

Kapitel 5

Anwendungen der Wavelet-Transformation in Übertragungssystemen

Die in den vorangegangenen Kapiteln herausgestellten Eigenschaften der Wavelet-Transformation und der korrespondierenden Filterbänke lassen Anwendung der Wavelet-Theorie im Kontext der digitalen Übertragungstechnik sinnvoll erscheinen. Flexible, verbunden zeitlich-spektrale Analyse- und Synthesemöglichkeiten sind gerade in Übertragungssystemen zur Übertragung digitalisierter analoger Signale von außerordentlicher Bedeutung. Hier geben das mit der Zeit variierende spektrale Verhalten analoger Signalquellen und zeitlich sich ändernde spektrale Eigenschaften des physikalischen analogen Übertragungskanal feste Randbedingungen vor. Diese bilden eine bestimmende Größe bei der Sender- und Empfängerkonzeptionierung. Entsprechende Anpassungsmaßnahmen zur Optimierung des Übertragungsverhaltens werden häufig am effektivsten algorithmisch auf digitaler Signalverarbeitungsebene durchgeführt.

Wie in Kapitel 4 ausgeführt, verknüpft die Wavelet-Theorie Eigenschaften analoger Signale und zeit- und wertkontinuierlicher Elementarfunktionen mit quantitativen Aussagen über Berechnungen auf zeitdiskreter Ebene, die auf Filterbankanwendungen von konjugierten Quadratur-Spiegel-Filtern beruhen. Beispielsweise verbindet die Gleichung (4.157) die lokale Differenzierbarkeit eines analogen Signals mit dem Konvergenzverhalten der erzeugten Entwicklungskoeffizienten. Vergleichbar einfache Aussagen sind für diskrete Filterbankanwendungen ohne analoge Interpretation nicht bekannt [99]. Bei dem Entwurf von Filterbänken, die mit Wavelet-Funktionensystemen in Verbindung stehen und darauf basierenden Algorithmen müssen daher die Eigenschaften des analogen Signals berücksichtigt werden, das mit der der Filterbank zugeführten Sequenz korrespondiert. Die Zuordnung von Sequenz zu analogem Signal ist dabei durch Filterung des analogen Signals mit der Skalierungsfunktion der zugrunde liegenden Multi-Skalen-Analyse und anschließender Abtastung entsprechend Gleichung (4.106) gegeben. Die der Filterbank zugeführte Sequenz ist demnach als Approximationssequenz eines analogen Signals zu interpretieren. Auf die Approximationssequenz folgend angewendete Filterbankoperationen und die algorithmische Weiterverarbeitung der

Entwicklungskoeffizienten auf digitaler Ebene haben dann auch eine direkte Interpretation auf analoger Ebene. Der Zusammenhang von analoger und diskreter Signalbeschreibung und damit korrespondierend die Verbindung von Wavelets und Filterbänken ist dabei durch die in Kapitel 4 diskutierte Multi-Skalen-Analyse gekennzeichnet.

Die Wavelet-Transformation ist demnach ein besonders geeignetes, flexibel anpaßbares Werkzeug zur digitalen Verarbeitung analoger Signale. Wie aus der vergleichenden Betrachtung in den Kapiteln 2 und 3 hervorging, ermöglicht sie oft eine vorteilhaftere Signalbeschreibung als konventionelle Zeit-Frequenz-Transformationen. Ist die Konstant-Q-Charakteristik der Wavelet-Transformation nicht angemessen, so existiert mit der in Abschnitt 4.8 diskutierten Wavelet-Paket-Transformation eine Erweiterung, die sowohl die Wavelet-Transformation selbst, als auch Kurzzeit-Fourier-Transformationen ähnliche Signalzerlegung als Sonderfälle enthält. Über die Möglichkeiten zur Anpassung der Transformation an die verbunden zeitlich-spektralen Signaleigenschaften hinaus, können die Elementarfunktionen auch an die Glattheit der zu verarbeitenden Signale angepaßt werden. Dieser Aspekt ist für die in diesem Kapitel behandelte Signalkompression von besonderer Bedeutung. Wie die gewünschten Elementarfunktioneneigenschaften bei der Konstruktion der korrespondierenden Filterbank, die den Berechnungen auf digitaler Ebene zugrunde liegt, berücksichtigt werden können und welche Randbedingungen weiter eingehalten werden müssen, ist in Abschnitt 4.7 beschrieben.

Somit sind die in diesem Kapitel vorgestellten Algorithmen in erster Linie zur Verarbeitung digitalisierter analoger Signale wie beispielsweise biomedizinischer Signale oder Sprache gedacht.

5.1 Schematische Darstellung eines digitalen Übertragungssystems

Die Abbildung 5.1 zeigt das Blockdiagramm eines digitalen Nachrichtenübertragungssystems, das aus vergleichbaren schematischen Darstellungen aus [11, 26, 112] abgeleitet ist. Eine beliebige analoge Nachrichtenquelle erzeugt hier ein analoges elektrisches Signal $s_{\text{akq}}(t)$ als Abbild einer akquirierten, gewandelten physikalischen, chemischen oder elektrischen Größe, das nach Tiefpaßfilterung und Abtastung in ein als zeitdiskret aber wertkontinuierlich angenommenes abgetastetes Signal $s(n)$ überführt wird. Allgemein kann ein abgetastetes Signal $s(n)$ immer einer diskreten Nachrichtenquelle ohne Berücksichtigung oder Existenz eines ursprünglichen analogen Signals zugeordnet werden. Die folgend auf das Signal $s(n)$ angewendete Quellencodierung nutzt statistische Bindungen der Abtastwerte und fehlertolerierende Eigenschaften der Nachrichtensenke aus, um das Quellensignal von redundanten Anteilen und von irrelevanten Komponenten, die von der Nachrichtensenke nicht wahrnehmbar sind, zu befreien. Wichtiger Bestandteil dieser Operation ist eine Wertequantisierung, so daß mit dem digitalen Signal $s_{\text{quell}}(n)$ der Übertragungsrate I_{quell} eine zeit- und wert-

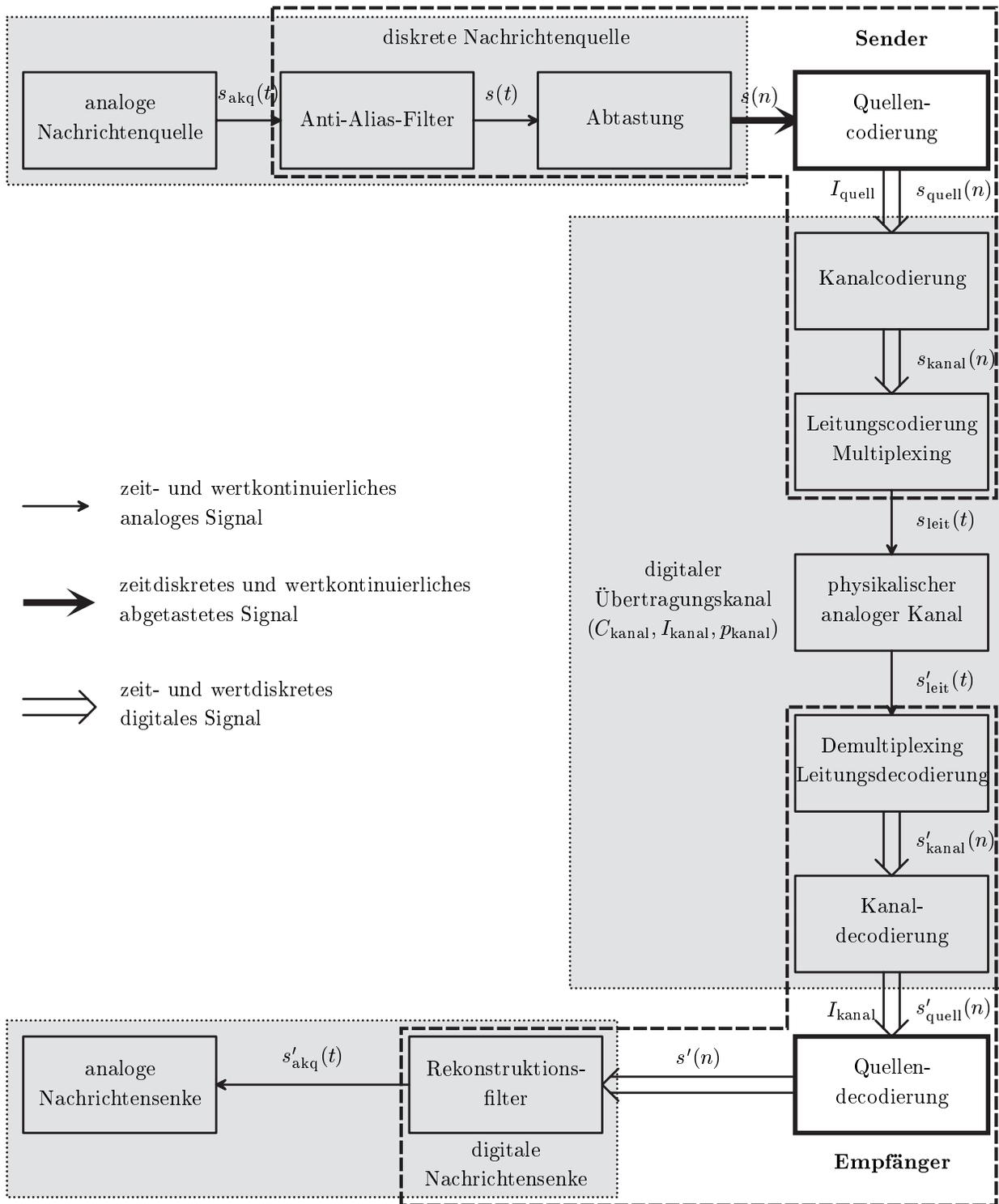


Abbildung 5.1: Das Blockschema eines digitalen Übertragungssystems nach [11, 26, 112]. Die Signalverarbeitungsblöcke mit weißem Hintergrund und fetter Umrandung (Quellen-codierung und Quellendecodierung) sind in dieser Arbeit von besonderer Bedeutung, da hier ein Wellenformcodierungsverfahren zum Einsatz kommt, das auf der Wavelet-Transformation basiert.

diskrete reduzierte Beschreibung des Signals $s(n)$ erzeugt wird. Geht das Signal $s(n)$, wie hier angenommen, aus einem analogen Signal hervor, so wird die Quellencodierung auch als Wellenformcodierung bezeichnet [11]. Der Abschnitt 5.4 stellt neuartige Anwendungen der Wavelet-Transformation für diesen Spezialfall der Quellencodierung vor. Die Kanalcodierung fügt dem quellcodierten Signal $s_{\text{quell}}(n)$ wieder kontrolliert Redundanz hinzu, so daß die inverse Operation der Kanaldecodierung in der Lage ist, Übertragungsfehler zu erkennen und/oder zu beheben [5]. Das erzeugte Signal $s_{\text{kanal}}(n)$ ist im allgemeinen eine binärwertige Sequenz. Aufgabe der Leitungscodierung ist es, dieser binärwertigen Sequenz nach einem festen Schema analoge Signale $s_{\text{leit}}(t)$ zuzuordnen, die an die Eigenschaften des physikalischen Kanals angepaßt sind. In Multi-Teilnehmer-Systemen sind bei diesem Abbildungsvorgang zusätzliche Randbedingungen zu berücksichtigen. Es muß hier sichergestellt sein, daß jedem Teilnehmer für die Dauer seiner Übertragung exklusive Kanalressourcen zur Verfügung gestellt werden. Dieser Zuordnungsvorgang wird als Multiplexing bezeichnet und ist hier als Bestandteil der Leitungscodierung angenommen.

Die komplizierte und umfangreiche Beschreibung einer Hochfrequenzstrecke als physikalischer analoger Kanal ist im wesentlichen für die Gestaltung der Leitungscodierung von Interesse [5]. Für das restliche System kann der physikalische Kanal zusammen mit der Leitungscodierung, oder wie hier angenommen mit Leitungs- und Kanalcodierung, vorteilhaft als digitaler Übertragungskanal modelliert werden. Das Verhalten des so definierten digitalen Übertragungskanals wird dann durch die Kanalkapazität C_{kanal} oder durch Übertragungsrate I_{kanal} und Fehlerrate p_{kanal} beschrieben.

Die Signalverarbeitungsblöcke Demultiplexing/Leitungsdecodierung, Kanaldecodierung und Quellendecodierung invertieren die jeweils zugehörigen Codierschritte.

Eine Aufteilung der Signalverarbeitungsschritte wie in Abbildung 5.1 angenommen, hat den Vorteil, daß jedem Coder/Decoder-Paar unabhängig von allen anderen Coder/Decoder-Paaren eine fest definierte Aufgabe zugeordnet werden kann. Durch eine Optimierung jedes einzelnen Blockpaares kann die Optimalität des gesamten Systems in guter Näherung erreicht werden und die Entwurfsproblematik der einzelnen Blockpaare und des gesamten Systems ist in ihrer Komplexität erheblich reduziert.

Im folgenden Abschnitt sollen Aufgaben und Ziele von Wellenformcodierung und -decodierung definiert werden, die die in Abschnitt 5.4 vorgestellten Algorithmen zu erfüllen bzw. zu erreichen haben.

5.2 Ziele der Wellenformcodierung in Übertragungssystemen

Unabhängig von der detaillierten Aufgabenstrukturierung innerhalb des spezifischen Systemkonzeptes ist das übergeordnete Ziel eines aus Sender und Empfänger nach Abbil-

dung 5.1 bestehenden Nachrichtenübertragungssystem in der optimalen Abbildung des Quellensignals $s(n)$ auf das Senkensignal $s'(n)$ unter Berücksichtigung der für die Übertragung des Signals $s_{\text{leit}}(t)$ zur Verfügung stehenden Kanalressourcen Übertragungsdauer und Bandbreite zu sehen. Um dieses primäre Systemziel zu erreichen, ist es sinnvoll, an die in der Abbildung 5.2 detaillierter dargestellte Wellenformcodierung und -decodierung die folgenden Maximalanforderungen zu stellen [11]:

1. Für die Abbildung des Signals $s(n)$ auf das Signal $s'(n)$ mit einem vorgegebenen Verzerrungsgrad D soll die Wellenformcodierung die minimale Rate $I_{\text{quell}}(D) = I_{\text{kanal}}$ benötigen.
2. Das der digitalen Nachrichtsenke zugeführte Signal $s'(n)$ soll für eine vorgegebene Übertragungsrate $I_{\text{kanal}} = I_{\text{quell}}$ eine minimale Verzerrung $D(I_{\text{quell}})$ gegenüber dem zu übertragenden Signal $s(n)$ aufweisen.

Eine optimierte Lösung der Wellenformcodierung strebt demnach eine Minimierung der Rate I_{quell} oder der Verzerrung D an. Für stationäre Verhältnisse, d. h. es liegen ein stationäres Quellensignal $s(n)$ und eine konstante Übertragungsrate I_{kanal} vor, ist es nicht notwendig, die Anforderungen 1. und 2. voneinander zu unterscheiden. Für den in dieser Arbeit betrachteten Fall einer nichtstationären Nachrichtenquelle mit zeitvariantem Informationsfluß und bedarfsabhängig einstellbarer Übertragungsrate des digitalen Kanals, ist eine Unterscheidung allerdings sinnvoll.

Ist die Übertragungsrate I_{kanal} fest vorgegeben, so wird die 2. Anforderung gestellt und eine optimierte Wellenformcodierung erzeugt ein Senkensignal $s'(n)$ mit minimaler aber zeitvarianter Verzerrung D in Abhängigkeit des sich ändernden Informationsgehaltes der Nachrichtenquelle. I_{kanal} ist in diesem Fall die maßgebliche Größe, die das Adaptionverhalten des Codierungsalgorithmus mit dem Ziel einer konstanten Quellenrate $I_{\text{quell}} = I_{\text{kanal}}$ bestimmt.

Ist dagegen die Verzerrung D des Signals $s'(n)$ fest vorgegeben, fordert z. B. die Nachrichtsenke ein Signal mit einer bestimmten konstanten Qualität, so wird die 1. Anforderung an die Quellencodierung gestellt. In diesem Fall ist die konstant zu haltende Verzerrung D die maßgebende Größe für das Adaptionverhalten der Wellenformcodierung. Es wird ein Signal $s_{\text{quell}}(n)$ mit einer zeitvarianten minimalen Rate I_{quell} erzeugt, die abhängig vom sich ändernden Informationsgehalt der Nachrichtenquelle ist. Der digitale Übertragungskanal sollte hier eine zeitvariante optimale Übertragungsrate $I_{\text{kanal}} = I_{\text{quell}}$ zur Verfügung stellen, da das System mit der kleinstmöglichen konstanten Übertragungsrate $I_{\text{kanal}} \geq \max\{I_{\text{quell}}\}$ zumeist überdimensioniert ist.

Die in Abschnitt 5.4 vorgestellten Verfahren zur Wellenformcodierung sind für die Übertragung nichtstationärer Signale aus Nachrichtenquellen mit zeitvariantem Informationsfluß über einen digitalen Kanal mit zeitvarianter Übertragungsrate konzipiert. Exemplarisch sollen diese Verfahren hier für Elektrokardiogramm- (EKG) Signale, auf die im Abschnitt 5.3 näher eingegangen wird, dimensioniert und getestet werden.

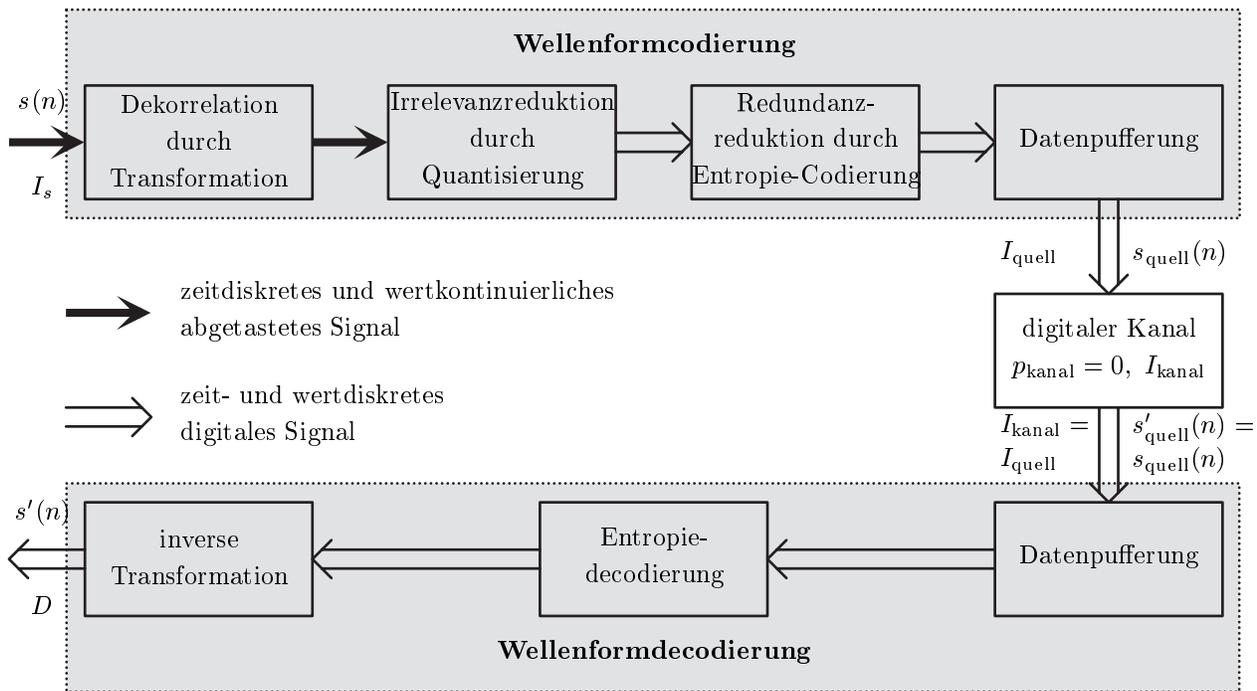


Abbildung 5.2: *Prinzipieller Aufbau von Wellenformcodierung und -decodierung.* Der Transformationsblock dekorreliert das Signal $s(n)$ mit dem Informationsfluß I_s und erzeugt so eine energetische Konzentration in den Entwicklungskoeffizienten. Folgend wird das transformierte Signal quantisiert und damit in eine fehlerbehaftete, durch die Verzerrung D gekennzeichnete wertdiskrete Darstellung überführt. Die verlustlose Entropie-Codierung entzieht den quantisierten Entwicklungskoeffizienten Redundanz, indem es eine an die Verteilungsdichtefunktion angepasste binäre Darstellung erzeugt. Der Datenpuffer speichert den Datenstrom zwischen, um eine gemittelte konstante Datenrate am Ausgang der Wellenformcodierung zu erreichen. Das so erzeugte quellcodierte Signal s_{quell} hat die Rate I_{quell} und wird über den digitalen Kanal mit $p_{\text{kanal}} = 0$ und $I_{\text{kanal}} = I_{\text{quell}}$ verlustlos übertragen. Die Invertierung der Entropie-Codierung und der Transformation führt zu dem Signal $s'(n)$ mit der einzig durch Quantisierung verursachten Verzerrung D .

Für die weitere Betrachtung kann die Quellenrate der Übertragungsrate gleichgesetzt werden, so daß folgend $I = I_{\text{kanal}} = I_{\text{quell}}$ gilt. Der digitale Kanal ist mit $p_{\text{kanal}} = 0$ als fehlerfrei angenommen und ist somit vollständig durch die Übertragungsrate I gekennzeichnet. Das erste Verfahren hat entsprechend der Anforderung 1. die Minimierung der Rate $I(D)$ für eine vorgegebene Verzerrung in einem Intervall $D \in (D_{\text{min}}, D_{\text{max}})$ zum Ziel, während das zweite Verfahren entsprechend Anforderung 2. eine möglichst geringe Verzerrung $D(I)$ für feste Übertragungsraten $I \in (I_{\text{min}}, I_{\text{max}})$ anstrebt. Wellenformcodierung und -decodierung haben für beide Verfahren den in Abbildung 5.2 dargestellten prinzipiellen Aufbau. Der Kombination von Transformations- und Quantisierungsblock kommt dabei die größte Bedeutung zu, da hier die Adaption an die nichtstationären Signaleigenschaften geleistet wird, so daß folgend stationäres Signalverhalten angenommen werden kann. Die situationsabhängige Anpassung

der Rate I oder der Qualität des Signals $s'(n)$, die durch die Verzerrung D gekennzeichnet ist, wird dabei durch eine nichtlineare Schwellwertentscheidung im Bildbereich der Wavelet-Paket-Transformation erreicht.

5.3 EKG-Signale: nichtstationäre Signale mit zeitvariantem Informationsgehalt

Die vorgestellten Algorithmen haben die Anwendung auf nichtstationäre Signalsequenzen $s(n)$ mit zeitlich variierendem Informationsfluß und damit zeitlich variierendem Übertragungsratenbedarf zum Ziel. Nach Abbildung 5.1 geht eine solche Sequenz aus dem elektrischen Abbild $s_{\text{akq}}(t)$ einer physikalischen, chemischen oder elektrischen Größe hervor. An der Erzeugung dieses Signals sind dabei zumeist mehrere verschiedenartige grundlegende Prozesse beteiligt, deren Anteil am resultierenden Signal $s_{\text{akq}}(t)$ zeitlich schwankt oder deren Eigenschaften sich mit der Zeit verändern. Hieraus resultiert schließlich der nichtstationäre Charakter der Sequenz $s(n)$. Bei der Konzeptionierung eines spezifischen Wellenformcodierungsalgorithmus, der für die Anwendung auf Signale einer bestimmten Klasse optimiert ist, sollte dieser Erzeugungsmechanismus berücksichtigt werden um eine außerordentliche Leistungsfähigkeit zu erreichen.

Die in Abschnitt 5.4 vorgestellten Wellenformcodierungsverfahren sind für die Anwendung auf EKG-Signale optimiert. EKG-Signale zeichnen sich auch durch die für viele nichtstationäre Signale typische Eigenart aus, daß an ihrer Entstehung mehrere grundlegende und verschiedenartige Prozesse beteiligt sind, deren Anteile am resultierenden Signal mit der Zeit schwanken [113–115]. Das resultierende Signal beinhaltet somit Abschnitte, die von verschiedenen grundlegenden Prozessen dominiert sind sowie transiente Signalverläufe. Die Abbildungen 5.3 und 5.4 zeigen beispielhaft Ausschnitte aus EKG-Signalen die abwechselnd Signalabschnitte beinhalten, denen unterschiedliche biomedizinische Entstehungsprozesse und damit auch unterschiedliche statistische Eigenschaften zuzuordnen sind.

Alle in dieser Arbeit dargestellten und verarbeiteten EKG-Signale sind dem Verzeichnis `mitdb` der „MIT-BIH Arrhythmia Database“ [116] entnommen, die im Bereich der EKG-Datenbanken zu den umfangreichsten und etabliertesten frei verfügbaren Datensammlungen gehört. Die 48 ca. dreißigminütigen EKG-Aufzeichnungen, die sich in diesem Verzeichnis befinden sind mit einer Abtastrate $f_{\text{abt}} = 360 \text{ s}^{-1}$ bei einer Auflösung von 11 Bit über einen Spannungsbereich von $\pm 5 \text{ mV}$ digitalisiert. Außerdem ist jeder QRS-Komplex (Q,R und S bezeichnen die wichtigsten Zacken eines EKG-Zyklus, wie in der Abbildung 5.3 am Beispiel eines n -Zyklus gezeigt) mit einer medizinische Einschätzung kommentiert, die in den Abbildungen 5.3 und 5.4 übernommen wurde. Physiologische Zyklen sind hier mit einem n („normal beat“), pathophysiologische Zyklen mit p („paced beat“), f („fusion of paced and normal beat“) und v („premature ventricular contraction“) gekennzeichnet. Die medizinische Bedeutung und Interpretation der EKG-Signale ist in dieser Arbeit allerdings nicht

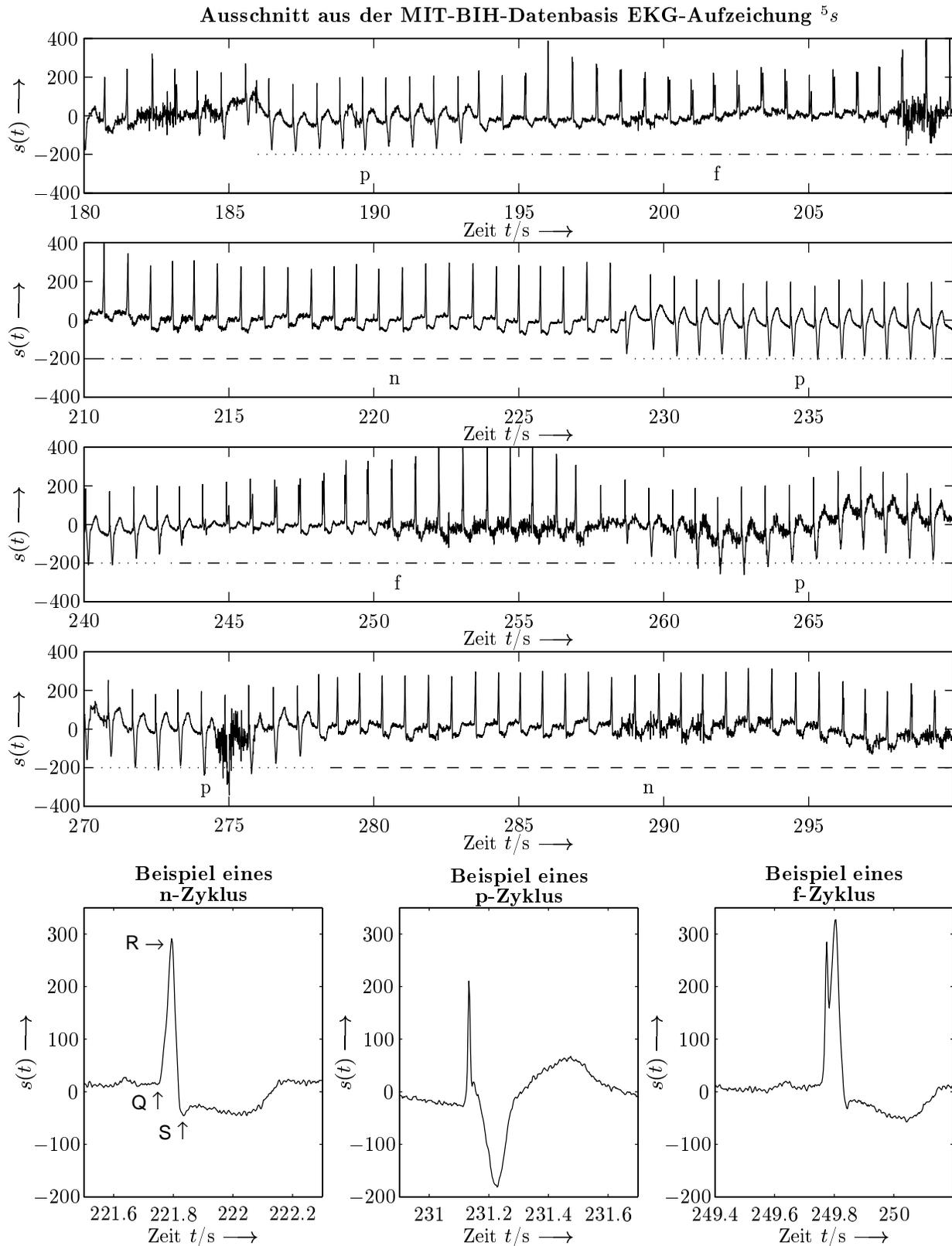


Abbildung 5.3: Ausschnitt der Minuten 3 bis 5 aus der Aufzeichnung mit dem Index $j = 5$. Deutlich zu erkennen ist, daß Signalabschnitte, die ausschließlich aus n-, p- oder f-Zyklen bestehen, einander abwechseln. Alle drei Zyklen haben dabei signifikant unterschiedliche Signalmorphologien, wie anhand der Beispiele in den unteren Abbildungen zu erkennen ist.

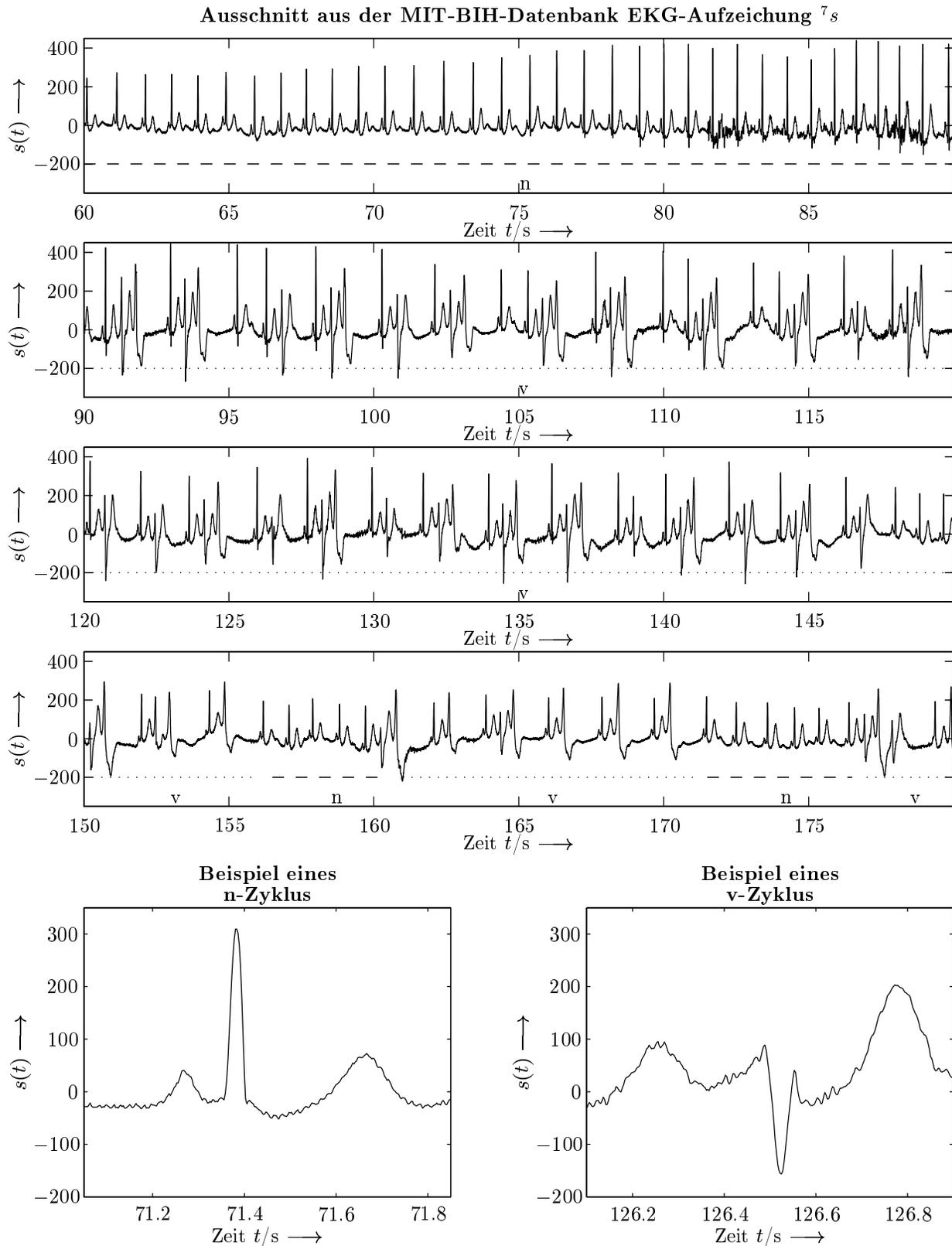


Abbildung 5.4: Ausschnitt der Minuten 1 bis 3 aus der Aufzeichnung mit dem Index $j = 7$. Hier beinhalten die mit 'v' gekennzeichneten Signalabschnitte n- und v-Zyklen nahezu abwechselnd. Auch n- und v-Zyklen unterscheiden sich deutlich voneinander, wie anhand der Beispiele zu erkennen ist.

von Bedeutung. Demzufolge werden die Abkürzungen n, p, f, v lediglich als Bezeichnungen für Signalabschnitte und EKG-Zyklen mit unterschiedlichen statistischen Eigenschaften verwendet.

Qualitativ läßt sich schon anhand der in den Abbildungen 5.3 und 5.4 dargestellten EKG-Signale erkennen, daß ein nicht adaptives Kompressionsverfahren deutlich von einer optimalen Lösung abweicht. Weiter ist auch erkennbar, daß innerhalb eines Signalabschnitts die einzelnen Zyklen in guter Näherung als Realisation eines stationären, vektorwertigen Prozesses angenommen werden können. Für die Signalkompression liegt es demnach nahe, die EKG-Sequenz in einzelne aufeinanderfolgende Segmente zu unterteilen, wobei jedes Segment aus einem Zyklus besteht. Da der QRS-Komplex ein relativ charakteristisches Zyklusmerkmal ist, werden dabei die einzelnen Segmente so ausgerichtet, daß jedes die R-Zacke in der Mitte enthält. Deutet man diese Segmente als Vektoren, so läßt sich eine EKG-Sequenz ohne Informationsverlust auch als Abfolge von Vektoren darstellen. Hier sei weiter angenommen, daß diese Vektoren alle die selbe Länge N_{qrs} haben.

Auf der Grundlage dieser vektoriellen Signalbeschreibung sollen die 48 EKG-Signalaufzeichnungen $^j s$, $j = 1, \dots, 48$ aus dem Verzeichnis `mitdb` der MIT-BIH Arrhythmia Database für den Großteil der folgenden Betrachtungen als Realisationen

$$^j \mathbf{s} = [^j \mathbf{s}_1, ^j \mathbf{s}_2, \dots, ^j \mathbf{s}_i, \dots, ^j \mathbf{s}_\chi], \quad j = 1, \dots, 48 \quad (5.1)$$

eines vektorwertigen Zufallsprozesses

$$\mathbf{X}_{s,\text{ekg}} = [\mathbf{X}_{s_1,\text{ekg}}, \mathbf{X}_{s_2,\text{ekg}}, \dots, \mathbf{X}_{s_i,\text{ekg}}, \dots, \mathbf{X}_{s_\chi,\text{ekg}}] \quad (5.2)$$

betrachtet werden [25, 117]. Für die Realisationen der vektorwertigen Zufallsvariablen $\mathbf{X}_{s_i,\text{ekg}}$ gilt dann entsprechend

$$^j \mathbf{s}_i = [^j s_{i,1}, ^j s_{i,2}, \dots, ^j s_{i,n}, \dots, ^j s_{i,N_{\text{qrs}}}]^T. \quad (5.3)$$

Die Zuordnung der Indizes $j = 1, \dots, 48$ zu den verschiedenen EKG-Aufzeichnungen, die sich im Verzeichnis `mitdb` der CD-ROM befinden, kann der Tabelle B.1 aus dem Anhang B entnommen werden.

Zur Einschätzung des zeitvarianten Informationsgehaltes einer EKG-Quelle sind die folgenden informationstheoretischen Signalbetrachtungen notwendig.

Die mögliche Leistungsfähigkeit eines fehlerlosen Quellencodierverfahrens wird nach dem Quellcodierungssatz von Shannon durch den mittleren Informationsgehalt pro Zeichen, der sogenannten Entropie der Nachrichtenquelle, bestimmt [11, 26, 112]:

Es sei eine wert- und zeitdiskrete stationäre Quelle gegeben, die das stochastische Signal $s(n)$ erzeugt, über ein Quellenalphabet $\mathcal{Q}_s = \{x_1, x_2, \dots, x_{N_{\text{alp},s}}\}$ des endlichen Umfangs $N_{\text{alp},s}$ mit den möglichen Amplitudenwerten $x_1, x_2, \dots, x_{N_{\text{alp},s}}$ verfügt und für die ξ aufeinanderfolgende Abtastwerte statistische Bindungen untereinander aufweisen. Dabei wird

$$\mathbf{x}_m = [x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n}, \dots, x_{m,\xi}]^T, \quad x_{m,n} \in \mathcal{Q}_s \quad (5.4)$$

als die m -te der $N_{\text{alp},s}^\xi$ möglichen unterschiedlichen Zeichenfolgen der Länge ξ mit der Wahrscheinlichkeit $p_s(\mathbf{x}_m)$ erzeugt. Die Entropie der Nachrichtenquelle oder der mittlere Informationsgehalt eines Zeichen bzw. Abtastwertes in einer solchen Sequenz $s(n)$ ist dann durch

$$H_s = -\frac{1}{\xi} \sum_{m=1}^{N_{\text{alp},s}^\xi} p_s(\mathbf{x}_m) \log_2 p_s(\mathbf{x}_m) \quad (5.5)$$

und die Redundanz durch

$$\Delta H_s = H_{0,s} - H_s \quad (5.6)$$

mit dem Entscheidungsgehalt

$$H_{0,s} = \log_2 N_{\text{alp},s} \quad (5.7)$$

gegeben. Für den Informationsfluß der Quelle gilt bei einer Abtastrate $f_{\text{abt},s}$

$$I_s = f_{\text{abt},s} H_s. \quad (5.8)$$

Nach dem Shannonschen Quellcodierungssatz ist zur fehlerfreien Codierung eines Signals $s(n)$ aus einer solchen Nachrichtenquelle mit dem Informationsfluß I_s mindestens eine Rate $I = I_s$ notwendig. Erreicht ein Codiervorgang diese Optimalität, so ist über die Abbildung $s(n) \rightarrow s_{\text{quell}}(n)$ mit $H_{s_{\text{quell}}} = H_{0,s_{\text{quell}}}$ und $I = I_s$ eine redundanzfreie Beschreibungsform für die Signale $s(n)$ dieser Quelle gefunden. Aus den Gleichungen (5.5) und (5.7) geht hervor, daß ein solches optimales Quellencodiervorgang eine statistisch unabhängige und damit unkorrelierte und gleichverteilte Zeichenfolge erzeugt. Dieses Ergebnis läßt sich auch auf Wellenformcodierungen übertragen, die für eine Verzerrung $D > 0$ eine optimale Signalkompression erreichen. Notwendige Voraussetzung für die Optimalität eines Quellencodiervorgangs ist allgemein, daß die erzeugte Sequenz unkorreliert und gleichverteilt ist.

Für die konzeptionelle Gestaltung eines adaptiven Wellenformcodierungsvorgangs, das zur Kompression von Signalen mit zeitvariantem Informationsfluß dient, ist demnach das zeitabhängige korrelative Signalverhalten und die zeitabhängige Werteverteilung von Bedeutung. Sie stehen mit dem zeitvarianten Informationsgehalt des zu komprimierenden Signals $s(n)$ in Verbindung und beeinflussen damit schließlich auch Verzerrung D und Rate I des quellcodierten Signals $s_{\text{quell}}(n)$.

Die Abbildung 5.5 vermittelt einen qualitativen Eindruck von der Zeitabhängigkeit der korrelativen EKG-Signaleigenschaften anhand des Periodogramms $P_{ss}(e^{j\omega})$ als zeitabhängige Schätzung des Leistungsdichtespektrums $S_{ss}(e^{j\omega})$. Das Leistungsdichtespektrum $S_{ss}(e^{j\omega})$ eines stationären Prozesses ist mit der Autokorrelationsfunktion $R_{ss}(m)$ dieses Prozesses über die Fourier-Transformation verknüpft. Es gilt

$$S_{ss}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{R_{ss}(m)\}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{ss}(m) e^{-jm\omega}, \quad (5.9)$$

$$R_{ss}(m) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{ss}(e^{j\omega})\}(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{ss}(e^{j\omega}) e^{jm\omega} d\omega. \quad (5.10)$$

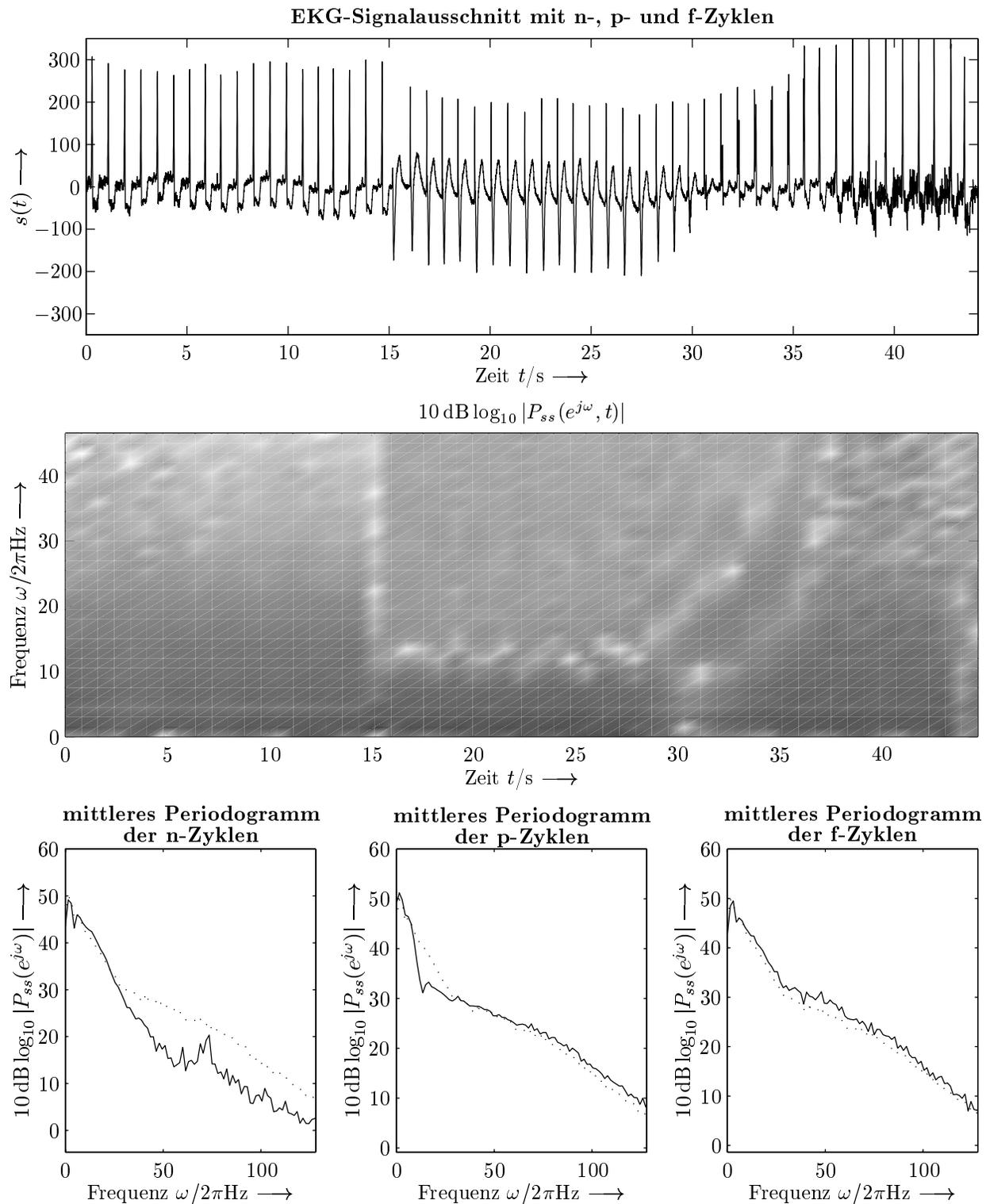


Abbildung 5.5: Ein Signalausschnitt aus der Musterfunktion s , der jeweils 19 n-, p- und f-Zyklen enthält, und die daraus resultierenden Periodogramme nach Gleichung (5.12). Im mittleren Bild sind die Periodogramme der einzelnen Zyklen über die Zeit aufgetragen, so daß eine verbundene zeitlich-spektrale Darstellung entsteht. Die unteren drei Bilder zeigen gemittelte Periodogramme für n-, p- und f-Zyklen als durchgezogene Linien und das über alle 57 beteiligten Zyklen gemittelte Periodogramm als gestrichelte Linie.

Das Ausmaß der statistischen Abhängigkeit benachbarter Abtastwerte der Sequenz $s(n)$ kann dabei aus dem Verlauf der Leistungsdichtefunktion $S_{ss}(e^{j\omega})$ über das Maß der spektralen Glätte

$$\gamma_s^2 = \frac{e^{\frac{(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \log_e S_{ss}(e^{j\omega}) d\omega}}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{ss}(e^{j\omega}) d\omega}}}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{ss}(e^{j\omega}) d\omega}} \quad \text{mit } 0 \leq \gamma_s^2 \leq 1 \quad (5.11)$$

abgeleitet werden [11]. Stark korrelierte Sequenzen haben ein γ_s^2 nahe 0 und Weißes Rauschen ein $\gamma_s^2 = 1$ zur Folge. Der Kehrwert der spektralen Glätte γ_s^{-2} ist ein Maß für die Vorhersagbarkeit der Wellenform, so daß große γ_s^{-2} Werte Signale kennzeichnen, die einen großen Redundanzanteil besitzen, der auf korrelative Bindungen zwischen den Abtastwerten zurückzuführen ist.

Der Darstellung in Abbildung 5.5 liegt die oben beschriebene Interpretation des EKG-Signals als vektorwertiger Zufallsprozeß zugrunde. Das obere Bild zeigt einen Ausschnitt aus der Musterfunktion 5s . Der ausgewählte Signalausschnitt enthält n-, p-, und f-Zyklen zu jeweils gleichen Teilen. Die verbunden zeitlich-spektrale Darstellung im mittleren Bild ergibt sich hier aus dem Auftragen der Periodogramme der Zufallsvariablenrealisationen ${}^5\mathbf{s}_i$, $i = 1, \dots, 57$ über die Zeit. Das Periodogramm ist dabei durch

$$P_{ss}(e^{j\omega}, i) = \frac{1}{N_{\text{qrs}}} |\hat{s}_i(e^{j\omega})|^2 \quad (5.12)$$

mit

$$\hat{s}_i(e^{j\omega}) = \mathcal{F}_{\text{FFT}}\{\mathbf{s}_i\}(e^{j\omega}) \quad (5.13)$$

definiert. \mathcal{F}_{FFT} kennzeichnet hier die Anwendung der schnellen Fourier-Transformation auf einen Vektor. Im mittleren Bild ist $t/s \approx iN_{\text{qrs}}$ gesetzt. Die Periodogramme in den unteren drei Bildern ergeben sich durch Mittelung über jeweils 19 aufeinanderfolgende Repräsentationen von n-, p- und f-Zyklen. Die gestrichelte Linie stellt in allen drei Bildern die Periodogramm-Mittelung über alle beteiligten 57 Zyklen dar. An den verbunden zeitlich-spektralen Eigenschaften des betrachteten Signalausschnittes ist deutlich erkennbar, daß sich die auf Korrelationen zwischen den Abtastwerten zurückzuführenden Redundanzen und damit auch die Informationsgehalte für Zyklen unterschiedlicher Klassen stark voneinander unterscheiden. Dies ist auch an den Wellenformvorhersagbarkeitszahlen für die beteiligten n-Zyklen ($\gamma_{s_n}^{-2} = 171.79$), p-Zyklen ($\gamma_{s_p}^{-2} = 59.26$) und f-Zyklen ($\gamma_{s_f}^{-2} = 52.53$) ablesbar. Vergleicht man die Wellenformvorhersagbarkeitszahl $\gamma_s^{-2} = 64.10$, die sich durch Mittelung über alle Zyklen ergibt und proportional zur maximalen Leistungsfähigkeit eines stationären Kompressionsverfahren ist mit der Mittelung $(1/3)(\gamma_{s_n}^{-2} + \gamma_{s_p}^{-2} + \gamma_{s_f}^{-2}) = 94.53$ der drei einzelnen Wellenformvorhersagbarkeitszahlen, so ist weiter erkennbar, daß adaptive EKG-Wellenformcodierungsverfahren prinzipiell ein höheres Kompressionspotential besitzen.

Die Abbildung 5.6 gibt für denselben Signalausschnitt einen qualitativen Eindruck von der Zeitvarianz der Verteilungsdichtefunktion $p_s(x)$ als zweite statistische Signaleigenschaft, die

nach Gleichung (5.5) und (5.6) Informationsgehalt und Redundanz des Signals beeinflusst. Dem mittleren und den unteren Bildern liegen auch hier die vektorwertige Betrachtung zugrunde, so daß für jeden einzelnen Zyklus eine Schätzung der Verteilungsdichtefunktion

$$p_s(x, i) = \frac{\#\{s_{i,j} : s_{i,j} \in (x_m - 1/2, x_m + 1/2], j = 1, \dots, N_{\text{qrs}}\}}{N_{\text{qrs}}} \quad (5.14)$$

für $x \in \left(x_m - \frac{1}{2}, x_m + \frac{1}{2}\right], x_m \in [-1024, \dots, -1, 0, 1, \dots, 1023]$

berechnet werden kann. Dabei bezeichnet $x \in \mathbb{R}$ die Wertheilfsvariable und $\#\{\cdot\}$ die Anzahl der Mengenelemente. Im mittleren Bild von Abbildung 5.6 ist $t/s \approx iN_{\text{qrs}}$ gesetzt. In den unteren Bildern ist erkennbar, daß auch die für die einzelnen Zyklusklassen gemittelten Schätzungen der Verteilungsdichtefunktionen deutlich unterschiedliche Verläufe aufweisen, die für n- und p-Zyklen zudem erheblich von der Mittelung über alle Zyklen abweichen.

Die qualitative Betrachtung der zeitabhängigen korrelativen Signaleigenschaften und der Zeitabhängigkeit der Verteilungsdichtefunktion haben gezeigt, daß adaptive EKG-Wellenformcodierungsverfahren potentiell eine höhere Leistungsfähigkeit ermöglichen als stationäre Kompressionsverfahren. Das zugrunde liegende Adaptionskonzept muß dabei allerdings in der Lage sein, der Entwicklungsdynamik der statistischen Eigenschaften zu folgen, um eine ausreichend schnelle Anpassung an die aktuellen Charakteristiken sicherzustellen.

Der hier gewählte Ansatz basiert auf dem in der Abbildung 5.2 dargestellten prinzipiellen Aufbau eines Wellenformcodierungssystems auf der Grundlage einer Transformationscodierung. Die Signaltransformation ist bei dem im folgenden beschriebenen Verfahren an die veränderlichen Signaleigenschaften anpaßbar und hat eine Konzentration des Energiegehaltes in wenige Entwicklungskoeffizienten zum Ziel. Der folgende erste von zwei Quantisierungsschritten berücksichtigt die vorgegebene Übertragungsanforderung 1. oder 2. und gleicht damit Rate oder Verzerrung des codierten Signals adaptiv an. In einem weiteren Kompressionsschritt werden die Entwicklungskoeffizienten durch ein adaptives lineares Prädiktionsverfahren im Bildbereich der Wavelet-Paket-Transformation in eine dekorrelierte Prädiktionsfehlerdarstellung überführt. Als Konsequenz hieraus verringert sich die Varianz der Verteilungsdichtefunktion und dessen Zeitabhängigkeit, so daß die dem zweiten Quantisierungsschritt folgende Entropie-Codierung statisch für ein Signal mit reduziertem dynamischen Umfang konzipiert werden kann und so eine zusätzliche Redundanzreduktion möglich ist. Das detaillierte Konzept ist als Blockschema in der Abbildung 5.7 gezeigt.

5.4 Wellenformcodierung von EKG-Signalen mit der Wavelet-Paket-Transformation

Grundsätzlich wird zur Anwendung eines Transformationscodierungsverfahrens auf ein beliebiges stochastisches Signal $s(n)$ endlicher Länge dieses in einzelne Blöcke (oder Segmente)

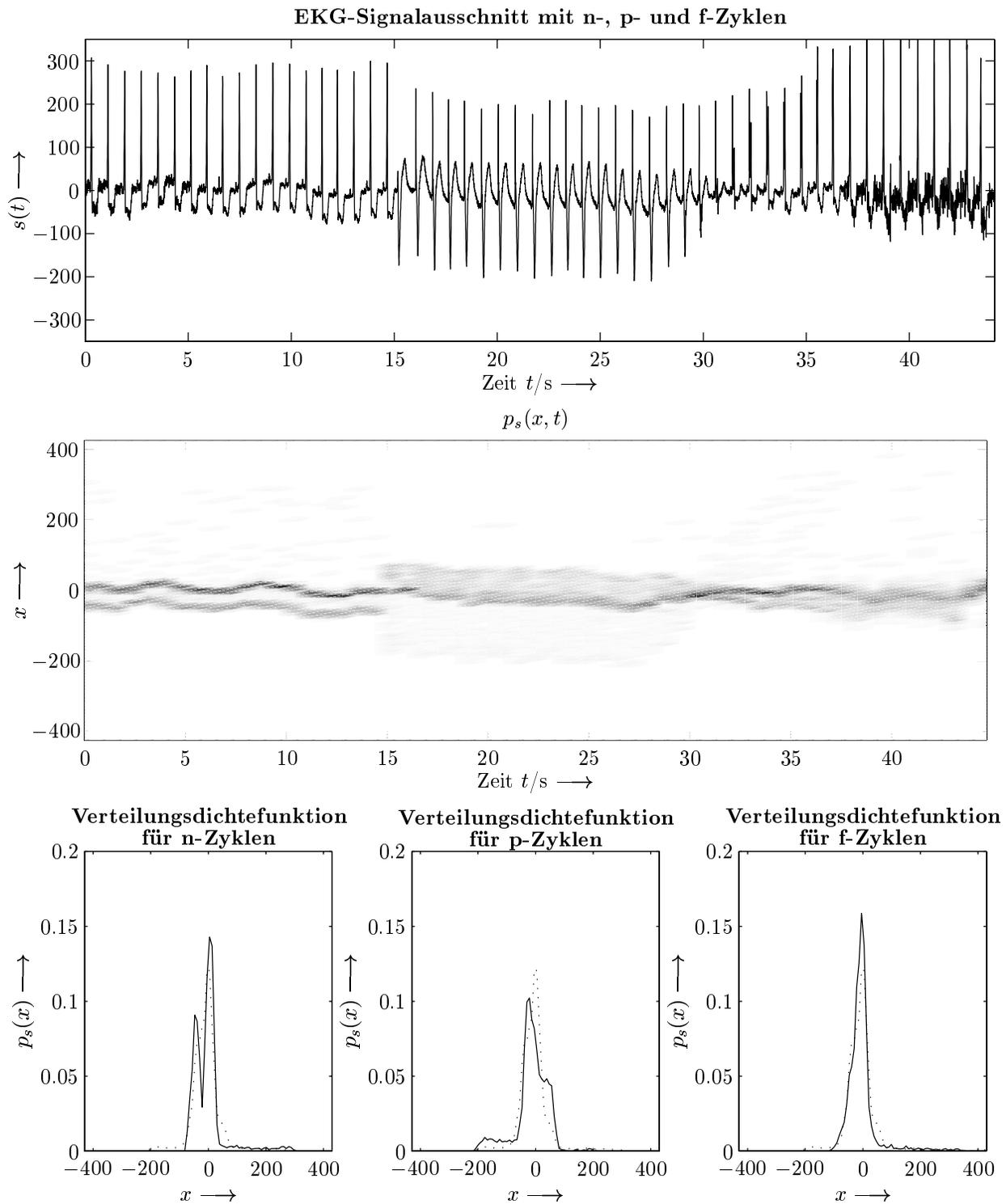


Abbildung 5.6: Ein Signalausschnitt aus der Musterfunktion 5s , der jeweils 19 n-, p- und f-Zyklen enthält und die daraus resultierenden Schätzungen der Verteilungsdichtefunktionen nach Gleichung (5.14). Im mittleren Bild sind die Verteilungsdichtefunktionen der einzelnen Zyklen über die Zeit aufgetragen, so daß eine zeitabhängige Darstellung entsteht. Die unteren drei Bilder zeigen gemittelte Verteilungsdichtefunktionen für n-, p- und f-Zyklen als durchgezogene Linien und die über alle 57 beteiligten Zyklen gemittelte Verteilungsdichtefunktion als gestrichelte Linie.

zerlegt, die als vektorwertige Realisationen

$$\mathbf{s}_i = [s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,n}, \dots, s_{i,N_s}]^T \quad (5.15)$$

von Zufallsvektoren \mathbf{X}_{s_i} , $i = 1, \dots, \chi$ der Länge N_s interpretierbar sind. Die Menge aller Zufallsvektoren beschreibt so einen Zufallsprozeß

$$\mathbf{X}_s = [\mathbf{X}_{s_1}, \mathbf{X}_{s_2}, \dots, \mathbf{X}_{s_i}, \dots, \mathbf{X}_{s_\chi}]. \quad (5.16)$$

Mit der Realisation

$$\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_i, \dots, \mathbf{s}_\chi], \quad \mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^{N_s} \quad (5.17)$$

des Prozesses \mathbf{X}_s existiert dann eine gleichwertige Beschreibung der Sequenz $s(n)$.

Bei der klassischen Transformationscodierung werden die einzelnen Vektoren \mathbf{s}_i , $i = 1, \dots, \chi$ durch Multiplikation mit orthogonalen Transformationsmatrizen $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$ entsprechend

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i, \quad i = 1, \dots, \chi \quad (5.18)$$

in vorteilhaftere Bildbereichsdarstellungen überführt. Die so erzeugte Realisation

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{y}_\chi], \quad \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^{N_s} \quad (5.19)$$

des Prozesses \mathbf{X}_y mit

$$\mathbf{y}_i = [y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,n}, \dots, y_{i,N_s}]^T \quad (5.20)$$

ist eine alternative und vollständige Beschreibung des ursprünglichen Signals \mathbf{s} . Ziel dieser Transformation ist es mit der Abbildung des Signals \mathbf{s} auf die Entwicklungskoeffizienten \mathbf{y} eine Darstellung zu erhalten, deren Eigenschaften sich für eine Signalapproximation

$$\mathbf{s}' = [\mathbf{s}'_1, \mathbf{s}'_2, \dots, \mathbf{s}'_i, \dots, \mathbf{s}'_\chi], \quad \mathbf{s}'_i \in \mathbb{R}^{N_s} \quad (5.21)$$

mit

$$\mathbf{s}'_i = \mathbf{S}_i \mathbf{y}'_i, \quad i = 1, \dots, \chi \quad (5.22)$$

durch die Synthese von quantisierten Entwicklungskoeffizientenvektoren

$$\mathbf{y}' = [\mathbf{y}'_1, \mathbf{y}'_2, \dots, \mathbf{y}'_i, \dots, \mathbf{y}'_\chi], \quad \mathbf{y}'_i \in \mathbb{R}^{N_s} \quad (5.23)$$

im Hinblick auf eine möglichst geringe Verzerrung D oder möglichst geringe Übertragungsrate I besonders gut eignen. Da mit der Wavelet-Paket-Transformation eine orthonormale, reellwertige Abbildung betrachtet wird, gehen hier die Synthesematrizen \mathbf{S}_i entsprechend

$$\mathbf{S}_i = \mathbf{A}_i^{-1} = \mathbf{A}_i^T \quad (5.24)$$

aus den Analysematrizen hervor.

Als objektives Maß für die Verzerrung D soll die Varianz

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \left(\frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} e_{i,n}^2 \right) = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \sigma_{e_i}^2 \quad (5.25)$$

der Realisation

$$\mathbf{e} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_\chi], \quad \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{N_s} \quad (5.26)$$

des als mittelwertfrei angenommenen Approximationsfehlerprozesses \mathbf{X}_e verwendet werden, die aufgrund der Orthonormalität der Abbildungen \mathbf{A}_i gleich der Varianz

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \left(\frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} q_{i,n}^2 \right) = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \sigma_{q_i}^2 \quad (5.27)$$

der Realisation

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_i, \dots, \mathbf{q}_\chi], \quad \mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{N_s} \quad (5.28)$$

des Quantisierungsfehlerprozesses \mathbf{X}_q ist. Die einzelnen Vektoren von \mathbf{e} und \mathbf{q} berechnen sich dabei durch

$$\mathbf{e}_i = [e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,n}, \dots, e_{i,N_s}]^T = \mathbf{s}_i - \mathbf{s}'_i, \quad i = 1, \dots, \chi, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{q}_i = [q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,n}, \dots, q_{i,N_s}]^T = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}'_i, \quad i = 1, \dots, \chi. \quad (5.30)$$

Da hier der nichtstationäre EKG-Signalprozeß mit schwankendem Informationsgehalt betrachtet wird, ist für die Verzerrungsberechnung die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit in Form des Blockindex i sinnvoll. Die Verzerrung $D(i)$ sei deshalb für jedes Signalsegment \mathbf{s}'_i durch

$$D(i) = \sigma_{e_i}^2 = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} e_{i,n}^2 = \sigma_{q_i}^2 = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} q_{i,n}^2 \quad (5.31)$$

definiert. Die Verzerrung D des approximierten Signals \mathbf{s}' ist dann als Mittelwert über alle Signalblöcke durch

$$D = \sigma_e^2 = \sigma_q^2 = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} D(i) \quad (5.32)$$

gegeben.

Genauso wie die Definition einer Verzerrung $D(i)$ für jedes einzelne Signalsegment \mathbf{s}_i im Kontext der Kompression nichtstationärer Signale sinnvoll ist, ist es auch angebracht die Übertragungsrate in Abhängigkeit des Blockindex i zu betrachten. Für jedes Segment \mathbf{s}_i setzt sich die Übertragungsrate $I(i)$ multiplikativ aus der mittleren Anzahl $\bar{R}(i)$ benötigter

Bits für die Codierung der komprimierten Signaldarstellung und der Anzahl der zu übertragenden Entwicklungskoeffizienten pro Zeiteinheit $f_{\text{koeff}}(i)$ entsprechend

$$I(i) = f_{\text{koeff}}(i)\bar{R}(i) \quad (5.33)$$

zusammen. Für die mittlere Übertragungsrate des gesamten Signals gilt somit

$$I = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} I(i). \quad (5.34)$$

Weiter ist der vektorwertige Prozeß \mathbf{X}_s mit

$$E\{\mathbf{X}_s\} = 0 \quad (5.35)$$

und der Varianz

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \left(\frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} s_{i,n}^2 \right) = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \sigma_{s_i}^2 \quad (5.36)$$

als mittelwertfrei angenommen. $E\{\cdot\}$ bezeichnet den Erwartungswert.

Die Darstellung 5.7 zeigt detailliert den schematischen Aufbau des Wellenformcodierungsverfahrens, mit dem die Abbildung des Signalvektors \mathbf{s}_i auf die Approximation \mathbf{s}'_i mit variabel einstellbarer Verzerrung $D(i)$ oder Übertragungsrate $I(i)$ für die Signale $s_{\text{quell}}(n)$ und $s_{\text{seit}}(n)$ möglich ist. Die grundlegende Struktur des Wellenformcodierungsalgorithmus ist dabei unabhängig von der Klassenzugehörigkeit der zu komprimierenden Signale solange eine entsprechende Vorverarbeitung eine vektorwertige Signalbeschreibung nach Gleichung (5.17) erzeugt oder direkt ein vektorwertiges Signal vorliegt.

5.4.1 Vorverarbeitung: Überführung in vektorielle Darstellung

Die parametrische Dimensionierung der einzelnen Signalverarbeitungsblöcke ist hier für eine Anwendung auf mittelwertfreie EKG-Zyklen als Signalvektoren \mathbf{s}_i durchgeführt und optimiert, die wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, jeweils an einem zentrierten QRS-Komplex ausgerichtet sind und eine feste Länge $N_s = N_{\text{qrs}}$ haben. Um die Signalsequenzen in eine solche gleichwertige Darstellung zu überführen, bedarf es einer Vorverarbeitung. Die EKG-signalspezifische Umwandlung in die ausgerichtete Vektordarstellung ist dabei unter Berücksichtigung charakteristischer QRS-Komplex-Merkmale realisiert. Ein Signalausschnitt $s(n - N_0(i)/2), \dots, s(n), \dots, s(n - 1 + N_0(i)/2)$ der Länge $N_0(i)$ wird demnach als EKG-Zyklus mit der R-Zacke bei $s(n)$ detektiert, falls der Betrag eines zum Abtastwert $s(n)$ gehörigen dreidimensionalen Merkmalsvektors einen adaptiven Schwellwert überschreitet. Die drei Komponenten des Merkmalsvektors bewerten dabei

- den Betrag des Abtastwertes $|s(n)|$ bezüglich seiner lokalen Maximalität,

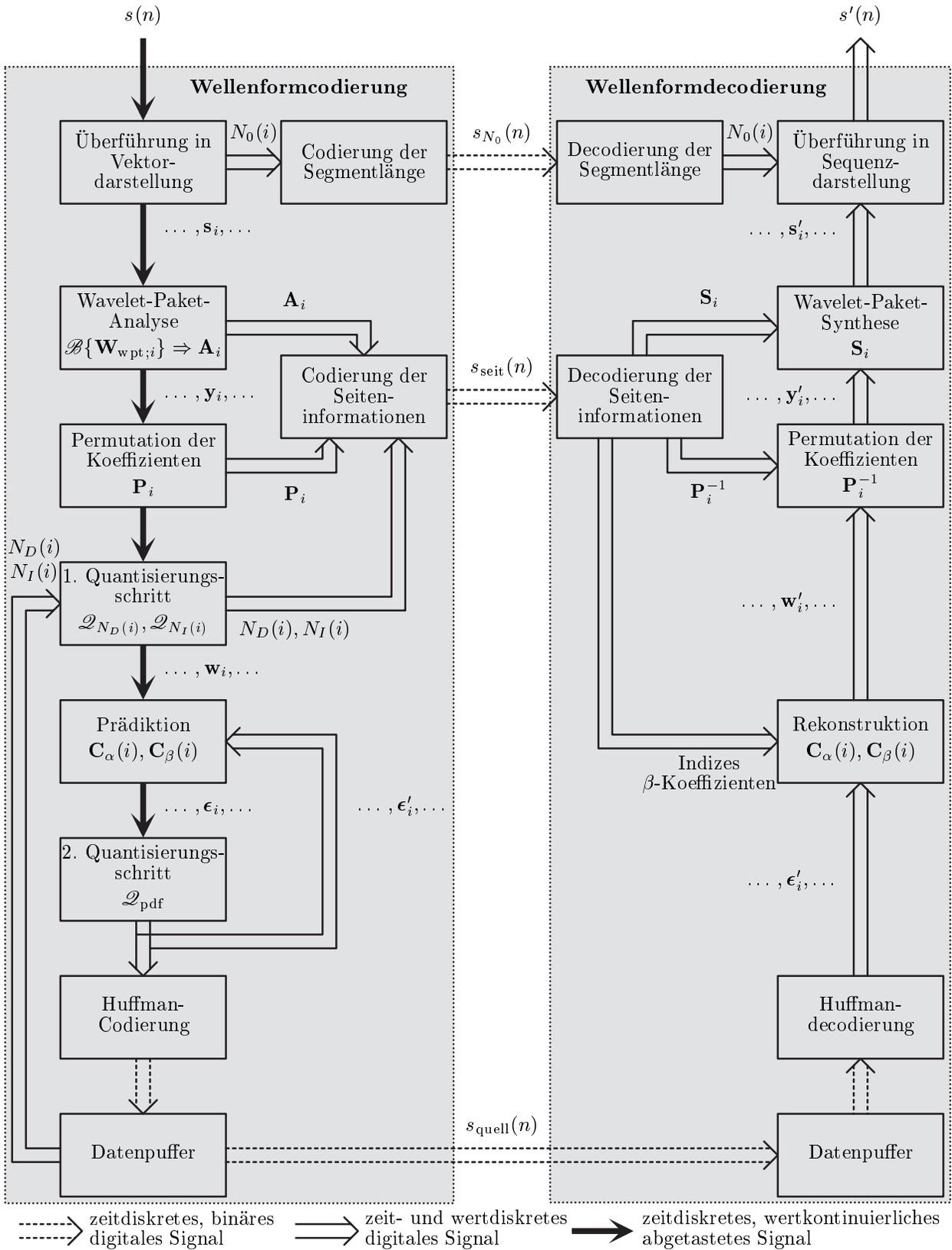


Abbildung 5.7: Blockschema des Wellenformcodierungsalgorithmus zur flexiblen Kompression von EKG-Signalen.

- die Signalsteigung in der Umgebung des Abtastwertes $s(n)$,
- den Abstand zu der letzten detektierten R-Zacke.

Ist der Abtastwert $s(n)$ als i -te R-Zacke detektiert, so bestimmt sich die Länge des i -ten EKG-Segments $N_0(i)$ genau so, daß $s(n)$ in dessen Mitte liegt. Da die Signalblöcke für die folgende Wavelet-Paket-Transformation eine konstante Länge $N_s = 2^v$ haben müssen, ist weiter eine Abtastratenkonvertierung von $N_0(i)$ auf N_s Abtastwerten pro Signalsegment notwendig. Der Parameter v bestimmt dabei die maximale Tiefe des Wavelet-Paket-Baums. Da die durchschnittlichen Zykluslängen aller EKG-Signalrealisationen der MIT-BIH Datenbasis im Bereich von 250 bis 350 Abtastwerten liegen, ist hier $N_{\text{qrs}} = N_s = 2^v = 2^8 = 256$ gewählt. Die mit der Konvertierung $N_0(i) \rightarrow N_s$ im Sender und der entsprechenden Invertierung $N_s \rightarrow N_0(i)$ im Empfänger korrespondierenden Signalfilterungen werden dabei mit einem Polyphasenfilterverfahren durchgeführt. Die durch diese Kompressionsoperation erzeugte Verzerrung des Signals $s'(n)$ gegenüber dem Signal $s(n)$ liegt in einer relativen Größenordnung unter 0.1% und kann somit im Verhältnis zu der Verzerrung, welche durch die folgenden Quantisierungsschritte erzeugt wird, als vernachlässigbar angesehen werden. Genauso fällt auch die Rate, welche für die Übertragung der codierten Segmentlänge $N_0(i)$ benötigt wird gegenüber den Übertragungsraten von $s_{\text{seit}}(n)$ und $s_{\text{quell}}(n)$ nicht ins Gewicht, da pro 256 Komponenten des Vektors \mathbf{s}_i nur eine Segmentlängeninformation übermittelt werden muß. Über eine differentielle Pulscodemodulation erster Ordnung mit einem Prädiktionskoeffizienten von 1 und einer anschließenden Huffman-Codierung kann die hierfür benötigte mittlere Bitrate pro Segmentlängeninformation auf eine maximale Anzahl von 5 Bit beschränkt werden.

Als letzten Vorverarbeitungsschritt umfaßt die Abbildung der sequentiellen auf die vektorwertige Signaldarstellung die Subtraktion des vektoriellen Mittelwertes $E\{\mathbf{X}_{s,\text{ekg}}\}$, so daß die Gleichung (5.35) für den erzeugten Prozeß

$$\mathbf{X}_s = \mathbf{X}_{s,\text{ekg}} - E\{\mathbf{X}_{s,\text{ekg}}\} \quad (5.37)$$

gilt.

Dem beschriebenen Vorverarbeitungsschritt kommt im Gesamtkonzept des vorgestellten Wellenformcodierungssystems eine untergeordnete Bedeutung zu. Er dient in erster Linie zur Erzeugung eines nichtstationären vektorwertigen Prozesses mit Eigenschaften, die für viele digitalisierte analoge Signale im Kontext der drahtlosen Übertragungstechnik charakteristisch und bezeichnend sind. Die auf der Grundlage des so generierten Signalprozesses gewonnenen Ergebnisse lassen sich somit prinzipiell auf andere Signalklassen übertragen.

Um den Anwendungsumfang dieses Verfahrens für die Verarbeitung von EKG-Signalen weiter zu erhöhen, ist eine Verbesserung der Detektionswahrscheinlichkeit für QRS-Komplexe im Vorverarbeitungsschritt notwendig. Mit dem hier verwendeten einfachen echtzeitfähigen Verfahren wird eine mittlere Detektionswahrscheinlichkeit von ca. 95% für alle bearbeiteten EKG-Aufzeichnungen und eine minimale Detektionswahrscheinlichkeit von 89% für die

Musterfunktion 9s erreicht. Aufwendigere Detektionsalgorithmen, wie z. B. die in [118–120] beschriebenen Verfahren erreichen für die Signale der MIT-BIH Datenbasis eine mittlere Detektionswahrscheinlichkeit von über 99% bei einer minimalen Detektionswahrscheinlichkeit von über 98%.

Damit das Wellenformcodierungsverfahren eine hohe Leistungsfähigkeit erreicht, die in guter Näherung unabhängig von der Wahl der Musterfunktion $^j s$ ist, ist es sinnvoll die Parameterdimensionierung der einzelnen Signalverarbeitungsblöcke auf der Grundlage einer repräsentativen vektorwertigen Realisation $^{\text{rep}}\mathbf{s}$ durchzuführen. Dieses repräsentative Signal ist aus den 48 EKG-Aufzeichnungen der MIT-BIH Datenbasis so zusammengestellt, daß die dominierenden EKG-Prozeßeigenschaften in angemessenem Maße berücksichtigt werden. In Anhang B ist angegeben, welche Signalauschnitte der Musterfunktionen in das $\chi = 1200$ verschiedenartige physiologische und pathophysiologische EKG-Zyklen umfassende Signal

$$^{\text{rep}}\mathbf{s} = [^{\text{rep}}\mathbf{s}_1, ^{\text{rep}}\mathbf{s}_2, \dots, ^{\text{rep}}\mathbf{s}_i, \dots, ^{\text{rep}}\mathbf{s}_{1200}], \quad (5.38)$$

mit

$$^{\text{rep}}\mathbf{s}_i = [^{\text{rep}}s_{i,1}, ^{\text{rep}}s_{i,2}, \dots, ^{\text{rep}}s_{i,n}, \dots, ^{\text{rep}}s_{i,256}]^T \quad (5.39)$$

eingehen. Auf der Grundlage dieser repräsentativen Realisation ist auch der globale Erwartungswert $E\{\mathbf{X}_{s,\text{ekg}}\}$ mit

$$E\{\mathbf{X}_{s,\text{ekg}}\} \approx \left[\frac{1}{1200} \sum_{i=1}^{1200} ^{\text{rep}}s_{i,1}, \frac{1}{1200} \sum_{i=1}^{1200} ^{\text{rep}}s_{i,2}, \dots, \frac{1}{1200} \sum_{i=1}^{1200} ^{\text{rep}}s_{i,256} \right]^T \quad (5.40)$$

geschätzt.

Der Konzeptentwurf des Wellenformcodierungsverfahren ist von der notwendigen Berücksichtigung der nichtstationären Signaleigenschaften und der Möglichkeit zur flexiblen Einstellung von Verzerrung und Rate dominiert. Der zentrale Lösungsansatz der hieraus resultierenden Problematik ist in dem hier vorgestellten Verfahren durch einen adaptiven ersten Quantisierungsschritt nach der Signaltransformation gegeben. Die Verwendung von Filterbänken, die mit Wavelet-Paket-Transformationen in Verbindung stehen und aus denen die Abbildungen \mathbf{A}_i hervorgehen, ist wesentlich darin begründet, daß diese in Kombination mit dem ersten Quantisierungsschritt eine in guter Näherung als stationär anzusehende Signalbeschreibung erzeugen. Aufgrund der Bedeutung des ersten Quantisierungsschritts, soll dieser im folgenden Abschnitt zuerst betrachtet werden.

5.4.2 Anpassung an nichtstationären Informationsgehalt durch nichtlineare Schwellwertquantisierung

Um entsprechend den Anforderungen 1. oder 2. blockweise eine Anpassung der Rate $I(i)$ oder der Verzerrung $D(i)$ zu erreichen, ist bei optimalen Transformationen \mathbf{A}_i prinzipiell

ein adaptives Verfahren zur Quantisierung der Entwicklungskoeffizienten notwendig. Eine einfache und effektive Möglichkeit zur Durchführung eines ersten Quantisierungsschritts ist in Abhängigkeit der vorgegebenen Verzerrung D oder Übertragungsrate I eine reduzierte Anzahl $N_D(i) < N_s$ oder $N_I(i) < N_s$ von Entwicklungskoeffizienten pro Vektor \mathbf{y}_i für die folgende Verarbeitung beizubehalten. Über die Adaption der Koeffizientenanzahl $N_D(i)$ bzw. $N_I(i)$ in Abhängigkeit der vorgegebenen Verzerrung D oder der vorgegebenen Rate I kann so in guter Näherung eine minimale Rate I bzw. eine minimale Verzerrung D erreicht werden. Diese beschriebenen Quantisierungsoperationen bilden den Vektor \mathbf{y}_i entsprechend

$$\mathbf{w}_i = \mathcal{Q}_{N_D(i)}\{\mathbf{y}_i\}, \tag{5.41}$$

$$\mathbf{w}_i = \mathcal{Q}_{N_I(i)}\{\mathbf{y}_i\} \tag{5.42}$$

auf den Vektor \mathbf{w}_i mit $N_D(i)$ bzw. $N_I(i)$ von null verschiedenen Komponenten ab.

Zwei Verfahren zur Auswahl der beizubehaltenden Entwicklungskoeffizienten erscheinen sinnvoll:

1. Die einzelnen Abbildungen \mathbf{A}_i enthalten die Basisvektoren, in die der Vektor \mathbf{s}_i entwickelt wird in geordneter, a priori festgelegter Reihenfolge, so daß die Entwicklungskoeffizienten $y_{i,n}$ jedes Vektors \mathbf{y}_i in ihrer Wichtigkeit bezüglich eines vorher definierten Kriteriums mit dem Index n fallen. Für jeden Block mit dem Index i werden dann die ersten $N_D(i)$ oder $N_I(i)$ Komponenten des Vektors \mathbf{y}_i beibehalten. Für die Komponenten des quantisierten Vektors \mathbf{w}_i gilt somit

$$w_{i,n} = \begin{cases} y_{i,n} & \text{für } n \geq N_D(i), N_I(i) \\ 0 & \text{für } n < N_D(i), N_I(i) \end{cases}. \tag{5.43}$$

Hängen die Schwellwerte $N_D(i)$, $N_I(i)$ nicht von den Koeffizienten $y_{i,n}$ ab, so beschreibt die Gleichung (5.43) eine lineare Abbildungsvorschrift. Für die Varianzen der hieraus entstehenden als mittelwertfrei angenommenen Quantisierungsfehler gilt dann

$$\sigma_{q_i}^2 = \frac{1}{N_s} \sum_{n=N_D(i)+1}^{N_s} y_{i,n}^2, \tag{5.44}$$

$$\sigma_{q_i}^2 = \frac{1}{N_s} \sum_{n=N_I(i)+1}^{N_s} y_{i,n}^2. \tag{5.45}$$

2. Die Auswahl der $N_D(i)$, $N_I(i)$ beizubehaltenden Entwicklungskoeffizienten wird in Abhängigkeit des Transformationsergebnisses \mathbf{y}_i a posteriori getroffen. Es sollen so nur die $N_D(i)$, $N_I(i)$ Koeffizienten mit den größten Beträgen weiterverarbeitet werden. Um dies zu erreichen, werden die Entwicklungskoeffizientenvektoren \mathbf{y}_i mit der $N_s \times N_s$ Permutationsmatrizen \mathbf{P}_i multipliziert, so daß die Komponenten der Vektoren $\mathbf{P}_i\mathbf{y}_i$ nach fallendem Betrag geordnet sind. Die neue Anordnung der Entwicklungskoeffizienten stellt hier eine zusätzliche Information dar, die für die Signalsynthese benötigt

wird. Für die Übertragung dieser in der Matrix \mathbf{P}_i enthaltenen Information ist somit eine zusätzliche Übertragungsrate zu berücksichtigen. Die Anwendung von $\mathcal{Q}_{N_D(i)}$, $\mathcal{Q}_{N_I(i)}$ auf $\mathbf{P}_i \mathbf{y}_i$ führt dann zu den quantisierten Vektoren

$$\mathbf{w}_i = \mathcal{Q}_{N_D(i)}\{\mathbf{P}_i \mathbf{y}_i\}, \tag{5.46}$$

$$\mathbf{w}_i = \mathcal{Q}_{N_I(i)}\{\mathbf{P}_i \mathbf{y}_i\} \tag{5.47}$$

für die analog zu Gleichung (5.43) nur die ersten $N_D(i)$, $N_I(i)$ Komponenten von null verschiedene Werte annehmen. Zusätzlich gilt hier aber

$$|w_{i,n}| \geq |w_{i,n+1}|, \quad n = 1, \dots, N_D(i) - 1, \tag{5.48}$$

$$|w_{i,n}| \geq |w_{i,n+1}|, \quad n = 1, \dots, N_I(i) - 1. \tag{5.49}$$

Die Abbildungen $\mathbf{w}_i = \mathcal{Q}_{N_D(i)}\{\mathbf{P}_i \mathbf{y}_i\}$ und $\mathbf{w}_i = \mathcal{Q}_{N_I(i)}\{\mathbf{P}_i \mathbf{y}_i\}$ sind auch für Schwellwerte $N_D(i)$, $N_I(i)$, die unabhängig von den Entwicklungskoeffizienten gewählt werden, nichtlinear. Dies liegt daran, daß die Entwicklungskoeffizientenvektoren selbst die Permutationsmatrizen und damit die Auswahl der Basisvektoren, die an der Signalapproximation \mathbf{s}'_i beteiligt sind, bestimmen. Für die Varianzen der Quantisierungsfehler gelten hier die Gleichungen

$$\sigma_{q_i}^2 = \sigma_{s_i}^2 - \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_D(i)} w_{i,n}^2, \tag{5.50}$$

$$\sigma_{q_i}^2 = \sigma_{s_i}^2 - \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_I(i)} w_{i,n}^2. \tag{5.51}$$

In Verbindung mit dem ersten Quantisierungsschritt ist die Kombination von Transformationenmenge $\{\mathbf{A}_i, i = 1, \dots, \chi\}$ und erstem oder zweitem Koeffizientenauswahlverfahren als leistungsfähiger anzusehen, die für eine vorgegebene Anzahl von beizubehaltenden Entwicklungskoeffizienten $N_D(i)$, $N_I(i)$ das Signal \mathbf{s}' mit der geringsten Verzerrung zur Folge hat. Dabei ist die aus den einzelnen Segmentapproximationen

$$\mathbf{s}'_i = \mathbf{S}_i \mathbf{w}_i \tag{5.52}$$

resultierende Gesamtgenauigkeit der Approximation \mathbf{s}' grundsätzlich durch die Abhängigkeit der Verzerrung D nach Gleichung (5.32) von der Anzahl der im Mittel beibehaltenen Entwicklungskoeffizienten

$$\bar{N}_D = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} N_D(i), \tag{5.53}$$

$$\bar{N}_I = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} N_I(i) \tag{5.54}$$

bestimmt [99]. Genauer, es ist das abklingende Verhalten des funktionalen Zusammenhangs $D = \sigma_q^2 = f(\bar{N}_D)$ bzw. $D = f(\bar{N}_I)$ entsprechend

$$\sigma_{q|N_D(i)=\bar{N}_D}^2 = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \sigma_{q_i|N_D(i)=\bar{N}_D}^2 \quad \text{für } \bar{N}_D = 1, \dots, N_s, \quad (5.55)$$

$$\sigma_{q|N_I(i)=\bar{N}_I}^2 = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} \sigma_{q_i|N_I(i)=\bar{N}_I}^2 \quad \text{für } \bar{N}_I = 1, \dots, N_s \quad (5.56)$$

für die Qualität der Approximation \mathbf{s}' in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Entwicklungskoeffizientenanzahl entscheidend. Die Auswahl der Abbildungen \mathbf{A}_i ist demnach angepaßt an die Eigenschaften des Prozesses \mathbf{X}_s so zu treffen, daß die Varianzen der Koeffizienten für die a priori Auswahl

$$\sigma_w^2(n) = \sigma_y^2(n) = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} y_{i,n}^2, \quad n = 1, \dots, N_s \quad (5.57)$$

mit $N_D(i) = N_s, N_I(i) = N_s \Rightarrow \mathbf{w}_i = \mathbf{y}_i$ und für die a posteriori Auswahl

$$\sigma_w^2(n) = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} w_{i,n}^2, \quad n = 1, \dots, N_s \quad (5.58)$$

mit $N_D(i) = N_s, N_I(i) = N_s \Rightarrow \mathbf{w}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{y}_i$ und

$$|w(n)| \geq |w(n+1)|, \quad n = 1, \dots, N_s - 1 \quad (5.59)$$

eine möglichst ausgeprägte energetische Konzentration für Entwicklungskoeffizienten mit niedrigem Index n aufweisen. Ein Maß für diese energetische Konzentration ist durch das geometrische Mittel der Varianzen

$$\varrho = \left(\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_w^2(n) \right)^{1/N_s} \quad (5.60)$$

gegeben [11]. Die Auswahl der Transformationenmenge $\{\mathbf{A}_i, i = 1, \dots, \chi\}$ sollte daher im Hinblick auf eine geringe Verzerrung für einen weiten Bereich von beizubehaltenden Koeffizienten ein möglichst kleines geometrisches Mittel der Varianzen $\sigma_w^2(n), n = 1, \dots, N_s$ nach Gleichung (5.60) zum Ziel haben.

Für stationäre Prozesse existiert mit der Karhunen-Loève-Transformation $\mathbf{A}_{\text{klt}} = \mathbf{A}_i, i = 1, \dots, \chi$ eine Optimallösung, die das geometrische Mittel nach Gleichung (5.60) minimiert [11, 99, 121]. Die Karhunen-Loève-Transformation bildet den Prozeß \mathbf{X}_s mit der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{R}_{ss} = E\{\mathbf{X}_s \mathbf{X}_s^T\} \quad (5.61)$$

auf den Entwicklungskoeffizientenprozeß \mathbf{X}_y mit einer diagonalisierten Kovarianzmatrix

$$\mathbf{R}_{yy} = E\{\mathbf{X}_y \mathbf{X}_y^T\} = \mathbf{A}_{\text{klt}} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}_{\text{klt}}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \\ \cdots & 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ & \cdots & 0 & \lambda_{N_s-1} & 0 \\ & & \cdots & 0 & \lambda_{N_s} \end{bmatrix} = \mathbf{\Lambda} \quad (5.62)$$

ab. Formt man Gleichung (5.62) entsprechend

$$\mathbf{A}_{\text{klt}} \mathbf{R}_{ss} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}_{\text{klt}} \quad (5.63)$$

um, so wird deutlich, daß die Transformationsmatrix \mathbf{A}_{klt} Lösung eines Eigenwertproblems für die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{ss} ist. Die Karhunen-Loève-Basisvektoren sind als Zeilen der Matrix \mathbf{A}_{klt} somit Eigenvektoren von \mathbf{R}_{ss} und $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_s}$ die zugehörigen Eigenwerte. Da die Kovarianzmatrix des Entwicklungskoeffizientenprozesses mit $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{\Lambda}$ nur von null verschiedene Elemente auf der Hauptdiagonalen enthält, sind die Entwicklungskoeffizienten unkorreliert und weisen die Varianzen

$$\sigma_y^2(n) = \lambda_n, \quad n = 1, \dots, N_s \quad (5.64)$$

auf. Die durch die Karhunen-Loève-Transformation erzeugte Diagonalstruktur der Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{yy} impliziert außerdem, daß das Produkt der Diagonalelemente entsprechend

$$\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_y^2(n) = \det \mathbf{R}_{yy} = \det \mathbf{R}_{ss} \quad (5.65)$$

gleich der Determinante der Kovarianzmatrix des Prozesses \mathbf{X}_s ist. Da grundsätzlich für Kovarianzmatrizen $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^T$ und orthonormale Transformationsmatrizen \mathbf{A} gilt

$$\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_y^2(n) \geq \det \mathbf{R}_{ss}, \quad (5.66)$$

zeichnet sich die Karhunen-Loève-Transformation weiter dadurch aus, daß sie das geometrische Mittel nach Gleichung (5.60) minimiert [11, 82]. Die korrespondierenden Entwicklungskoeffizienten weisen demnach im Mittel eine maximale energetische Konzentration auf. Aus diesem Grund soll die Karhunen-Loève-Transformation im folgenden als ein Maßstab bezüglich der energetischen Konzentration in den Entwicklungskoeffizienten benutzt werden, auch wenn der betrachtete EKG-Signalprozeß nichtstationär ist.

In Kombination mit der linearen Schwellwertquantisierung werden die Eigenvektoren von \mathbf{R}_{ss} als Basisvektoren in $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{\text{klt}}$ entsprechend der Größe der korrespondierenden Eigenwerte angeordnet. Die Transformation von stationären Signalen mit der so sortierten Matrix \mathbf{A}_{klt} bewirkt dann, als Folgerung aus der Minimierung des geometrischen Varianzmittels, eine optimale energetische Konzentration für jede Anzahl von beibehaltenen Entwicklungskoeffizienten $\bar{N}_D, \bar{N}_I \in \{1, \dots, N_s\}$ [11, 122]. In Verbindung mit dem linearen Schwellwertquantisierungsverfahren stellt die Karhunen-Loève-Transformation demnach unter den genannten Voraussetzungen eine Optimallösung bezüglich des mittleren quadratischen Rekonstruktionsfehlers dar. Aufgrund dieser Optimalität wird die Karhunen-Loève-Transformation ausschließlich mit dem ersten Verfahren zur Auswahl der Entwicklungskoeffizienten verwendet. Der durch eine Anwendung des zweiten Verfahrens erreichte zusätzliche Gewinn bezüglich der energetischen Konzentration rechtfertigt zumeist nicht die zusätzliche Übertragung der Reihenfolgeinformation.

Obwohl die Karhunen-Loève-Transformation für stationäre Prozesse den Rang einer Optimaltransformation einnimmt, ist ihr Einsatz zur Wellenformcodierung gerade in Übertragungssystemen stark eingeschränkt. Hierfür existieren im wesentlichen zwei Gründe:

- Die Basisvektoren und damit die Transformationsmatrix \mathbf{A}_{klt} bestimmen sich über die Eigenwerte der Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{ss} aus den statistischen Prozesseigenschaften. Sind diese vor Beginn einer Signalübertragung nicht bekannt obwohl der grundlegende Prozeß als stationär angenommen werden kann, so muß auf der Basis einer Realisation des Prozesses (zumeist das zu übertragende Signal selbst) zunächst eine Schätzung der Kovarianzmatrix ermittelt werden, um anschließend die Transformationsvorschrift berechnen zu können. Vor Beginn der Übertragung des Signals müssen dann noch die Basisvektoren übermittelt werden, damit die Entwicklungskoeffizient vom Empfänger interpretiert werden können. Beide Vorverarbeitungsschritte machen einen Einsatz bei der Echtzeitsignalübertragung nahezu unmöglich.
- Die Basisvektoren sind nicht Elemente einer strukturierten Vektorenmenge und die $N_s \times N_s$ Matrix \mathbf{A}_{klt} weist im allgemeinen nur sehr wenige von null verschiedene Komponenten auf, so daß zur Berechnung der N_s Entwicklungskoeffizienten N_s^2 Multiplikationen notwendig sind. Auch wenn die Prozesseigenschaften und die Basisvektoren vor der Übertragung bekannt sind, so ist die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten somit sehr rechenintensiv und für viele Echtzeitanwendungen ungeeignet.

Für stationäre Prozesse, die sich als autoregressive Prozesse erster Ordnung beschreiben lassen, nehmen die Basisfunktionen sinusförmige Gestalt an [121]. Sie weisen dann eine große Ähnlichkeit mit den Basisfunktionen der Diskreten-Cosinus-Transformation auf und gehen für einen Korrelationskoeffizienten nahe 1 bis auf das Vorzeichen ineinander über. Da sich viele in der Natur auftretende Prozesse in guter Näherung als autoregressiv mit einem Korrelationskoeffizienten nahe 1 modellieren lassen, findet die Diskrete-Cosinus-Transformation in vielen Transformationscodierungsverfahren Verwendung. Im Gegensatz zu den Basisvektoren der Karhunen-Loève-Transformation besitzen die Basisvektoren der Diskreten-Cosinus-Transformation eine einfache Struktur, so daß zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten schnelle rekursive Algorithmen existieren und die Diskrete-Cosinus-Transformation deutliche Vorteile beim Einsatz unter Echtzeitbedingungen hat. Neben der Diskreten-Cosinus-Transformation existiert eine Vielzahl weiterer signalunabhängiger Transformationen mit algorithmischen Vorteilen gegenüber der Karhunen-Loève-Transformation und nur geringer Suboptimalität für Signalmodelle, die sich für viele Signalklassen als geeignete Beschreibung etabliert haben. Beispiele hierfür sind die diskrete Hadamard-Transformation, die diskrete Walsh-Hadamard-Transformation, Teilbandzerlegungsmethoden und Time-Domain-Aliasing-Cancellation-Verfahren [11, 92, 123, 124]. Die letzten beiden Ansätze zeichnen sich wesentlich durch die mögliche Verwendung überlappender Transformationsblöcke aus, so daß durch den Einsatz von weichberandeten Fensterfunktionen Blockartefakte vermieden werden können.

Auch diese signalunabhängigen Transformationen werden in Kombination mit der Schwellwertquantisierung zumeist mit dem ersten Koeffizientenauswahlverfahren eingesetzt. Die a priori festgelegte Anordnung der Basisvektoren innerhalb der Transformationsmatrix berücksichtigt dabei deren spektrale Selektivität. So enthält die erste Zeile der Matrix den niederfrequentesten Basisvektor und die spektrale Gewichtung der Basisvektoren verschiebt sich mit dem Zeilenindex zu hohen Frequenzen. Da im allgemeinen auch den zugrunde liegenden Prozeßmodellen ein mit der Frequenz fallendes Leistungsdichtespektrum zugeordnet ist, erzeugen die ersten Basisvektoren die Entwicklungskoeffizienten mit der im Mittel größten energetischen Konzentration. Für die Varianzen der Entwicklungskoeffizienten gilt somit

$$\sigma_y^2(n) \geq \sigma_y^2(n+1), \quad n = 1, \dots, N_s - 1, \quad (5.67)$$

wobei der Zeilenindex n mit dem Frequenz- oder Modulationsindex des korrespondierenden Basisvektors zumindest in näherungsweise proportionaler Verbindung steht.

Für Transformationsmatrizen, die aus dyadischen mit der Wavelet-Transformation in Verbindung stehenden Filterbänken hervorgehen, ist die a priori Festlegung einer Basisvektoreihenfolge ebenfalls möglich. Im Hinblick auf eine ausgeprägte energetische Konzentration in Entwicklungskoeffizienten mit niedrigem Index erreicht ein solches Transformationskodierungsverfahren allerdings keine herausragende Leistungsfähigkeit [99]. Um die dennoch vorhandene besondere Fähigkeit von dyadischen Filterbänken zur Kompression zeitdiskreter Signale optimal auszunutzen, sind die Approximationseigenschaften der mit dieser Filterbank assoziierten Wavelet-Transformation bezüglich zeitkontinuierlicher Signale zu berücksichtigen. Damit eine Aussage über das Konvergenzverhalten der Entwicklungskoeffizienten gewonnen werden kann, ist der Sequenz $s(n)$ somit ein zeitkontinuierliches Pendant zu zuordnen. Dies ist über das Konzept der in Kapitel 4 diskutierten Multi-Skalen-Analyse möglich.

Im Anhang C ist dargelegt, daß die betrachteten EKG-Sequenzen $^j s(n)$ für Wavelets mit mindestens vier verschwindenden Momenten in guter Näherung als Approximationssequenzen des zugehörigen tiefpaßgefilterten analogen EKG-Signals $^j s(t)$ bei der Auflösungskala S_0 interpretierbar sind. Weiter ist dort erörtert, daß diese EKG-Signale als gewichtete Summe von Skalierungsfunktionen entsprechend

$$^j s(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} ^j s(n) \phi(t-n) \quad (5.68)$$

beschrieben werden können und daß diese Approximation mit steigender Anzahl verschwindender Momente der korrespondierenden Wavelets immer besser wird.

Somit bestimmen nach Gleichung 4.157 die Differenzierbarkeit des analogen Signals $^j s(t)$ und die Anzahl M der verschwindenden Wavelet-Momente das lokale Konvergenzverhalten der Wavelet-Transformationskoeffizienten für feiner werdende Auflösungen. Stellen mit großen $^j s^{(M)}(t)$ Werten erzeugen dabei nur in ihrem lokal begrenzten und mit steigendem Skalierungsindex l kleiner werdenden Einflußbereich Entwicklungskoeffizienten mit großen Beträgen [99, 125]. Für eine Signaltransformation in Blöcken und eine a priori festgelegte

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung der geometrischen Varianzmittelwerte für unsortierte und sortierte Koeffizienten der Karhunen-Loève-Transformation, Diskrete-Cosinus-Transformation, D2- und D4-Wavelet-Transformation. Die dargestellten Ergebnisse resultieren aus dem in der Abbildung 5.5 dargestellten EKG-Signalausschnitt.

	$\left(\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_y^2(n)\right)^{1/N_s}$	$\left(\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_w^2(n)\right)^{1/N_s}$	$\frac{\left(\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_y^2(n)\right)^{1/N_s}}{\left(\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_w^2(n)\right)^{1/N_s}}$
Karhunen-Loève-Transformation	0.176	0.139	1.268
Diskrete-Cosinus-Transformation	0.662	0.247	2.680
D2-Wavelet-Transformation	0.706	0.138	5.105
D4-Wavelet-Transformation	0.539	0.112	4.828

Reihenfolge der Entwicklungskoeffizienten wird das asymptotische Abklingen der Beträge $|y_{i,n}|$ zu hohen Indizes n damit prinzipiell durch Signalanteile mit schlechten Regularitätseigenschaften bestimmt [99]. Werden dagegen die Entwicklungskoeffizienten a posteriori nach fallendem Betrag entsprechend Gleichung (5.59) sortiert, so wird das asymptotische Abklingen für $l \rightarrow 0$ durch die in diesem Intervall überwiegenden Regularitätseigenschaften dominiert [99]. Die durch eine lokal begrenzte Welligkeit des Signals $j_s(t)$ erzeugten wenigen Entwicklungskoeffizienten mit großem Betrag bei hohen Auflösungen werden über die Permutationsabbildung \mathbf{P}_i auf Koeffizienten $w_{i,n}$ mit kleinen Indizes n abgebildet und beeinflussen so das Abklingen nicht mehr vorrangig.

Die Abbildung 5.8 gibt einen qualitativen Eindruck dieser Zusammenhänge für den in der Abbildung 5.5 dargestellten EKG-Signalausschnitt. Gegenübergestellt sind hier die normierten Varianzen unsortierter ($\sigma_y^2(n)/\sigma_s^2$) und sortierter ($\sigma_w^2(n)/\sigma_s^2$) Entwicklungskoeffizienten für Karhunen-Loève-Transformation (—), Diskrete-Cosinus-Transformation (— —), D2- (\dots) und D4-Wavelet-Transformation ($-\cdot$). Insbesondere die unteren beiden Bilder, die die akkumulierten Varianzen zeigen, lassen erkennen, daß die Wavelet-Transformation in Kombination mit der a posteriori Bestimmung der Koeffizientenreihenfolge eine bessere Leistungsfähigkeit erreicht als die anderen Transformationen. In der Tabelle 5.1 werden die geometrischen Mittel der Varianzen als quantitative Maße für die energetische Konzentration miteinander verglichen. In der rechten Spalte ist erkennbar, daß die Permutation der Koeffizienten für die Wavelet-Transformation einen deutlichen Gewinn ermöglicht, der die zusätzliche Übertragung der Seiteninformationen rechtfertigt.

Der Zusammenhang von Regularität des analogen Signals $j_s(t)$ und dem Abklingen der

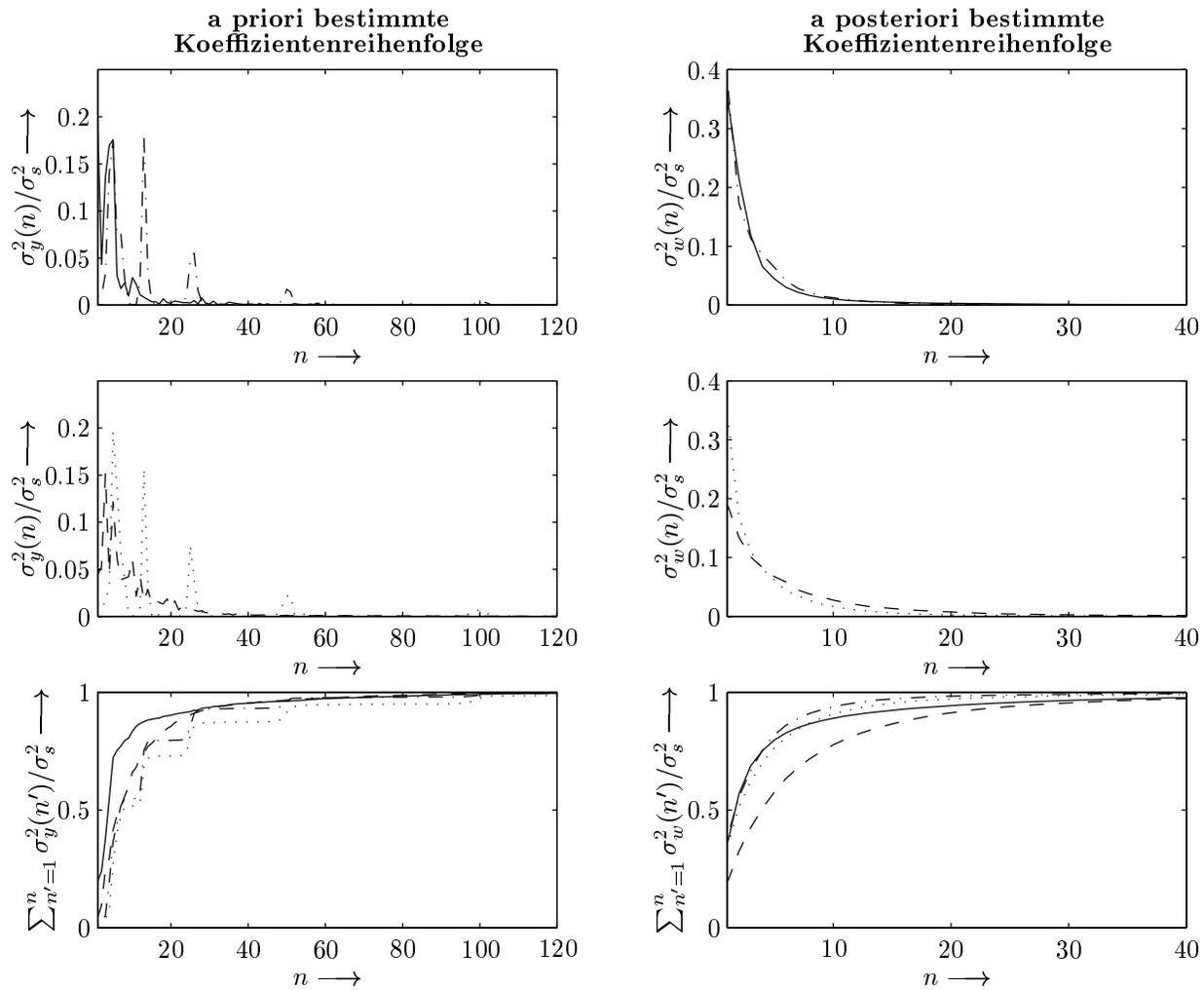


Abbildung 5.8: Das abklingende Verhalten der normierten Varianzen für unsortierte ($\sigma_y^2(n)/\sigma_s^2$) und sortierte ($\sigma_w^2(n)/\sigma_s^2$) Entwicklungskoeffizienten der Karhunen-Loève-Transformation (—), Diskreten-Cosinus-Transformation (---), D2- (····) und D4-Wavelet-Transformation (-·-). Die unteren beiden Bildern zeigen die akkumulierten Varianzen.

nach fallenden Beträgen sortierten Wavelet-Transformationskoeffizienten kann für die Kompression der betrachteten nichtstationären Signale aus den folgenden beiden Gründen sehr vorteilhaft genutzt werden:

- Die Anwendung des ersten Quantisierungsschritts auf die sortierten Entwicklungskoeffizienten entsprechend $\mathcal{Q}_{N_D(i)}\{\mathbf{P}_i \mathbf{y}_i\}$, $\mathcal{Q}_{N_I(i)}\{\mathbf{P}_i \mathbf{y}_i\}$ garantiert einen geringen Quantisierungsfehler $\sigma_{q_i}^2$ aufgrund der ausgeprägten energetischen Konzentration für Koeffizienten $w_{i,n}$ mit kleinem Index n .
- Die Anordnung der Koeffizienten innerhalb eines Vektors \mathbf{w}_i wird nicht durch die deutlich nichtstationären statistischen Eigenschaften des EKG-Signals, sondern durch die näherungsweise als stationär anzusehenden Regularitätseigenschaften dieses Signals

bestimmt. Somit kann der erzeugte vektorwertige Prozeß

$$\mathbf{X}_w = [\mathbf{X}_{w_1}, \mathbf{X}_{w_2}, \dots, \mathbf{X}_{w_i}, \dots, \mathbf{X}_{w_\chi}] \quad (5.69)$$

mit der Realisation

$$\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_i, \dots, \mathbf{w}_\chi], \quad \mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^{N_s} \quad (5.70)$$

und \mathbf{w}_i nach Gleichung (5.46) oder (5.47) zumindest bezüglich der Varianzen der Koeffizienten $w_{i,n} = f(i)$, $n = 1, \dots, 256$ als näherungsweise stationär betrachtet werden.

Die Abbildung 5.9 zeigt am Beispiel des Signalausschnitts aus Abbildung 5.5, daß die Annahme dieser stationären Prozeßeigenschaft für \mathbf{X}_w bei Verwendung der Wavelet-Transformation gerechtfertigt ist. Anhand der zweidimensionalen linearen und dreidimensionalen logarithmischen Darstellungen der normierten Beträge $|w_{i,n}|/|\mathbf{s}_i|$ ist erkennbar, daß n-, p- und f-Zyklen nahezu die selben energetischen Verteilungen in den Koeffizienten der zugehörigen Vektoren \mathbf{w}_i erzeugen. Im Vergleich dazu weisen Karhunen-Loève-Transformation und Diskrete-Cosinus-Transformation für die verschiedenen Signalabschnitte eine deutlich unterschiedliche Verteilung der Energie über die Koeffizienten auf. Dies wird anhand der gestrichelt eingezeichneten Höhenlinien in den oberen vier Bildern ersichtlich. Weiter ist aufgrund der näher zusammenliegenden Höhenlinien erkennbar, daß wegen der größeren Anzahl verschwindender Wavelet-Momente die D4-Wavelet-Transformation eine kompaktere Signalbeschreibung ermöglicht als die D2-Wavelet-Transformation.

Die nichtlineare Operation Permutation gefolgt von Quantisierung überführt den Prozeß \mathbf{X}_y in den Prozeß \mathbf{X}_w , dessen statistische Eigenschaften als Rangordnungsstatistik des Prozesses \mathbf{X}_y nur für sehr einfache Modelle analytisch aus den statistischen Eigenschaften von \mathbf{X}_y abgeleitet werden können [126]. Dies ist auch ein Grund dafür, daß der beschriebene Wellenformcodierungsalgorithmus nicht für einen statistischen Modellprozeß \mathbf{X}_s dimensioniert ist. Ein adäquater statistischer Modellprozeß ließe sich nicht analytisch über die nichtlineare Rangordnungsoperation auf einen korrespondierenden Modellprozeß \mathbf{X}_w abbilden.

Eine kompaktere Signalbeschreibung \mathbf{y} kann durch die Verwendung von signaladaptiven Transformationsmatrizen \mathbf{A}_i erreicht werden. Der folgende Abschnitt beschreibt, wie mit Hilfe der im Abschnitt 4.8 des Kapitels 4 diskutierten Wavelet-Paket-Transformation orthonormale Abbildungen \mathbf{A}_i gefunden werden können, die für eine vorgegebene Anzahl von beizubehaltenden Entwicklungskoeffizienten $N_D(i)$, $N_I(i)$ gegenüber der Wavelet-Transformation weiter reduzierte Raten $I(i)$ oder Verzerrungen $D(i)$ erzeugen.

5.4.3 Lokale energetische Konzentration und Korrelationsberücksichtigung mit der Wavelet-Paket-Transformation

Der zentrale Bestandteil der Transformationscodierung in Blöcken, die Überführung des Vektors \mathbf{s}_i in den Vektor \mathbf{w}_i mit wenigen Entwicklungskoeffizienten hohen Betrags, kann anders

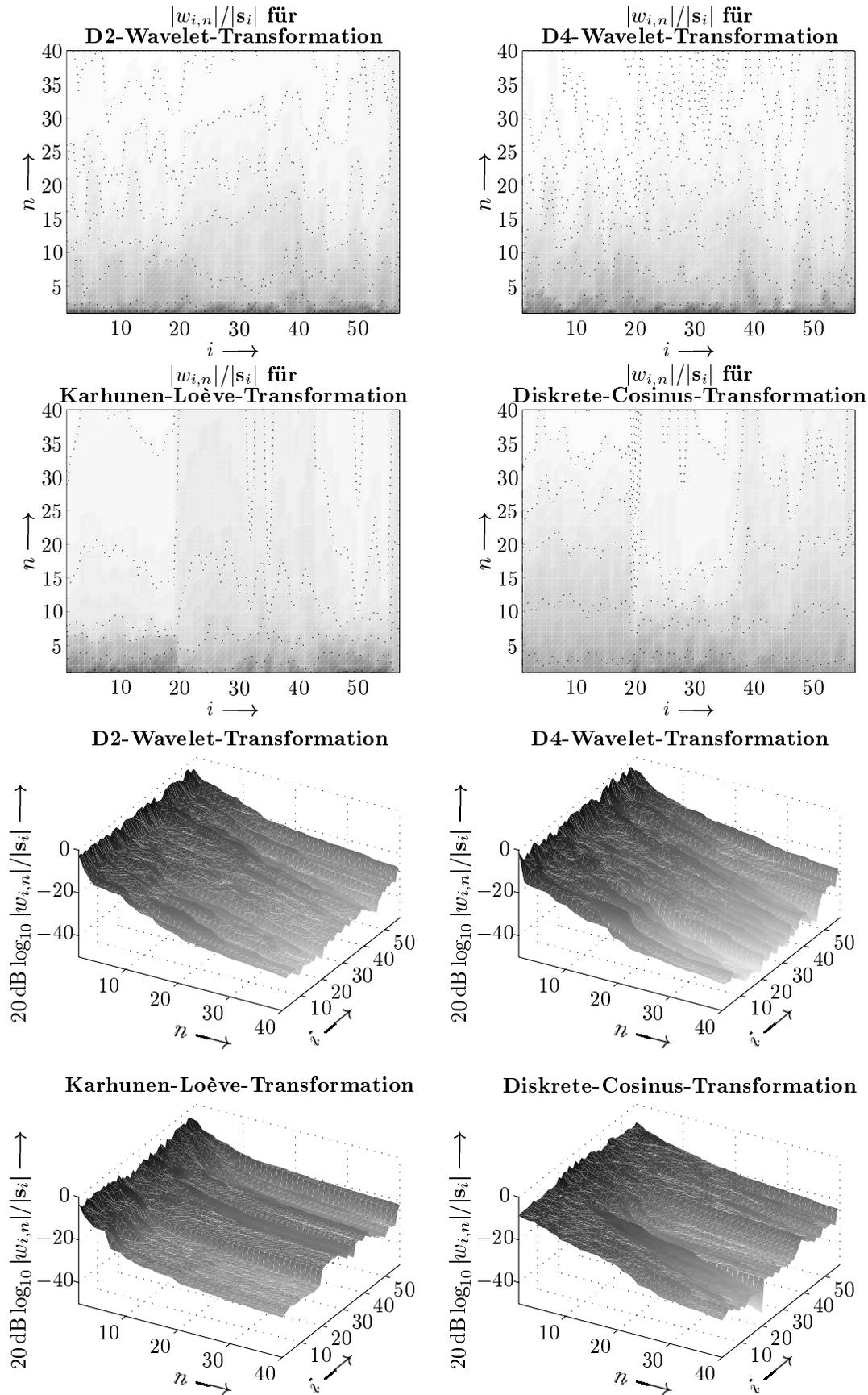


Abbildung 5.9: Lineare und logarithmische Darstellung der Verteilung der Koeffizientenbeiträge für den Signalausschnitt aus Abbildung 5.5.

als beispielsweise bei der Karhunen-Loève-Transformation auch ohne Berücksichtigung der statistischen Signaleigenschaften erreicht werden. Grundlage vieler alternativer Verfahren ist die Auswahl der Transformationsmatrix \mathbf{A}_i in Abhängigkeit des Signalvektors \mathbf{s}_i . Die Matrix \mathbf{A}_i ergibt sich dabei aus einer Menge von Abbildungen als das Element, das eine optimale Verteilung der Entwicklungskoeffizienten des Vektors $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i$ erzeugt [31–33, 36–38, 108]. Zur Beurteilung der Optimalität einer Koeffizientenverteilung in \mathbf{y}_i können Kostenfunktionen verwendet werden, die die energetische Konzentration in den Koeffizienten bewerten.

Im Kontext der Wavelet-Theorie existiert mit der Wavelet-Paket-Transformation ein Abbildungskonzept, aus dem eine sehr umfangreiche Menge \mathcal{M}_{wpt} von Transformationsmatrizen hervorgeht, welche die Wavelet-Transformationsmatrix als ein Element enthält. Die von einer Abbildung aus \mathcal{M}_{wpt} erzeugten Entwicklungskoeffizienten lassen sich zudem aufgrund der in Abbildung 4.10 dargestellten Baumstruktur der zugehörigen Filterbank schnell rekursiv berechnen. Für einen Signalvektor \mathbf{s}_i der Länge $N_s = 2^v$, der durch v -malige rekursive Anwendung eines orthonormalen Filterpaars transformiert wird, existieren mehr als 2^{N_s} verschiedene orthonormale Wavelet-Paket-Basen. Da hier $N_s = 256$ gilt, kann die Matrix $\mathbf{A}_i \in \mathcal{M}_{\text{wpt}}$ demnach aus $\#\{\mathcal{M}_{\text{wpt}}\} \approx 2^{256} \approx 10^{77}$ verschiedenen Transformationsmatrizen signaladaptiv ausgewählt werden, so daß grundsätzlich kompaktere Signalbeschreibungen \mathbf{y}_i als mit der Wavelet-Transformation möglich sind. Die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten lassen sich dabei mit einer Operationenanzahl der Ordnung $N_s \log_2 N_s$ berechnen [31].

Die Wavelet-Paket-Transformation soll hier, wie beispielsweise auch in [108], durch die Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{W}_{\text{wpt};i} = \mathcal{W}_{\text{wpt}} \{\mathbf{s}_i\}, \tag{5.71}$$

welche den Vektor $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^{N_s}$ in die $N_s \times (v + 1)$ Koeffizientenmatrix $\mathbf{W}_{\text{wpt};i} \in \mathbb{R}^{N_s \times (v+1)}$ überführt, beschrieben werden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die Einträge der Matrix $\mathbf{W}_{\text{wpt};i}$ als Innere-Produkte des mit dem Vektor \mathbf{s}_i assoziierten kontinuierlichen Energiesignals und der Wavelet-Paket-Elementarfunktion $\psi_{k,l,\zeta}(t)$ zu interpretieren sind. Die Wavelet-Paket-Koeffizienten sollen demnach in Anlehnung an die Indizierung der Elementarfunktionen nach Verschiebungs-, Skalierungs- und Modulationsparametern wie in Abbildung 4.10 dargestellt ebenfalls durch ein Tupel (k, l, ζ) mit $l = 0, \dots, -v$, $k = 0, \dots, 2^{v+l} - 1$, $\zeta = 0, \dots, 2^{-l} - 1$ indiziert werden. Dabei sind die Koeffizienten in der Matrix \mathbf{W}_{wpt} wie folgt angeordnet

$$\mathbf{W}_{\text{wpt}} = \begin{bmatrix} c_{0,0,0} & c_{0,-1,1} & \cdots & c_{0,-v,2^v-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & c_{k,l,\zeta} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{2^{v+l}-1,0,0} & c_{2^{v+l}-1,-1,0} & \cdots & c_{0,-v,0} \end{bmatrix}. \tag{5.72}$$

Jede Matrix $\mathbf{W}_{\text{wpt};i}$ enthält $N_s(v + 1)$ Einträge aus denen die N_s aus orthonormalen Basisfunktionen hervorgehenden Entwicklungskoeffizienten $\mathbf{y}_i = [y_{i,1}, \dots, y_{i,N_s}]^T$ ausgewählt

werden, die die Kostenfunktion

$$\mathcal{C}\{\mathbf{y}_i\} = -\sum_{n=1}^{N_s} |y_{i,n}|^2 \log_e |y_{i,n}|^2 \quad (5.73)$$

minimieren. Die Kostenfunktion (5.73) wurde in [31] zur Bewertung der Kompaktheit der Darstellung \mathbf{y}_i eingeführt und verfügt über das wichtige Merkmal der Additivität, die eine Voraussetzung für die Vergleichbarkeit verschiedener Signalentwicklungen ist: Es ist

$$\mathcal{C}\{[y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,N_s}]^T\} = \sum_{n=1}^{N_s} \mathcal{C}\{y_{i,n}\}, \quad (5.74)$$

$$\mathcal{C}\{\mathbf{0}\} = 0. \quad (5.75)$$

Für jede Koeffizientenmatrix $\mathbf{W}_{\text{wpt};i}$ kann nun durch Vergleich der Kosten aller aus der Wavelet-Paket-Transformation hervorgehender Signalentwicklungen eine Darstellung $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i$ gefunden werden, die die minimalen Kosten $\mathcal{C}\{\mathbf{A}_i \mathbf{s}_i\}$ aller $\mathbf{A}_i \in \mathcal{M}_{\text{wpt}}$ erzeugt. In [31] wurde der sogenannte Best-Basis-Suchalgorithmus vorgestellt, der unter Berücksichtigung der Baumstruktur der Wavelet-Paket-Transformation die Kosten auseinander hervorgehender Wavelet-Pakete miteinander vergleicht und so mit $N_s \log_2 N_s$ Vergleichsoperationen die Optimaltransformation $\mathbf{A}_i \in \mathcal{M}_{\text{wpt}}$ findet. In der Abbildung 5.10 ist das diesem Algorithmus zugrunde liegende Prinzip beispielhaft anhand eines Wavelet-Paket-Baums der Tiefe $v = 3$ dargestellt. Für jeden der $2^{(v+1)} - 1$ Knoten des Baums, die mit Skalierungs- und Modulationsparametern l und ζ indiziert sind, werden nach Gleichung (5.73) die Kosten berechnet, die die Transformationskoeffizienten dieser Knoten zu den Gesamtkosten der Signalentwicklung beitragen. Folgend werden ausgehend von der tiefsten Ebene $l = -v$ die Summen der Kosten, die mit zwei sogenannten Kinderknoten (Knoten, die aus einem Vaterknoten hervorgehen) assoziiert werden mit den Kosten des Vaterknotens auf der nächst höheren Ebene $l = -v + 1$ verglichen. Es werden dann die Knoten (zwei Kinderknoten oder ein Vaterknoten) beibehalten, deren Entwicklungskoeffizienten die geringeren Kosten verursachen. Dieser Vergleich zwischen Vaterknoten und Kinderknoten mit minimalen Kosten wird sukzessive von der tiefsten Ebene ($l = -v$) zur Baumwurzel ($l = 0$) durchgeführt. Die sich letztendlich ergebende Baumstruktur korrespondiert mit der optimalen Wavelet-Paket-Transformationsmatrix \mathbf{A}_i [31, 99, 108, 127]. Hier soll der beschriebene gesamte Best-Basis-Suchalgorithmus, der auf die Matrix $\mathbf{W}_{\text{wpt};i}$ unter Verwendung der Kostenfunktion \mathcal{C} angewendet wird und schließlich die Optimalmatrix \mathbf{A}_i liefert, symbolisch durch

$$\mathcal{B}\{\mathbf{W}_{\text{wpt};i}\} \Rightarrow \mathbf{A}_i \quad (5.76)$$

beschrieben werden.

Voraussetzung für die Anwendung des Best-Basis-Verfahrens ist, daß die in \mathcal{M}_{wpt} enthalte-

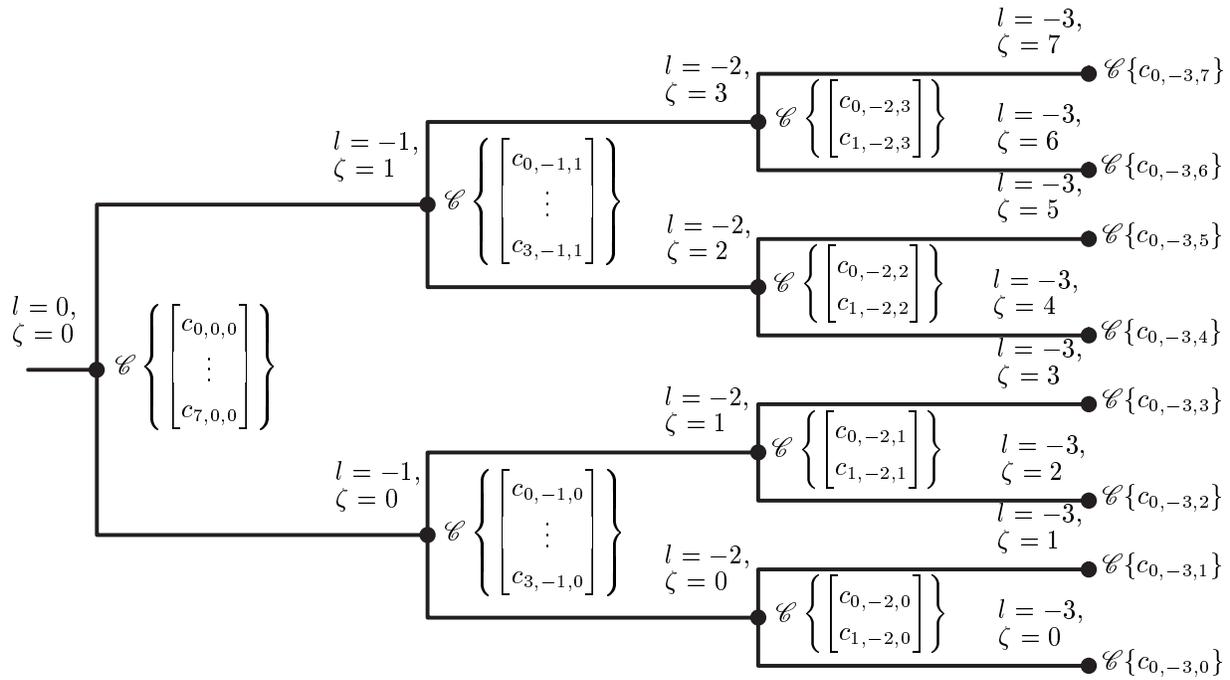


Abbildung 5.10: Prinzip der Best-Basis-Suche: Für jeden durch l und ζ indizierten Knoten des Wavelet-Paket-Baums werden Kosten berechnet, die sich aus der Anwendung der Kostenfunktion (5.73) auf die zugehörigen $2^{(v+l)}$ Koeffizienten $c_{l,0,\zeta}, \dots, c_{l,2^{(v+l)}-1,\zeta}$ ergeben. Die Menge der einem Knoten zugeordneten Koeffizienten wird dabei als Wavelet-Paket bezeichnet. Ein Kostenvergleich zwischen optimalen Kinderknoten und Vaterknoten, der sukzessive ausgehend von der tiefsten Ebene $l = -v$ zur Baumwurzel $l = 0$ durchgeführt wird, entscheidet dann über die Struktur des optimalen Baums und somit über die kostengünstigste Signalentwicklung $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i$.

nen Matrizen orthonormal sind. Da diese $N_s \times N_s$ Matrizen entsprechend

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_i \\ \vdots \\ \mathbf{y}_\chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & \mathbf{A}_2 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{A}_i & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{A}_\chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \\ \mathbf{s}_\chi \end{bmatrix}. \tag{5.77}$$

jeweils auf nichtüberlappende Signalblöcke der Länge N_s angewendet werden, ist eine Berücksichtigung der Randeffekte zur Sicherstellung der Orthonormalität der einzelnen Matrizen \mathbf{A}_i notwendig [22, 35, 99, 128]. Zur Gewährleistung der Orthonormalität soll hier das in den Arbeiten [35, 129] vorgeschlagene Verfahren verwendet werden: Auf jeder Filterbankebene wird die Filterung der ersten und letzten Koeffizienten eines Pakets mit angepassten Randfiltern durchgeführt. In [35, 129] ist dargestellt, welche Freiheitsgrade bei der Wahl der Randfilter existieren und welche Wavelet-Paket-Elementarfunktionen hieraus resultie-

ren. Für die Anwendung dieses Verfahrens ist hier lediglich von Bedeutung, daß nur die Minderzahl der Koeffizienten an den Rändern der Pakete betroffen sind und daß das für die Kompression bestimmende Abklingen der Entwicklungskoeffizienten durch die Mehrzahl der nicht von der Randfilterung betroffenen Koeffizienten bestimmt wird. Zudem ist anhand der Beispielzyklen aus den Abbildungen 5.3 und 5.4 die relativ geringe Signalenergie in den Randbereichen eines Zyklus erkennbar. Die Randkoeffizienten haben daher unabhängig von der Wahl der Randbasisfunktionen kleine Beträge und werden somit oft zu null quantisiert.

Da die Wavelet-Transformationsmatrix ein Element der Wavelet-Paket-Matrizenmenge \mathcal{M}_{wpt} ist und somit die Best-Basis-Suche $\mathcal{B}\{\mathbf{W}_{\text{wpt};i}\}$ immer eine Matrix \mathbf{A}_i zur Folge hat, die eine mindestens so gute energetische Konzentration in $\mathbf{y}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{s}_i$ erzeugt wie die Wavelet-Transformation, können die zum Konvergenzverhalten gemachten Überlegungen aus dem vorherigen Abschnitt 5.4.2 als Grenzaussagen für die Wavelet-Paket-Transformation übernommen werden. Es wird demnach auch hier das Abklingen der Entwicklungskoeffizienten prinzipiell durch die in guter Näherung stationären lokalen Regularitätseigenschaften des analogen Signals und die Anzahl der verschwindenden Wavelet-Momente bestimmt.

Im Laufe der letzten Jahre erschienen einige Veröffentlichungen [33, 36–38, 130], die den beschriebenen Ansatz der signaladaptiven Transformationsauswahl erweitern indem größere ebenfalls baumstrukturierte Abbildungsmengen $\mathcal{M}_{\text{wpt}}^+$ mit $\mathcal{M}_{\text{wpt}} \subset \mathcal{M}_{\text{wpt}}^+$ unter Verwendung einer Kostenfunktion nach der Optimaltransformation durchsucht werden. Die dort gefundenen Abbildungen erzeugen mindestens so kompakte Signaldarstellungen wie die aus $\mathcal{B}\{\mathbf{W}_{\text{wpt}}\}$ resultierenden, da $\mathcal{M}_{\text{wpt}} \subset \mathcal{M}_{\text{wpt}}^+$ ist. Betrachtet man allerdings den relativen Kompaktheitsgewinn, der durch eine Erweiterung der Menge \mathcal{M}_{wpt} möglich wird, so ist eine gewisse Sättigung zu erkennen. Ein deutlicher Gewinn wird lediglich durch die Verwendung der Wavelet-Paket-Transformation anstelle der Wavelet-Transformation erreicht. Dies wird beispielsweise in [38] deutlich. Die für eine effektive Suche notwendige Baumstruktur der Mengen $\mathcal{M}_{\text{wpt}}^+$ verhindert eine gegenüber $\mathbf{A}_i \in \mathcal{M}_{\text{wpt}}$ deutliche verbesserte Anpassung der Abbildung \mathbf{A}_i an das Signal \mathbf{s}_i . Zudem steigt auch die zur eindeutigen Beschreibung der Optimaltransformation notwendige Bitmenge mit der Größe von $\mathcal{M}_{\text{wpt}}^+$ an.

Um eine weitere Verbesserung der Kompressionsergebnisse zu erzielen, soll die Fähigkeit zur lokalen energetischen Konzentration durch adaptive Auswahl einer angepaßten Basis \mathbf{A}_i um die Berücksichtigung der statistischen Signaleigenschaften erweitert werden. Dieser Ansatz läuft auf eine zu den beschriebenen Verfahren gegensätzliche Modifikation der Best-Basis-Suche in \mathcal{M}_{wpt} hinaus: Die Suche nach einer optimalen Basis wird auf eine Untermenge $\mathcal{M}_{\text{wpt}}^- \subset \mathcal{M}_{\text{wpt}}$ beschränkt. Einige wenige Basisvektoren, deren Entwicklungskoeffizienten die korrelativen Eigenschaften des Prozesses $\mathbf{X}_s = \mathbf{X}_{s,\text{ekg}}$ über unterschiedliche Signalabschnitte hinweg besonders gut charakterisieren, sollen zu jeder optimalen Matrix \mathbf{A}_i gehören. Sie sind von der Best-Basis-Suche ausgenommen [131, 132]. Einige Knoten des Wavelet-Paket-Baums sind somit für jeden Signalblock Bestandteil des Optimalbaums. Die betreffenden N_α permutierten Entwicklungskoeffizienten werden folgend durch Indizierung mit vorangestelltem α entsprechend ${}_\alpha w_{i,1}, \dots, {}_\alpha w_{i,N_\alpha}$ gekennzeichnet. Sie stellen für jeden

Vektor \mathbf{w}_i dessen erste N_α Komponenten dar.

Die grundlegende Idee dieser Methode berücksichtigt, daß die Leistungsfähigkeit des verwendeten Transformationsverfahrens im Hinblick auf die letztendlich erreichbare Signalkompression immer in Kombination mit dem auf die Entwicklungskoeffizienten angewendeten Quantisierungsverfahren zu bewerten ist [11, 99].

Für die Varianzen der Quantisierungsfehler gilt in Abhängigkeit der für die Übertragung der sortierten Entwicklungskoeffizienten $w_{i,n}$ zur Verfügung stehenden Bitraten R_n und deren Varianzen $\sigma_w^2(n)$ die Abschätzung

$$\sigma_q^2(n) = \varepsilon_{\text{quant}} 2^{-2R_n} \sigma_w^2(n) \tag{5.78}$$

[11]. Dabei bezeichnet $\varepsilon_{\text{quant}}$ einen Quantisiererbeiwert, der abhängig von der ausgewählten Kennliniencharakteristik und der Verteilungsdichtefunktion der Entwicklungskoeffizienten ist. Die Optimierung eines Transformationscodierungsverfahrens beinhaltet neben der Auswahl einer geeigneten Transformationsvorschrift die bestmögliche Aufteilung der mittleren Bitrate \bar{R} auf Bitraten R_n zur Übertragung der einzelnen Koeffizienten. Ziel ist es eine minimale mittlere Quantisierungsfehlervarianz

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \sigma_q^2(n) \tag{5.79}$$

für die mittlere Bitrate

$$\bar{R} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} R_n \tag{5.80}$$

zu erhalten. Diese Optimalität wird erreicht, wenn alle Entwicklungskoeffizienten im Mittel mit der selben Quantisierungsfehlervarianz

$$\sigma_q^2(n) = \varepsilon_{\text{quant}} 2^{-2\bar{R}} \left(\prod_{n'=1}^{N_s} \sigma_w^2(n') \right)^{1/N_s}, \quad n = 1, \dots, N_s \tag{5.81}$$

quantisiert werden, so daß für die Bitraten

$$R_n = \bar{R} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{\sigma_w^2(n)}{\left(\prod_{n'=1}^{N_s} \sigma_w^2(n') \right)^{1/N_s}} \tag{5.82}$$

gilt [11]. Die Leistungsfähigkeit der Transformationscodierung kann dann durch Angabe des Transformationscodierungsgewinns

$$G = \frac{\frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \sigma_w^2(n)}{\left(\prod_{n=1}^{N_s} \sigma_w^2(n) \right)^{1/N_s}} \tag{5.83}$$

gekennzeichnet werden [11, 124]. Da der Zähler in Gleichung (5.83) unabhängig von der Transformation konstant ist, bestimmt bei optimaler Quantisierung letztendlich nur der Nenner die Leistungsfähigkeit des Verfahrens. Ein Vergleich mit Gleichung (5.60) zeigt, daß dieser mit dem die energetische Konzentration in den Entwicklungskoeffizienten bewertenden geometrischen Varianzmittel ϱ identisch ist.

Mit dem hier verwendeten neuartigen Ansatz soll nicht versucht werden ϱ wie in den Veröffentlichungen [33, 36–38, 130] weiter zu reduzieren. Stattdessen sollen die bei der Best-Basis-Suche bisher nicht berücksichtigten statistischen Signaleigenschaften zur Prädiktion von redundanzbehafteten Entwicklungskoeffizienten ${}_{\beta}w_{i,n}$, $n = 1, \dots, N_{\beta}$ aus Koeffizienten ${}_{\alpha}w_{i,n}$, $n = 1, \dots, N_{\alpha}$, $N_s = N_{\alpha} + N_{\beta}$, $N_{\alpha} \ll N_{\beta}$ mit hohem Informationsgehalt genutzt werden. Der folgende Abschnitt 5.4.4 beschreibt diesen adaptiven Prädiktionsvorgang, der unter Ausnutzung der zeitvarianten korrelativen Bindungen zwischen den Entwicklungskoeffizienten die Abbildung der Koeffizienten $w_{i,n}$ auf ihre Prädiktionsfehler $\epsilon_{i,n}$ mit $\sigma_{\epsilon}^2(n) < \sigma_w^2(n)$ leistet. Dieser zusätzliche Gewinn kann nach Gleichung (5.78) zur Reduktion der Verzerrung bei gleichbleibender Bitrate oder zur Reduktion der Bitrate bei gleichbleibender Verzerrung genutzt werden.

Eine geometrische Interpretation der korrelativen Verhältnisse zwischen den Entwicklungskoeffizienten $y_{i,n}$ liegt der Unterscheidung von α - und β -Koeffizienten und dem Prädiktionsverfahren zugrunde [11, 99, 121]: Assoziiert man mit den N_s mittelwertfreien Koeffizientenfolgen $y_{i,n}$ (Blockindex i als unabhängige Variable) Vektoren $\mathbf{r}(y_{i,n})$ in einem Hilbert-Raum mit dem Inneren Produkt

$$\langle \mathbf{r}(y_{i,n}), \mathbf{r}(y_{i,n'}) \rangle = \frac{1}{\chi} \sum_{i=1}^{\chi} y_{i,n} y_{i,n'} \quad (5.84)$$

und dem Betrag

$$\|\mathbf{r}(y_{i,n})\| = \sqrt{\sigma_y^2(n)}, \quad (5.85)$$

so entsprechen Korrelationen zwischen Entwicklungskoeffizienten den Winkeln zwischen den korrespondierenden Vektoren. Weiter spezifiziert die Dichte der Vektoren eine Verteilungswolke, die mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Prozesses \mathbf{X}_y korrespondiert [99]. Für stationäre Prozesse liegen die mit den Basisvektoren bzw. den zugehörigen Entwicklungskoeffizienten der Karhunen-Loève-Transformation zu assoziierenden Vektoren in den Hauptachsen dieser Verteilungswolke. Basisvektoren mit großen Eigenwerten λ korrespondieren hier mit Richtungen der Verteilungswolke, in denen Vektoren mit großen σ^2 Werten liegen.

Für den hier betrachteten nichtstationären Prozeß zeichnen sich die mit den N_{α} Entwicklungskoeffizienten ${}_{\alpha}w_{i,1}, \dots, {}_{\alpha}w_{i,N_{\alpha}}$ in fest zugeordneter Verbindung stehenden Vektoren $\mathbf{r}(y_{i,1}), \dots, \mathbf{r}(y_{i,N_{\alpha}})$ dadurch aus, daß der von ihnen aufgespannte Untervektorraum über verschiedene Signalabschnitte hinweg einen Großteil der Verteilungswolke, die sich aufgrund der Nichtstationarität des Prozesses mit dem Blockindex i ändert, beinhaltet. Die redundanzbehafteten Koeffizienten $y_{i,N_{\alpha}+1}, \dots, y_{i,N_s}$ mit geringem Informationsgehalt, die den

sortierten Koeffizienten ${}_{\beta}w_{i,1}, \dots, {}_{\beta}w_{i,N_{\beta}}$ in Abhängigkeit ihres Betrags zugeordnet werden, bestimmen maßgeblich Lage und Ausdehnung der Verteilungswolke und lassen sich somit durch eine adaptive Linearkombination der Koeffizienten mit hohem Informationsgehalt mit einem geringen Prädiktionsfehler schätzen.

Die Interpretation der β -Koeffizienten als Koeffizienten mit geringem Informationsgehalt (bzw. als redundanzbehaftet) ist hier in ihrer Vorhersagbarkeit durch die α -Koeffizienten mit hohem Informationsgehalt begründet. Das Innere Produkt nach Gleichung (5.84) soll zur namentlichen Unterscheidung zum Inneren Produkt aus Gleichung (4.2) als statistisches Inneres Produkt bezeichnet werden. Genauso werden auch die hieraus hervorgehenden Vektoren, falls Verwechslungen mit den Basisvektoren möglich sind, als statistische Vektoren bezeichnet.

Um eine Entscheidung treffen zu können, welche Wavelet-Paket-Transformationskoeffizienten $c_{k,l,\zeta}$ sich zur Prädiktion eignen und welche sich mit geringem Fehler präzisieren lassen, werden die mit den Funktionen $\psi_{k,l,\zeta}(t)$ korrespondierenden Wavelet-Paket-Vektoren auf die zugehörigen statistischen Vektoren $\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})$ abgebildet. Diese Abbildung wird durch die Multiplikation aller Wavelet-Paket-Vektoren mit der oberen Dreiecksmatrix \mathbf{R}_{oben} , die sich aus der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix entsprechend

$$\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{R}_{\text{unten}}\mathbf{R}_{\text{oben}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \cdots & \mathbf{r}_{N_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N_s}^T \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

ergibt, erreicht [121,132]. Äquivalent hierzu können die statistischen Vektoren $\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})$ mit geringerem Rechenaufwand unter Verwendung der rekursiven Filterbankstruktur durch Wavelet-Paket-Transformation der Spaltenvektoren $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}$ berechnet werden: Bildet man die N_s Vektoren $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}$ auf N_s Wavelet-Paket-Matrizen

$$\mathbf{W}_{\text{wpt},n} = \mathscr{W}_{\text{wpt}}\{\mathbf{r}_n\}, \quad n = 1, \dots, N_s \quad (5.87)$$

ab, so ergibt sich die n -te Komponente jedes der $N_s(v + 1)$ Vektoren $\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})$ als $c_{k,l,\zeta}$ aus der Matrix $\mathbf{W}_{\text{wpt},n}$. Die geometrischen Verhältnisse zwischen den so gefundenen statistischen Vektoren beschreiben die korrelativen Beziehungen zwischen den Entwicklungskoeffizienten. Die zu den α -Koeffizienten gehörigen Vektoren zeichnen sich in der entstandenen Vektoranordnung dadurch aus, daß die Projektionen aller die Verteilungswolke ausmachender Vektoren in den durch $\mathbf{r}(y_{i,1}), \dots, \mathbf{r}(y_{i,N_{\alpha}})$ aufgespannten Untervektorraum die beste Approximation im Sinne des minimalen Fehlerquadrats ist, die mit N_{α} Vektoren möglich ist. Grob gesprochen sammeln die α -Koeffizienten die maximale präzisierbare Energie ein.

Das folgende Verfahren bestimmt ausgehend von den $N_s(v + 1)$ statistischen Vektoren sukzessive die Indizes $(k_1, l_1, \zeta_1), \dots, (k_{N_{\alpha}}, l_{N_{\alpha}}, \zeta_{N_{\alpha}})$ der Wavelet-Paket-Basisfunktionen, die die α -Koeffizienten erzeugen:

Tabelle 5.2: Indizes der α -Koeffizienten und die zugehörigen energetischen Verhältnisse.

n	(k_n, l_n, ζ_n)	$\frac{E_{\text{prä};n}(k_n, l_n, \zeta_n)}{\sigma_s^2}$	$\frac{\sigma_w^2(n)}{\sigma_s^2}$	$\frac{E_{\text{prä};n}(k_n, l_n, \zeta_n)}{\sigma_w^2(n)}$
1	(0,-8,21)	0.311	0.034	9.173
2	(0,-8,24)	0.223	0.025	8.967
3	(0,-8,0)	0.101	0.098	1.012
4	(0,-7,20)	0.099	0.018	5.378
5	(2,-6,2)	0.065	0.052	1.254
6	(1,-7,24)	0.046	0.017	2.643

1. Berechnung der Summe der Betragsquadrate aller Komponenten der Vektoren $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}$, die in Richtung des Vektors $\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})$ liegen:

$$E_{\text{prä};1}(k, l, \zeta) = \frac{1}{|\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})|^2} \left((\mathbf{r}^T(c_{k,l,\zeta}), \mathbf{r}_1)^2 + (\mathbf{r}^T(c_{k,l,\zeta}), \mathbf{r}_2)^2 + \dots + (\mathbf{r}^T(c_{k,l,\zeta}), \mathbf{r}_{N_s})^2 \right) \quad (5.88)$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})|^2} \mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})^T \mathbf{R}_{\text{oben}} \mathbf{R}_{\text{unten}} \mathbf{r}(c_{k,l,\zeta}) \quad (5.89)$$

2. Auswahl des Indextupels mit maximalem $E_{\text{prä};1}(k, l, \zeta)$:

$$(k_1, l_1, \zeta_1) = \max \arg \{ E_{\text{prä};1}(k, l, \zeta) \} \quad (5.90)$$

3. Subtraktion der Komponenten von $\mathbf{r}(c_{k_1, l_1, \zeta_1})$, die parallel zu den Vektoren $\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})$ sind und nochmalige Zuweisung der neu entstandenen statistischen Vektoren:

$$\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta}) \hat{=} \mathbf{r}(c_{k,l,\zeta}) - \frac{\mathbf{r}^T(c_{k,l,\zeta}) \mathbf{r}(c_{k_1, l_1, \zeta_1})}{|\mathbf{r}(c_{k,l,\zeta})|^2} \mathbf{r}(c_{k_1, l_1, \zeta_1}) \quad (5.91)$$

4. Wiederholung der Schritte 1., 2. und 3. für die Indextupel $(k_2, l_2, \zeta_2), \dots, (k_{N_\alpha}, l_{N_\alpha}, \zeta_{N_\alpha})$ bis die Abbruchbedingung

$$\frac{E_{\text{prä};N_\alpha+1}(k_{N_\alpha+1}, l_{N_\alpha+1}, \zeta_{N_\alpha+1})}{\sigma_s^2} < 0.05 \quad (5.92)$$

erfüllt ist.

Dieses Verfahren ergibt für eine Cholesky-Zerlegung der aus $\mathbf{s} = \text{rep} \mathbf{s}$ hervorgehenden Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{ss} nach Gleichung (5.86) die in Tabelle 5.2 angegebenen $N_\alpha = 5$ Indextupel der α -Koeffizienten mit den entsprechenden energetischen Verhältnissen. Die ersten beiden α -Koeffizienten ${}_\alpha w_{i,1}$ und ${}_\alpha w_{i,2}$, denen für jeden Block die Wavelet-Paket-Transformationskoeffizienten $y_{i,1} = c_{0,-8,21}$ und $y_{i,2} = c_{0,-8,24}$ zugeordnet werden, erweisen sich als besonders leistungsfähig für eine Prädiktion der restlichen Entwicklungskoeffizienten. Die zugehörigen

statistischen Vektoren präzisieren 31.1% und 22.3% der Gesamtenergie σ_s^2 aller Vektoren $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N_s}$. Beide Koeffizienten haben dabei lediglich einen Anteil von 3.4% und 2.5% an der Gesamtenergie. Der dritte α -Koeffizient hat dagegen selbst einen hohen Anteil von 9.8% an der Gesamtenergie, prädiziert aber andere Entwicklungskoeffizienten relativ schlecht, wie auch aus dem Verhältnis aus der rechten Spalte deutlich wird. Für $n = 6$ wird nicht mehr der geforderte Mindestenergieanteil von 5% erreicht, so daß die $N_\alpha = 5$ in der Tabelle 5.2 angegebenen Entwicklungskoeffizienten mit hohem Informationsgehalt fester Bestandteil jedes Optimalbaums sind. Der hieraus resultierende feste von der Best-Basis-Suche ausgenommene Teil des Wavelet-Paket-Baums ist in der Abbildung (5.11) zusammen mit den Wavelet-Paket-Basisfunktionen $\psi_{k_1, l_1, \zeta_1}(t), \dots, \psi_{k_5, l_5, \zeta_5}(t)$ dargestellt.

In der Abbildung 5.12 sind die Energien $E_{\text{prä};1}(k, l, \zeta), \dots, E_{\text{prä};6}(k, l, \zeta)$ zur Verdeutlichung der korrelativen Zusammenhänge zwischen den Entwicklungskoeffizienten $c_{k, l, \zeta}$ über linearem und logarithmischem Maßstab aufgetragen. Anhand der linearen Darstellungen ist zu erkennen, daß viele Entwicklungskoeffizienten zu einem großen Teil mit ${}_\alpha w_{i,1}$ und ${}_\alpha w_{i,2}$ korrelieren: $E_{\text{prä};3}(k, l, \zeta)$ hat gegenüber $E_{\text{prä};1}(k, l, \zeta)$ deutlich weniger ausgeprägte Maxima auch für Indextupel (k, l, ζ) , für die $\langle \psi_{k, l, \zeta}(t), \psi_{k_1, l_1, \zeta_1}(t) \rangle = 0$ und $\langle \psi_{k, l, \zeta}(t), \psi_{k_2, l_2, \zeta_2}(t) \rangle = 0$ gilt. In den logarithmischen Darstellungen sind die Positionen der α -Koeffizienten als weiße Stellen ablesbar. Die Wavelet-Paket-Transformation ist hier unter Verwendung einer Filterbank durchgeführt, deren Filterkoeffizienten mit D4-Wavelets korrespondieren. Längere Filter ermöglichen zwar eine geringfügig bessere energetische Konzentration in den Entwicklungskoeffizienten, sie erzeugen aber eine größere Anzahl von Transformationskoeffizienten, die von Randeffekten betroffen sind.

Es soll nochmals darauf hingewiesen werden, daß das Ziel dieses Auswahlverfahrens das Auffinden von Wavelet-Paket-Koeffizienten ist, die über unterschiedliche Signalabschnitte hinweg stark mit den restlichen Entwicklungskoeffizienten korreliert sind. Die spezifischen nichtstationären Eigenschaften des Prozesses $\mathbf{X}_{s, \text{ekg}}$ werden dabei durch die Verwendung der aus ${}^{\text{rep}}\mathbf{s}$ hervorgehenden Matrix \mathbf{R}_{ss} berücksichtigt. Die geometrische Interpretation der hieraus entstehenden Vektoranordnung ist allerdings nur für einen stationären Prozeß mit der Kovarianzmatrix \mathbf{R}_{ss} exakt richtig. Die Prädiktionskoeffizienten als Gewichte der α -Koeffizienten zur Schätzung der β -Koeffizienten bilden dann als Lösung der Wiener-Hopf-Gleichung ein stationäres Wiener-Filter [121]. Dadurch, daß in ${}^{\text{rep}}\mathbf{s}$ gezielt unterschiedliche repräsentative Signalanteile mit unterschiedlichen statistischen Eigenschaften berücksichtigt werden, kann dennoch davon ausgegangen werden, daß die gefundenen α -Koeffizienten das globale korrelative Signalverhalten ausreichend genau erfassen und somit als Prädiktionsgrundlage verwendet werden können. Um die Anpassung an die lokal unterschiedlichen statistischen Eigenschaften zu erreichen, werden die Prädiktionsgewichte, wie in dem folgenden Abschnitt 5.4.4 beschrieben, adaptiert.

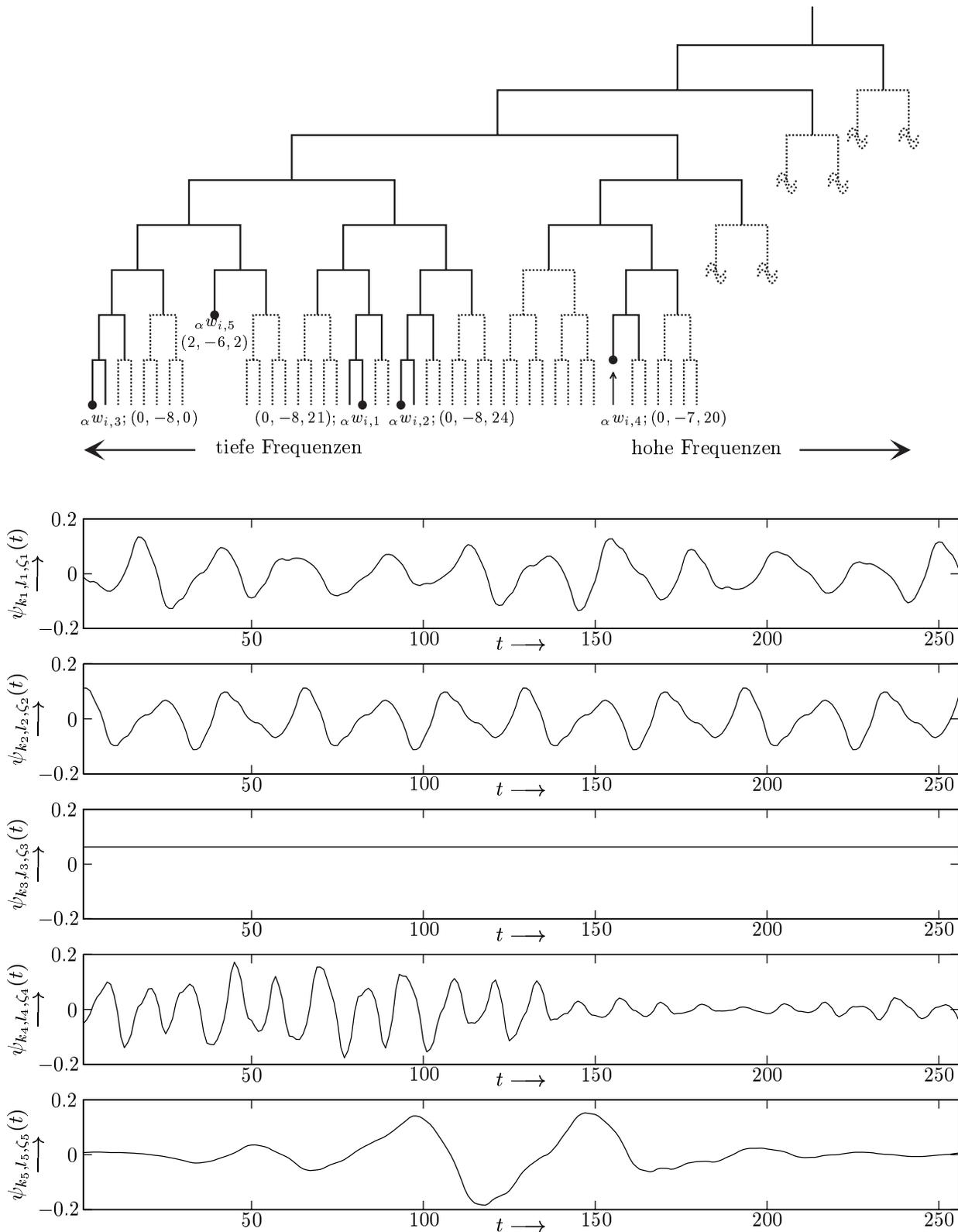


Abbildung 5.11: Das obere Bild zeigt die Knoten, denen die α -Koeffizienten zugeordnet sind und den daraus resultierenden festen Teil des Wavelet-Paket-Baums als durchgezogene Linie. Auf die gestrichelt eingezeichneten Bereiche wird weiter die Best-Basis-Suche angewendet. Die unteren Bilder zeigen die zu den α -Koeffizienten gehörigen Basisfunktionen.

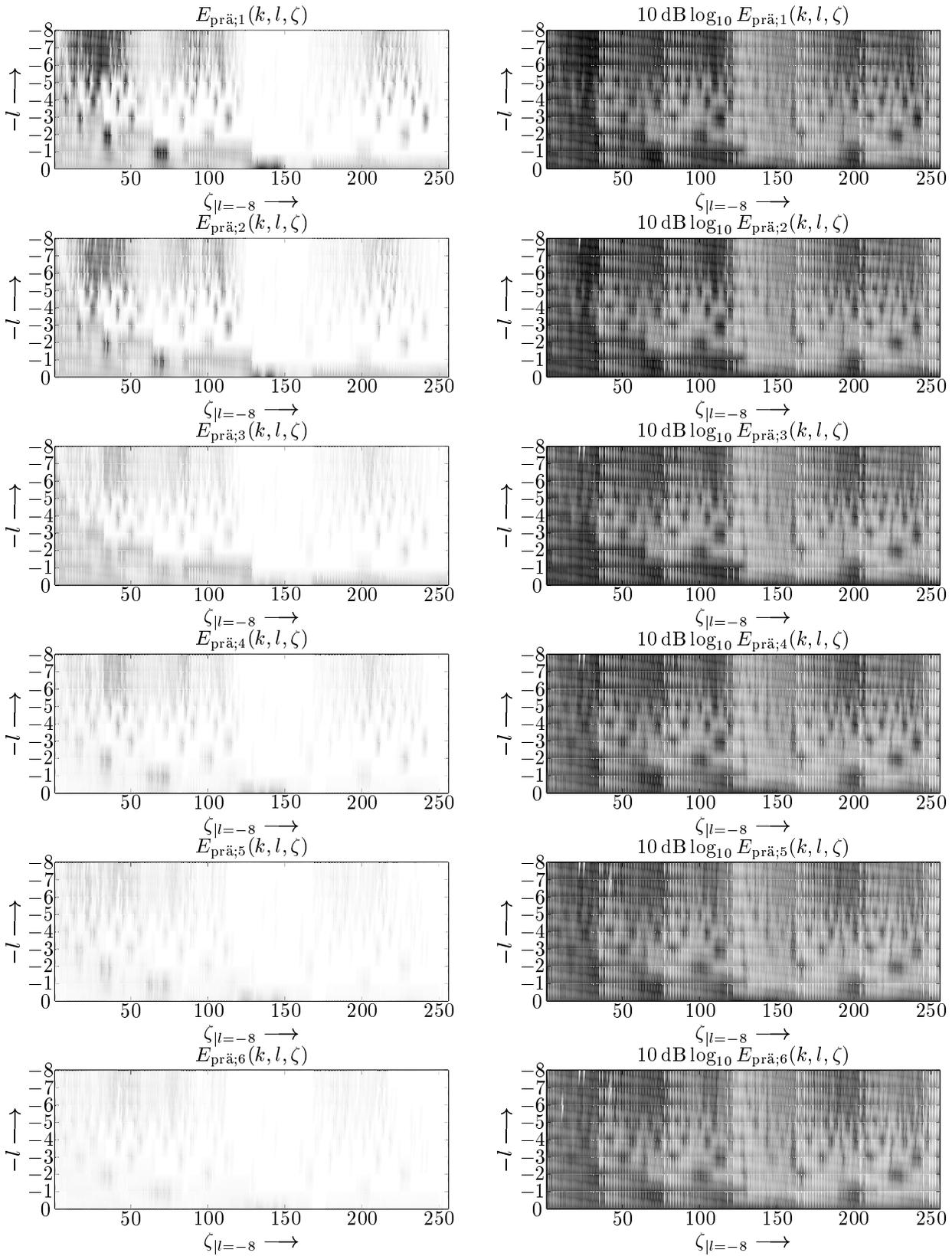


Abbildung 5.12: Verdeutlichung der korrelativen Zusammenhänge zwischen den Entwicklungskoeffizienten durch lineare (linke Spalte) und logarithmische (rechte Spalte) Darstellung von $E_{\text{prä};1}(k, l, \zeta), \dots, E_{\text{prä};6}(k, l, \zeta)$.

5.4.4 Reduktion des Dynamikbereichs der Entwicklungskoeffizienten durch Prädiktion

Nach der Best-Basis-Suche $\mathcal{B}\{\mathbf{W}_{\text{wpt};i}\}$, die auf eine Untermenge $\mathcal{M}_{\text{wpt}}^- \subset \mathcal{M}_{\text{wpt}}$ angewendet wird und eine Abbildung \mathbf{A}_i zur Folge hat, welche die α -Koeffizienten erzeugenden Wavelet-Paket-Basisvektoren in den ersten $N_\alpha = 5$ Zeilen enthält, werden die β -Koeffizienten sortiert und auf eine Gesamtanzahl $N_D(i)$ ($N_I(i)$) reduziert. Der so erzeugte Vektor \mathbf{w}_i soll für den nun folgenden Prädiktionsschritt in einen α - und einen β -Teil entsprechend

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} w_{i,1} \\ \vdots \\ w_{i,N_\alpha} \\ w_{i,N_\alpha+1} \\ \vdots \\ w_{i,N_D(i)} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha w_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha w_{i,N_\alpha} \\ \beta w_{i,1} \\ \vdots \\ \beta w_{i,N_D(i)-N_\alpha} \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

gegliedert werden. Die Prädiktion staffelt sich in zwei Phasen, wie in Abbildung 5.13 dargestellt. Zunächst werden für $n = 1, \dots, N_\alpha$ sukzessive die α -Koeffizienten $\alpha w_{i,n}$ durch Linearkombinationen der bereits berechneten quantisierten Prädiktionsfehler $\alpha \epsilon'_{i,1}, \dots, \alpha \epsilon'_{i,N_\alpha-1}$ geschätzt:

$$\alpha \epsilon_{i,1} = \alpha w_{i,1} \quad (5.94)$$

$$\alpha \epsilon_{i,2} = \alpha w_{i,2} - \alpha \hat{w}_{i,2} = \alpha w_{i,2} - \alpha_{1,2}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} \quad (5.95)$$

$$\alpha \epsilon_{i,3} = \alpha w_{i,3} - \alpha \hat{w}_{i,3} = \alpha w_{i,3} - \alpha_{1,3}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} - \alpha_{2,3}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} \quad (5.96)$$

$$\alpha \epsilon_{i,4} = \alpha w_{i,4} - \alpha \hat{w}_{i,4} = \alpha w_{i,4} - \alpha_{1,4}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} - \alpha_{2,4}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} - \alpha_{3,4}(i) \alpha \epsilon'_{i,3} \quad (5.97)$$

$$\alpha \epsilon_{i,5} = \alpha w_{i,5} - \alpha \hat{w}_{i,5} = \alpha w_{i,5} - \alpha_{1,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} - \alpha_{2,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} - \alpha_{3,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,3} - \alpha_{4,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,4} \quad (5.98)$$

In der zweiten Phasen werden die β -Koeffizienten $\beta w_{i,1}, \dots, \beta w_{i,N_D(i)-N_\alpha}$ durch Linearkombinationen der $\alpha \epsilon'_{i,1}, \dots, \alpha \epsilon'_{i,N_\alpha}$ prädiziert:

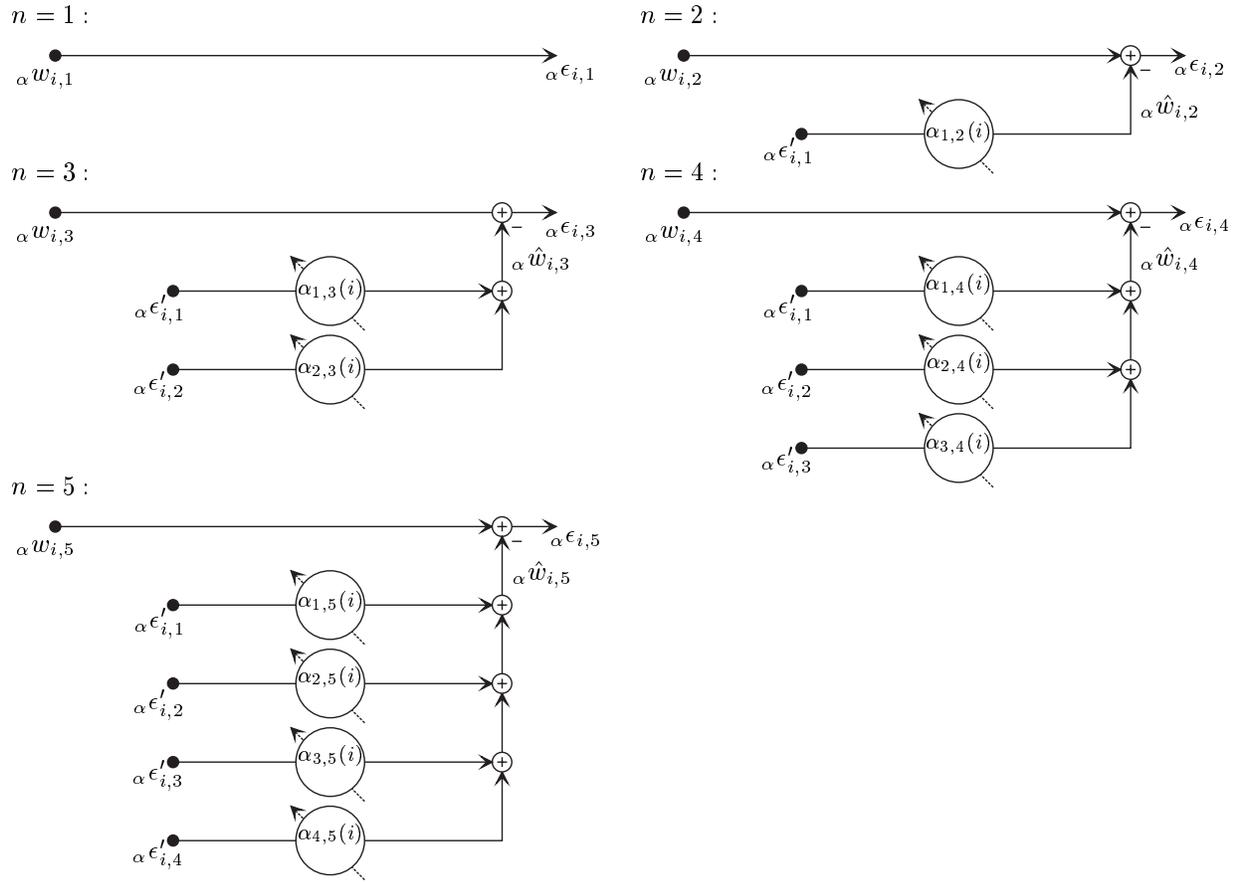
$$\begin{aligned} \beta \epsilon_{i,n} &= \beta w_{i,n} - \beta \hat{w}_{i,n} \\ &= \beta w_{i,n} - \beta_{1,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} - \beta_{2,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} - \beta_{3,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,3} - \beta_{4,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,4} - \beta_{5,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,5} \end{aligned} \quad (5.99)$$

Die Anpassung an die nichtstationären Signaleigenschaften wird dabei durch Adaption der $\sum_{n=1}^{N_\alpha-1} n$ α -Prädiktionsgewichte und der $N_\alpha(N_D(i) - N_\alpha)$ β -Prädiktionsgewichte erreicht.

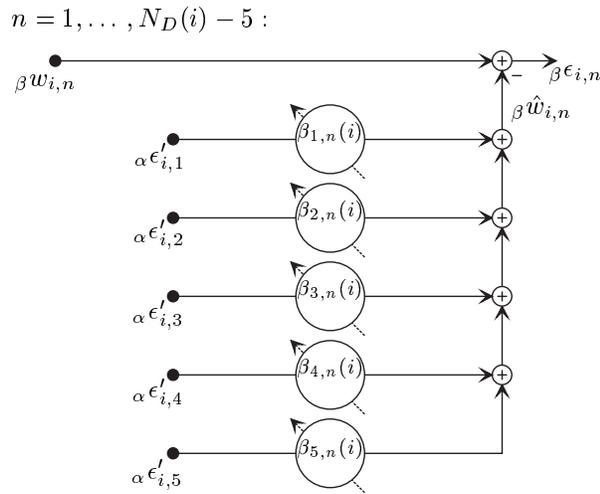
Diese sind in Sender und Empfänger in Matrizen $\mathbf{C}_\alpha(i)$, $\mathbf{C}_\beta(i)$ mit

$$\mathbf{C}_\alpha(i) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{1,2}(i) & \alpha_{1,3}(i) & \alpha_{1,4}(i) & \alpha_{1,5}(i) \\ 0 & 0 & \alpha_{2,3}(i) & \alpha_{2,4}(i) & \alpha_{2,5}(i) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,4}(i) & \alpha_{3,5}(i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{4,5}(i) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_\beta(i) = \begin{bmatrix} \beta_{1,1}(i) & \cdots & \beta_{1,N_D(i)-N_\alpha}(i) \\ \beta_{2,1}(i) & \cdots & \beta_{2,N_D(i)-N_\alpha}(i) \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{5,1}(i) & \cdots & \beta_{5,N_D(i)-N_\alpha}(i) \end{bmatrix} \quad (5.100)$$

Prädiktion der α -Koeffizienten



Prädiktion der β -Koeffizienten



Rekonstruktion der β -Koeffizienten

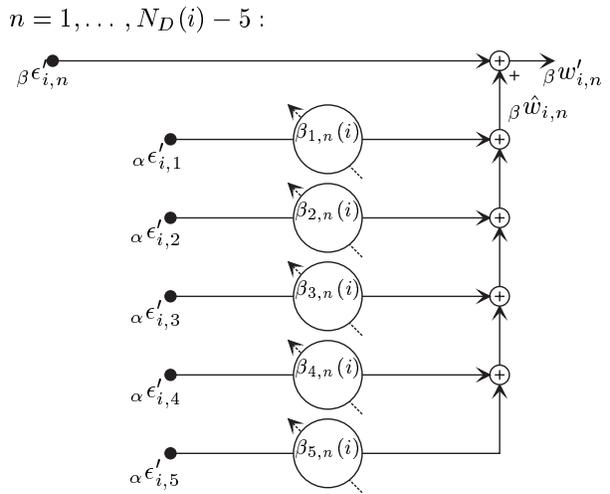


Abbildung 5.13: Prädiktion und Rekonstruktion von α - und β -Koeffizienten. Die α -Koeffizienten $\alpha w_{i,2}, \dots, \alpha w_{i,5}$ werden sukzessive durch Linearkombinationen $\alpha \hat{w}_{i,2}, \dots, \alpha \hat{w}_{i,5}$ der quantisierten Prädiktionsfehler $\alpha \epsilon'_{i,1}, \dots, \alpha \epsilon'_{i,4}$ geschätzt. Die β -Koeffizienten $\beta w_{i,1}, \dots, \beta w_{i,N_D(i)-5}$ werden durch Linearkombinationen $\beta \hat{w}_{i,1}, \dots, \beta \hat{w}_{i,N_D(i)-5}$ der quantisierten Prädiktionsfehler $\alpha \epsilon'_{i,1}, \dots, \alpha \epsilon'_{i,5}$ geschätzt. Bei der Rekonstruktion werden, wie hier beispielhaft nur für die β -Koeffizienten gezeigt, Schätzwerte und quantisierte Prädiktionsfehler addiert.

gespeichert und werden nach der Übertragung eines Koeffizientenblocks adaptiert. Hierzu soll der Widrow-Hoff-Adaptionsalgorithmus verwendet werden [121, 133–135]. Die Prädiktionsgewichte des auf den aktuellen Block i folgenden Blocks $i + 1$ berechnen sich so zu

$$\alpha_{n',n}(i+1) = \alpha_{n',n}(i) + 2\mu \alpha \epsilon'_{i,n'} \alpha \epsilon'_{i,n}, \quad n' = 1, \dots, N_\alpha - 1, \quad n = 2, \dots, N_\alpha, \quad (5.101)$$

$$\beta_{n',n}(i+1) = \beta_{n',n}(i) + 2\mu \alpha \epsilon'_{i,n'} \beta \epsilon'_{i,n}, \quad n' = 1, \dots, N_\alpha, \quad n = 1, \dots, N_D(i) - N_\alpha. \quad (5.102)$$

Der Parameter $\mu > 0$ wird als Schrittweite bezeichnet und bestimmt das Konvergenzverhalten des Adaptionsalgorithmus und dessen stationäre Genauigkeit. Daneben hängt das Konvergenzverhalten auch von den korrelativen Bindungen zwischen den Prädiktionsfehlern $\alpha \epsilon'_{i,1}, \dots, \alpha \epsilon'_{i,N_\alpha}$ ab. Notwendige Konvergenzvoraussetzung ist, daß für alle Eigenwerte $\lambda_{\alpha \epsilon';n}$, $n = 1, \dots, N_\alpha$ der Kovarianzmatrix $\mathbf{R}_{\alpha \epsilon' \alpha \epsilon'}$

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\alpha \epsilon';n}} \quad (5.103)$$

gilt [121]. Damit gibt der Kehrwert des maximalen Eigenwertes $\lambda_{\alpha \epsilon';\max}$ den maximal zulässigen Wert für μ vor. Hier wird $\mathbf{R}_{\alpha \epsilon' \alpha \epsilon'}$ unter der Annahme der Stationarität des zugehörigen Prozesses $\mathbf{X}_{\alpha \epsilon'}$ für $\mathbf{s} = {}^{\text{rep}}\mathbf{s}$ berechnet. Die Schrittweite wird in Abhängigkeit des maximalen Eigenwertes $\lambda_{\alpha \epsilon';\max}$ von $\mathbf{R}_{\alpha \epsilon' \alpha \epsilon'}$ zu

$$\mu = \frac{1}{4\lambda_{\alpha \epsilon';\max}} \quad (5.104)$$

gewählt, um auch für selten auftretende Signalabschnitte mit ungünstiger energetischer Verteilung in den Entwicklungskoeffizienten konvergierendes Verhalten zu ermöglichen.

Die Adaptionsgeschwindigkeit der Prädiktionsgewichte ist über das Abklingen des Terms $(1 - 2\mu\lambda_{\alpha \epsilon';\min})^i$ durch den minimalen Eigenwert $\lambda_{\alpha \epsilon';\min}$ von $\mathbf{R}_{\alpha \epsilon' \alpha \epsilon'}$ bestimmt [134]. Mit $\mu = 1/(4\lambda_{\alpha \epsilon';\max})$ und der Approximation

$$\left(1 - \frac{2\lambda_{\alpha \epsilon';\min}}{\lambda_{\alpha \epsilon';\max}}\right)^i \approx e^{-\frac{\lambda_{\alpha \epsilon';\max}}{2\lambda_{\alpha \epsilon';\min}}n} = e^{-n/\tau_{\text{konv}}} \quad (5.105)$$

kann die Zeitkonstante des Konvergenzvorgangs τ_{konv} somit durch

$$\tau_{\text{konv}} = \frac{2\lambda_{\alpha \epsilon';\max}}{\lambda_{\alpha \epsilon';\min}} \quad (5.106)$$

abgeschätzt werden [121]. Auf der Grundlage der aus ${}^{\text{rep}}\mathbf{s}$ hervorgehenden Kovarianzmatrix $\mathbf{R}_{\alpha \epsilon' \alpha \epsilon'}$ berechnet sich $\tau_{\text{konv}} = 9.36$. Demnach reduziert sich der relative Fehler in den Prädiktionsgewichten im Vergleich zur stationären Wiener-Lösung nach etwa 10 Blöcken auf 1/3 des ursprünglichen Wertes. Die so berechnete Zeitkonstante $\tau_{\text{konv}} = 9.36$ liegt in einer Größenordnung, in der auch die minimalen Blockanzahlen liegen, für die eine Zyklusklasse die Formen von aufeinanderfolgenden Signalsegmenten dominiert. Dies ist auch in den Abbildungen 5.3 und 5.4 zu erkennen. Es kann hieraus geschlossen werden, daß der Adaptionsalgorithmus prinzipiell in der Lage ist den zeitvarianten statistischen Eigenschaften von EKG-Signalen zu folgen. Wählt man alternativ anstelle der Prädiktionsfehler

$\alpha \epsilon'_{i,1}, \dots, \alpha \epsilon'_{i,N_\alpha}$ die denselben statistischen Unterraum aufspannenden quantisierten Koeffizienten $\alpha w'_{i,1}, \dots, \alpha w'_{i,N_\alpha}$ als Prädiktionsgrundlage, so resultiert hieraus ein $\tau_{\text{konv}} = 14.12$ aufgrund der stärkeren Korrelationen zwischen diesen Koeffizienten. Der unter der Annahme der Stationarität abgeschätzte Wert $\tau_{\text{konv}} = 9.36$ kann mit den in Abschnitt 5.4.7 und 5.4.8 experimentell gefundenen, das Adaptionsverhalten beschreibenden Werten verglichen werden.

Abbildung 5.7 zeigt, daß ähnlich wie bei der differentiellen Pulsmodulation die quantisierten Prädiktionsfehler zur Schätzung der folgenden Entwicklungskoeffizienten und zur Adaption der Gewichte zurückgekoppelt werden. Dies ist notwendig, damit die Matrizen $\mathbf{C}_\alpha(i)$, $\mathbf{C}_\beta(i)$ in Sender und Empfänger identisch adaptiert werden und somit für jeden Block übereinstimmen. Die durch die Prädiktion zusätzlich erreichte Kompression kann damit im Empfänger ohne die Übertragung von Seiteninformationen invertiert werden. Der Rekonstruktionsvorgang ist prinzipiell für α - und β -Koeffizienten gleich. Er ist beispielhaft für β -Koeffizienten in Abbildung 5.13 dargestellt.

Damit die Entwicklungskoeffizienten auf Basis der quantisierten Prädiktionsfehler mit vernachlässigbarer Auswirkung des Quantisierungsvorgangs geschätzt werden können, muß das durch den zweiten Quantisierungsschritt erzeugte Quantisierungsrauschen mit $\sigma_q^2(n) \ll \sigma_w^2(n)$ für $n = 1, \dots, N_\alpha$ gegenüber den Varianzen der α -Koeffizienten ebenfalls vernachlässigbar sein. Der im folgenden Abschnitt 5.4.6 beschriebene zweite Quantisierungsschritt ist deshalb mit einer ausreichenden Anzahl von Quantisierungsstufen ausgeführt, deren Anordnung zudem auf eine minimale Fehlervarianz in Abhängigkeit der Verteilungsdichtefunktionen der Prädiktionsfehler hin optimiert ist.

Während der zweite Quantisierungsschritt als Rangordnungsoperationen nicht die ursprünglichen Positionen der β -Koeffizienten im Wavelet-Paket-Baum berücksichtigt, ist dies für das Prädiktionsverfahren unbedingt notwendig: Es ist für jeden Block die aktuelle Zuordnung der in der Prädiktionskoeffizientenmatrix $\mathbf{C}_\beta(i)$ gespeicherten Gewichte zu den Baumkoordinaten (k, l, ζ) der $N_D(i) - N_\alpha$ korrespondierenden Entwicklungskoeffizienten zu beachten. Bevor die β -Koeffizienten für den Block $i + 1$ durch die α -Koeffizienten dieses Blocks präzisiert werden können, müssen daher die Prädiktionsgewichte des letzten Blocks i an die Baumkoordinaten der aktuellen beteiligten Entwicklungskoeffizienten angepaßt werden. Die Überführung der Matrix $\mathbf{C}_\beta(i)$ in die Matrix $\mathbf{C}_\beta(i+1)$ umfaßt somit zwei Anpassungsschritte: Zunächst werden nach der Prädiktion der Koeffizienten $\beta w_{i,1}, \dots, \beta w_{i,N_D(i)-N_\alpha}$ entsprechend Gleichung (5.99) die β -Gewichte nach Gleichung (5.102) adaptiert. Die so aktualisierten Gewichte beziehen sich aber weiterhin auf die Signalentwicklung des Blocks i . Diese ist im allgemeinen unterschiedlich zur Signalentwicklung im Block $i + 1$, da aus der Best-Basis-Suche mit Ausnahme der ersten N_α Basisvektoren ungleiche Transformationsmatrizen \mathbf{A}_{i+1} und \mathbf{A}_i resultieren. Im zweiten Anpassungsschritt werden daher die aktualisierten β -Gewichte der Signalentwicklung des Blocks $i + 1$ angeglichen, so daß die neue Prädiktionsmatrix $\mathbf{C}_\alpha(i+1)$ zur Schätzung der β -Koeffizienten $\beta w_{i+1,1}, \dots, \beta w_{i+1,N_D(i+1)-N_\alpha}$ verwendet werden kann.

Der zweite Anpassungsschritt wird hier unter Berücksichtigung der Filterbankstruktur, durch deren Anwendung die Wavelet-Paket-Entwicklungskoeffizienten rekursiv mit einer geringen Anzahl von Operationen berechnet werden können, durchgeführt. Das Umrechnungsverfahren nutzt das Konzept der Multi-Skalen-Analyse aus, wonach jede Wavelet-Paket-Elementarfunktion $\psi_{k,l,\zeta}(t)$ alternativ durch eine Linearkombination von Elementarfunktionen auf der nächst höheren Ebene $l + 1$ oder der nächst niedrigeren Ebene $l - 1$ beschrieben werden kann. Für die Darstellung durch Elementarfunktionen der Ebene $l + 1$ gilt demnach

$$\psi_{k,l,\zeta}(t) = \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2}h_{\psi}(k)\psi_{k,l+1,\zeta/2}(t) & \text{für } \zeta \text{ gerade} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2}h_{\phi}(k)\psi_{k,l+1,(\zeta-1)/2}(t) & \text{für } \zeta \text{ ungerade} \end{cases}. \quad (5.107)$$

Für die Darstellung durch Elementarfunktionen der Ebene $l - 1$ gilt

$$\psi_{k,l,\zeta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\psi}(-2k)\psi_{k,l-1,2\zeta}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\phi}(-2k)\psi_{k,l-1,2\zeta+1}(t). \quad (5.108)$$

Als Konsequenz aus den Gleichungen (5.107) und (5.108) ist ein Signalbestandteil $c_{k,l,\zeta}\psi_{k,l,\zeta}(t)$ gleichwertig durch verschiedene alternative Linearkombinationen von Elementarfunktionen auf anderen Ebenen beschreibbar. Die zugehörigen Entwicklungskoeffizienten berechnen sich mit der schnellen Wavelet-Transformation für höhere Bauebenen durch Anwendung von Synthesefiltern $h_{\psi}(n)$ oder $h_{\phi}(n)$ und für niedrigere Bauebenen durch Anwendung einer Analysefilterbank mit dem Filterpaar $h_{\psi}(-n), h_{\phi}(-n)$. Da die Entwicklungskoeffizienten linear mit den Prädiktionsgewichten verknüpft sind, lassen diese sich ebenfalls durch Anwendung von Analyse- und Synthesefilterbank in die benötigte Darstellung überführen. Setzt man demnach für den Block i die Gewichte $\beta_{1,1}(i), \dots, \beta_{1,N_D(i)-N_{\alpha}}(i)$ statt der zu prädizierenden Entwicklungskoeffizienten $\beta w_{i,1}, \dots, \beta w_{i,N_D(i)-N_{\alpha}}$ in den Wavelet-Paket-Baum ein und analysiert/synthetisiert so, daß der Wavelet-Paket-Baum für den Block $i + 1$ entsteht, so sind die neuen Prädiktionsgewichte $\beta_{1,1}(i + 1), \dots, \beta_{1,N_D(i)-N_{\alpha}}(i + 1)$ direkt an den Baumkoordinaten der zu schätzenden Entwicklungskoeffizienten $\beta w_{i+1,1}, \dots, \beta w_{i+1,N_D(i+1)-N_{\alpha}}$ ablesbar. Eine sukzessive Durchführung dieser Anpassung für die Gewichte $\beta_{n',1}(i), \dots, \beta_{n',N_D(i)-N_{\alpha}}(i)$ mit $n' = 1, \dots, N_{\alpha}$ erzeugt schließlich die angegliche Matrix $\mathbf{C}_{\beta}(i + 1)$. Das beschriebene Anpassungsverfahren ist in Abbildung 5.14 beispielhaft für einen Entwicklungskoeffizienten als Prädiktionsgrundlage und drei zu schätzende Entwicklungskoeffizienten dargestellt.

Ein wesentlicher Vorteil dieses adaptiven Prädiktionsverfahrens besteht darin, daß die Adaption an die zeitvarianten statistischen Signaleigenschaften über unterschiedliche Signalentwicklungen hinweg und ohne Beeinträchtigung durch eine bestimmte Wahl der Matrix \mathbf{A}_i durchgeführt werden kann. Somit kann jeder Signalvektor \mathbf{s}_i durch Auswahl einer signaladaptiven Basis, Permutation und Schwellwertquantisierung in eine reduzierte, energetisch konzentrierte Darstellung \mathbf{w}_i überführt werden, deren korrelative Eigenschaften den zweiten

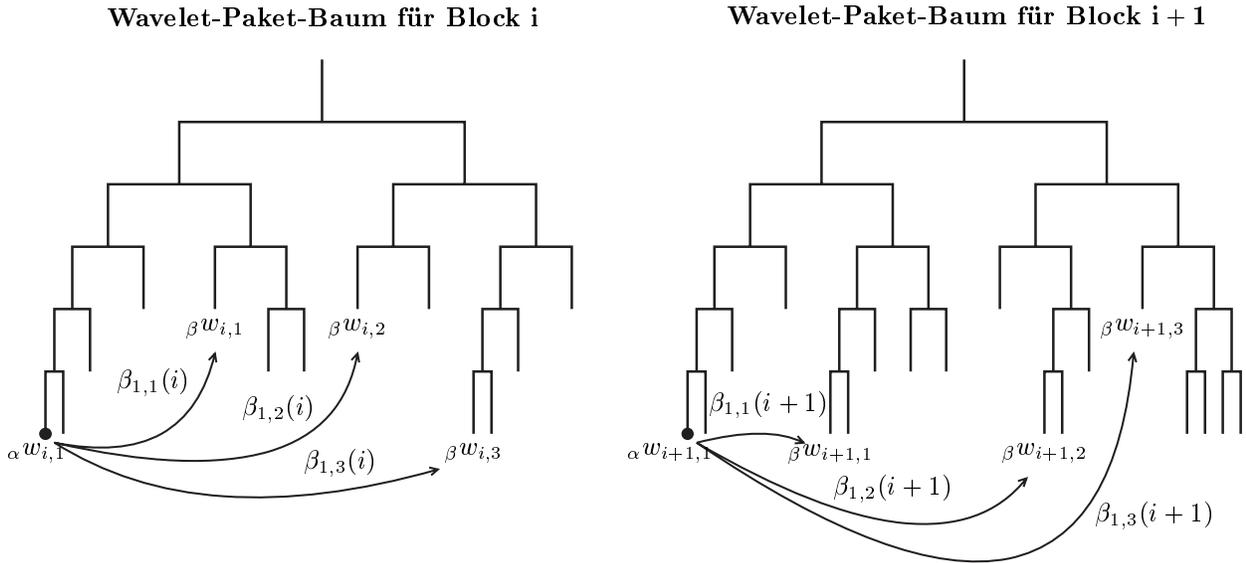


Abbildung 5.14: Dargestellt ist die Anpassung der Prädiktionsgewichte für zwei aufeinanderfolgende Wavelet-Paket-Bäume. Das Gewicht $\beta_{1,1}(i+1)$ berechnet sich aus $\beta_{1,1}(i)$ durch zweimalige Analysefilteranwendung. Das Gewicht $\beta_{1,2}(i)$ ist null, da der Baum für den Block i in dem zu $\beta w_{i+1,2}$ gehörigen Zweig keine Entwicklungskoeffizienten enthält, die nicht zu null quantisiert werden. Das Gewicht $\beta_{1,3}(i+1)$ berechnet sich aus $\beta_{1,3}(i)$ durch zweimalige Synthesefilteranwendung.

Kompressionsschritt der Prädiktion ermöglichen. Die in den Abschnitten 5.4.7 und 5.4.8 gefundenen Ergebnisse werden zeigen, daß die Berücksichtigung der statistischen Abhängigkeiten zwischen den Entwicklungskoeffizienten einen zusätzlichen Kompressionsgewinn ermöglicht, der den Verlust an energetischer Konzentration durch Beschränkung der Abbildungsauswahl auf die Untermenge $\mathcal{M}_{\text{wpt}}^- \subset \mathcal{M}_{\text{wpt}}$ deutlich übersteigt. Zuvor sollen die angewendeten Verfahren zur Codierung der Seiteninformationen, Quantisierung und Huffman-Codierung erläutert werden.

5.4.5 Signalrekonstruktion und Codierung der Seiteninformationen

Ein weiterer Vorteil des beschriebenen Codierungsverfahrens ist, daß zur Synthese der Vektorapproximationen \mathbf{s}'_i neben den quantisierten Prädiktionsfehlern der α - und β -Koeffizienten lediglich die Indextupel der zugehörigen β -Koeffizienten (k_n, l_n, ζ_n) , $n = 1, \dots, N_D(i) - N_\alpha$ zur Rekonstruktion benötigt werden. Diese ergeben sich, wie in Abbildung 5.7 zu erkennen ist, aus den Matrizen \mathbf{A}_i , \mathbf{P}_i und der Anzahl der an der Signalapproximation beteiligten Koeffizienten $N_D(i)$ ($N_I(i)$). Die aus den Beträgen der Entwicklungskoeffizienten resultierende Reihenfolge der β -Koeffizienten ist bei diesem Verfahren ausschließlich für die beiden Quantisierungsschritte im Sender von Bedeutung, weil diese als Rangordnungsoperationen ausgeführt sind. Da die Quantisierungsschritte im Empfänger nicht invertiert werden und

die Signalsynthese als lineare Operation kommutativ ist, ist eine explizite Übertragung der Reihenfolgeinformation nicht notwendig.

Sind die Wavelet-Paket-Koordinaten der β -Koeffizienten im Empfänger bekannt, so ist die Prädiktionsgewichtmatrix $\mathbf{C}_\beta(i-1)$ durch Analyse/Syntheseoperationen, die denen im Sender entsprechen, in eine an die aktuelle Signalentwicklung angepaßte Form $\mathbf{C}_\beta(i)$ überführbar. Die Rekonstruktion der Entwicklungskoeffizienten kann anschließend als Invertierung der Prädiktion durchgeführt werden. Zunächst werden die quantisierten α -Entwicklungskoeffizienten sukzessive rekonstruiert:

$$\alpha w'_{i,1} = \alpha \epsilon'_{i,1} \quad (5.109)$$

$$\alpha w'_{i,2} = \alpha \epsilon'_{i,2} + \alpha \hat{w}_{i,2} = \alpha \epsilon'_{i,2} + \alpha_{1,2}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} \quad (5.110)$$

$$\alpha w'_{i,3} = \alpha \epsilon'_{i,3} + \alpha \hat{w}_{i,3} = \alpha \epsilon'_{i,3} + \alpha_{1,3}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} + \alpha_{2,3}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} \quad (5.111)$$

$$\alpha w'_{i,4} = \alpha \epsilon'_{i,4} + \alpha \hat{w}_{i,4} = \alpha \epsilon'_{i,4} + \alpha_{1,4}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} + \alpha_{2,4}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} + \alpha_{3,4}(i) \alpha \epsilon'_{i,3} \quad (5.112)$$

$$\alpha w'_{i,5} = \alpha \epsilon'_{i,5} + \alpha \hat{w}_{i,5} = \alpha \epsilon'_{i,5} + \alpha_{1,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} + \alpha_{2,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} + \alpha_{3,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,3} + \alpha_{4,5}(i) \alpha \epsilon'_{i,4} \quad (5.113)$$

Anschließend werden für $n = 1, \dots, N_D(i) - N_\alpha$ die quantisierten β -Koeffizienten erzeugt:

$$\begin{aligned} \beta w'_{i,n} &= \beta \epsilon'_{i,n} + \beta \hat{w}_{i,n} \\ &= \beta \epsilon'_{i,n} + \beta_{1,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,1} + \beta_{2,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,2} + \beta_{3,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,3} + \beta_{4,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,4} + \beta_{5,n}(i) \alpha \epsilon'_{i,5} \end{aligned} \quad (5.114)$$

Der Signalvektor \mathbf{s}'_i kann nun durch Anwendung der Synthesefilterbank zusammengefügt werden.

Für die Übertragung der Indexinformationen wird berücksichtigt, daß alle potentiell als β -Koeffizienten in Frage kommenden Entwicklungskoeffizienten mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten an einer Signalentwicklung beteiligt sind. Damit ein Entwicklungskoeffizient $c_{k,l,\zeta}$ einem der $N_D(i) - N_\alpha$ β -Koeffizienten $\beta w_{i,n}$ zugeordnet wird, sind zwei Bedingungen zu erfüllen: Zunächst muß $c_{k,l,\zeta}$ Bestandteil des aus der Best-Basis-Suche resultierenden Optimalbaums sein. Zusätzlich ist notwendig, daß $|c_{k,l,\zeta}|$ einer der $N_D(i) - N_\alpha$ größten Beträge aller Entwicklungskoeffizienten dieses Baums ist. In Tabelle 5.3 sind einige Beteiligungswahrscheinlichkeiten von Entwicklungskoeffizienten angegeben. In der Abbildung 5.15 sind alle Wahrscheinlichkeiten nochmals graphisch dargestellt. Es wird deutlich, daß Entwicklungskoeffizienten mit kleinem Modulationsindex ζ wesentlich öfter an der Signalentwicklung beteiligt sind als solche mit hohem Modulationsindex. Dies korrespondiert mit der Tiefpaßcharakteristik der EKG-Signale. Weiter ist erkennbar, daß Signalentwicklungen, die mit Wavelet-Paket-Bäumen geringer Tiefe in Verbindung stehen hinsichtlich der energetischen Konzentration zumeist die kostengünstigste Darstellung ermöglichen.

Diese Charakteristika werden für die komprimierte Übertragung der Indexinformationen durch eine a priori festgelegte, in Sender und Empfänger bekannte Indexreihenfolge, die durch die in Tabelle 5.3 angegebenen Beteiligungswahrscheinlichkeiten definiert ist, genutzt. Beginnend mit dem Index des ersten an der aktuellen Signalentwicklung beteiligten Koeffizienten werden ähnlich wie bei der Laufflängencodierung sukzessive die Differenzen zwischen

Tabelle 5.3: *Wahrscheinlichkeiten für die Beteiligung eines Entwicklungskoeffizienten mit dem Indextupel (k, l, ζ) an einer Signalentwicklung.*

n	(k_n, l_n, ζ_n)	Wahrscheinlichkeit der Beteiligung an einer Signalentwicklung
1	(2,-6,7)	0.924
2	(2,-6,3)	0.868
3	(0,-8,25)	0.864
4	(1,-6,7)	0.828
5	(4,-5,4)	0.804
⋮	⋮	⋮
15	(2,-6,11)	0.548
⋮	⋮	⋮
20	(2,-6,4)	0.464
⋮	⋮	⋮
≥ 184	(k_n, l_n, ζ_n)	0
⋮	⋮	⋮

den Listenindizes aufeinanderfolgender, beteiligter Entwicklungskoeffizienten übertragen [11]. Die Verteilungsdichtefunktion der so erzeugten Zahlensequenz hat eine ausgeprägte Häufung bei niedrigen Werten und wird über eine an die Auftrittswahrscheinlichkeiten angepasste Huffman-Codierung in eine Bitsequenz überführt. Für das repräsentative Signal wird so eine mittlere Bitrate von

$$\bar{R}_{\text{seit}} = 2.81 \frac{\text{Bit}}{\text{Indextupel}} \tag{5.115}$$

erreicht. Der maximale Wert für \bar{R}_{seit} , der bei der Kompression der EKG-Mustersignale aufgetreten ist, beträgt $\bar{R}_{\text{seit}} = 3.62 \text{ Bit/Indextupel}$, der minimale Wert ist $\bar{R}_{\text{seit}} = 2.48 \text{ Bit/Indextupel}$ und der Mittelwert für alle untersuchten EKG-Mustersignale beträgt $\bar{R}_{\text{seit}} = 2.78 \text{ Bit/Indextupel}$.

Damit die richtige Zuordnung von den in $s_{\text{seit}}(t)$ übertragenen Indexinformationen und den in $s_{\text{leit}}(t)$ übertragenen Prädiktionsfehlern der Entwicklungskoeffizienten gegeben ist, werden diese ebenfalls in einer Reihenfolge entsprechend des Indexlisteneintrags und nicht entsprechend ihres Betrags übertragen.

5.4.6 Zweiter Quantisierungsschritt und Huffman-Codierung

Die oberen beiden Bilder der Abbildung 5.16 zeigen die Beträge der Prädiktionsfehler $|\beta\epsilon_{i,n}|$ und $|\alpha\epsilon_{i,n}|$ in Abhängigkeit von Vektorindex n und Blockindex i . Die dargestellten Ergebnisse

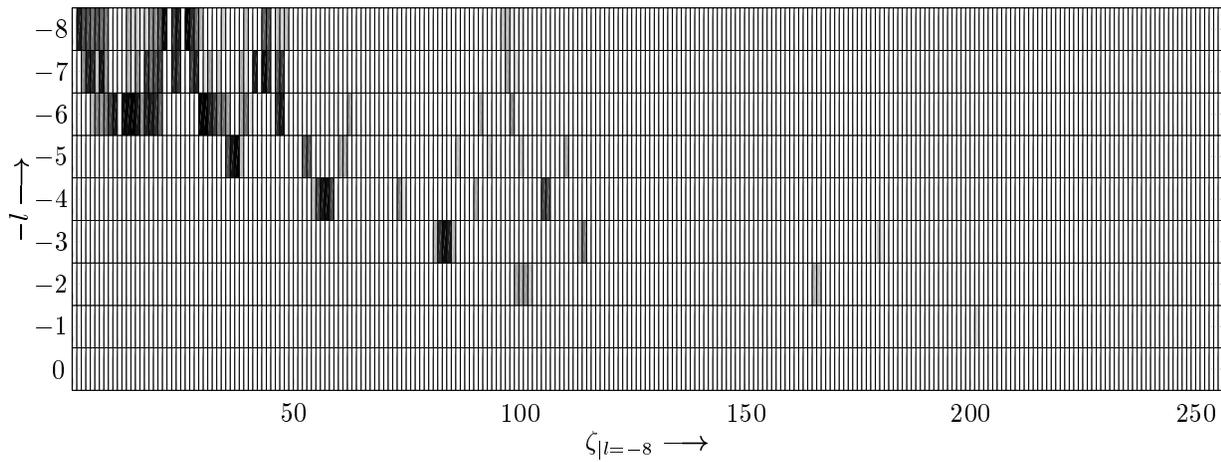


Abbildung 5.15: Darstellung der Wahrscheinlichkeit eines Entwicklungskoeffizienten mit den Indizes (k, l, ζ) an einer Signalentwicklung beteiligt zu sein.

resultieren aus der in Abbildung 5.7 gezeigten Anwendung der Wavelet-Paket-Transformation auf das repräsentative Signal $\mathbf{s} = \text{rep}\mathbf{s}$ mit folgender Permutation der Entwicklungskoeffizienten, Schwellwertquantisierung ($N_D(i) = 10$) und sukzessiver Prädiktion. Qualitativ ist erkennbar, daß am Anfang eines jeden Signalausschnitts aus einer neuen Musterfunktion ($i = 200, 400, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100$) größere Prädiktionsfehler auftreten. Diese sind bedingt durch die vorübergehende Fehlanpassung der Prädiktionsgewichte bei einem solch abrupten Wechsel der Signalstatistik. Die adaptive Gestaltung des Prädiktionsverfahrens ermöglicht hier die schnelle Anpassung an die neuen Signaleigenschaften: In einem Bereich von etwa zehn bis zwanzig Zyklen nach dem Beginn eines neuen Signalabschnitts befinden sich die Prädiktionsfehler auf einem Niveau, das näherungsweise für den Rest des Signalabschnitts beibehalten wird.

In dem obersten Bild ist unter Vernachlässigung dieser Anfangseffekte qualitativ weiter erkennbar, daß die Prädiktionsfehlerbeträge der sortierten Entwicklungskoeffizienten $|\beta\epsilon_{i,n}|$ in Abhängigkeit von i für feste n näherungsweise stationäres Verhalten zeigen. Die angewendete Operationenkombination Wavelet-Paket-Transformation, Anordnung der Entwicklungskoeffizienten nach fallendem Betrag und Prädiktion überführt das ursprünglich nichtstationäre EKG-Signal in eine neue, in wichtigen Teilen stationäre Darstellung, wie qualitativ auch aus den unteren drei Bildern der Abbildung 5.16 zu erkennen ist: Exemplarisch dargestellt sind die Verteilungsdichtefunktionen der Prädiktionsfehler $\beta\epsilon_{i,1}$, $\beta\epsilon_{i,3}$ und $\beta\epsilon_{i,10}$, wobei die gestrichelten Verläufe aus einer Berücksichtigung aller 1200 Prädiktionsfehler resultieren. Die durchgezogenen Linien ergeben sich aus einer ausschließlichen Berücksichtigung eines der neun am repräsentativen Signal beteiligten Signalausschnitte. Es ist hier jeweils der Signalausschnitt gewählt, dessen Verteilungsdichtefunktionsverlauf die größte Abweichung bezüglich der Fehlerquadratsumme zum gestrichelten Verlauf aufweist. Alle übrigen acht jeweils aus einem Signalausschnitt resultierenden Verteilungsdichtefunktionen stimmen besser

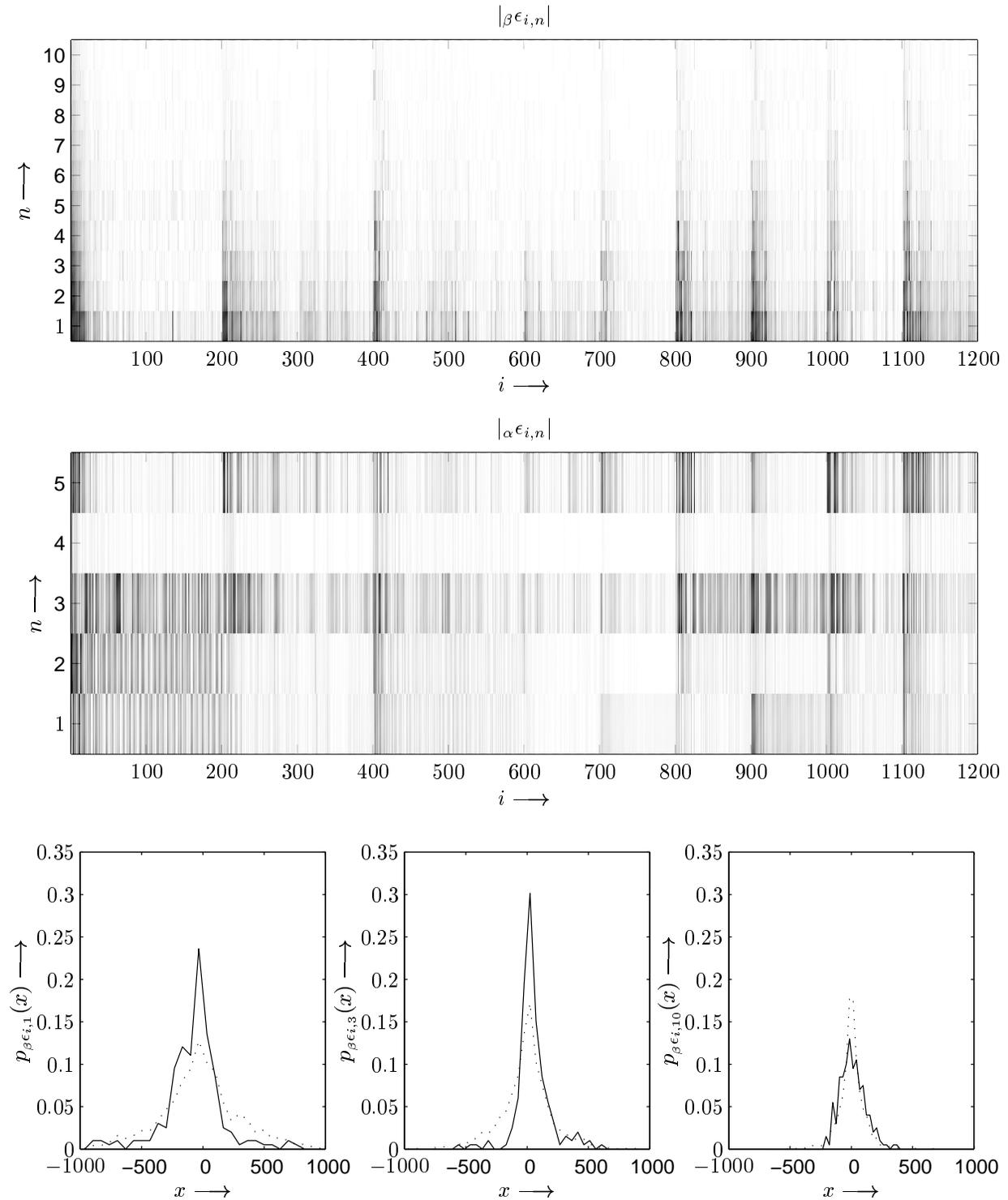


Abbildung 5.16: Die oberen beiden Bilder zeigen die Prädiktionsfehlerbeträge $|\beta\epsilon_{i,n}|$ und $|\alpha\epsilon_{i,n}|$ für das repräsentative EKG-Signal repS , das aus neun Signalausschnitten verschiedener Musterfunktionen zusammengesetzt ist. Die unteren drei Bilder zeigen Verteilungsdichtefunktionen, die aus einer Berücksichtigung aller 1200 Prädiktionsfehler resultieren (\cdots) und Verteilungsdichtefunktionen, die aus einer Berücksichtigung eines einzelnen Signalausschnittes resultieren ($-$).

mit dem gestrichelten Verlauf überein.

Auf der Grundlage dieser Ergebnisse werden die Verteilungsdichtefunktionen der β -Prädiktionsfehler und somit auch die Varianzen der β -Prädiktionsfehler als stationär angenommen. Die an die Verteilungsdichtefunktion einer jeden spektralen Komponente angepaßte Quantisierung als ein wichtiger Bestandteil der Transformationscodierung, kann demnach für die β -Prädiktionsfehler durchgeführt werden, ohne daß die nichtstationären Zeitbereichseigenschaften zu ausgeprägten Nichtstationaritäten bezüglich der Verteilungsdichtefunktionen der β -Prädiktionsfehler führen [11]. Um ein minimales Quantisierungsrauschen bei einer vorgegebenen Bitrate zu erreichen, werden hier für die Quantisierung der β -Prädiktionsfehler Lloyd-Max-Quantisierer verwendet, die aufgrund der Ähnlichkeit der in Abbildung 5.16 dargestellten Verteilungsdichtefunktionen zu Gauß-Verteilungen für diese optimiert sind [136, 137].

Da die α -Koeffizienten keiner Rangordnungsoperation unterworfen sind und sie für jeden Block immer aus einer Inneren-Produkt-Bildung mit den selben Basisvektoren resultieren, äußern sich die nichtstationären Signaleigenschaften deutlicher in den zugehörigen Entwicklungskoeffizienten: In dem zweiten Bild der Abbildung 5.16 ist zu erkennen, daß sich die Prädiktionsfehlerbeträge $|\alpha\epsilon_{i,n}|$, für unterschiedliche Signalausschnitte in verschiedenen Größenordnungen bewegen. Zudem sind die α -Prädiktionsfehler Grundlage der Schätzung anderer Koeffizienten, so daß die mit der Verwendung von Lloyd-Max-Quantisierern bei Fehlanpassung auftretenden hohen Quantisierungsfehler hier zu Instabilitäten führen. Um einen vernachlässigbaren relativen Quantisierungsfehler über einen weiten Dynamikbereich zur Vermeidung dieser Instabilitäten bei der Prädiktion sicherzustellen, werden den α -Prädiktionsfehlern vor der linearen Quantisierung über eine logarithmische Kennlinie neuen Amplitudenwerten zugeordnet. Hierzu wird die sogenannte μ -Law-Kompressionscharakteristik verwendet [11]. Mit der Wahl $x_{\max} = 512$ als maximale Quantisierungsgrenze können Überlaufeffekte vernachlässigt werden (für das repräsentative Signal ist der maximale α -Prädiktionsfehler $483.1 < x_{\max}$), so daß mit $\mu_{\text{quant}} = 200$ als Kennlinienparameter für Amplitudenwerte mit $|x| \gg x_{\max}/\mu_{\text{quant}} = 2.56$ das Verhältnis von Signal- zu Quantisierungsrauschleistung

$$\frac{\sigma_{\alpha\epsilon}^2(n)}{\sigma_q^2(n)} = 3 \frac{2^{2R_{\alpha;n}}}{(\log_e(1 + \mu_{\text{quant}}))^2} \approx \frac{2^{2R_{\alpha;n}}}{10} \quad (5.116)$$

unabhängig von $\sigma_{\alpha\epsilon}^2(n)$ ist. Für die Bitraten $R_{\alpha;n}$ der α -Prädiktionsfehler muß zudem

$$R_{\alpha;n} \geq 5 \frac{\text{Bit}}{\text{Prädiktionsfehler}} \quad (5.117)$$

gelten, damit $\sigma_{\alpha\epsilon}^2(n)/\sigma_q^2(n) \approx 100 \gg 1$ ist und die Quantisierungseffekte bei der Prädiktion einen vernachlässigbaren Einfluß haben.

Da alle α -Prädiktionsfehler ähnlich starke Schwankungen der Amplitudenverteilung aufweisen, ist es praktikabel die $N_{\alpha} = 5$ α -Prädiktionsfehler unter Verwendung dieses einen logarithmischen Quantisierers in eine wertdiskrete Darstellung zu überführen. Somit werden alle α -Prädiktionsfehler mit derselben Bitrate $\bar{R}_{\alpha} = R_{\alpha;1} = \dots = R_{\alpha;5} \geq 5 \text{ Bit/}$

Tabelle 5.4: Gegenüberstellung der Varianzen der β -Prädiktionsfehler und der β -Koeffizienten sowie deren Anteil an der Signalvarianz.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{\beta w}^2(n)/10^5$	4.23	2.77	1.50	0.81	0.63	0.48	0.37	0.30	0.23	0.19
$\sigma_{\beta \epsilon}^2(n)/10^4$	5.78	3.58	1.99	1.14	0.89	0.63	0.50	0.43	0.39	0.35
$(\sigma_{\beta w}^2(n)/\sigma_s^2)/\%$	21.5	14.6	9.46	6.38	4.90	3.77	3.05	2.47	2.05	1.71
$\sigma_{\beta w}^2(n)/\sigma_{\beta \epsilon}^2(n)$	7.31	7.73	7.55	7.09	7.10	7.68	7.42	6.96	6.07	5.49

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sigma_{\beta w}^2(n)/10^4$	1.62	1.35	1.15	0.99	0.86	0.73	0.63	0.53	0.45	0.39
$\sigma_{\beta \epsilon}^2(n)/10^3$	2.48	2.42	2.37	1.91	1.65	1.42	1.37	1.43	1.35	1.33
$(\sigma_{\beta w}^2(n)/\sigma_s^2)/\%$	1.43	1.21	1.04	0.89	0.78	0.67	0.57	0.48	0.40	0.35
$\sigma_{\beta w}^2(n)/\sigma_{\beta \epsilon}^2(n)$	6.54	5.58	4.85	5.19	5.21	5.17	4.59	3.73	3.38	2.94

Prädiktionsfehler und demselben Quantisierer quantisiert. Die β -Prädiktionsfehlern werden dagegen entsprechend Gleichung (5.82) mit Bitraten in Abhängigkeit ihrer Varianzen $\sigma_{\beta \epsilon}^2(n)$ quantisiert.

In Tabelle 5.4 sind die Varianzen der ersten zwanzig β -Prädiktionsfehler $\sigma_{\beta \epsilon}^2(1), \dots, \sigma_{\beta \epsilon}^2(20)$ den Varianzen der β -Koeffizienten und deren Anteil an der Signalvarianz gegenübergestellt. Es ist erkennbar, daß der Prädiktionsalgorithmus gerade für Koeffizienten mit hohem prozentualen Anteil an der Signalvarianz eine deutliche Reduktion der Amplitudendynamik erreicht. Für das repräsentative Signal werden mit dem Prädiktionsverfahren Codiergewinne für Koeffizienten mit einem mittleren Anteil an der Signalvarianz, der größer als 1% ist erzielt, die in einer Größenordnung von mindestens 7 dB (\approx Faktor 5) liegen. Mit sinkendem Anteil der β -Koeffizienten an der Signalvarianz nimmt das Signal- zu Rauschleistungsverhältnis ebenfalls ab, so daß die β -Koeffizienten mit steigendem Index n schlechter prädizierbar werden.

Der gesamte beschriebene zweite Quantisierungsschritt ist in Abbildung 5.7 durch

$$\mathcal{Q}_{\text{pdf}}\{\epsilon_i\} = \epsilon'_i \quad (5.118)$$

dargestellt.

Die quantisierten α - und die quantisierten β -Prädiktionsfehler werden vor der Übertragung jeweils einem Huffman-Codierer zur Entropie-Codierung zugeführt [112]. Beide Zuordnungstabellen resultieren dabei wiederum aus den Auftrittswahrscheinlichkeiten der Alphabetzeichen, die bei der Quantisierung der Prädiktionsfehler des repräsentativen Signals erzeugt werden.

5.4.7 Wellenformcodierung mit vorgegebener Verzerrung

Mit dem vorgestellten Wellenformcodierungsverfahren ist es nun möglich durch blockweise Anpassung der Entwicklungskoeffizientenanzahl $N_D(i)$ Signalblöcke \mathbf{s}'_i zu erzeugen, deren Verzerrungen $D(i) \in (D_{\min}, D_{\max})$ bei geringer Übertragungsrate $I(i)$ in engen Grenzen D_{\min} D_{\max} konstant sind. Die Dimensionierung des Kompressionsverfahrens soll hier exemplarisch für eine Verzerrung

$$D(i) = D_{\%} \sigma_{s_i}^2 \tag{5.119}$$

mit $D_{\%} = 5\%$ erläutert werden. Jeder der Nachrichtensenke zugeführte Signalblock weist demnach eine Verzerrung von $\approx 5\%$ gegenüber dem Quellensignalblock \mathbf{s}_i auf.

Es stellt sich die Frage mit welchen Bitraten \bar{R}_α und $R_{\beta,1}, \dots, R_{\beta,N_D(i)-N_\alpha}$ die α - und β -Prädiktionsfehler zu quantisieren sind und wie $N_D(i)$ zu wählen ist, damit eine minimale Übertragungsrate I erreicht wird. Hierzu sollen, als Konsequenz aus den vorangegangenen Überlegungen, die Energien der α - und β -Komponenten jedes Quantisierungsfehlervektors \mathbf{q}_i durch ihre Mittelwerte abgeschätzt werden:

$$\begin{bmatrix} \alpha q_{i,1}^2 \\ \vdots \\ \alpha q_{i,N_\alpha}^2 \\ \beta q_{i,1}^2 \\ \vdots \\ \beta q_{i,N_D(i)-N_\alpha}^2 \\ w_{i,N_D(i)+1}^2 \\ \vdots \\ w_{i,N_s}^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha q}^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_{\alpha q}^2(N_\alpha) \\ \sigma_{\beta q}^2(1) \\ \vdots \\ \sigma_{\beta q}^2(N_D(i) - N_\alpha) \\ w_{i,N_D(i)+1}^2 \\ \vdots \\ w_{i,N_s}^2 \end{bmatrix} \tag{5.120}$$

Die Verzerrung $D(i)$ setzt sich somit aus drei Anteilen entsprechend

$$D(i) = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} q_{i,n}^2 \approx \underbrace{\frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_\alpha} \sigma_{\alpha q}^2(n)}_{D_\alpha(i)} + \underbrace{\frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_D(i)-N_\alpha} \sigma_{\beta q}^2(n)}_{D_\beta(i)} + \underbrace{\frac{1}{N_s} \sum_{n=N_D(i)+1}^{N_s} w_{i,n}^2}_{D_{\text{thr}}(i)} \tag{5.121}$$

zusammen. Wählt man die Bitrate \bar{R}_α so, daß $D_\alpha(i) \ll D_\beta(i) + D_{\text{thr}}(i)$ gilt, so reduziert sich die Dimensionierungsaufgabe auf das Auffinden einer optimalen Aufteilung zwischen $D_{\text{thr}}(i)$ und $D_\beta(i)$ mit $D_\beta(i)/\sigma_{s_i}^2 + D_{\text{thr}}(i)/\sigma_{s_i}^2 \approx 5\%$. Mit der hier getroffenen Wahl $\bar{R}_\alpha = 7 \text{ Bit}/\alpha$ -Koeffizient kann nach Gleichung (5.116) die durch die Quantisierung der α -Koeffizienten erzeugte Verzerrung $D_\alpha(i)$ vernachlässigt werden.

Die folgenden Überlegungen dienen zur approximativen Einschätzung der Verhältnisse zwischen den Verzerrungen $D_\beta(i)$ und $D_{\text{thr}}(i)$ in Abhängigkeit von $N_D(i)$ auf der Grundlage von Mittelungen:

Die optimale Verzerrungsaufteilung zeichnet sich dadurch aus, daß für sie die im Mittel bei der Übertragung der β -Koeffizienten benötigte Übertragungsrate

$$I_\beta = f(\bar{N}_D) \approx (\bar{N}_D - N_\alpha) \bar{R}_\beta \quad (5.122)$$

in Abhängigkeit von \bar{N}_D minimal wird. Dabei ist die mittlere Anzahl von Bits pro β -Koeffizient \bar{R}_β ebenfalls eine Funktion von \bar{N}_D . Nach Gleichung (5.81) gilt

$$\bar{R}_\beta = \frac{1}{2} \log_2 \frac{\varepsilon_{\text{quant}} \varrho(\bar{N}_D)}{\sigma_{\beta q}^2(\bar{N}_D)}, \quad (5.123)$$

wobei sich die Verzerrung $\bar{D}_\beta = (1/\chi) \sum_{i=1}^{\chi} D_\beta(i)$ entsprechend

$$\sigma_{\beta q}^2(\bar{N}_D) = \frac{\bar{D}_\beta}{\bar{N}_D - N_\alpha} = \frac{(1/\chi) \sum_{i=1}^{\chi} (D_\% \sigma_{s_i}^2 - D_{\text{thr}}(i))}{\bar{N}_D - N_\alpha} = \frac{D_\% \sigma_s^2 - \bar{D}_{\text{thr}}(\bar{N}_D)}{\bar{N}_D - N_\alpha} \quad (5.124)$$

optimal zu gleichen Anteilen auf die $\bar{N}_D - N_\alpha$ Quantisierungsfehler der β -Koeffizienten aufteilt [11]. Somit ist $\bar{D}_\beta(\bar{N}_D) = (\bar{N}_D - N_\alpha) \sigma_{\beta q}^2(\bar{N}_D)$.

In dem linken Bild der Abbildung 5.17 ist die Übertragungsrate $I_\beta/15$ in Abhängigkeit der mittleren Koeffizientenanzahl \bar{N}_D als gestrichpunktete Linie dargestellt. Das lokale Minimum von $15 \cdot 5.36$ Bit wird für eine durchschnittliche Koeffizientenanzahl von $\bar{N}_D = 21 + N_\alpha$ erreicht. Die mittlere Bitrate zur Quantisierung der β -Koeffizienten beträgt dann $\bar{R}_\beta = 3.83$ Bit/ β -Koeffizient. Das rechte Bild zeigt die gemittelten Verzerrungen in Abhängigkeit von \bar{N}_D . Zu erkennen ist, daß im Mittel neben den $N_\alpha = 5$ α -Koeffizienten mindestens $\bar{N}_D - N_\alpha = 17$ β -Koeffizienten notwendig sind, um mehr als 95% der Signalenergie zu übertragen. Weiter kann abgelesen werden, daß bei einer Übertragung von 21 β -Koeffizienten im Mittel eine 2.66-prozentige Signalverzerrung auf die nicht übertragenen Entwicklungskoeffizienten zurückzuführen ist und $2.34\% = D_\% - 2.66\%$ auf die Quantisierungsfehler der β -Koeffizienten. Bei einer mittleren Anzahl von 21 zu übertragenden β -Entwicklungskoeffizienten steuert demnach jeder β -Koeffizient einen mittleren Anteil von 0.14% der Signalvarianz zur gesamten Verzerrung bei.

Auf der Grundlage dieser Überlegungen soll nun eine Bitratenzuordnung für die Lloyd-Max-Quantisierer durchgeführt werden, die mit den in Tabelle 5.4 dargestellten Ergebnissen nach Gleichung (5.78) $\sigma_{\beta q}^2(1), \dots, \sigma_{\beta q}^2(21) < 0.001 \sigma_s^2$ für die ersten 21 Quantisierungsfehlervarianzen sicherstellt. Es ist:

$$R_{\beta;1} = \dots = R_{\beta;5} = 5 \text{ Bit/Koeffizient} \quad (5.125)$$

$$R_{\beta;6} = \dots = R_{\beta;21} = 4 \text{ Bit/Koeffizient} \quad (5.126)$$

Da der gewählte relative Verzerrungswert mit 0.1% kleiner als der vorher abgeschätzte Optimalwert 0.14% ist, erzeugen die Zuordnungen (5.125) und (5.126) mit $\bar{R}_\beta = 4.23$ Bit/ β -Koeffizient eine höhere mittlere Bitrate als aus der vorangegangenen Überlegung resultiert. Diese zusätzliche Bitrate ermöglicht, daß die Anzahl der beibehaltenen β -Entwicklungskoeffizienten auch größer als 21 werden kann und trotzdem eine Verzerrung $D(i)/\sigma_{s_i}^2 \approx 5\%$

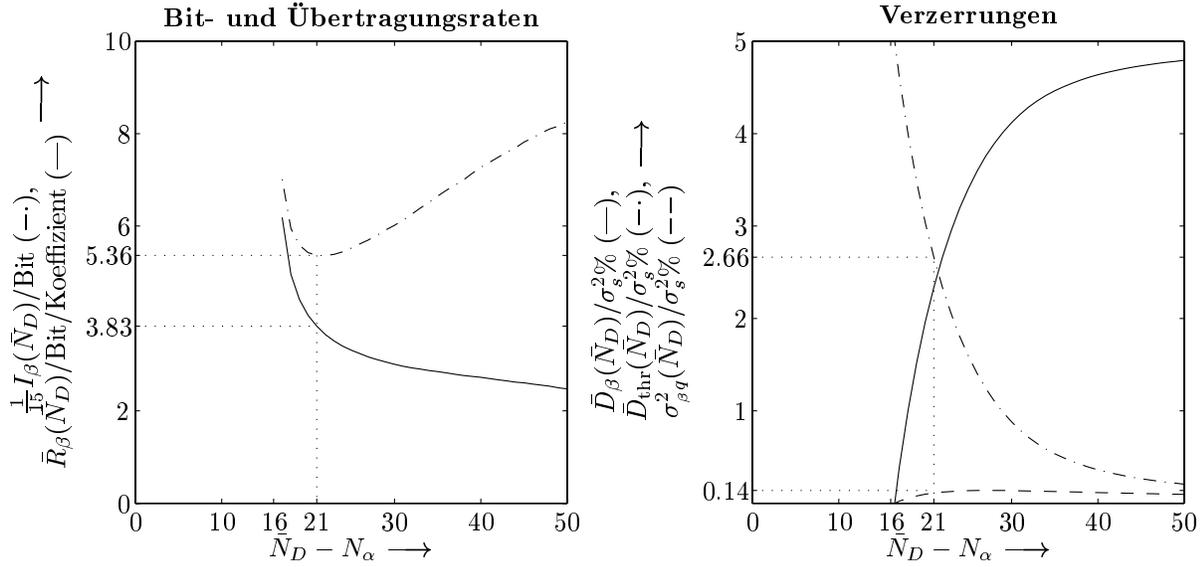


Abbildung 5.17: Das linke Bild zeigt mittlere Bit- und Übertragungsraten in Abhängigkeit der mittleren Anzahl von übertragenen β -Koeffizienten \bar{N}_D . Das rechte Bild stellt die zugehörigen mittleren Verzerrungen dar.

eingehalten wird. Die β -Prädiktionskoeffizienten $\beta\epsilon_{i,n}$, $n > 21$ werden dann mit

$$R_{\beta;n} = 3 \text{ Bit/Koeffizient} \quad (5.127)$$

quantisiert, so daß für sie ebenfalls $\sigma_{\beta q}^2(n) < 0.001\sigma_s^2$ gilt. Durch die flexible Anpassung der Entwicklungskoeffizientenanzahl kann demnach für jedes Signalsegment \mathbf{s}_i eine näherungsweise konstante Qualität von \mathbf{s}'_i erreicht werden: Die Übertragung der β -Entwicklungskoeffizienten wird für jeden Block solange fortgeführt, bis

$$\frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_\alpha} \frac{\alpha w_{i,n}^2}{\sigma_{s_i}^2} + \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_D(i)-N_\alpha} \left(\frac{\beta w_{i,n}^2}{\sigma_{s_i}^2} - 0.001 \right) \geq 0.95 \quad (5.128)$$

und somit $D_\beta(i)/\sigma_{s_i}^2 + D_{\text{thr}}(i)/\sigma_{s_i}^2 \approx 5\%$ gilt.

Die flexible, adaptive Auswahl der Entwicklungskoeffizientenanzahl $N_D(i)$ erreicht gerade durch die Kombination mit der Prädiktion der Entwicklungskoeffizienten eine besondere Leistungsfähigkeit bezüglich der benötigten Übertragungsrate: Wie der Tabelle 5.4 entnommen werden kann, werden die energiereichen β -Koeffizienten stärker in ihrem Dynamikumfang komprimiert als die energiearmen. Die Prädiktion überführt somit die relativ steile $\sigma_{\beta w}^2(n)$ Kurve in eine relativ flache, für $n > 16$ nahezu konstante $\sigma_{\beta \epsilon}^2(n)$ Kurve. Dies äußert sich zum einen in einer geringen Anzahl unterschiedlicher Quantisierer, die für die optimale Quantisierung der β -Prädiktionsfehler nach Gleichung (5.82) benötigt werden (hier drei Quantisierer). Zum anderen wird hierdurch auch eine vernachlässigbare Fehldimensionierung der Quantisierer bei der Übertragung einer variablen, von dem Optimalwert 21 abweichenden Anzahl von β -Entwicklungskoeffizienten sichergestellt.

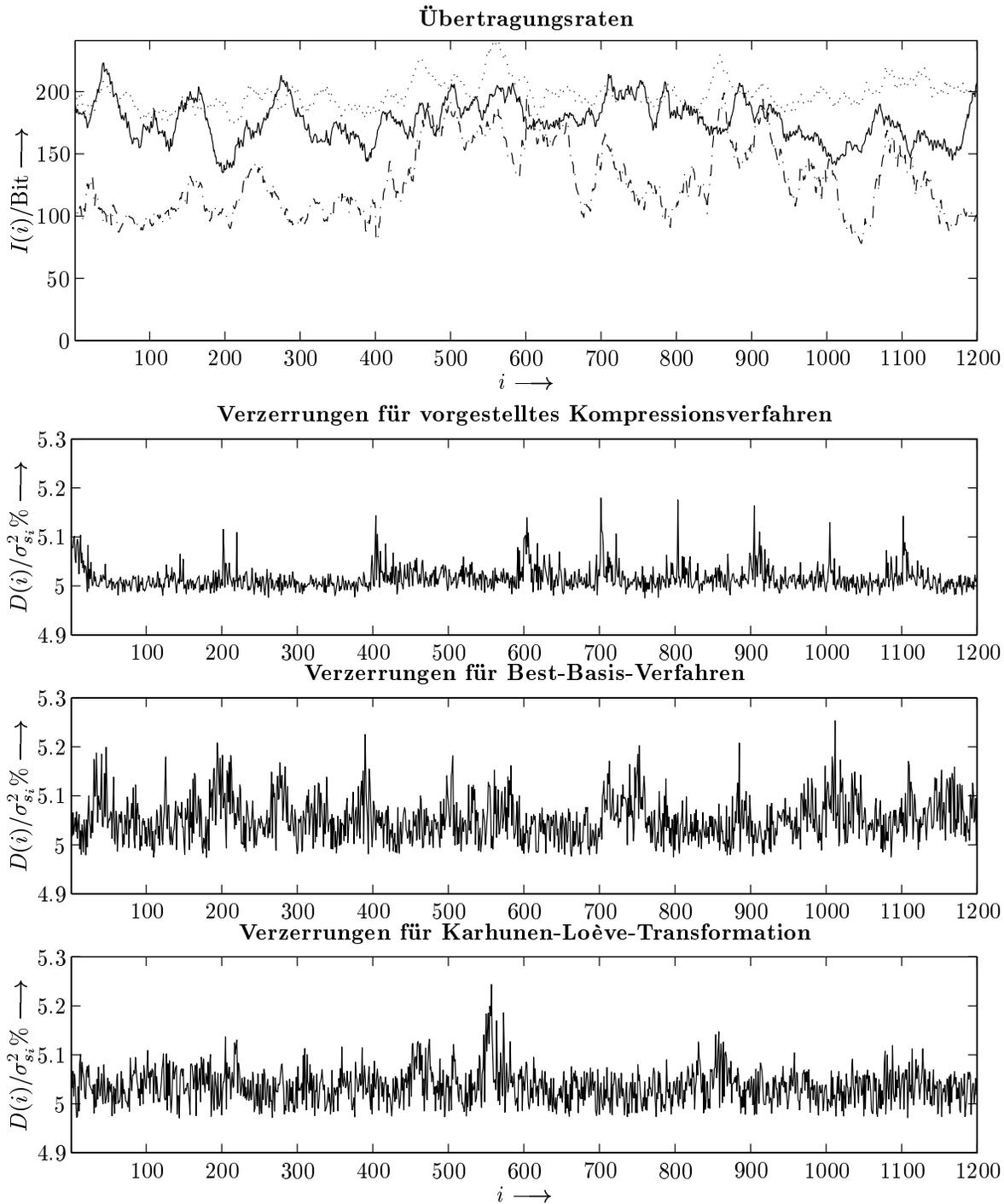


Abbildung 5.18: Vergleich der Übertragungsraten und Verzerrungen, die bei der Wellenformcodierung des repräsentativen Signals erzeugt werden. In dem oberen Bild sind die Übertragungsraten des beschriebenen Kompressionsverfahrens ($-\cdot$), der Karhunen-Loève-Transformation (\cdots) und des Best-Basis-Verfahrens ($-$) einander gegenübergestellt. Die unteren Bilder zeigen die Verzerrungen, die die einzelnen Methoden dabei erzeugen.

Abweichungen von dem Verzerrungszielwert $D_{\%}\sigma_{s_i}^2$ entstehen, wie in der Verzerrungsdar-

stellung der Abbildung 5.18 zu sehen ist, durch abrupte Änderungen der Signalstatistik, die relativ hohe Prädiktionsfehler erzeugen. Innerhalb eines Signalausschnitts bleibt die Signalverzerrung dagegen auch für verschiedene aufeinanderfolgende Zyklusformen in wesentlich engeren Grenzen, wie ebenfalls in Abbildung 5.18 zu erkennen ist. Die benötigten Verzerrungsgrenzen D_{\min} , D_{\max} können dabei durch Verwendung größerer Bitraten $R_{\beta;n}$ und logarithmischer Quantisierungskennlinien an die Bedürfnisse der Applikation angepaßt werden.

Im oberen Bild der Abbildung 5.18 werden die Übertragungsraten als Bitanzahlen, die für die Signalblockbeschreibung durch α - und β -Prädiktionsfehler ($-\cdot$) benötigt werden, mit den Übertragungsraten, die aus einer Verwendung von Karhunen-Loève-Transformation (\cdots) und Best-Basis-Verfahren ($—$) resultieren, verglichen. Die vorgestellte Kombination von Wavelet-Paket-Transformation und adaptiver Prädiktion der Entwicklungskoeffizienten erreicht eine deutlich bessere Leistungsfähigkeit als die beiden bekannten Verfahren: Sie benötigt eine mittlere Anzahl von 129.15 Bit zur Übertragung der $N_D(i)$ Entwicklungskoeffizienten, deren Mittelwert dabei 28.23 beträgt. Mit der Karhunen-Loève-Transformation werden im Mittel zwar nur 18.02 Koeffizienten zur ausreichenden Signalbeschreibung benötigt, diese sind aber mit deutlich höheren Bitraten quantisiert, damit die geforderte Signalqualität erreicht wird. Es wird so eine mittlere Anzahl von 197.87 Bit für die Übertragung der Entwicklungskoeffizienten gebraucht. Das Best-Basis-Verfahren erreicht eine mittlere Übertragungsrate von 176.68 Bit bei einer mittleren Koeffizientenanzahl von 13.15.

Anhand der Verzerrungsdarstellungen aus Abbildung 5.18 wird deutlich, daß das vorgestellte Verfahren neben der geringeren Übertragungsrate auch niedrigere Verzerrungen ermöglicht: Der Mittelwert der Verzerrung beträgt hier 5.015% bei einer Standardabweichung von 0.024%. Die Karhunen-Loève-Transformation erzeugt eine mittlere Verzerrung von 5.035% bei einer Standardabweichung von 0.036%. Das Best-Basis-Verfahren bewirkt eine mittlere Verzerrung von 5.055% mit der Standardabweichung 0.046%.

Das bessere Verzerrungsverhalten ist auf die zweistufige Konzeptionierung der Transformationscodierung zurückzuführen. Der zusätzliche Prädiktionsschritt überführt die β -Entwicklungskoeffizienten näherungsweise unabhängig von der Anzahl der an der Signalentwicklung beteiligten Koeffizienten $N_D(i)$ in Amplitudenbereiche, für die die Quantisierer optimiert sind. Hierdurch treten Fehlanpassungen, die zu hohen Quantisierungsfehlern führen, seltener auf. Werden die Entwicklungskoeffizienten, wie bei den anderen beiden betrachteten Verfahren, direkt den Quantisierern zugeführt, so treten bei überdurchschnittlich kompakten Signalbeschreibungen mit wenigen Entwicklungskoeffizienten und bei unterdurchschnittlich kompakten Signalbeschreibungen mit vielen Entwicklungskoeffizienten Fehlanpassungen und damit große Quantisierungsfehler auf.

Die Abbildung 5.19 zeigt qualitative Ergebnisse des Verfahrens. Dargestellt sind n-, p- und f-Zyklen aus der Musterfunktion 5s in ihrer ursprünglichen Form und nach der Übertragung und Rekonstruktion.

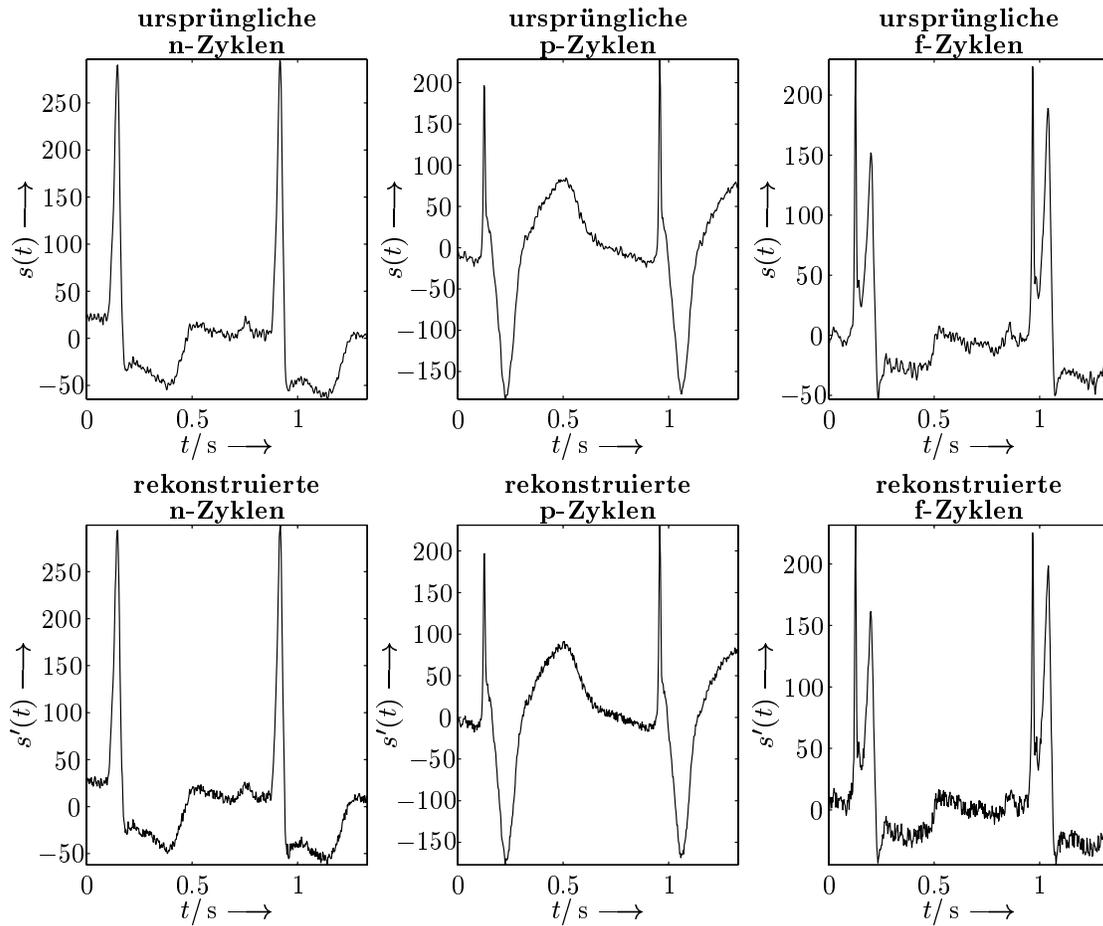


Abbildung 5.19: Dargestellt sind n -, p - und f -Zyklen aus der Musterfunktion s vor der Wellenformcodierung und nach der Rekonstruktion.

In der Tabelle 5.5 sind die Kompressionsergebnisse angegeben, die durch Anwendung des gesamten, in Abbildung 5.7 dargestellten Wellenformcodierungsverfahrens auf die EKG-Signale der MIT-BIH-Datenbasis erzielt werden. Im Mittel über alle Musterfunktionen wird eine Übertragungsrate von 171.48 Bit pro Zyklus bei einer Verzerrung von 2.792% der gesamten Signalleistung und einer Anzahl von 31.6 Entwicklungskoeffizienten erreicht. Die Übertragungsrate ist dabei auf die mittlere Zeitdauer eines Zyklus normiert und deshalb als Bitanzahl angegeben. I_{gesamt} bezeichnet dabei die Übertragungsrate, die für die huffman-codierten Prädiktionsfehler und die Seiteninformationen benötigt werden. Die Verzerrungswerte sind hier kleiner als 5%, da vor der Signalkompression der konstante vektorwertige Gleichanteil mit der Leistung m_s^2 entsprechend Gleichung (5.37) subtrahiert wird und dieser Anteil nach der Rekonstruktion wieder aufaddiert wird. Ein Vergleich mit dem sehr leistungsfähigen, auf einer Modifikation der Karhunen-Loève-Transformation basierenden Kompressionsverfahren aus [107] bestätigt das Potential der vorgestellten Wellenformcodierung. Das dort erreichte mittlere Kompressionsverhältnisse (Verhältnis von Bitanzahl des Originalsignals zur gesamten Bitanzahl der komprimierten Signalbeschreibung) von 21.4% bei einer Verzerrungen von $\approx 3\%$ stimmen näherungsweise mit dem hier erreichten, aus $I_{\text{gesamt}} = 171.48$ Bit pro Zyklus

Tabelle 5.5: *Quantitative Ergebnisse der Wellenformcodierung für die Kompression der Musterfunktionen j_s , $j = 1, \dots, 48$ der MIT-BIH-Datenbasis bei vorgegebener Verzerrung $D(i)/\sigma_{s_i}^2 = 5\%$.*

j	$\frac{I_{\text{gesamt}}}{\text{Bit}}$	$\frac{D}{(\sigma_s^2 + m_s^2)\%}$	\bar{N}_D	j	$\frac{I_{\text{gesamt}}}{\text{Bit}}$	$\frac{D}{(\sigma_s^2 + m_s^2)\%}$	\bar{N}_D	j	$\frac{I_{\text{gesamt}}}{\text{Bit}}$	$\frac{D}{(\sigma_s^2 + m_s^2)\%}$	\bar{N}_D
1	188.7	2.91	38.46	17	167.0	2.69	32.14	33	171.6	2.87	33.43
2	161.3	2.78	29.86	18	173.4	2.81	29.37	34	229.0	3.03	29.02
3	185.3	2.92	34.89	19	138.2	2.76	28.69	35	184.9	2.97	29.45
4	162.4	2.87	27.24	20	154.8	2.73	28.12	36	193.9	2.83	33.69
5	176.1	2.90	31.23	21	181.5	2.67	31.46	37	146.3	2.58	32.44
6	173.5	2.82	35.56	22	127.8	2.44	35.98	38	205.7	3.06	29.38
7	157.7	2.77	28.15	23	123.5	2.52	30.70	39	204.6	2.99	30.30
8	186.9	2.90	33.13	24	166.2	2.82	24.02	40	165.8	2.85	30.57
9	169.7	2.64	24.39	25	175.4	2.92	39.71	41	176.1	2.71	29.69
10	179.4	2.87	30.38	26	163.8	2.86	32.56	42	160.7	2.76	28.70
11	170.0	2.69	36.74	27	152.3	2.62	33.13	43	192.9	2.78	30.16
12	191.1	2.97	26.11	28	174.5	2.79	35.76	44	208.7	2.85	29.24
13	160.0	2.72	37.93	29	192.3	2.95	34.67	45	140.6	2.64	31.60
14	192.3	2.79	32.92	30	152.5	2.75	30.33	46	172.9	2.63	31.55
15	162.2	2.74	32.25	31	212.9	2.95	29.78	47	134.0	2.54	32.36
16	152.4	2.57	34.22	32	154.8	2.73	37.34	48	163.5	2.82	30.80

resultierenden Kompressionsverhältnis von 20.5% bei 2.792% Verzerrung überein. Die Methode aus [107] erreicht ihre gute Leistungsfähigkeit allerdings durch eine Berechnung der Eigenvektoren aus dem ganzen zu komprimierenden Signal selbst und kann deshalb nur zur Speicherung der komprimierten Signale und nicht für einen Einsatz in einem Übertragungssystem verwendet werden.

5.4.8 Wellenformcodierung mit vorgegebener Übertragungsrate

Alternativ kann das vorgestellte Wellenformcodierungsverfahren auch durch blockweise Anpassung der Entwicklungskoeffizientenanzahl $N_I(i)$ zur Erzeugung einer in engen Grenzen konstanten Übertragungsrate $I(i) \in (I_{\min}, I_{\max})$ genutzt werden. Die Dimensionierung der Parameter wird für diese Anwendung ebenfalls anhand eines Beispiels durchgeführt. So soll der Wellenformcodierungsalgorithmus zunächst ohne Huffman-Codierung für jeden Signalblock eine Übertragungsrate von

$$I(i) = I_\alpha + I_\beta = 5 \cdot 7 \text{ Bit} + 150 \text{ Bit} = 185 \text{ Bit} \quad (5.129)$$

bei einer möglichst geringen Verzerrung D benötigen.

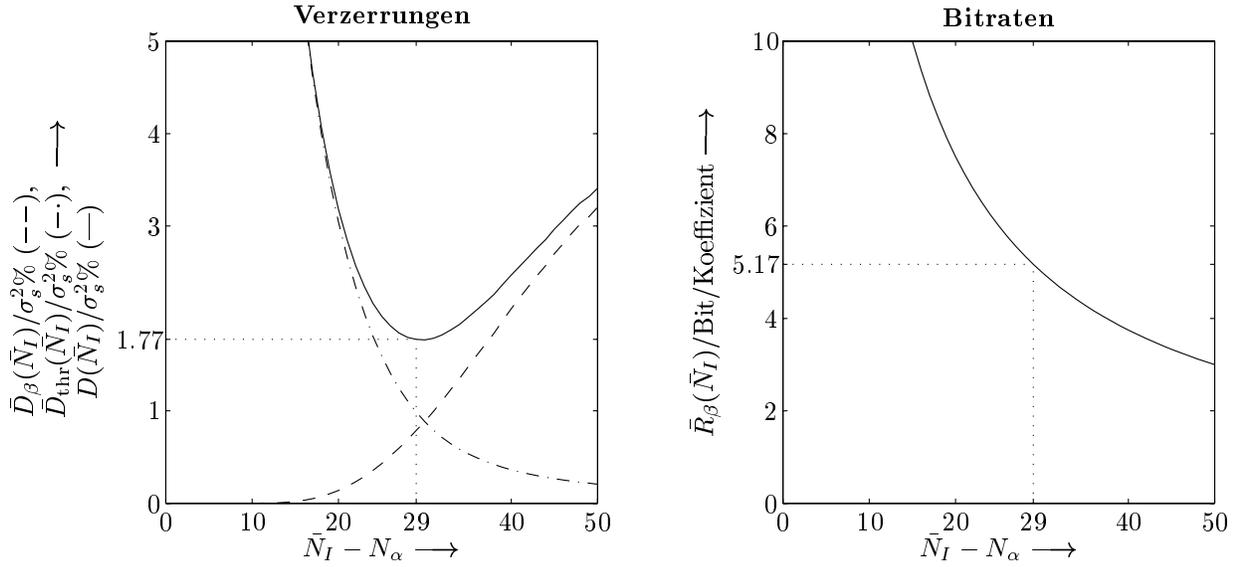


Abbildung 5.20: Das linke Bild zeigt mittlere Verzerrungen in Abhängigkeit der mittleren Anzahl von übertragenen β -Koeffizienten $\bar{N}_I - N_\alpha$. Das rechte Bild stellt die zugehörigen mittleren Bitraten dar.

Unter denselben Voraussetzungen, die auch im Abschnitt 5.4.7 gemacht werden, ist hier die mittlere Koeffizientenanzahl \bar{N}_I mit

$$I_\beta \approx (\bar{N}_I - N_\alpha) \bar{R}_\beta = 150 \text{ Bit} \quad (5.130)$$

gesucht, die bei optimaler Bitratenzuordnung entsprechend Gleichung (5.82) eine minimale Verzerrung

$$D = (\bar{N}_I - N_\alpha) \sigma_{\beta q}^2 (\bar{N}_I) + \bar{D}_{\text{thr}}(\bar{N}_I) \quad (5.131)$$

erzeugt. Mit Gleichung (5.81) und (5.130) läßt sich D , wie im linken Bild der Abbildung 5.20 gezeigt, als Funktion von \bar{N}_I darstellen. Das lokale Verzerrungsminimum $D(\bar{N}_I)/\sigma_s^2 = 1.77\%$ wird für $\bar{N}_I = 29 + N_\alpha$ erreicht. Aus dem rechten Bild kann die zugehörige optimale mittlere Bitrate $\bar{R}_\beta(\bar{N}_I = 29 + N_\alpha) = 5.17 \text{ Bit}/\beta\text{-Koeffizient}$ abgelesen werden.

Ausgehend von Gleichung (5.82) werden die einzelnen Bitraten der Lloyd-Max-Quantisierer angepaßt an die Varianzen der Prädiktionsfehler nach Tabelle 5.4 nun so festgelegt, daß die $\bar{N}_I - N_\alpha = 29$ β -Koeffizienten mit einer mittleren Anzahl von $\bar{R}_\beta \approx 5.17 \text{ Bit}/\beta\text{-Koeffizient}$ quantisiert werden. Für die Bitraten gilt

$$R_{\beta;1} = \dots = R_{\beta;8} = 6 \text{ Bit/Koeffizient} \quad (5.132)$$

$$R_{\beta;9} = \dots = R_{\beta;24} = 5 \text{ Bit/Koeffizient} \quad (5.133)$$

$$R_{\beta;25} = \dots = R_{\beta;29} = 4 \text{ Bit/Koeffizient} \quad (5.134)$$

mit $\bar{R}_\beta = 5.10$. Aufgrund des flachen Verlaufs von $\sigma_{\beta q}^2$ werden alle Prädiktionsfehler $\beta \epsilon_{i,n}$, $n > 29$ ebenfalls mit

$$R_{\beta;n} = 4 \text{ Bit/Koeffizient} \quad (5.135)$$

quantisiert.

Vor dem Huffman-Codierungsblock in Abbildung 5.7 wird so für eine feste Anzahl von Entwicklungskoeffizienten $N_I(i) = \bar{N}_I$ eine konstante Rate $I(i) = N_\alpha \cdot 7 \text{ Bit} + (\bar{N}_I - N_\alpha) \bar{R}_\beta = 183 \text{ Bit}$ generiert. Die folgend auf die quantisierten Prädiktionsfehler angewendete Huffman-Codierung erreicht eine zusätzliche Übertragungsratenreduktion durch eine angepasste Berücksichtigung der Auftretswahrscheinlichkeiten verschiedener Bitkombinationen. Für die Anwendung des wie in diesem Abschnitt beschriebenen parametrisierten Kompressionsalgorithmus auf das repräsentative Signal wird dabei eine um den Faktor 0.71 verringerte Übertragungsrate realisiert. Dieser Gewinn hat jedoch eine Ratenschwankungen zur Folge. Um eine Rate $I(i) \in (I_{\min}, I_{\max})$ nach der Huffman-Codierung zu erreichen, die zusammen mit der zur Übertragung der Seiteninformationen nötigen Bitmenge eine maximale gesamte Übertragungsrate I_{gesamt} nicht überschreitet, wird hier die Anpassung der Koeffizientenanzahl $N_I(i)$ iterativ in Abhängigkeit der Bitanzahl, die jedem einzelnen Entwicklungskoeffizienten nach der Huffman-Codierung zugeordnet ist, durchgeführt. $N_I(i)$ ergibt sich dabei als die Koeffizientenanzahl, die gerade noch eine gesamte Übertragungsrate kleiner oder gleich I_{gesamt} nach sich zieht. Für das hier betrachtete Beispiel erzeugt die Beschreibung eines Signalblocks durch \bar{N}_I Entwicklungskoeffizienten unter Berücksichtigung der Seiteninformationen durch $\bar{R}_{\text{seit}} = 2.81 \text{ Bit}/\beta$ -Koeffizient eine mittlere Bitmenge von $\bar{R}_{\text{seit}}(\bar{N}_I - N_\alpha) + 0.71 \cdot (N_\alpha \cdot 7 \text{ Bit} + \bar{R}_\beta(\bar{N}_I - N_\alpha)) \approx 210 \text{ Bit}$. Die huffman-codierten Prädiktionsfehler werden für jeden Signalblock demnach vor der Übertragung solange im Datenpuffer gespeichert, bis für die gesamte Übertragungsrate

$$I_{\text{gesamt}}(N_I(i)) \leq 210 \text{ Bit} \text{ und } I_{\text{gesamt}}(N_I(i) + 1) > 210 \text{ Bit} \quad (5.136)$$

gilt.

In der Tabelle 5.6 sind die Kompressionsergebnisse dargestellt, die mit dem vorgestellten Wellenformcodierungsalgorithmus für eine maximale gesamte Übertragungsrate von 210 Bit pro Signalblock bei der Anwendung auf die Musterfunktionen $^j s$, $j = 1, \dots, 48$ erreicht werden. Hier werden im Mittel 207.6 Bit für die komprimierte Darstellung eines Signalblocks durch eine mittlere Koeffizientenanzahl von 36.2 benötigt. Die durchschnittliche Signalverzerrung beträgt dabei 2.2% der Signalvarianz.

Tabelle 5.6: *Quantitative Ergebnisse der Wellenformcodierung für die Kompression der Musterfunktionen j_s , $j = 1, \dots, 48$ mit maximal 210 Bit pro Signalblock.*

j	$\frac{I_{\text{gesamt}}}{\text{Bit}}$	$\frac{D}{(\sigma_s^2 + m_s^2)\%}$	\bar{N}_D	j	$\frac{I_{\text{gesamt}}}{\text{Bit}}$	$\frac{D}{(\sigma_s^2 + m_s^2)\%}$	\bar{N}_D	j	$\frac{I_{\text{gesamt}}}{\text{Bit}}$	$\frac{D}{(\sigma_s^2 + m_s^2)\%}$	\bar{N}_D
1	207.7	2.18	38.26	17	206.9	2.27	34.70	33	207.8	2.28	36.05
2	208.0	2.07	37.98	18	208.1	2.18	36.89	34	206.5	2.57	36.35
3	207.3	2.15	37.31	19	207.5	1.86	37.37	35	207.7	2.29	35.64
4	207.7	2.09	36.85	20	208.2	2.05	35.37	36	207.9	2.46	35.55
5	208.5	2.10	36.31	21	206.6	2.18	35.70	37	208.2	1.84	36.87
6	208.1	2.14	36.87	22	208.3	2.00	37.70	38	208.2	2.56	35.28
7	207.5	2.31	35.12	23	207.4	1.95	36.57	39	206.7	2.51	35.36
8	207.2	2.34	36.17	24	207.6	2.20	39.34	40	208.0	2.27	36.07
9	207.4	2.26	35.58	25	207.2	2.25	37.04	41	207.5	2.07	34.69
10	207.0	2.13	37.39	26	208.0	2.19	36.26	42	207.5	2.24	35.10
11	207.7	2.20	36.60	27	207.5	2.06	36.46	43	206.6	2.44	36.28
12	207.9	2.46	35.94	28	206.8	2.15	34.71	44	208.0	2.31	36.93
13	208.1	2.11	37.52	29	207.5	2.34	37.62	45	208.3	2.09	36.55
14	207.2	2.38	35.23	30	208.0	2.11	37.36	46	207.9	2.26	37.00
15	208.2	2.14	35.52	31	207.6	2.41	34.79	47	206.7	1.92	34.84
16	206.8	2.06	35.82	32	207.4	2.24	37.37	48	207.3	2.09	35.25