolische Logik*, 3. Auflage (Springer-Verlag, Berlin, 1968)
- [Chuaqui '91] **R. Chuaqui**, *Truth, Possibility and Probability* (Elsevier Science, New-York, 1991)
- [Dubois '87] **D. Dubois, H. Prade**, *Possibility Theory – An Approach to Computerized Processing of Uncertainty* (Plenum Press, New York, 1987)
- [Dubois '89] **D. Dubois, H. Prade**, Fuzzy sets, probability and measurement, *European Journal of Operational Research*, **40** 135-154 (1989)

- [Dubois '97] **D. Dubois, H. Prade**, A fuzzy set approach to case-based decision, in: R. Felix (Editor), *2nd European Workshop on Fuzzy Decision Analysis and Neuronal Networks for Management, Planning and Optimization*, 1-9, Dortmund, Germany (1997)
- [Dubois '98] **D. Dubois, H. Prade, F. Esteva, P. Garcia, L. Godo, R.L. de Mantaras**, Fuzzy set modelling in case-based reasoning, *International Journal of Intelligent Systems*, **13**, 345 - 373 (1998)
- [Delgado '87] **M. Delgado, S. Moral**, On the Concept of Possibility Probability Consistency, *Fuzzy Sets and Systems*, **21** 311-318 (1987)
- [Esser '97 A] **J. Esser, M. Schreckenberg**, Can Online-Simulations Solve the Problem?, in: M. Schreckenberg, D. E. Wolf (Editors), *Traffic and Granular Flow '97*, 181 -198 (Springer Verlag, Berlin, 1997)
- [Esser '97 B] **J. Esser**, *Simulation von Stadtverkehr auf der Basis zellularer Automaten*, Dissertation, Duisburg (1997)
- [Ebbinghaus '96] **H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas**, *Einführung in die mathematische Logik*, 4. Auflage (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1996)
- [Felix '94] **R. Felix**, Relationships between goals in mutiple attribute decision making, *Fuzzy Sets and Systems*, **67**, 47-52 (1994)
- [Fishburn '70] **P. Fishburn**, *Utility Theory for Decision Making* (John Wiley & Sons, New-York, 1970)
- [French '86] **S. French**, *Decision Theory* (Ellis Horwood Limited, 1986)
- [Gaines '78] **B.R. Gaines**, Fuzzy and probability uncertainty logics, *Information and Control*, **38**, 154-169 (1978)
- [Gödel '32] **K. Gödel**, Zum intuitionistischen Aussagekalkül, *Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, Math.-Naturwissensch. Klasse* **69**, 65-66
- [Gottwald '89] **S. Gottwald**, *Mehrwertige Logik: eine Einführung in Theorie und Anwendungen* (Akademischer Verlag, Berlin, 1983)
- [Gottwald '93] **S. Gottwald**, *Fuzzy sets and fuzzy logic* (Vieweg, Wiesbaden, 1993)
- [Hersh '76] **H. M. Hersh, A. A. Caramazza**, A Fuzzy Set Approach to Modifiers and Vagueness in Natural Language, *Journal of Experimental Psychology (General)* **105**, 245 -276
- [Hilbert '49] **D. Hilbert, W. Ackermann**, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 3. Auflage (Springer, Berlin, 1949)
- [Hilbert '72] **D. Hilbert, W. Ackermann**, *Grundzüge der theoretischen Logik*, 6. Auflage (Springer-Verlag, Berlin, 1972)

- [Higashi '83] **M. Higashi, G.J. Klir**, Measures of Uncertainty and Information based on Possibility Distributions, *Int. J. of General Systems*, **9**, 43-58 (1983)
- [Huber '77] **O. Huber**, *Zur Logik multidimensionaler Präferenzen in der Entscheidungstheorie* (Duncker & Humbolt, Berlin, 1977)
- [Hurwicz '51] **L. Hurwicz**, Optimality criteria for decision making under ignorance, *Cowles Commission Discussion Paper No. 370* (1951)
- [Kreiser '88] **L. Kreiser, S. Gottwald, W. Stelzner (Hrsg.)** *Nichtklassische Logik* (Akademischer Verlag, Berlin, 1988)
- [Klir '88] **G.J. Klir, T.A. Folger**, *Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information* (Prentice-Hall, New York, 1988)
- [Klir '95] **G.J. Klir, B. Yuan**, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications* (Prentice-Hall, New York, 1997)
- [Klir '97] **G.J. Klir, U.H. St. Clair, B. Yuan**, *Fuzzy Set Theory: Foundations and Applications* (Prentice-Hall, New York, 1997)
- [Kosko '90] **B. Kosko**, Fuzziness vs. Probability, *Int. J. General Systems* **17**, 221-240 (1990)
- [Kruse '95] **R. Kruse, J. Gebhard, F. Klawonn**, *Fuzzy Systeme* (B.G. Teubner, Stuttgart, 1995)
- [Laak '95] **O. van Laak**, *Mathematisches Modellieren von unscharfen Optimierungsproblemen* (Diplom-Arbeit, Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg, 1995)
- [Laak '97] **O. van Laak, G. Törner**, Optimal Routes in Dynamic Traffic Networks, in: M. Schreckenberg, D. E. Wolf (Editors), *Traffic and Granular Flow '97*, 221 -227 (Springer Verlag, Berlin, 1997)
- [Lai '92] **Y.-J. Lai, C.-L. Hwang**, *Fuzzy Mathematical Programming* (Springer, Berlin, 1992)
- [Laplace 1825] **P.S. Laplace** *Essai Philosophique sur les Probabilités*, 5 th Edition, Paris (1825), Übersetzung ins Englische (Dover Publ. New York, 1952)
- [Laux '95] **H. Laux**, Entscheidungstheorie, 2. Auflage (Springer-Verlag, Berlin, 1995)
- [Leberling '82] **H. Leberling**, On Finding Compromise Solutions in Multicriteria Problems using the Fuzzy Set Min-Operator, *Fuzzy Sets and Systems*, **6**, 105 - 118
- [Lukasiewicz '20] **J. Lukasiewicz**, O logice trójwartościowej, *Ruch Filozoficzny* **5**, 170-171 (1920)

- [Lukasiewicz '30 A] **J. Lukasiewicz**, Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls, *Comptes Rendus Séances Société et Lettres Varosovie*, cl. III, **23**, 51-77 (1930)
- [Lukasiewicz '30 B] **J. Lukasiewicz, A. Tarski**, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Comptes Rendus Séances Société et Lettres Varosovie*, cl. III, **23**, 30-50 (1930)
- [Manz '93] **K. Manz**, *Entscheidungstheorie* (Verlag Vahlen, München, 1993)
- [McColl 1897] **H. McColl**, Symbolic reasoning. II, *Mind*, N. S., **6**, 493-510 (1897)
- [McLane '79] **S. MacLane, G. Birkoff**, *Algebra* (Macmillan Publishing, New York, 1979)
- [Meyberg '80] **K. Meyberg**, *Algebra*, 2. Auflage (Carl Hanser Verlag, München, 1980)
- [Morderson '98] **J. N. Morderson, S. Premchand** *Fuzzy mathematics. An introduction for engineers and scientists* (Physica Verlag, Heidelberg, 1998)
- [Möllers '98] **Th. Möllers, O. van Laak**, On the global approximation and interpolation of locally described real valued functions, *Applied Mathematics and Computation*, **93**, 1-10 (1998)
- [Nagel '92] **K. Nagel, M. Schreckenberg**, A Cellular Automaton Model for Freeway Traffic, *J. Physique I France*, **2**, 2221 (1992)
- [Negoita '76] **C.V. Negoita, M. Sularia**, On Fuzzy Mathematical Programming and Tolerances in Planning, *Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research*, **3**, 3-15 (1976)
- [Neumann '28] **J. von Neumann**, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, *Mathematische Annalen*, **100**, 298-320 (1928)
- [Neumann '53] **J. von Neumann, O. Morgenstern**, *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten*, Titel der Originalausgabe: „Theory of games and economic behavior“, Princeton University Press, 1953, übersetzt von M. Leppig, 3., unveränderte Auflage (Physica-Verlag, Würzburg, 1973)
- [Novak '87] **V. Novak**, First order Fuzzy Logic, *Studia Logica*, **XLVI**, 87-107 (1987)
- [Orlovski '77] **S.A. Orlovski**, On Programming with Fuzzy Constraint Sets, *Kybernetes*, 197-201 (1977)
- [Pavelka '79] **J. Pavelka**, On Fuzzy Logic, *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, **25**, 45-52 (1979)
- [Peirce 1900-01] **Ch. S. Pierce**, *Collected Papers* (C. Hartshorne Hrsg.), Cambridge
- [Post '20] **E. L. Post**, Determination of all closed systems of truth tables, *Bulletin American Mathematical Society* **26**, 437 (1920)

- [Ramik '85] **J. Ramik, J. Rimanek**, Inequality Relation between Fuzzy Numbers and its use in Fuzzy Optimization, *Fuzzy Sets and Systems*, **16**, 123-138 (1985)
- [Rapoport '89] **A. Rapoport**, *Decision Theory and decision behaviour: normative and descriptive approaches* (Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 1989)
- [Reichenbach '32] **H. Reichenbach**, Wahrscheinlichkeitslogik, *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften Berlin*, Physikal.-mathemat. Klasse, 4776-488
- [Reinhardt '73] **F. Reinhardt, H. Soeder** *dtv-Atlas zur Mathematik, Band 1* (Deutscher Taschenbuch Verlag, München, 1974)
- [Rescher '69] **N. Rescher** *Many-Valued Logic* (McGraw-Hill Book Comp., New York, 1969)
- [Richter '70] **K.J. Richter** *Methoden der Optimierung, Band 2* (VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1970)
- [Rommelfanger '94] **H. Rommelfanger**, *Fuzzy Decision Support-Systeme*, 2. Auflage (Springer, Berlin, 1994)
- [Rutz '73] **P. Rutz** *Zweiwertige und mehrwertige Logik. Ein Beitrag zur Geschichte und Einheit der Logik.*, Band 1 (Ehrenwirth Verlag, München, 1973)
- [Savage '72] **L.J. Savage**, *The Foundations of Statistics*, 2. ed. (Dover Publ., New York, 1972)
- [Sakava '83] **M. Sakava**, Interactive Computer Programs for Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives, *International Journal of Man-Machine Studies*, **18**, 489-503 (1983)
- [Schneider '86] **H. Schneider**, *Mikroökonomie* (Verlag Vahlen, München, 1986)
- [Schweizer '60] **B. Schweizer, A. Sklar**, Statistical metric spaces, *Pacific Journal Mathematics*, **10**, 241-251 (1960)
- [Schweizer '61] **B. Schweizer, A. Sklar**, Associative functions and statistical triangle inequalities, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **8**, 169-186 (1961)
- [Slowinski '86] **R. Slowinski**, A Multicriteria Fuzzy Linear Programming Method for Water Supply System Development Planning, *Fuzzy Sets and Systems*, **20**, 217-237 (1986)
- [Smets '81] **Ph. Smets**, The Degree of Belief in a Fuzzy-Set, *Information Sciences*, **25**, 1-19 (1981)
- [Smets '82] **Ph. Smets**, Probability of a Fuzzy Event: An Axiomatic Approach, *Fuzzy Sets and Systems*, **7**, 153-164 (1982)

- [Sugeno '85] **M. Sugeno, T. Takagi**, Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modelling and Control, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **1**, 7-31 (1993)
- [Tanaka '84] **H. Tanaka, H. Ichihashi, K. Asai**, A Value of Information in FLP Problems via Sensitivity Analysis, *Fuzzy Sets and Systems*, **18**, 119-129
- [Tanaka '96] **K. Tanaka**, *An introduction to fuzzy logic for practical applications* (Springer-Verlag, New-York, 1996)
- [Tanaka '99] **H. Tanaka, P. Guo**, *Possibilistic Data Analysis for Operations Research* (Physika-Verlag, 1999)
- [Tarski '66] **A. Tarski**, *Einführung in die mathematische Logik*, 2. Auflage (Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1966)
- [Tsiporkova '97] **E. Tsiporkova-Hristoskova, B. De Baets, E. Kerre**, A fuzzy inclusion based approach to upper images under fuzzy multivalued mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, **85**, 93-108 (1997)
- [Wajsberg '31] **M. Wajsberg** Aksjomatycaja trójwartosciowego zdań, *Comptes Rendus Séances Société et Lettres Varsovie*, cl. III, **24**, 126-148 (1931). Englische Übersetzung in: *Logic Works* (Hrsg.: S.J. Surma)(Wroclaw, 1970)
- [Wald '50] **A. Wald**, *Statistical Decision Functions* (Chelsea, New York, 1950)
- [Weisbrod '95] **J. Weisbrod**, *Unscharfes Schließen* (Infix, Sankt Augustin, 1995)
- [Wolkenhauer '98] **O. Wolkenhauer**, *Possibility Theory with Applications to Data Analysis* (John Wiley & Sons, 1998)
- [Yager '78] **R.R. Yager**, Fuzzy Decision Making including unequal Objectives, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 87-95 (1978)
- [Yager '80] **R.R. Yager**, On a General Class of Fuzzy Connectives, *Fuzzy Sets and Systems*, **4**, 235-242 (1980)
- [Yager '83] **R.R. Yager**, An Introduction to Applications of Possibility Theory, *Human Systems Management*, **3**, 115-124 (1982)
- [Yang '91] **T. Yang, J.P. Innizio, H.-J. Kim**, Fuzzy programming with non-linear membership functions: Piecewise linear approximation, *Fuzzy Sets and Systems*, **41**, No.1, 39-53 (1991)
- [Zadeh '65] **L.A. Zadeh**, Fuzzy Sets, *Information and Control*, **8**, 338-353 (1965)
- [Zadeh '68] **L.A. Zadeh**, Probability Measures of Fuzzy Events, *Journ. Math. Anal. and Appl.*, **23**, 421-427 (1968)
- [Zadeh '78] **L.A. Zadeh**, Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3-28 (1978)

- [Zadeh '81] **L.A. Zadeh**, Possibilistic Theory and Soft Data Analysis, in: L. Cobb, R. Thrall, Hg., *Mathematical Frontiers of Social and Policy Sciences*, 69-129 (Westview Press, Boulder, 1981)
- [Zimmermann '75] **H.-J. Zimmermann**, Optimale Entscheidungen bei unscharfen Problembeschreibungen, *Zeitschrift für Betriebswirtschaftliche Forschung*, **27**, 455-460 (1975)
- [Zimmermann '76] **H.-J. Zimmermann**, Optimale Entscheidungen bei mehreren Zielkriterien, *Zeitschrift für Organisation*, **45**, 455-460 (1976)
- [Zimmermann '82] **H.-J. Zimmermann, P. Zysno**, Zugehörigkeitsfunktionen: Modellierung, empirische Bestimmung und Verwendung in Entscheidungsmodellen, Arbeitsbericht 1. Teil des DFG-Projektes ZI 104/15-1
- [Zimmermann '85] **H.-J. Zimmermann**, Applications of Fuzzy Set Theory to Mathematical Programming, *Information Science*, **36**, 29-58 (1985)
- [Zimmermann '84] **H.-J. Zimmermann, P. Zysno**, Latent Connectives in Human Decision Making, *Fuzzy Sets and Systems*, **4**, 37-51
- [Zimmermann '87] **H.-J. Zimmermann**, *Fuzzy Sets, Decision Making, and Expert Systems* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 1987)
- [Zimmermann '91] **H.-J. Zimmermann, L. Gutsche**, *Multi-Criteria Analyse* (Springer-Berlag, Berlin, 1991)

Ich versichere hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Duisburg, den 2. März 2000

Oliver van Laak