

Kapitel 4

Wavelets und Filterbänke

Die Aufgabe der Signalentwicklung in vorteilhafte elementare Bestandteile stellt sich mit ähnlichen Zielsetzungen, wie im kontinuierlichen Fall, auch im Kontext der digitalen Signalverarbeitung. An die Stelle des zeitkontinuierlichen zu verarbeitenden Signals $s(t)$ tritt hier das zeitdiskrete Signal $s(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, welches auch als Sequenz bezeichnet wird. Vergleichbar mit einer zeitkontinuierlichen Signaltransformation durch die Innere-Produkt-Bildung mit den Elementarfunktionen eines Funktionensystems und der inversen Transformation durch die gewichtete Kombination der Elementarfunktionen des dualen Funktionensystems, werden die Signale $s(n)$ im Zeitdiskreten auf der Basis elementarer Sequenzen anstelle von Funktionen analysiert und synthetisiert. Berücksichtigt man die Verwandtschaft von Innerem Produkt und Faltung, so sind diskrete Transformationen und ihre Inversen durch Filterbänke realisierbar. Eigenschaften des Transformationspaars, wie Orthogonalität oder die vollständige Invertierbarkeit des Analysevorgangs durch die Synthese, übertragen sich dann auf Anforderungen an die korrespondierenden Filterbänke.

Im ersten Teil dieses Kapitels soll die Konstruktion von Filterbänken, die eine perfekte Signalrekonstruktion zulassen und, als Spezialfall hiervon, die Konstruktion orthonormaler Filterbänke diskutiert werden. Anschließend wird in Abschnitt 4.6 der sich über die Multi-Skalen-Analyse ergebende Zusammenhang von Filterbänken, Skalierungsfunktionen und Wavelets beschrieben. Das Kapitel endet mit der von I. Daubechies [14, 17, 72, 73] entwickelten fundamentalen Idee zur Konstruktion orthonormaler Wavelet-Funktionensysteme mit Basisfunktionen endlicher Ausdehnung: Anstatt direkt eine Skalierungsfunktion zu finden, die eine Multi-Skalen-Analyse ermöglicht und die daraus resultierenden Filterbankkoeffizienten nur zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten zu nutzen, invertiert sie den Konstruktionsvorgang. Sie entwirft die Elementarfunktionen ausgehend von orthonormalen FIR-Filterbänken, deren Filter eine zusätzliche Anforderung, die sogenannte Regularitätsbedingung, erfüllen müssen. Die Impulsantworten unendlicher Filteriterationen solcher orthonormalen, regulärer Filter konvergieren dann gegen Sequenzen, die mit einer Skalierungsfunktion und einem Mother-Wavelet assoziiert werden können und somit die Grundlage einer Multi-Skalen-Analyse bilden. Die ad hoc schwierige Konstruktion orthonormaler

Wavelet-Funktionensysteme ist damit auf die einfachere Gestaltung einer korrespondierenden Filterbank zurückgeführt. Die detaillierten Zusammenhänge werden im Abschnitt 4.7 beschrieben. Zunächst sollen aber in diesem Kapitel die zur weiteren Diskussion notwendigen grundlegenden Definitionen und Konventionen getroffen werden.

4.1 Grundlegende Definitionen und Konventionen für zeitdiskrete Signale

In Analogie zu zeitkontinuierlichen Energiesignalen sollen hier Sequenzen $s(n)$ endlicher Energie E_s betrachtet werden, für die

$$E_s = \|s(n)\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s(n)|^2 < \infty \quad (4.1)$$

gilt, und die durch die Mengenzugehörigkeit $s(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ gekennzeichnet sind. Das Innere Produkt ist für solche zeitdiskreten Energiesignale durch

$$\langle s_1(n), s_2(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_1(n) s_2^*(n) \quad (4.2)$$

definiert, so daß die Menge aller $s(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ einen Hilbert-Raum bildet. Faltung und Korrelation sind für reellwertige Signale durch

$$s_1(n) * s_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1(m) s_2(n \Leftrightarrow m) \quad (4.3)$$

und

$$s_1(n) \star s_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s_1(m) s_2(m+n) \quad (4.4)$$

bestimmt. Das Innere Produkt steht mit der Faltung in dem für die Berechnung von Transformationskoeffizienten durch die Anwendung einer Filterbank wichtigen Zusammenhang

$$s_1(n) * s_2(n) = \langle s_1(m), s_2^*(m \Leftrightarrow n) \rangle, \quad (4.5)$$

$$\langle s_1(n), s_2(n) \rangle = s_1(m) * s_2^*(\Leftrightarrow m)|_{m=0}. \quad (4.6)$$

Neben der Interpretation eines zeitdiskreten Signals als Sequenz ist die Vektordarstellung zur Beschreibung einiger Beziehungen vorteilhaft. Alternativ wird ein reellwertiges zeitdiskretes Signal deshalb auch als Spaltenvektor \mathbf{s} mit dem n -ten Abtastwert als Komponente s_n ,

$$\mathbf{s} = [\cdots, s_0, s_1, \cdots, s_{n-1}, s_n, \cdots]^T \quad (4.7)$$

und einer endlich langen Impulsantwort der Länge $N + 1$ entsprechen Filtermatrizen, bei denen ausschließlich die Elemente der Hauptdiagonale und der ersten N Nebendiagonalen von null verschiedene Werte annehmen können.

Die Multiplikation der Matrix \mathbf{H} mit dem Vektor \mathbf{s} in der Gleichung (4.11) korrespondiert aufgrund der Verwandtschaft von Faltung und Innerem Produkt mit einer Signalanalyse durch Innere-Produkt-Bildung mit den Vektoren der Menge

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_k = \mathbf{T}^k \mathbf{h}_- : k \in \mathbb{Z}\}, \quad (4.14)$$

die in Matrix \mathbf{H} zeilenweise, entsprechend

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_{-1}^T \\ \mathbf{b}_0^T \\ \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_k^T \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{h}_-)^T \\ (\mathbf{T}^0 \mathbf{h}_-)^T \\ (\mathbf{T}^1 \mathbf{h}_-)^T \\ \vdots \\ (\mathbf{T}^k \mathbf{h}_-)^T \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

angeordnet sind. Dabei bezeichnet \mathbf{T}^k eine Translationsmatrix mit $t_{i,j} = 1$ für $i \Leftrightarrow j = k$ und $t_{i,j} = 0$ für $i \Leftrightarrow j \neq k$, die das Verschieben der Vektorelemente um k Stellen bewirkt. \mathbf{h}_- mit $h_{-,n} = h_{-n}$ kennzeichnet den im Ursprung gespiegelten Filtervektor \mathbf{h} .

Eine Sequenzfilterung mit einem Filter der Stoßantwort $h(n)$ erzeugt demnach eine Transformationskoeffizientensequenz $g(n)$, deren Elemente nach Gleichung (4.5) den Inneren Produkten $\langle s(m), h(n \Leftrightarrow m) \rangle$ entsprechen. Genauso sind auch die Komponenten des Vektors \mathbf{g} in Gleichung (4.11) als Transformationskoeffizienten bezüglich der Vektoren der Menge \mathcal{B} aus Gleichung (4.14) zu deuten.

4.2 Spektraltransformationen zeitdiskreter Signale

Die Fourier-Transformation eines zeitdiskreten Signals $s(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ entwickelt dieses in komplexe Exponentialsequenzen $e^{jn\omega}$ und ordnet damit jeder Sequenz durch das Abbildungspaar

$$\hat{s}(e^{j\omega}) = \langle s(n), e^{jn\omega} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n) e^{-jn\omega}, \quad (4.16)$$

$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{s}(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad (4.17)$$

ein kontinuierliches komplexwertiges Spektrum $\hat{s}(e^{j\omega})$ mit der Periode 2π zu. Ergibt sich $s(n)$ aus einem kontinuierlichen Signal $s(t)$ durch Abtastung mit der Rate $1/T = 1$ zu

$s(n) = s(t)|_{t=nT}$, so sind die Spektren $\hat{s}(\omega)$, $\hat{s}(e^{j\omega})$ über die Poissonsche Summenformel

$$\hat{s}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega \Leftrightarrow 2\pi n) \quad (4.18)$$

miteinander verknüpft, und das periodische Spektrum $\hat{s}(e^{j\omega})$ kann aus $\hat{s}(\omega)$ abgeleitet werden. Das Innere Produkt solcher 2π -periodischen Fourier-Transformierten zweier Sequenzen ist dabei durch

$$\langle \hat{s}_1(e^{j\omega}), \hat{s}_2(e^{j\omega}) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{s}_1(e^{j\omega}) \hat{s}_2^*(e^{j\omega}) d\omega \quad (4.19)$$

definiert, womit sich die Signalenergie im Frequenzbereich zu

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{s}(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|\hat{s}(e^{j\omega})\|^2 \quad (4.20)$$

berechnet.

Unterteilt man eine Sequenz $s(n)$ in aufeinanderfolgende Segmente $s_{\text{seg};i}(\chi)$, $\chi = 0, \dots, N_{\text{seg}}$, $i \in \mathbb{Z}$ mit $\chi = \text{mod}_{N_{\text{seg}}+1} n$, $i = (n \Leftrightarrow \chi)/(N_{\text{seg}} + 1)$ der Länge $N_{\text{seg}} + 1$ entsprechend

$$s(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{\text{seg};i}(\chi) * \delta(\chi + i(N_{\text{seg}} + 1)), \quad (4.21)$$

so existiert mit der diskreten Kurzzeit-Fourier-Transformation eine Abbildungsvorschrift, die eine redundanzfreie Signaldarstellung durch eine Entwicklung in orthonormale Spektralkomponenten endlicher Ausdehnung ermöglicht. Zur eindeutigen Beschreibung eines Signalsegments $s_{\text{seg};i}(n)$ genügen dann die für diskrete Frequenzwerte $\omega = 2\pi l/(N_{\text{seg}} + 1)$, $l = 0, 1, \dots, N_{\text{seg}}$ berechneten Transformationskoeffizienten. Mit

$$\hat{s}_{\text{seg};i}(e^{jl}) = \langle s_{\text{seg};i}(n), e^{j2\pi nl/(N_{\text{seg}}+1)} \rangle = \sum_{n=0}^{N_{\text{seg}}} s_{\text{seg};i}(n) e^{-j2\pi nl/(N_{\text{seg}}+1)} \quad (4.22)$$

und

$$s_{\text{seg};i}(n) = \frac{1}{N_{\text{seg}} + 1} \sum_{l=0}^{N_{\text{seg}}} \hat{s}_{\text{seg};i}(e^{jl}) e^{j2\pi nl/(N_{\text{seg}}+1)} \quad (4.23)$$

existiert somit eine eindeutige Zuordnung von $N_{\text{seg}} + 1$ Abtastwerten zu $N_{\text{seg}} + 1$ Spektralwerten für jedes Segment $s_{\text{seg};i}(n)$.

Das folgende Gleichungspaar beschreibt die diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation und

ihre Inversion beispielhaft für $N_{\text{seg}} = 3$ in der Matrizendarstellung. Es ist

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & j & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow j & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & \Leftrightarrow 1 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & \Leftrightarrow j & \Leftrightarrow 1 & j & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & j & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow j & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow j & \Leftrightarrow 1 & j & 0 & 0 & \\ \ddots & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{s} \quad (4.24)$$

und

$$\mathbf{s} = \mathbf{H}^{\text{H}}\mathbf{g} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & \Leftrightarrow j & \Leftrightarrow 1 & j & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & \Leftrightarrow 1 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ 1 & j & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow j & 0 & 0 & 0 & \dots & & & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow j & \Leftrightarrow 1 & j & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 1 & \Leftrightarrow 1 & 0 & 0 & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & j & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow j & 0 & 0 & \\ \ddots & \ddots \end{bmatrix} \mathbf{g}. \quad (4.25)$$

Da \mathbf{H} keine Toeplitz-Matrix ist, kann die diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation nicht durch die Anwendung eines einzigen Filters durchgeführt werden. Die Transformationsmatrix der diskreten Kurzzeit-Fourier-Transformation weist dagegen eine Toeplitz-Struktur bezüglich Blöcken der Dimension $(N_{\text{seg}} + 1) \times (N_{\text{seg}} + 1)$ auf. Matrizen mit solchen, sich entlang der Hauptdiagonalen wiederholenden Koeffizientenblöcken korrespondieren mit Filterbänken, so daß die beispielhaft angeführte diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation für $N_{\text{seg}} + 1 = 4$ durch die Verwendung von 4 Filtern in einer Bank realisiert werden kann.

Im Kontext der digitalen Signalverarbeitung und der Filtertheorie ist ferner die z -Transformation als Verallgemeinerung der Fourier-Transformation von Bedeutung [26, 28, 83]. Um eine Konvergenz der Fourier-Transformation auch für nicht absolut summierbare Sequenzen $s(n) \notin l^2(\mathbb{Z})$ zu ermöglichen, werden zeitdiskrete Signale mit einem exponentiellen Gewichtungsfaktor $e^{-\vartheta n}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ vor der Transformation multipliziert. Mit der Substitution

$$z = e^{\vartheta + j\omega} \quad (4.26)$$

ergibt sich dann die z -Transformierte der Sequenz $s(n)$ zu

$$\hat{s}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)z^{-n} \quad (4.27)$$

und ermöglicht damit gegenüber der Fourier-Transformation eine umfangreichere spektrale Interpretation für eine größere Sequenzenklasse durch die Signaldarstellung in der komplexen z -Ebene. Beinhaltet der Konvergenzbereich der z -Transformierten $\hat{s}(z)$ den Einheitskreis $|z| = 1$, so ist der Dämpfungsfaktor $e^{-\vartheta n} = 1$ für $\vartheta = 0$, so daß die Fourier-Transformierte der zugehörigen Sequenz $s(n)$ existiert und mit der z -Transformierten durch die Substitution $z = e^{j\omega}$ in beide Richtungen verknüpft ist. Die hier vorrangig betrachteten zeitdiskreten Signale $s(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ erfüllen diese Bedingung immer.

4.3 Filter, Über- und Unterabtastung und Filterbänke

Im Kontext der zeitdiskreten Signalverarbeitung ist eine den Anforderungen einer Applikation angepaßte Signalzerlegung in bedeutende Bestandteile sowie eine Signalrekonstruktion aus vorteilhaften elementaren Komponenten von ähnlicher Bedeutung wie im Fall der kontinuierlichen Signalverarbeitung. Dabei beinhalten in Signalverarbeitungssystemen und -algorithmen zum Einsatz kommende Analyse- und Syntheseverfahren zumeist eine spektrale Selektivität unter Berücksichtigung bestimmter Randbedingungen. Typischerweise werden hierfür Filter mit einer Hochpaß-, Tiefpaß- oder Bandpaßcharakteristik verwendet. Typische Randbedingungen wie Flankensteilheit, Dämpfung, Welligkeit im Paß- oder Sperrband und Symmetrieeigenschaften bestimmen dann den Filtertyp und die Filterordnung [28, 83]. Eine breite Verwendung finden Butterworth-, Tschebyscheff- oder elliptische Filter, die in der kontinuierlichen Zeitdomäne dimensioniert werden und durch eine bilineare Transformation auf ein IIR-Filter als zeitdiskretes Pendant abgebildet werden. FIR-Filter zur Approximation optimaler Lösungen oder als gefensterter IIR-Filter kommen zum Einsatz, falls andere Randbedingungen gefragt sind.

Einige Applikationen stellen allerdings weitreichendere Anforderungen an den Signalzerlegungs- oder -rekonstruktionsprozeß. Neben der alleinigen Betrachtung der spektralen Komposition ist oft, wie auch im Kontext kontinuierlicher Signale, die verbunden zeitlich-spektrale Struktur von Bedeutung. Deshalb ist auch in der zeitdiskreten Signalverarbeitung eine Signalentwicklung in elementare, zeitlich-spektral lokalisierte Sequenzen bzw. Vektoren sinnvoll. Eine mit der Definition der effektiven Ausdehnung und Bandbreite für Funktionen als elementare Komponenten kontinuierlicher Signale vergleichbare Begriffsbestimmung ist für Sequenzen allerdings nicht notwendig. Die zeitliche Diskretisierung hat eine Periodisierung des Spektrums zur Folge, welches damit durch das auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkte Basisbandspektrum eindeutig bestimmt ist. Assoziiert man dieses Basisbandspektrum mit der zugehörigen Sequenz, so ist jede Sequenz spektral streng lokalisierbar, und die Definition einer effektiven Bandbreite als Lokalisationsmaß nicht streng begrenzter Spektren ist nicht erforderlich. Andere Lokalisationsmaße werden stattdessen verwendet. Die zeitliche Lokalisation der elementaren Sequenzen soll ebenfalls streng begrenzt sein, so daß das mit einem Elementarvektor korrespondierende Filter eine endliche Impulsantwort der Länge $N + 1$ entsprechend Gleichung (4.12) hat. Außerdem sollen ausschließlich die im Zusammenhang von

Filterbänken und Wavelets dominierenden reellwertigen Filter betrachtet werden.

Es stellt sich nun die Frage, was durch die Filterung mit einem FIR-Filter bezüglich der zeitlich-spektralen Signaleigenschaften erreicht werden kann. Offensichtlich ist, daß eine Zerlegung in orthonormale Komponenten mit einem FIR-Filter außer für den trivialen Fall $h(n) = \delta(n)$ nicht möglich ist. Die Signalrekonstruktion aus einer FIR-gefilterten Sequenz ist aber dennoch erreichbar. Bedingung für die Invertierbarkeit ist, daß die Fourier-Transformierte des analysierenden Filters $\hat{h}(e^{j\omega}) \neq 0$ für $\omega \in [\leftarrow\pi, \pi]$ ist. Die Übertragungsfunktion des zu $h(n)$ biorthogonalen Synthesefilters $\tilde{h}(n)$ ist somit für alle $\omega \in \mathbb{R}$ definiert und ergibt sich zu $\hat{\tilde{h}}(e^{j\omega}) = 1/\hat{h}(e^{j\omega})$. Dann ist $\tilde{h}(n)$ allerdings ein IIR-Filter, so daß kein FIR-Filter mit biorthogonalem FIR-Filter eine Basis des $l^2(\mathbb{Z})$ erzeugen kann. Dieser Zusammenhang stellt sich in der Matrizendarstellung dadurch dar, daß nur unter der genannten Voraussetzung $\hat{h}(e^{j\omega}) \neq 0$ für $\omega \in [\leftarrow\pi, \pi]$ die Determinante $\det \mathbf{H} \neq 0$ ist, so daß die Inverse der FIR-Filtermatrix \mathbf{H} existiert, und diese Synthesefiltermatrix $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^{-1} \neq \mathbf{H}^T$ eine Dreiecksmatrix ist. Ein einzelnes reellwertiges FIR-Filter ist somit zur Durchführung einer leistungsfähigen verbunden zeitlich-spektralen Signaltransformation, die auch invertierbar sein soll, ungeeignet. Erwartungsgemäß reicht die Translationsoperation \mathbf{T}^k als einzige Modifikationsform des grundlegenden Prototypenvektors \mathbf{h}_- nicht aus um eine brauchbare Basis des $l^2(\mathbb{Z})$ zu erzeugen.

Zusätzliche Freiheitsgrade können durch die Verwendung mehrerer Filter, die die Sequenz in mehrere Frequenzbänder unterteilen, gewonnen werden. Zur Verbesserung der zeitlich-spektralen Zerlegungseigenschaften sollen deshalb Filterbänke zur Signalanalyse und -synthese anstelle jeweils eines Filters verwendet werden. Prinzipiell können dabei beliebig viele Filter eingesetzt werden. Hier soll aber der einfachste Fall einer Filterbank mit zwei Filtern, einem mit Hochpaß- und einem mit Tiefpaßcharakteristik, diskutiert werden. Obwohl gerade in jüngster Zeit auch aus breiteren Filterbänken resultierende sogenannte Multi-Wavelets Gegenstand der Forschung sind [22,84,85], ist die zwei Filter umfassende Filterbank im Kontext der Wavelet-Theorie von besonders grundlegender Bedeutung. Da durch die Filterung eines Signals mit dem Tiefpaßfilter $h_0(n)$ und dem Hochpaßfilter $h_1(n)$ die Datenmenge verdoppelt wird, ist eine Unterabtastung der beiden Filterpfade mit dem Dezimationsfaktor 2 Bestandteil der Analysefilterbank. Um die ursprüngliche Datenrate als notwendige Voraussetzung einer fehlerfreien Rekonstruktion wieder zu erreichen, beinhaltet die Synthesefilterbank mit dem Tiefpaßfilter $\tilde{h}_0(n)$ und dem Hochpaßfilter $\tilde{h}_1(n)$ eine entsprechende Überabtastung mit dem Expansionsfaktor 2. Ein solches Filterbankpaar ist in der Abbildung 4.1 dargestellt.

Die Analyse- und Synthesedurchführung mit Filterbänken ist ein weitaus leistungsfähigerer Ansatz zur Studie der zeitlich-spektralen Signaleigenschaften als der jeweils einen Filter umfassende Ansatz. Wie in dem Abschnitt 4.3.2 gezeigt wird, kann eine invertierbare Signalzerlegung durch die Anwendung von FIR-Filterbänken erreicht werden. Darüber hinaus ist auch eine Signalbeschreibung durch orthonormale Komponenten endlicher Ausdehnung möglich. Die durch den Analysevorgang erzeugten Entwicklungskoeffizientensequenzen $g_0(n)$ und $g_1(n)$ beinhalten somit keine Redundanz und machen eine Aussage über das

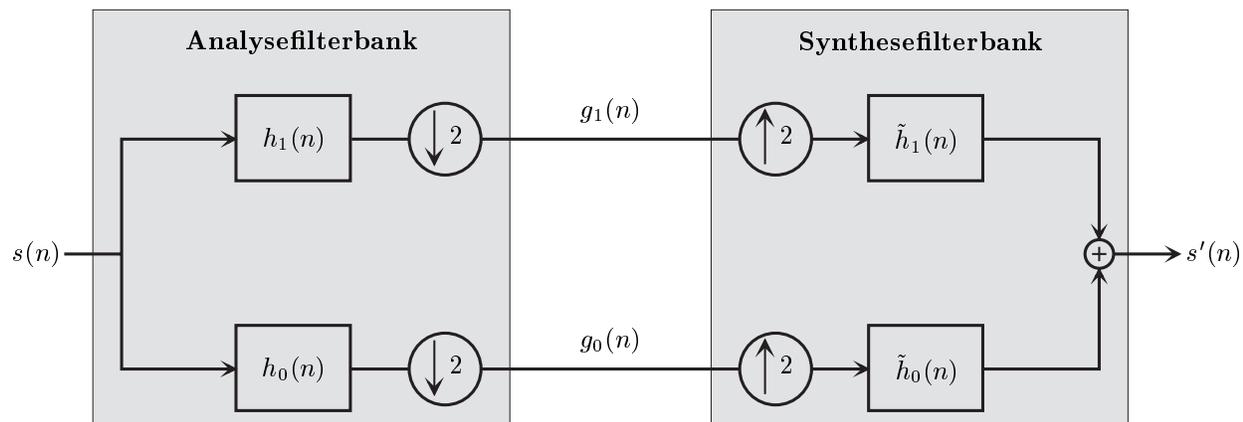


Abbildung 4.1: Ein Analyse- und Synthesefilterbankpaar mit den Tiefpaßfiltern $h_0(n)$, $\tilde{h}_0(n)$ und den Hochpaßfiltern $h_1(n)$, $\tilde{h}_1(n)$. Die Analysefilterbank erzeugt die tiefpaßgefilterte Sequenz $g_0(n)$ und die hochpaßgefilterte Sequenz $g_1(n)$, welche durch die Synthesefilterbank zum Ausgangssignal $s'(n)$ kombiniert werden.

zeitlich-spektrale Signalverhalten. Diese beiden Filterbankeigenschaften der perfekten Rekonstruierbarkeit und der Orthonormalität manifestieren sich in Anforderungen an die Filter $h_0(n)$, $h_1(n)$, $\tilde{h}_0(n)$, $\tilde{h}_1(n)$ und in deren Abhängigkeiten voneinander. Bei der Formulierung der einzuhaltenden Bedingungen sind dabei die Auswirkungen der Über- und Unterabtastung zu berücksichtigen. Diese werden im folgenden Abschnitt zunächst diskutiert.

4.3.1 Über- und Unterabtastung im Zeit- und Frequenzbereich

Die Unterabtastung einer Sequenz $s(n)$ mit dem Dezimationsfaktor 2 bewirkt, daß nur die geradzahigen Abtastwerte der Eingangssequenz beibehalten werden. Für die Ausgangssequenz eines Dezimationsblocks gilt deshalb

$$g(n) = s(2n). \quad (4.28)$$

Vektoriell läßt sich dieser Zusammenhang durch die Multiplikation des Vektors \mathbf{s} mit der Dezimationsmatrix \mathbf{D} durch $\mathbf{g} = \mathbf{D}\mathbf{s}$ entsprechend

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ s_{-4} \\ s_{-2} \\ s_0 \\ s_2 \\ s_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 1 & 0 & \cdots & & & \\ & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ & & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & & \cdots & 0 & 1 & \\ & & & & & & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ s_{-2} \\ s_{-1} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

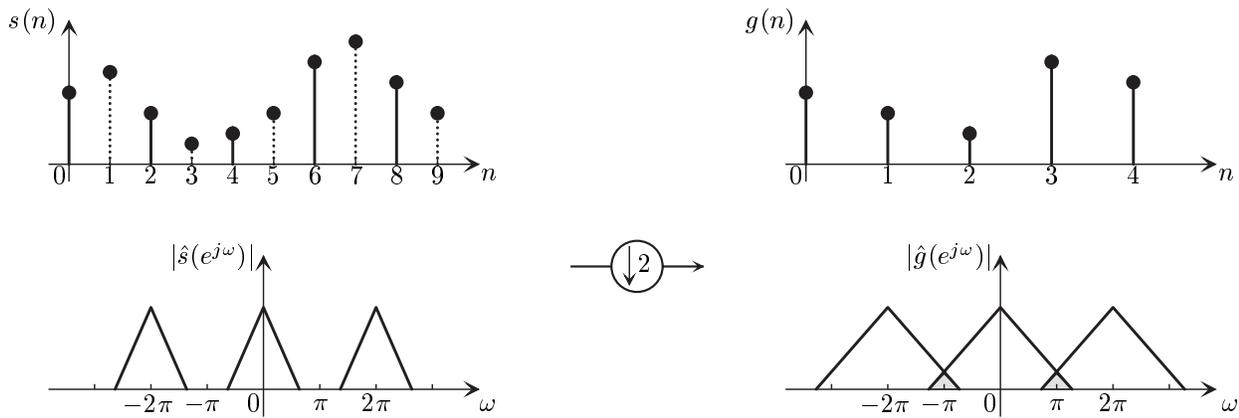


Abbildung 4.2: Die Unterabtastung des Signals $s(n)$ um den Dezimationsfaktor 2 erzeugt eine Sequenz $g(n)$, die nur die geradzahigen Abtastwerte der Originalsequenz beinhaltet. Im Frequenzbereich bewirkt die Unterabtastung eine spektrale Spreizung, die, wie bei den hier grau gekennzeichneten Bereichen, zu Aliasingeffekten führen kann.

beschreiben. In der Frequenzdomäne gilt für das Spektrum der unterabgetasteten Sequenz

$$\hat{g}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (\hat{s}(e^{j\omega/2}) + \hat{s}(e^{j(\omega/2+\pi)})). \quad (4.30)$$

Demnach beinhaltet $\hat{g}(e^{j\omega})$ Aliasingdefekte, falls das Spektrum der Originalsequenz $\hat{s}(e^{j\omega})$ für $|\omega| \in [\pi/2, \pi]$ von null verschiedene Werte annimmt. Die Auswirkungen der Unterabtastung im Zeit- und Frequenzbereich sind in der Abbildung 4.2 graphisch illustriert. In der komplexen z -Ebene stellt sich die spektrale Spreizung $\omega \rightarrow \omega/2$ durch den Übergang $z \rightarrow z^{1/2}$ und die spektrale Verschiebung $\omega \rightarrow \omega + \pi$ durch $z \rightarrow \Leftrightarrow z$ dar. Hieraus ergibt sich für die z -Transformierte der unterabgetasteten Sequenz

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{2} (\hat{s}(z^{1/2}) + \hat{s}(\Leftrightarrow z^{1/2})). \quad (4.31)$$

Die Operation der Unterabtastung ist im allgemeinen nicht invertierbar. Sie ist offensichtlich linear aber nicht zeitinvariant und kann deshalb nicht als Faltung einer Sequenz mit der Impulsantwort eines Filters beschrieben werden. Ein solches Filter existiert nicht. Dieser Umstand zeigt sich auch in der Dezimationsmatrix \mathbf{D} , die keine Toeplitz-Struktur aufweist.

Die Überabtastung einer Sequenz $s(n)$ mit dem Expansionsfaktor 2 fügt jeweils eine Null zwischen zwei aufeinanderfolgende Abtastwerte der Originalsequenz ein. Für die Ausgangssequenz des Expansionsblocks gilt somit

$$g(n) = \begin{cases} s(k) & \text{für } n = 2k \\ 0 & \text{für } n = 2k + 1 \end{cases}. \quad (4.32)$$

In der Matrixschreibweise kann dieser Zusammenhang durch die Multiplikation $\mathbf{g} = \mathbf{U}\mathbf{s}$

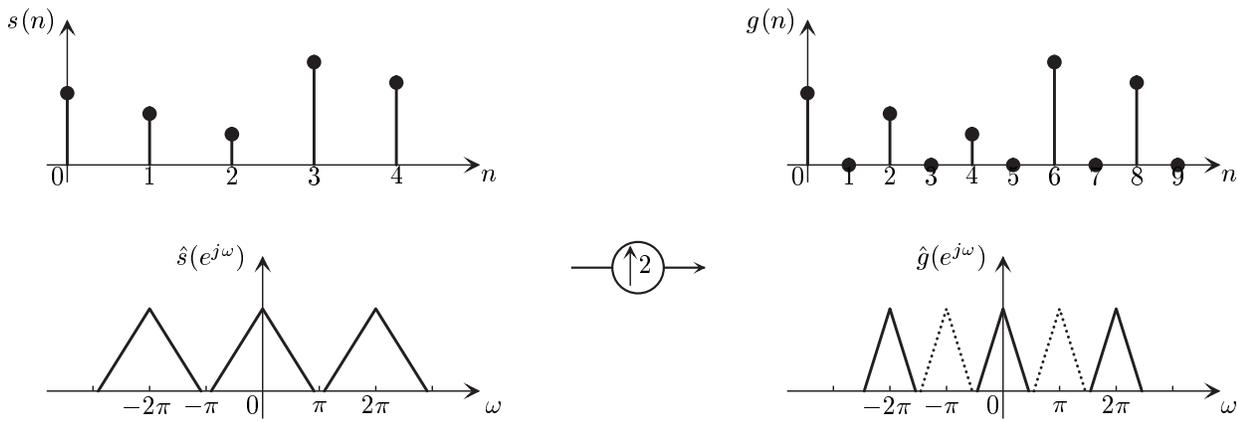


Abbildung 4.3: Die Überabtastung des Signals $s(n)$ mit dem Expansionsfaktor 2 fügt nullwertige Abtastwerte zwischen die Abtastwerte der Originalsequenz ein. Das Spektrum einer überabgetasteten Sequenz beinhaltet neben dem komprimierten Originalspektrum eine um π verschobene, hier gestrichelt gekennzeichnete Kopie dieses komprimierten Spektrums.

des Vektors \mathbf{s} mit der Expansionsmatrix \mathbf{U} entsprechend

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ s_{-1} \\ 0 \\ s_0 \\ 0 \\ s_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \dots & & & & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ & \dots & \ddots & \ddots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ s_{-2} \\ s_{-1} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

beschrieben werden. Für das Spektrum der überabgetasteten Sequenz gilt

$$\hat{g}(e^{j\omega}) = \hat{s}(e^{j2\omega}). \quad (4.34)$$

Damit erzeugt die Überabtastung aus dem 2π -periodischen Spektrum $\hat{s}(e^{j\omega})$ das Spektrum $\hat{s}(e^{j2\omega})$ mit der Periode π . Der ursprünglich über das Intervall $[-\pi, \pi]$ ausgedehnte Graph wird in den Frequenzbereich $[-\pi/2, \pi/2]$ komprimiert, und Kopien dieses komprimierten Graphen treten für ungradzahlige Vielfache von π im Spektrum auf. Die Abbildung 4.3 veranschaulicht die Auswirkungen der Überabtastung im Zeit- und Frequenzbereich. In der z -Domäne zeigt sich die spektrale Kompression $\omega \rightarrow 2\omega$ in dem Übergang $z \rightarrow z^2$. Demzufolge lässt sich die Überabtastung durch

$$\hat{g}(z) = \hat{s}(z^2) \quad (4.35)$$

beschreiben. Auch die Überabtastung ist eine lineare aber nicht zeitinvariante Operation und kann somit nicht durch ein Filter dargestellt werden. Im Gegensatz zur Unterabtastung ist die Überabtastung aber invertierbar.

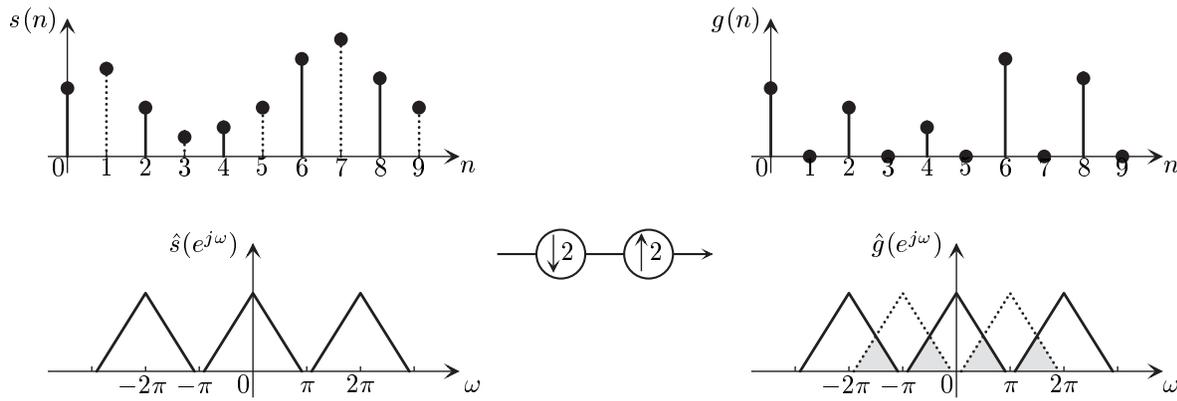


Abbildung 4.4: Die Unterabtastung des Signals $s(n)$ gefolgt von Überabtastung setzt die ungeradzahigen Abtastwerte der Originalsequenz zu null. Im allgemeinen beinhaltet das Spektrum der dezimierten und expandierten Sequenz, hier grau gekennzeichnet, Aliasingdefekte und eine um π verschobene Kopie des Originalspektrums, die hier gestrichelt dargestellt ist.

Analysefilterbank gegen ein Filter und eine $2^{N_{\text{kas}}}$ -fache Dezimation ausgetauscht werden können. Es ist

$$\underbrace{(\downarrow 2)\hat{h}(z)}_{N_{\text{kas}} \cdot \text{Kaskade}} \cdots \underbrace{(\downarrow 2)\hat{h}(z)}_{1. \text{Kaskade}} = (\downarrow 2^{N_{\text{kas}}}) \hat{h}(z) \cdots \hat{h}(z^{2^{(N_{\text{kas}}-1)}}) = (\downarrow 2^{N_{\text{kas}}}) \prod_{i=0}^{N_{\text{kas}}-1} \hat{h}(z^{2^i}). \quad (4.44)$$

Durch die Anwendung der Gleichung (4.43) können N_{kas} aufeinanderfolgende Expander/Filter-Kaskaden einer Synthesefilterbank durch eine $2^{N_{\text{kas}}}$ -fache Überabtastung und ein Filter ersetzt werden. Hier gilt

$$\underbrace{\hat{h}(z)(\uparrow 2)}_{N_{\text{kas}} \cdot \text{Kaskade}} \cdots \underbrace{\hat{h}(z)(\uparrow 2)}_{1. \text{Kaskade}} = \hat{h}(z) \cdots \hat{h}(z^{2^{(N_{\text{kas}}-1)}})(\uparrow 2^{N_{\text{kas}}}) = \left(\prod_{i=0}^{N_{\text{kas}}-1} \hat{h}(z^{2^i}) \right) (\uparrow 2^{N_{\text{kas}}}). \quad (4.45)$$

Die Beziehungen (4.44) und (4.45) und die in ihnen auftretenden Produktfilter sind im für den im Abschnitt 4.7.1 diskutierten Kaskadenalgorithmus von Bedeutung.

4.3.2 Analyse- und Synthesefilterbänke

Die bisher in diesem Kapitel entwickelten Zusammenhänge erlauben nun die Formulierung der Abhängigkeit des Ausgangssignals $s'(n)$ vom Eingangssignal $s(n)$ der in Abbildung 4.1 dargestellten Filterbank in Zeit-, Frequenz- und z -Domäne. Die Analysefilterbank überführt die Eingangssequenz $s(n)$ in die Tief- und Hochpaßsequenzen

$$g_0(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_0(m)s(2n \Leftrightarrow m), \quad (4.46)$$

$$g_1(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_1(m)s(2n \Leftrightarrow m). \quad (4.47)$$

die jeweils eine Toeplitz-Struktur in Blöcken aufweisen und durch das Transformationspaar

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{S}\mathbf{g} \quad (4.53)$$

eine kompakte Formulierung des Zerlegungs- und Rekonstruktionsprozesses eines Analyse/Synthesefilterbankpaares erlauben. Dabei beinhaltet der Vektor \mathbf{g} die Hoch- und Tiefpaßtransformationskoeffizienten alternierend in zeitlicher Abfolge.

In der z -Domäne kann das Filterbankpaar aus Abbildung 4.1 unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.31) und (4.35) durch

$$\hat{s}'(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{h}_0(z) & \hat{h}_1(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_0(z) & \hat{h}_0(\Leftrightarrow z) \\ \hat{h}_1(z) & \hat{h}_1(\Leftrightarrow z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}(z) \\ \hat{s}(\Leftrightarrow z) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

beschrieben werden. Die Matrix in Gleichung (4.54) wird als Modulationsmatrix \mathbf{H}_m bezeichnet. Sie ist für die Filterbankeigenschaften der Orthonormalität und der perfekten Rekonstruktionsfähigkeit von wichtiger Bedeutung, wie im folgenden Abschnitt deutlich wird.

Multipliziert man die Gleichung (4.54) aus und beschränkt die komplexe Variable z auf den Einheitskreis $|z| = 1$, so ist anhand der Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{s}'(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2} \left(\hat{h}_0(e^{j\omega})\tilde{h}_0(e^{j\omega}) + \hat{h}_1(e^{j\omega})\tilde{h}_1(e^{j\omega}) \right) \hat{s}(e^{j\omega}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\hat{h}_0(e^{j\omega})\tilde{h}_0(e^{j(\omega-\pi)}) + \hat{h}_1(e^{j\omega})\tilde{h}_1(e^{j(\omega-\pi)}) \right) \hat{s}(e^{j(\omega-\pi)}) \end{aligned} \quad (4.55)$$

erkennbar, daß sich das Spektrum des Ausgangssignals $\hat{s}'(e^{j\omega})$ aus dem gefilterten Spektrum des Eingangssignals $\hat{s}(e^{j\omega})$ und dem gefilterten Aliasspektrum $\hat{s}(e^{j(\omega-\pi)})$ zusammensetzt. Der Aliasterm ist dabei unerwünscht. Er soll durch die kombinierten Filteroperationen in Analyse- und Synthesefilterbank unterdrückt werden. Grundsätzlich existieren dabei verschiedene Möglichkeiten, Abhängigkeiten zwischen den vier Filtern zu definieren, die ein Aliasing vermeiden. Der erste Ansatz, der zu reellwertigen Filtern gleicher Länge in Analyse- und Synthesefilterbank führte, wurde von Esteban und Galand in [86] vorgeschlagen. Sie wählten die Beziehung

$$h_1(n) = (\Leftrightarrow 1)^n h_0(n), \quad (4.56)$$

oder, äquivalent hierzu, im z - und Frequenzbereich

$$\hat{h}_1(z) = \hat{h}_0(\Leftrightarrow z), \quad (4.57)$$

$$\hat{h}_1(e^{j\omega}) = \hat{h}_0(e^{j(\omega-\pi)}), \quad (4.58)$$

zwischen Hoch- und Tiefpaßfilter der Analysefilterbank. Die Filter der Synthesebank bestimmten sie zu

$$\tilde{h}_0(n) = h_0(n), \quad \tilde{h}_1(n) = \Leftrightarrow h_1(n) \quad (4.59)$$

mit den Spektraldarstellungen

$$\hat{h}_0(z) = \hat{h}_0(z), \quad \hat{h}_1(z) = \hat{\leftrightarrow} \hat{h}_0(z), \quad (4.60)$$

$$\hat{h}_0(e^{j\omega}) = \hat{h}_0(e^{j\omega}), \quad \hat{h}_0(e^{j\omega}) = \hat{\leftrightarrow} \hat{h}_0(e^{j\omega}), \quad (4.61)$$

damit Aliasingterme im rekonstruierten Signal ausgeschlossen werden können. Substituiert man in der Gleichung (4.58) $\omega \rightarrow \pi/2 \hat{\leftrightarrow} \omega$, so gilt für die symmetrischen Spektren der Analysefilter

$$|\hat{h}_1(e^{j(\pi/2-\omega)})| = |\hat{h}_0(e^{j(\pi/2+\omega)})|. \quad (4.62)$$

Damit ergibt sich $|\hat{h}_1(e^{j(\omega)})|$ aus $|\hat{h}_0(e^{j(\omega)})|$ durch eine Spiegelung an der Frequenz $\pi/2$. Paare reellwertiger Hoch- und Tiefpaßfilter, die die Bedingung (4.56) erfüllen, werden aufgrund der Eigenschaft (4.62) als Quadratur-Spiegel-Filter bezeichnet.

Neben der Unterdrückung von Aliasingeffekten wird mit dem Synthesevorgang eine perfekte Rekonstruktion des Signals $s(n)$ angestrebt. Für die synthetisierte Sequenz soll deshalb

$$s'(n) = s(n \hat{\leftrightarrow} L) \quad (4.63)$$

oder

$$\hat{s}'(z) = \hat{s}(z)z^{-L} \quad (4.64)$$

gelten, wobei L die Signalverzögerung als Konsequenz der Filterkausalität kennzeichnet. Wählt man Quadratur-Spiegel-Filter entsprechend den Gleichungen (4.57) und (4.60), so folgt aus der Gleichung (4.54), daß zur Gewährleistung der perfekten Signalrekonstruktion die Bedingung

$$\hat{h}_0^2(z) \hat{\leftrightarrow} \hat{h}_0^2(\hat{\leftrightarrow} z) = 2z^{-L} \quad (4.65)$$

an das Tiefpaßfilter gestellt werden muß [22]. Diese zusätzliche Einschränkung kann von FIR-Filtern nur für eine Länge $N + 1 = 2$ erfüllt werden, was eine zu große Restriktion für die Gestaltung leistungsfähiger Filterbänke darstellt. Im folgenden Abschnitt werden andere Abhängigkeiten zwischen den Analyse- und Synthesefiltern angenommen, die ebenfalls Aliasing vermeiden und eine perfekte Signalrekonstruktion ermöglichen. Die hieraus entstehenden Filterbänke beinhalten vorteilhaftere FIR-Filter und erlauben unter Berücksichtigung der zusätzlichen Regularitätsbedingung die Konstruktion von biorthogonalen Wavelets.

4.4 Perfekt rekonstruierende Filterbänke

Um nach der Signalanalyse und -synthese mit einer Filterbankkombination, wie sie in der Abbildung 4.1 dargestellt ist, eine perfekt rekonstruierte Sequenz $s'(n) = s(n \hat{\leftrightarrow} L)$ zu erhalten, sind als Konsequenz aus den Gleichungen (4.54) und (4.64)

- die Anti-Aliasing-Bedingung

$$\hat{h}_0(z)\hat{h}_0(\Leftrightarrow z) + \hat{h}_1(z)\hat{h}_1(\Leftrightarrow z) = 0, \quad (4.66)$$

- die Anti-Verzerrungs-Bedingung

$$\hat{h}_0(z)\hat{h}_0(z) + \hat{h}_1(z)\hat{h}_1(z) = 2z^{-L} \quad (4.67)$$

einzuhalten. Damit ergibt sich die folgende Definition für perfekt rekonstruierende Filterbankpaare.

Definition 4.4.1 (perfekt rekonstruierende Filterbankkombination)

Eine Kombination von Analysefilterbank und Synthesefilterbank, deren Analysefilterbank die reellwertigen FIR-Filter $h_0(n)$ mit Tiefpaßcharakteristik und $h_1(n)$ mit Hochpaßcharakteristik beinhaltet und deren Synthesefilterbank sich aus den ebenfalls reellwertigen Tief- und Hochpaß-FIR-Filtern $\tilde{h}_0(n)$, $\tilde{h}_1(n)$ zusammensetzt, rekonstruiert eine Eingangssequenz $s(n)$ durch die Ausgangssequenz $s'(n) = s(n \Leftrightarrow L)$ perfekt, falls die Anti-Aliasing-Bedingung (4.66) und die Anti-Verzerrungs-Bedingung (4.67) eingehalten werden. Die Filterbänke, sowie die mit ihnen assoziierten Analyse- und Synthesematrizen werden dann als biorthogonal zueinander bezeichnet.

Die Abhängigkeiten (4.66) und (4.67) bestimmen die vier zu dimensionierenden Filter nicht eindeutig. Ein möglicher leistungsfähiger Ansatz [22, 84, 87] zur Aliasing-Unterdrückung ist die Wahl

$$\tilde{h}_0(z) = \hat{h}_1(\Leftrightarrow z), \quad (4.68)$$

$$\tilde{h}_1(z) = \Leftrightarrow \hat{h}_0(\Leftrightarrow z). \quad (4.69)$$

Hierdurch läßt sich die Bedingung (4.66) einhalten. Definiert man unter Berücksichtigung dieser Filterabhängigkeiten die Tief- und Hochpaßproduktfilter

$$\hat{p}_0(z) = \hat{h}_0(z)h_0(z), \quad (4.70)$$

$$\hat{p}_1(z) = \hat{h}_1(z)h_1(z) = \Leftrightarrow \hat{p}_0(\Leftrightarrow z), \quad (4.71)$$

so läßt sich die noch zu erfüllende Anti-Verzerrungs-Bedingung durch

$$\hat{p}_0(z) \Leftrightarrow \hat{p}_0(\Leftrightarrow z) = 2z^{-L} \quad (4.72)$$

beschreiben. Mit der Zentrierung $\hat{p}(z) = z^L \hat{p}_0(z)$ wird das Tiefpaßproduktfilter in ein sogenanntes FIR-Halbbandfilter mit $\hat{p}(e^{j\omega}) = \hat{p}(e^{-j\omega})$ und $\hat{p}(e^{j\omega}) + \hat{p}(e^{j(\omega-\pi)}) = 2$ überführt [88]. Halbbandfilter haben eine rein reellwertige symmetrische Impulsantwort

$$p(n) = p(\Leftrightarrow n) \quad (4.73)$$

mit

$$p(2n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}. \quad (4.74)$$

Die Anti-Verzerrungs-Bedingung läßt sich somit in Abhängigkeit des Halbbandfilters durch

$$\hat{p}(z) + \hat{p}(\leftrightarrow z) = 2 \quad (4.75)$$

vorteilhafter formulieren. Die Länge $2L + 1$ von $p(n)$ bestimmt die Summe der Filterlängen von $h_0(n)$ und $\tilde{h}_0(n)$ und die Signalverzögerung L . Die L ungeradzahligen Koeffizienten $p(2n \leftrightarrow 1) = p(\leftrightarrow(2n \leftrightarrow 1))$, $n = 1, 2, \dots, L$ sind dabei die Entwurfsvariablen des Halbbandfilters.

Die Gestaltung von zueinander biorthogonalen Filterbänken läßt sich somit in vier Konstruktionsschritte gliedern:

1. Entwurf eines Halbbandfilters $\hat{p}(z)$ der Länge $2L+1$ entsprechend der Gleichung (4.75).
2. Zuordnung des um z^L verschobenen Halbbandfilters zum Tiefpaßproduktfilter $\hat{p}_0(z) = z^{-L}\hat{p}(z)$.
3. Faktorisierung des Tiefpaßproduktfilters in Analyse- und Synthesetiefpaßfilter $\hat{p}_0(z) = \hat{h}_0(z)\hat{h}_0(z)$.
4. Bestimmung der Hochpaßfilter $\hat{h}_1(z), \hat{h}_1(z)$ über die Anti-Aliasing-Bedingungen (4.68) und (4.69).

Dieser Entwicklungsprozeß biorthogonaler Filterbänke beinhaltet Freiheitsgrade bei der Wahl der Signalverzögerung, des Halbbandfilters und bei dessen Faktorisierung, die zum Erreichen verschiedenster Ziele genutzt werden können. In [84, 89–92] werden die Auswirkungen zusätzlich gestellter Randbedingungen diskutiert. Die weitreichendere Forderung der Orthonormalität stellt ebenfalls zusätzliche Bedingungen an die Abhängigkeiten der Filter, diese sollen im folgenden Abschnitt dargelegt werden.

4.5 Orthonormale Filterbänke

Die mit orthonormalen Signalzerlegungen verbundenen Konditionen in der Zeitdomäne werden anhand der in Gleichung (4.50) dargestellten Analysematrix \mathbf{A} deutlich. Soll die Analysefilterbank eine Sequenz $s(n) \in l^2(\mathbb{Z})$ in orthonormale Komponenten zerlegen, die eine Basis des $l^2(\mathbb{Z})$ bilden, so muß die Analysematrix \mathbf{A} eine orthonormale Matrix mit

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad (4.77)$$

sein. Formuliert man diese Bedingungen in Abhängigkeit der Elemente der Matrix $\mathbf{A}' = [(\mathbf{DH}_0)^T \ (\mathbf{DH}_1)^T]^T$, die die Tief- und Hochpaßfilterung einer Sequenz gefolgt von Unterabtastung beschreiben, so ist

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{DH}_0)^T & (\mathbf{DH}_1)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{DH}_0 \\ \mathbf{DH}_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{DH}_0)^T (\mathbf{DH}_1)^T + \mathbf{DH}_0 \mathbf{DH}_1 = \mathbf{I}, \quad (4.78)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{DH}_0 \\ \mathbf{DH}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{DH}_0)^T & (\mathbf{DH}_1)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{DH}_0 (\mathbf{DH}_0)^T & \mathbf{DH}_0 (\mathbf{DH}_1)^T \\ \mathbf{DH}_1 (\mathbf{DH}_0)^T & \mathbf{DH}_1 (\mathbf{DH}_1)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Für die Filterkoeffizienten ergibt sich hieraus

$$\mathbf{DH}_0 (\mathbf{DH}_0)^T = \mathbf{I} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) h_0(n+2m) = \delta(m), \quad (4.80)$$

$$\mathbf{DH}_0 (\mathbf{DH}_1)^T = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n) h_1(n+2m) = 0, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{DH}_1 (\mathbf{DH}_1)^T = \mathbf{I} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n) h_1(n+2m) = \delta(m). \quad (4.82)$$

Demnach müssen die Tief- und Hochpaßbasisvektoren zueinander und zu ihren geradzahigen Translationen orthonormal sein. Eine unmittelbare Konsequenz dieser Forderungen ist, daß die Filter nur eine geradzahlig Koeffizientenanzahl haben können.

Prinzipiell existieren auch hier verschiedene Möglichkeiten zur Gestaltung orthonormaler dezimierter Filterpaare. Der unter anderem in [93–96] gewählte Ansatz

$$h_1(n) = (\Leftrightarrow 1)^n h_0(N \Leftrightarrow n), \quad (4.83)$$

bei dem das Hochpaßfilter aus dem Tiefpaßfilter durch Vorzeichenalternation, zeitliche Spiegelung und Verschiebung abgeleitet wird, hat sich als besonders vorteilhaft herausgestellt. Filter, die der Gleichung (4.83) genügen, erfüllen ebenfalls die Quadratur-Spiegel-Bedingung (4.62). Beinhaltet die Hochpaßfiltergestaltung neben der Multiplikation mit $(\Leftrightarrow 1)^n$ die zeitlichen Spiegelung und die Translation des Tiefpaßfilters $h_0(n) \rightarrow h_0(N \Leftrightarrow n)$ als zusätzlichen Modifikationen, so ist das erzeugte Filterpaar der Klasse der konjugierten Quadratur-Spiegel-Filter zugehörig. Mit dieser Abhängigkeit zwischen $h_0(n)$ und $h_1(n)$ wird die Gleichung (4.81) erfüllt, und die Konditionen (4.80) und (4.82) sind gleichwertig. Die Orthonormalitätsanforderung an eine Analyse/Synthese-Filterbankkombination reduziert sich damit auf die einzige Bedingung (4.80). Mit der Synthesematrix $\mathbf{S} = \mathbf{T}^N \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T}^N \mathbf{A}^T$ als translatierte Inverse der Analysematrix, oder hiermit korrespondierend den Synthesefiltern als verschobene zeitlich gespiegelte Analysefilter

$$\tilde{h}_0(n) = h_0(N \Leftrightarrow n), \quad (4.84)$$

$$\tilde{h}_1(n) = h_1(N \Leftrightarrow n), \quad (4.85)$$

ist somit eine perfekte Signalrekonstruktion auf der Basis orthonormaler Komponenten möglich.

Zu beachten ist ferner, daß der Ansatz (4.83) im Kontext der Multi-Skalen-Analyse ebenfalls als Abhängigkeitsbedingung zwischen Tief- und Hochpaßfiltern existiert, so daß sich über diese Parallele ein Zusammenhang zwischen den hier diskutierten orthonormalen Filterbänken und orthonormalen Wavelets ergibt.

Vergleicht man die Orthonormalitätsbedingung (4.80) mit der Korrelationsdefinition (4.4), so ist erkennbar, daß zur Realisation einer orthonormalen Filterbank die Anforderung

$$R_{h_0 h_0}^E(2n) = h_0(2n) \star h_0(2n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases} \quad (4.86)$$

an die Autokorrelationssequenz $R_{h_0 h_0}^E(n)$ des Tiefpaßfilters gestellt werden muß. Da Autokorrelationssequenzen reellwertig und symmetrisch sind, erfüllt $R_{h_0 h_0}^E(n)$ die Gleichungen (4.73) und (4.74) und stellt damit formal die Impulsantwort eines Halbbandfilters dar. In Abhängigkeit der z -Transformierten

$$\hat{R}_{h_0 h_0}^E(z) = \hat{h}_0(z) \hat{h}_0(z^{-1}) = |\hat{h}_0(z)|^2 \quad (4.87)$$

und des Energiedichtespektrums

$$\hat{R}_{h_0 h_0}^E(e^{j\omega}) = \hat{h}_0(e^{j\omega}) \hat{h}_0(e^{-j\omega}) = |\hat{h}_0(e^{j\omega})|^2 \quad (4.88)$$

als Fourier-Transformierte der Autokorrelationssequenz läßt sich die Orthonormalitätsbedingung auch alternativ zu (4.80) durch

$$|\hat{h}_0(z)|^2 + |\hat{h}_0(\Leftrightarrow z)|^2 = 2, \quad (4.89)$$

$$|\hat{h}_0(e^{j\omega})|^2 + |\hat{h}_0(e^{j(\omega+\pi)})|^2 = 2 \quad (4.90)$$

formulieren. Ersetzt man $|\hat{h}_0(e^{j(\omega+\pi)})|^2$ entsprechend Gleichung (4.83) durch $|\hat{h}_1(e^{j\omega})|^2$, so gilt

$$|\hat{h}_0(e^{j\omega})|^2 + |\hat{h}_1(e^{j\omega})|^2 = 2. \quad (4.91)$$

Damit sind Tief- und Hochpaßfilter einer orthogonalen Filterbank zueinander leistungskomplementär [84].

Auf der Basis der angestellten Überlegung soll die folgende Definition einer orthonormalen FIR-Filterbank getroffen werden.

Definition 4.5.1 (orthonormale FIR-Filterbänke)

Eine orthonormale Analysefilterbank mit reellwertigem FIR-Tiefpaßfilter $h_0(n)$ der geraden Länge $N + 1$ und dazu leistungskomplementärem Hochpaßfilter $h_1(n)$ nach Gleichung (4.83) zerlegt eine Eingangsequenz in orthonormale Komponenten, falls die Autokorrelationssequenz des Tiefpaßfilters entsprechend der Bedingung (4.86) nur für $n = 0$ und ungerade n von null verschiedene Werte annimmt. Die Filter der zugehörigen orthonormalen Synthesefilterbank ergeben sich dann aus den Analysefiltern durch zeitliche Spiegelung und Translation zu $\tilde{h}_0(n) = h_0(N \Leftrightarrow n)$, $\tilde{h}_1(n) = h_1(N \Leftrightarrow n)$.

Der Konstruktionsprozeß orthonormaler Filterbänke gliedert sich wie im Fall biorthogonaler Filterbänke prinzipiell ebenfalls in vier Schritte. Im Unterschied zu den biorthogonalen Filterbänken wird allerdings im ersten Schritt ein Halbbandfilter mit einer Impulsantwort benötigt, welche die Eigenschaften einer Autokorrelationssequenz aufweist. Hieraus folgt unter anderem die wichtige Bedingung $\hat{p}(e^{j\omega}) \geq 0$, welche für biorthogonale Filterbänke nicht eingehalten werden muß. Ein weiterer Unterschied ergibt sich bei der Faktorisierung des Halbbandfilters. Für orthonormale Filterbänke ist $\hat{p}(z) = \hat{h}_0(z)\hat{h}_0(z^{-1})$ mit $\hat{h}_0(z) = \hat{h}_0(z^{-1})$. Die Hochpaßfilter einer orthonormalen Filterbank können alternativ zur Bestimmung über die Anti-Aliasing-Bedingungen auch über den Zusammenhang (4.83) ermittelt werden.

Neben der Orthonormalität einer Transformation ist die Linearphasigkeit ihrer Basisvektoren ein vorteilhaftes und insbesondere in der Bildverarbeitung vorteilhaftes Merkmal. Beide Filterbankeigenschaften können allerdings bei FIR-Filtern nicht nebeneinander existieren, da die mit der Linearphasigkeit verbundene Filtersymmetrie im Widerspruch zur Orthogonalität zwischen Filtern mit einer geradzahigen Länge $N + 1 > 2$ steht [22]. Damit ist das Haar-Filterpaar mit $\hat{h}_0(z) = (1/\sqrt{2})(1 + z^{-1})$ und $\hat{h}_1(z) = (1/\sqrt{2})(1 - z^{-1})$ das einzige FIR-Filterpaar, das zu einer linearphasigen orthonormalen Signalzerlegung führt. Filter aus biorthogonalen Filterbänken können dagegen linearphasig sein. Die linearphasigen Analysefilter sind dann beide symmetrisch und von ungeradzahiger Länge oder symmetrisch und antisymmetrisch und von geradzahiger Länge.

4.6 Die Multi-Skalen-Analyse

Das Konzept der Multi-Skalen-Analyse als angepaßtes Analyseverfahren zur Betrachtung von Signalbestandteilen unterschiedlicher Auflösung geht aus den Arbeiten von S. Mallat und Y. Meyer Ende der achtziger Jahre dieses Jahrhunderts hervor [15, 66, 67, 69, 97, 98]. Dieses Analyseverfahren zerlegt Signale durch Projektion in dyadisch verschachtelte Funktionenräume \mathcal{A}_l , die jeweils eine Approximation

$$s_{\text{app};l}(t) = \mathcal{A}_l\{s(t)\}(t) \quad (4.92)$$

des analysierten Signals $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit einer durch den Index l gekennzeichneten Auflösung beinhalten. Das Approximationssignal $s_{\text{app};l}(t)$ charakterisiert somit $s(t)$ bezüglich einer diskreten Auflösungsstufe, die hier durch die Skala S_l gekennzeichnet ist. Die Auflösungsstufen sind dabei in Oktaven gestaffelt, und es werden mit fallenden Skalenwert $S_l = 2^{-l}$ detailgetreuere Auflösungen assoziiert. Definiert man neben der Approximationsraumkaskade $\{\mathcal{A}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ eine Unterraumfolge $\{\mathcal{D}_l : l \in \mathbb{Z}\}$, deren einzelne Detailräume \mathcal{D}_l sich als orthogonale Komplemente zu den Approximationsräumen \mathcal{A}_l gleicher Auflösung in den Approximationsräumen \mathcal{A}_{l+1} nächst höherer Auflösung ergeben, so beschreibt das Detailsignal

$$s_{\text{det};l}(t) = \mathcal{D}_l\{s(t)\}(t) \quad (4.93)$$

als Projektion des Signals $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ in den Unterraum \mathcal{D}_l den Detailgehalt von $s(t)$ bei der Skala S_l . Die Signaldetails einer Auflösungsstufe können so als Informationsdifferenz zweier aufeinanderfolgender Approximationen gedeutet werden. Fügt man einer groben Signalapproximation $s_{\text{app};l}(t)$ Detailinformationen $s_{\text{det};l}(t)$ hinzu, so ergibt sich eine feinere Approximation $s_{\text{app};l+1}(t) = s_{\text{app};l}(t) + s_{\text{det};l}(t)$.

Sowohl die Approximationsraumkaskade $\{\mathcal{A}_l : l \in \mathbb{Z}\}$, als auch die Detailraumfolge $\{\mathcal{D}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ sind Bestandteile der Multi-Skalen-Analyse. Beide mit ihnen korrespondierenden Signalzerlegungsverfahren haben Vorteile, die sie für verschiedene Anwendungsgebiete empfehlen. Zu beachten ist, daß sich $\{\mathcal{D}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ als Konsequenz aus $\{\mathcal{A}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ ergibt. Damit übertragen sich Eigenschaften der Approximationsräume auf die Detailräume, so daß deren erwünschte Merkmale im Konstruktionsprozeß der Approximationsunterräume berücksichtigt werden müssen. Der Zusammenhang zwischen der Multi-Skalen-Analyse und der Wavelet-Theorie ergibt sich dabei über die Basisfunktionen der Detailräume \mathcal{D}_l . Diese sind Wavelets, die der Definition 3.4.2 genügen, falls die mit $\{\mathcal{D}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ assoziierte Multi-Skalen-Analyse bestimmte Bedingungen erfüllt. Da die Approximationsräume $\{\mathcal{A}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ bestimmend für die Eigenschaften der Multi-Skalen-Analyse sind, soll zunächst die Multi-Skalen-Approximation des $L^2(\mathbb{R})$ diskutiert werden, um im dann folgenden Abschnitt 4.6.2 auf die mit der Multi-Skalen-Analyse verbundene Konstruktion orthonormaler Wavelet-Funktionensysteme einzugehen.

4.6.1 Die Multi-Skalen-Approximation von Signalen

Die Abbildung $\mathcal{A}_l : L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{A}_l$ approximiert das Signal $s(t)$ durch $s_{\text{app};l}(t) = \mathcal{A}_l\{s(t)\}(t)$. Die Multi-Skalen-Approximation von Signalen aus $L^2(\mathbb{R})$ soll anhand dieser Abbildung definiert werden. Ziel der Definition ist es, eine Multi-Skalen-Analyse zu erzeugen, deren Detailräume durch Wavelets aufgespannt werden. Zum Erreichen dieses Ziels sind die folgenden sechs Bedingungen durch die Abbildung \mathcal{A}_l beziehungsweise durch die Elemente der Menge $\{\mathcal{A}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ zu erfüllen [15, 22, 99]:

1. Die Abbildung \mathcal{A}_l ist eine lineare Projektion mit

$$\mathcal{A}_l \mathcal{A}_l = \mathcal{A}_l \quad (4.94)$$

in den Unterraum $\mathcal{A}_l \subset L^2(\mathbb{R})$. Damit kann der Approximationsraum \mathcal{A}_l als die Menge aller möglichen Approximationen von Signalen aus $L^2(\mathbb{R})$ bei der Auflösungsstufe S_l aufgefaßt werden.

2. Die Abbildung \mathcal{A}_l projiziert ein Signal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ orthogonal in \mathcal{A}_l . Demnach gilt für jedes Signal $s_1(t) \in \mathcal{A}_l$, daß

$$\|s_1(t) \leftrightarrow s(t)\| \geq \|s_{\text{app};l}(t) \leftrightarrow s(t)\| \quad (4.95)$$

ist.

3. Die Approximation des Signals bei der Auflösungsstufen S_{l+1} beinhaltet alle Informationen zur Berechnung der Approximation bei der nächst niedrigeren Auflösung S_l . Damit gilt für alle $l \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_{l+1}. \quad (4.96)$$

4. Alle Signale, die sich in einem Approximationsraum befinden werden durch die dyadische Skalierung $S_l = 2^{-l}$ in die Signale überführt, welche sich in einem anderen Approximationsraum befinden. Damit gilt für alle $l \in \mathbb{Z}$

$$s(t) \in \mathcal{A}_l \Leftrightarrow s(2t) \in \mathcal{A}_{l+1} \quad (4.97)$$

5. Die Approximation $s_{\text{app};l}(t)$ eines Signals $s(t)$ kann durch $S_l^{-1} = 2^l$ Abtastwerte pro Einheitsintervall beschrieben werden. Eine Translation von $s(t)$ um Vielfache von 2^{-l} bewirkt dabei eine identische Translation von $s_{\text{app};l}(t)$, wobei die translatierte Approximation durch dieselben aber verschobenen Abtastwerte charakterisiert wird wie $s_{\text{app};l}(t)$. Demnach existiert eine als diskrete Approximation bezeichnete isomorphe Abbildung $\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(l)} : \mathcal{A}_l \mapsto l^2(\mathbb{Z})$ mit

$$\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(l)}\{s_{\text{app};l}(t)\}(k) = v_l(k), \quad (4.98)$$

die der Signalapproximation $s_{\text{app};l}(t)$ umkehrbar eindeutig eine korrespondierende Approximationssequenz $v_l(k)$ zuordnet. Für alle Translationen der Approximation um $k'2^{-l}$ mit $k' \in \mathbb{Z}$ gilt dann

$$\mathcal{A}_l\{s(t \Leftrightarrow k'2^{-l})\}(t) = \mathcal{A}_l\{s(t)\}(t \Leftrightarrow k'2^{-l}), \quad (4.99)$$

und für alle entsprechenden Translationen der diskreten Approximationsbeschreibung

$$\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(l)}\{s_{\text{app};l}(t)\}(k) = v_l(k) \Leftrightarrow \mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(l)}\{s_{\text{app};l}(t \Leftrightarrow k'2^{-l})\}(k) = v_l(k \Leftrightarrow k'). \quad (4.100)$$

6. Mit steigender Auflösung $l \rightarrow \infty$ soll das Approximationssignal $s_{\text{app};l}(t)$ gegen das Originalsignal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ konvergieren. Für grober werdende Auflösungen $l \rightarrow \Leftrightarrow \infty$ soll $s_{\text{app};l}(t)$ gegen Null konvergieren. Es ist somit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mathcal{A}_l = \overline{\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_l} = L^2(\mathbb{R}) \quad (4.101)$$

und

$$\lim_{l \rightarrow -\infty} \mathcal{A}_l = \bigcap_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_l = \{0\}, \quad (4.102)$$

wobei $\overline{\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_l}$ die Vereinigungsmenge und $\bigcap_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_l$ die Schnittmenge aller Approximationsräume kennzeichnet.

Eine Menge von Unterräumen $\{\mathcal{A}_l : l \in \mathbb{Z}\}$ des $L^2(\mathbb{R})$, die diese Bedingungen erfüllt, wird als Multi-Skalen-Approximation des $L^2(\mathbb{R})$ bezeichnet [15]. Die mit dem jeweiligen Approximationsraum korrespondierende Abbildung \mathcal{A}_l erzeugt dann, angewendet auf $s(t)$ die Approximation dieses Signals bei der Auflösungsskala S_l .

Für jeden Unterraum \mathcal{A}_l einer Multi-Skalen-Approximation des $L^2(\mathbb{R})$ existiert eine orthogonale Basis

$$\left\{ \phi_{k,l}(t) = \sqrt{2^l} \phi(2^l t \Leftrightarrow k) : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (4.103)$$

die durch Translation und dyadische Dilatation eines als Skalierungsfunktion bezeichneten Prototypen $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\|\phi(t)\|^2 = 1$ erzeugt wird. Eine solche Skalierungsfunktion ist eindeutig, so daß mit jeder Multi-Skalen-Analyse genau eine Skalierungsfunktion assoziiert werden kann, die wiederum die Multi-Skalen-Analyse vollständig charakterisiert. Ferner weist eine Skalierungsfunktion eine Tiefpaßcharakteristik mit

$$\hat{\phi}(0) = 1 \quad (4.104)$$

und

$$\hat{\phi}(2\pi) = \hat{\phi}(4\pi) = \hat{\phi}(8\pi) = \dots = 0 \quad (4.105)$$

auf. Damit läßt sich die orthogonale Projektion eines Signals $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ in den Unterraum \mathcal{A}_l durch die Signalentwicklung in die korrespondierende Basis beschreiben. Die Entwicklungskoeffizienten als Elemente der Approximationssequenz $v_l(k)$ berechnen sich dabei durch Innere-Produkt-Bildung des Signals mit diesen Basisfunktionen. Diese Operation beschreibt genau die im Definitionspunkt 5 der Multi-Skalen-Approximation geforderte diskrete Approximationsabbildung $\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(l)}$, die angewendet auf $s(t) \in \mathcal{A}_l$ isomorph ist. Für eine Anwendung auf $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(l)}\{s(t)\}(k) = \langle s(t), \phi_{k,l}(t) \rangle = v_l(k). \quad (4.106)$$

Die Signalapproximation bei der Skala S_l ist demnach durch

$$s_{\text{app};l}(t) = \mathcal{A}_l\{s(t)\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_l(k) \phi_{k,l}(t) \quad (4.107)$$

beschreibbar.

Als Konsequenz aus den Punkten 3 und 5 lassen sich die Entwicklungskoeffizienten der Approximationsstufen S_l mit $l < 0$ aus der Approximationssequenz $v_0(k)$ der Skala $S_0 = 1$ berechnen. Grundlage dieses iterativen Berechnungsalgorithmus ist die Beschreibung der Basisfunktionen des Unterraums $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1$ als Linearkombinationen der Basisfunktionen des nächst übergeordneten Approximationsraums \mathcal{A}_1 durch die Skalierungsgleichung

$$\phi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} h_{\phi}(k) \phi(2t \Leftrightarrow k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\phi}(k) \phi_{k,1}(t). \quad (4.108)$$

Die reellwertigen Koeffizienten aus der Sequenz $h_\phi(n)$ ergeben sich als Folge aus Gleichung (4.108) eindeutig zu

$$h_\phi(n) = \langle \phi(t), \phi_{n,1}(t) \rangle = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(2t \Leftrightarrow n) dt \quad (4.109)$$

mit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_\phi(n)|^2 = 1 \quad (4.110)$$

und werden als Interskalenkoeffizienten bezeichnet [84]. Zu beachten ist hier, daß sich die Orthonormalitätsbedingung für die Skalierungsfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi(t \Leftrightarrow m) dt = \delta(m) \quad (4.111)$$

durch Berücksichtigung der Skalierungsgleichung (4.108) auf den von den Interskalenkoeffizienten zu erfüllenden Zusammenhang

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\phi(n) h_\phi(n \Leftrightarrow 2m) = \delta(m) \quad (4.112)$$

überträgt. Vergleicht man Gleichung (4.112) mit der Bedingung (4.80), die von dem Analysetiefpaßfilter einer orthonormalen Filterbank eingehalten wird, so sind diese identisch.

Als Folgerung aus der Basisfunktionenbeschreibung des Approximationsraums \mathcal{A}_l durch die Basisfunktionen von \mathcal{A}_{l+1} , kann die diskrete Approximationssequenz $v_l(k)$ bei der Skala S_l somit durch

$$v_l(k) = \langle v_{l+1}(m), h_\phi(m \Leftrightarrow 2k) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{l+1}(m) h_\phi(m \Leftrightarrow 2k) \quad (4.113)$$

aus der diskreten Approximationssequenz $v_{l+1}(k)$ bei der Skala S_{l+1} berechnet werden. Ein Vergleich mit der Gleichung (4.46) zeigt, daß sich $v_l(k)$ als Resultat einer Faltung mit einem Filter der Impulsantwort $h_\phi(\Leftrightarrow n)$ und einer anschließenden Unterabtastung ergibt. Da $h_\phi(n)$ mit Gleichung (4.112) die Orthonormalitätsbedingung für Filterbänke erfüllt, sind ausgehend von der diskreten Approximationssequenz $v_0(k)$ alle diskreten Approximationen $v_l(k)$ mit $l < 0$ durch iterative Anwendung des Analysetiefpaßfilters $h_0(n) = h_\phi(\Leftrightarrow n)$ einer orthonormalen Filterbank berechenbar. Die Abbildung 4.5 zeigt die hiermit korrespondierende dyadische Filterbankstruktur. Welche Bedeutung bei diesem pyramidalen Transformationsalgorithmus dem Analysehochpaßfilter und den Hochpaßsequenzen $c_l(k)$ jeder Auflösungsstufe S_l mit $l < 0$ zukommt, wird im folgenden Abschnitt deutlich.

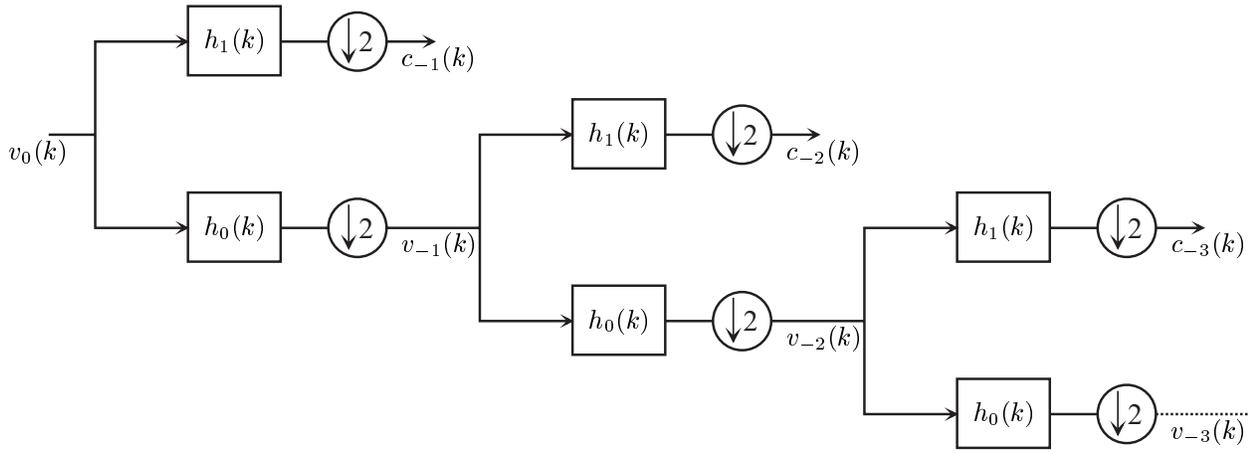


Abbildung 4.5: Die dyadische Filterbankanordnung zur iterativen Entwicklungskoeffizientenberechnung der diskreten Wavelet-Transformation. Ausgehend von der Approximationssequenz $v_0(k)$ bei der Skala S_0 werden die Transformationskoeffizienten- und die Approximationssequenzen $c_{-1}(k), c_{-2}(k), c_{-3}(k), \dots$ und $v_{-1}(k), v_{-2}(k), v_{-3}(k), \dots$ der größeren Skalen $S_{-1}, S_{-2}, S_{-3}, \dots$ durch iterative Anwendung des Analysefilterpaares $h_0(k), h_1(k)$ errechnet.

4.6.2 Die Signalzerlegung in Multi-Skalen-Details

Neben der Approximation eines Signals bezüglich einer Auflösung S_l ist in vielen Anwendungen der Detailgehalt $s_{\text{det};l}(t)$ bei dieser Auflösung von Interesse. Im Kontext einer Multi-Skalen-Analyse macht die Informationsdifferenz zweier aufeinanderfolgender Signalapproximationen $s_{\text{app};l}(t)$, $s_{\text{app};l+1}(t)$ genau diesen Detailgehalt aus. Das Detailsignal $s_{\text{det};l}(t)$ bei der Skala S_l bestimmt sich damit als orthogonale Projektion von $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ in den zu \mathcal{A}_l komplementären Unterraum von \mathcal{A}_{l+1} . Bei der Auflösung S_l gilt demnach für den Detailunterraum \mathcal{D}_l

$$\mathcal{A}_l \oplus \mathcal{D}_l = \mathcal{A}_{l+1} \quad (4.114)$$

mit

$$\mathcal{D}_l \perp \mathcal{D}_{l'} \quad \text{für } l \neq l'. \quad (4.115)$$

Dabei bezeichnet \oplus die orthogonale Summe und \perp die Orthogonalität zweier Funktionenräume. Aus den Vollständigkeitseigenschaften (4.101) der Approximationsraumfolge und der zu den Approximationsräumen einer Skala S_l komplementären und zueinander orthogonalen Komposition der Detailräume entsprechend Gleichung (4.114) und (4.115) folgen zwei alternative vollständige Zerlegungsmöglichkeiten des $L^2(\mathbb{R})$ in orthogonale Unterräume. Ausgehend von einem Approximationsraum \mathcal{A}_I kann durch sukzessives Hinzufügen von Detailräumen \mathcal{D}_l mit $l > I$ der gesamte Funktionenraum $L^2(\mathbb{R})$ aufgespannt werden. Es gilt

$$\mathcal{A}_I \oplus \left(\bigoplus_{l=I}^{\infty} \mathcal{D}_l \right) = L^2(\mathbb{R}). \quad (4.116)$$

Der Approximationsraum \mathcal{A}_I ist selbst ebenfalls durch eine direkte Summe von Detailräumen \mathcal{D}_l mit $l < I$ beschreibbar. Hieraus folgt

$$\bigoplus_{l=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_l = L^2(\mathbb{R}), \quad (4.117)$$

wobei das Symbol \bigoplus die orthogonale Summe mehrerer Funktionenräume kennzeichnet.

Für die so definierten Detailräume \mathcal{D}_l existiert analog zu (4.103) mit

$$\left\{ \psi_{k,l}(t) = \sqrt{2^l} \psi(2^l t \Leftrightarrow k) : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad (4.118)$$

eine orthonormale Basis, deren Elementarfunktionen sich aus translatierten Modifikationen des dilatierten Mother-Wavelets $\psi_{0,l}(t) = \sqrt{2^l} \psi(2^l t)$ ergeben. Das Detailsignal $s_{\text{det},l}(t)$ kann demnach durch eine Entwicklung von $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ in das Wavelet-Funktionensystem $\{\psi_{k,l}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ der Auflösungsstufen S_l beschrieben werden. Über die auf S_l beschränkte Wavelet-Transformation $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}^{(l)} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto l^2(\mathbb{Z})$ errechnet sich die Entwicklungskoeffizientensequenz dieser Auflösungsstufen zu

$$\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}^{(l)} \{s(t)\}(k) = \langle s(t), \psi_{k,l}(t) \rangle = c_l(k). \quad (4.119)$$

Die detailextrahierende Projektion $\mathcal{D}_l : L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{D}_l$ für die Skala S_l ist damit durch

$$s_{\text{det},l}(t) = \mathcal{D}_l \{s(t)\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_l(k) \psi_{k,l}(t) \quad (4.120)$$

beschreibbar.

Da jeder Detailraum \mathcal{D}_l nach Gleichung (4.114) ein Unterraum des übergeordneten Approximationsraums \mathcal{A}_{l+1} ist, lassen sich für alle Auflösungsstufen S_l die Basisfunktionen $\{\psi_{k,l}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ von \mathcal{D}_l als Linearkombinationen der Basisfunktionen $\{\phi_{k,l+1}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ von \mathcal{A}_{l+1} darstellen. Die Wavelet-Gleichung

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} h_{\psi}(k) \phi(2t \Leftrightarrow k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\psi}(k) \phi_{k,1}(t) \quad (4.121)$$

formuliert diesen Zusammenhang bei der Skala S_0 für das Mother-Wavelet $\psi(t)$ und liefert damit eine explizite Beschreibung von $\psi(t)$ in Abhängigkeit der Skalierungsfunktion $\phi(t)$. Die Intraskalenkoeffizienten $h_{\psi}(n)$ ergeben sich dabei aus den Interskalenkoeffizienten $h_{\phi}(n)$ durch

$$h_{\psi}(n) = (\Leftrightarrow 1)^n h_{\phi}(N' \Leftrightarrow n) \quad (4.122)$$

mit einer beliebigen ungeradzahligem Verschiebung $N' \in \mathbb{Z}$, die bei FIR-Filtern zu $N' = N$ gewählt wird. Als Konsequenz aus der Gleichung (4.121) lassen sich die Wavelet-Transformationskoeffizienten einer Auflösungsstufe S_l entsprechend

$$c_l(k) = \langle v_{l+1}(m), h_{\psi}(m \Leftrightarrow 2k) \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{l+1}(m) h_{\psi}(m \Leftrightarrow 2k) \quad (4.123)$$

durch Faltung mit einem Filter der Impulsantwort $h_\psi(\Leftrightarrow n)$ und anschließender Unterabtastung aus der Approximationssequenz $v_{l+1}(k)$ berechnen. Wählt man das Hochpaßfilter einer Analysefilterbank demnach zu $h_1(n) = h_\psi(\Leftrightarrow n)$ und das Tiefpaßfilter zu $h_0(n) = h_\phi(\Leftrightarrow n)$, so ist die entstandene Filterbank orthonormal, da $h_\psi(n)$, $h_\phi(n)$ mit den Gleichungen (4.112) und (4.122) ein konjugiertes Quadratur-Spiegel-Filterpaar bildet.

Mit der in Abbildung 4.5 dargestellten dyadischen Filterbankanordnung existiert ein effizientes Verfahren zur Entwicklungskoeffizientenberechnung der diskreten Wavelet-Transformation. Ausgehend von einer Approximationssequenz $v_0(k)$ bei der Auflösung S_0 können Transformations- und Approximationskoeffizienten größerer Auflösungen $S_l > S_0$ durch iteratives Anwenden einer aus Inter- und Intraskalenkoeffizienten bestehenden Analysefilterbank bestimmt werden. Die Anzahl der Multiplikationen, die dabei für die Transformationskoeffizientenberechnung von N_{v_0} Abtastwerten der Approximationssequenz $v_0(k)$ mit FIR-Filtern der Länge $(N + 1)$ benötigt wird, ist kleiner $2N_{v_0}(N + 1)$. Damit können Wavelet-Entwicklungskoeffizienten mit Hilfe des diskutierten pyramidalen Berechnungsalgorithmus mit einem geringeren Rechenaufwand ermittelt werden als die Transformationskoeffizienten der diskreten Fourier-Transformation mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation. Der Rechenaufwand hierfür beläuft sich auf $N_{v_0} \log_2 N_{v_0}$ Multiplikationen.

Die Abbildung 4.6 illustriert die prinzipielle spektrale Zerlegung, die durch die Signaldekomposition in Approximationen und Details verschiedener Auflösungsskalen erreicht wird für positive Frequenzen. Ist die Menge aller Signalapproximationen \mathcal{A}_0 der Skala S_0 hauptsächlich auf den Frequenzbereich $[\Leftrightarrow\Omega, \Omega]$ konzentriert, so ist \mathcal{A}_{-1} im wesentlichen auf $[\Leftrightarrow\Omega/2, \Omega/2]$ und \mathcal{D}_{-1} auf $[\Leftrightarrow\Omega, \Leftrightarrow\Omega/2]$, $[\Omega/2, \Omega]$ beschränkt. Die spektrale Unterteilungsstruktur in jeweils halbbandige Approximations- und Detailbereiche setzt sich für größere Auflösungen fort und ist durch ein konstantes Verhältnis von Mittenfrequenz zu Bandbreite, der für die Wavelet-Transformation typischen Filtercharakteristik konstanter Güte, für jede Auflösungsskala gekennzeichnet.

4.6.3 Die Signalrekonstruktion aus Approximation und Details

Als Konsequenz der Gleichung (4.114) lassen sich die Basisfunktionen eines Approximationsraumes \mathcal{A}_{l+1} nicht nur wie in der Skalierungsgleichung (4.108) durch die Basisfunktionen des übergeordneten Approximationsraumes beschreiben, sondern auch als Linearkombinationen der Basisvektoren der Unterräume \mathcal{A}_l und \mathcal{D}_l . Bezeichnend für diesen Zusammenhang ist die Darstellung der Skalierungsfunktion $\phi(t)$ durch eine Linearkombination der Elementarfunktionen der Mengen $\{\phi_{k,-1}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$ und $\{\psi_{k,-1}(t) : k \in \mathbb{Z}\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2^{-1}} h_\phi(\Leftrightarrow 2k) \phi(2^{-1}t \Leftrightarrow k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{2^{-1}} h_\psi(\Leftrightarrow 2k) \psi(2^{-1}t \Leftrightarrow k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\phi(\Leftrightarrow 2k) \phi_{k,-1}(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_\psi(\Leftrightarrow 2k) \psi_{k,-1}(t). \end{aligned} \tag{4.124}$$

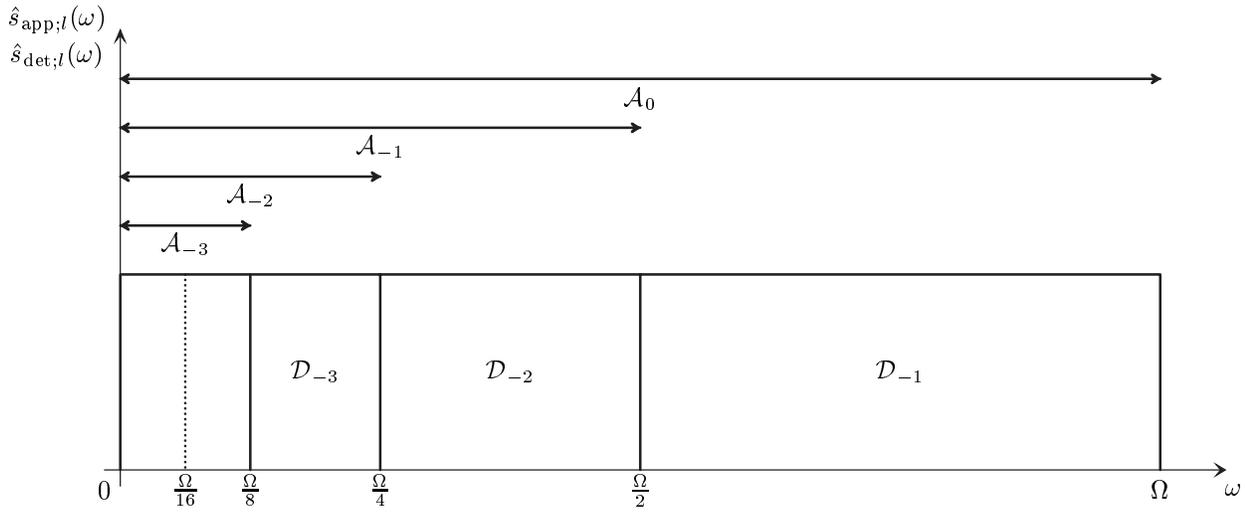


Abbildung 4.6: Die durch eine Multi-Skalen-Analyse prinzipiell erreichte spektrale Signalzerlegung in Approximationen $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{-1}, \mathcal{A}_{-2}, \mathcal{A}_{-3}, \dots$ und Details $\mathcal{D}_{-1}, \mathcal{D}_{-2}, \mathcal{D}_{-3}, \dots$. Es wird deutlich, daß mit der Projektion in Approximations- und Detailräume für jede Auflösungsstufe eine Signaldekomposition in hoch- und tieffrequente Anteile gleicher Bandbreite im Frequenzbereich assoziierte werden kann. Aus der sukzessiven Unterteilung der Approximationsräume in gröbere Approximationen und Details folgt somit eine Konstant-Q-Zerlegung des mit \mathcal{A}_0 korrespondierenden Frequenzbereichs in mit \mathcal{D}_l , $l < 0$ korrespondierenden Detailspektren.

Stellt man die Skalierungsfunktionen $\phi_{k,l}(t)$ in der Definitionsgleichung der Approximationssequenz $v_l(k) = \langle s(t), \phi_{k,l}(t) \rangle$ als Linearkombination entsprechend Gleichung (4.124) dar, so kann $v_l(k)$ durch 2-fache Überabtastung der Approximationssequenz $v_{l-1}(k)$ und der Detailsequenz $c_{l-1}(k)$, nachfolgender Filterung mit $h_\phi(n)$ und $h_\psi(n)$ und Addition der entstandenen Teilsequenzen synthetisiert werden. Es ist damit

$$\begin{aligned} v_l(k) &= \langle v_{l-1}(m), h_\psi(k \Leftrightarrow 2m) \rangle + \langle c_{l-1}(m), h_\phi(k \Leftrightarrow 2m) \rangle \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_{l-1}(m) h_\psi(k \Leftrightarrow 2m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{l-1}(m) h_\phi(k \Leftrightarrow 2m). \end{aligned} \quad (4.125)$$

Die Approximationssequenz $v_l(k)$ der Skala S_l ist demnach als Ausgangssignal einer orthonormalen Synthesefilterbank mit der Approximationssequenz $v_{l-1}(k)$ und der Detailsequenz $c_{l-1}(k)$ der Skala S_{l-1} als Eingangssignale rekonstruierbar. Tiefpaß- und Hochpaßfilter bestimmen sich mit $\tilde{h}_0(n) = h_\phi(n)$ und $\tilde{h}_1(n) = h_\psi(n)$ konform der für orthonormale Synthesefilterbänke geltenden Bedingungen (4.84) und (4.85) als zeitlich gespiegelte Analysefilter $h_0(n) = h_\phi(\Leftrightarrow n)$ und $h_1(n) = h_\psi(\Leftrightarrow n)$.

Der in Abbildung 4.5 dargestellte Signalzerlegungsprozeß läßt sich folglich durch eine iterativ auf Approximations- und Detailsequenzen angewendete Synthesefilterbank vollständig invertieren. Abbildung 4.7 zeigt die so entstehende dyadische Synthesefilterbankstruktur zur orthonormalen Signalentwicklung in ein Wavelet-Funktionensystem.

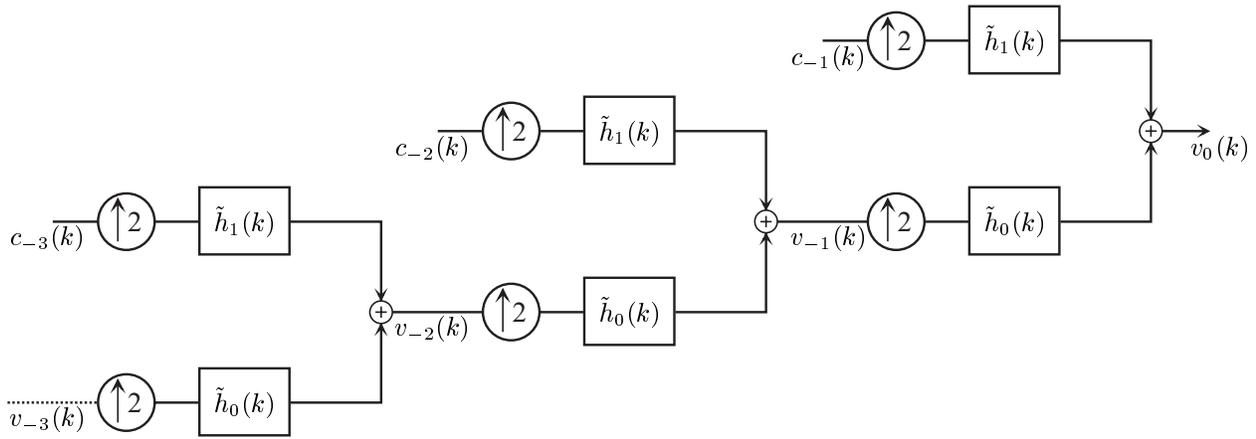


Abbildung 4.7: Die dyadische Synthesefilterbankanordnung zur iterativen Rekonstruktion von Approximationssequenzen. Ausgehend von der Approximationssequenz $v_{-3}(k)$ und der Detailsequenz $c_{-3}(k)$ bei der Skala S_{-3} werden durch iteratives Anwenden einer Synthesefilterbank auf die neu entstandenen Approximationssequenzen und die zugehörigen Detailsequenzen die Approximationssequenzen $v_{-2}(k), v_{-1}(k), v_0(k)$ der feineren Skalen S_{-2}, S_{-1}, S_0 synthetisiert.

Der Abschnitt 4.6 und seine Unterabschnitte haben gezeigt, daß mit der Multi-Skalen-Analyse ein leistungsfähiges Konzept zur systematischen Konstruktion von orthogonalen Wavelet-Funktionensystemen existiert. Sämtliche die Definition 3.4.2 erfüllende Wavelets von praktischer Relevanz sind mit einer solchen Multi-Skalen-Analyse erzeugbar. Darüber hinaus ermöglichen die in den Abbildungen 4.5 und 4.7 dargestellten dyadischen Filterbankstrukturen eine effektive Kalkulation der Transformationskoeffizienten und eine ebenso effektive Signalrekonstruktion durch iteratives Anwenden von Analyse- und Synthesefilterbänken. Der pyramidale Zerlegungsalgorithmus wird wegen seiner geringen Komplexität auch als schnelle Wavelet-Transformation bezeichnet. Es wurde weiter deutlich, daß die aufgrund ihrer umfangreichen sechs Punkte umfaßenden Definition kompliziert erscheinende Multi-Skalen-Approximation vollständig und eindeutig durch genau eine zugehörige Skalierungsfunktion beschreibbar ist. Damit ist die Skalierungsfunktion $\phi(t)$ als Lösung der Skalierungsgleichung (4.108) von zentraler Bedeutung für die Multi-Skalen-Analyse und bestimmt deren Eigenschaften. Das Mother-Wavelet $\psi(t)$, als Prototypfunktion der Wavelet-Transformation, ergibt sich über die Wavelet-Gleichung (4.121) als Konsequenz aus der Skalierungsfunktion. Es ererbt daher die wesentlichen Charakteristika von $\phi(t)$, so daß die benötigten Wavelet-Merkmale bei der Konstruktion der Skalierungsfunktion berücksichtigt werden müssen. Der folgende Abschnitt 4.7 zeigt, wie ausgehend von einer geeigneten Wahl der Interskalenkoeffizienten eine Skalierungsfunktion als deren Lösung so gefunden werden kann, daß das korrespondierenden Mother-Wavelet die gewünschten Eigenschaften aufweist.

4.7 Die rekursive Skalierungsfunktionsberechnung

Das grundlegende Ziel der Konstruktion eines orthonormalen Wavelet-Funktionensystems mit besonderen, an die Anforderungen der jeweiligen Applikation angepaßten Eigenschaften reduziert sich auf die Aufgabe, eine Skalierungsfunktion $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit entsprechenden Charakteristiken als Lösung einer Skalierungsgleichung zu finden. Prinzipiell existieren hier zwei Vorgehensweisen. Es kann versucht werden, eine die Anforderungen erfüllende Skalierungsfunktion direkt zu entwerfen und daraus folgernd die Interskalenkoeffizienten über Gleichung (4.109) zu bestimmen. Im allgemeinen gestaltet sich dieses Verfahren schwierig. Zwar sind Lösungen auffindbar, besondere Eigenschaften, wie endliche Ausdehnung von Skalierungsfunktion und Wavelets, können dabei allerdings nicht systematisch berücksichtigt werden [17]. Da die Skalierungsfunktion als Lösung der Skalierungsgleichung aus den Interskalenkoeffizienten hervorgeht, ist eine angepaßte Wahl der Interskalenkoeffizienten als Ausgangspunkt des Konstruktionsvorgangs deutlich sinnvoller.

Zunächst stellt sich die Frage, welche Anforderungen die Interskalenkoeffizienten erfüllen müssen, damit eine Lösung der Skalierungsgleichung existiert und diese Lösung darüber hinaus eine Skalierungsfunktion $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ist, die mit einer Multi-Skalen-Analyse assoziiert werden kann. Diese Frage wird im folgenden Unterabschnitt 4.7.1 behandelt. Im Abschnitt 4.7.2 wird dann erläutert, wie die benötigten Eigenschaften der Wavelet-Elementarfunktionen bereits bei der Auswahl der Interskalenkoeffizienten berücksichtigt werden können.

4.7.1 Existenz der Skalierungsfunktion und deren Berechnung aus den Interskalenkoeffizienten

Die vorangegangene Diskussion hat gezeigt, daß eine Multi-Skalen-Analyse ein orthonormales Analyse/Synthesefilterbankpaar zur Berechnung der Transformationskoeffizienten und zur Signalrekonstruktion impliziert. Tief- und Hochpaßfilter $h_0(n), h_1(n)$ einer mit der schnellen Wavelet-Transformation assoziierten Analysefilterbank bilden folglich ein konjugiertes Quadratur-Spiegel-Filterpaar. Die Interskalenkoeffizienten müssen als zeitlich gespiegelte Tiefpaßfilterkoeffizienten der Analysefilterbank $h_\phi(n) = h_0(\Leftrightarrow n)$ demnach orthonormal zu geradzahligem Verschiebungen ihrer selbst sein. Sie erfüllen die Gleichung (4.112). Betrachtet man den Konstruktionsprozeß ausgehend von den Interskalenkoeffizienten, so stellt sich die Frage, ob auch die Umkehrung gilt, d. h. impliziert eine aus konjugierten Quadratur-Spiegel-Filtern bestehende dyadisch gestaffelte Filterbankanordnung grundsätzlich eine Multi-Skalen-Analyse? Gleichwertig hiermit ist die Frage ob Filterkoeffizienten, die der Gleichung (4.112) genügen, als Interskalenkoeffizienten immer eine Skalierungsfunktion $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ als Lösung erzeugen? Um eine Antwort auf diese Frage zu bekommen, muß die Lösung der Skalierungsgleichung in Abhängigkeit der Interskalenkoeffizienten gefunden werden. In [14, 100] schlug I. Daubechies mit dem sogenannten Kaskadenalgorithmus ein

iteratives Verfahren zur Lösungsfindung vor: Ausgehend von der Rechteckfunktion

$$\phi^{(0)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{für } t \notin [0, 1) \end{cases} \quad (4.126)$$

wird für jeden Iterationsschritt $i = 0, 1, 2, \dots$ eine Funktion $\phi^{(i+1)}(t)$ als Ergebnis der rekursiv formulierten Skalierungsgleichung

$$\phi^{(i+1)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{2} h_{\phi}(n) \phi^{(i)}(2t \Leftrightarrow n) \quad (4.127)$$

bestimmt. Konvergiert die so entstandene Funktionenfolge $\phi^{(0)}(t), \phi^{(1)}(t), \phi^{(2)}(t), \dots$ entsprechend

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\phi^{(i)}(t) \Leftrightarrow \phi(t)\|^2 = 0 \quad (4.128)$$

gegen eine Skalierungsfunktion $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit der Inneren-Produkt-Sequenz

$$\rho(n) = \langle \phi(t), \phi(t \Leftrightarrow n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \phi^*(t \Leftrightarrow n) dt = \delta(n), \quad (4.129)$$

so sind die Interskalenkoeffizienten $h_{\phi}(n)$ als Ausgangspunkt zur Konstruktion eines orthonormalen Wavelet-Funktionensystems geeignet. Eine der Zeitbereichsiteration (4.127) entsprechende rekursive Bestimmung von $\hat{\phi}(\omega)$ im Frequenzbereich zeigt, daß an das Tiefpaßfilter eines konjugierten Quadratur-Spiegel-Filterpaares weitreichendere Bedingungen gestellt werden müssen, damit die L^2 -Konvergenz des Kaskadenalgorithmus sichergestellt ist und $h_{\phi}(n) = h_0(\Leftrightarrow n)$ gesetzt werden kann.

Über die Skalierungsgleichung (4.108) transformiert sich die Skalierungsfunktion zu

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}_{\phi}(e^{j\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (4.130)$$

Ersetzt man die spektral gespreizte Skalierungsfunktion auf der rechten Seite der Gleichung (4.130) iterativ, so ergibt sich die Fourier-Transformierte der Skalierungsfunktion als Grenzwert einer unendlichen Produktreihe zu

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\hat{h}_{\phi}(e^{j\omega/2^i})}{\sqrt{2}}. \quad (4.131)$$

Diese Frequenzbereichslösung der Skalierungsgleichung existiert formal für beliebige Koeffizienten $h_{\phi}(n)$. Damit $\hat{\phi}(\omega)$ eine Skalierungsfunktion ist, muß $\phi(t)$ zusätzlich orthonormal zu ganzzahligen Verschiebung ihrer selbst sein. Dieser Sachverhalt stellt sich im Frequenzbereich als Konsequenz der Gleichung (4.129) durch

$$\hat{\rho}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1 \quad (4.132)$$

dar. Die Bedingung (4.132) und die Normierung $\hat{\phi}(0) = 1$ aus Gleichung (4.104) implizieren zwei Voraussetzungen, die von $\hat{h}_\phi(e^{j\omega})$ erfüllt werden müssen. Die Normierung verlangt, daß $\hat{h}_\phi(e^{j\omega/2^i})$ für $i \rightarrow \infty$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Demnach ist

$$\hat{h}_\phi(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \sqrt{2} \quad (4.133)$$

oder dazu im Zeitbereich äquivalent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\phi(n) = \sqrt{2}. \quad (4.134)$$

Aus Gleichung (4.133) und der Periodizität von $\hat{h}_\phi(e^{j\omega})$ folgt, daß $\hat{h}_\phi(e^{j\omega}) = \sqrt{2}$ für alle $\omega = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ ist. Da Gleichung (4.130) eine Übereinstimmung der Spektralwerte $\hat{\phi}(2\pi) = \hat{\phi}(4\pi) = \hat{\phi}(8\pi) = \dots$ impliziert, zeigt eine Betrachtung der Gleichung (4.130) für $\omega = 4\pi$ entsprechend $\hat{\phi}(4\pi) = (1/\sqrt{2})\hat{h}_\phi(e^{j2\pi})\hat{\phi}(2\pi)$, daß zur Gewährleistung eines spektralen Abklingens $\hat{\phi}(\omega) \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty$ der Wert $(1/\sqrt{2})\hat{h}_\phi(e^{j2\pi}) = 1$ durch $\hat{\phi}(2\pi) = 0$ kompensiert werden muß. Mit mindestens einer Nullstelle von $\hat{h}_\phi(e^{j\omega})$ bei $\omega = \pi$ ist $\hat{\phi}(2\pi) = \hat{\phi}(4\pi) = \hat{\phi}(8\pi) = \dots = 0$, so daß

$$\hat{h}_\phi(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = 0 \quad (4.135)$$

oder gleichwertig hiermit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\Leftrightarrow 1)^n h_\phi(n) = 0 \quad (4.136)$$

eine notwendige Voraussetzung für $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ist. Das Tiefpaßfilter eines konjugierten Quadratur-Spiegel-Filterpaares muß nicht notwendiger Weise eine solche Nullstelle bei $\omega = \pi$ aufweisen. Dennoch reicht auch diese zusätzliche Vorderung nicht aus, um generell eine Skalierungsfunktion $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ als Lösung der Skalierungsgleichung zu erhalten. Eine ausführliche Diskussion von notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen für die L^2 -Konvergenz des Kaskadenalgorithmus ist in [17] gegeben. Vorgestellt sind dort die alternativen, zugleich notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen von A. Cohen aus [101] und [102] und W. M. Lawton [103]. Für die in dieser Arbeit vorrangig betrachteten FIR-Filter ist der Lawtonsche Ansatz am besten handhabbar. Hierbei kann die Existenz einer Lösung der Skalierungsgleichung $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\hat{\phi}(\omega)$ aus Gleichung (4.131) anhand des Konvergenzverhaltens der Folge von Inneren-Produkt-Sequenzen

$$\rho^{(i)}(n) = \langle \phi^{(i)}(t), \phi^{(i)}(t \Leftrightarrow n) \rangle \quad (4.137)$$

untersucht werden. Eine Eigenwertbetrachtung der Matrix $\mathbf{R} = \mathbf{D}\mathbf{H}_\phi\mathbf{H}_\phi^\mathbf{T}$, die die Innere-Produkt-Sequenz $\rho^{(i)}(n)$ auf $\rho^{(i+1)}(n)$ abbildet, gibt Aufschluß über das Konvergenzverhalten des Kaskadenalgorithmus. In Matrizenschreibweise gilt

$$\boldsymbol{\rho}^{(i+1)} = \underbrace{\mathbf{D}\mathbf{H}_\phi\mathbf{H}_\phi^\mathbf{T}}_{\mathbf{R}} \boldsymbol{\rho}^{(i)}. \quad (4.138)$$

Filtern mit $h_\phi(n)$ und Skalieren mit einem Dehnungsfaktor 2. Für die Sequenz $h_\phi^{(N_{\text{kas}})}(n)$ gilt demnach allgemein in der z -Domäne

$$\hat{h}_\phi^{(N_{\text{kas}})}(z) = \hat{h}_\phi(z) \hat{h}_\phi(z^2) \cdots \hat{h}_\phi(z^{2^{N_{\text{kas}}-1}}) = \prod_{i=0}^{N_{\text{kas}}-1} \hat{h}_\phi(z^{2^i}), \quad (4.141)$$

so daß insbesondere $h_\phi^{(N_{\text{kas}})}(n) = h_\phi(n)$ für $N_{\text{kas}} = 1$ ist. Ein Vergleich mit Gleichung (4.45) zeigt, daß die Sequenz $h_\phi^{(N_{\text{kas}})}(n)$, und damit über Gleichung (4.140) die Skalierungsfunktion $\phi^{(N_{\text{kas}})}(t)$, als Impulsantwort einer N_{kas} Expander/Filter-Kaskaden umfassenden Synthesefilterbank mit $h_\phi(n) = \tilde{h}(n)$ gewonnen werden kann. Der Fehler $\|\phi^{(N_{\text{kas}})}(t) \Leftrightarrow \phi(t)\|^2$ konvergiert dabei mit der Iterationstiefe N_{kas} schnell [14, 17] gegen null, so daß, wie bei den im folgenden Abschnitt 4.7.2 gezeigten Abbildungen, eine Iterationstiefe von $N_{\text{kas}} = 6$ oder 7 ausreicht um Unterschiede zwischen $\phi(t)$ und $\phi^{(N_{\text{kas}})}(t)$ visuell nicht wahrnehmen zu können.

Das mit der Skalierungsfunktion $\phi^{(N_{\text{kas}})}(t)$ korrespondierende Mother-Wavelet $\psi^{(N_{\text{kas}})}(t)$ kann durch einen vergleichbaren Ansatz konstruiert werden. Analog zu Gleichung (4.140) wird durch

$$\psi^{(N_{\text{kas}})}(t) = 2^{N_{\text{kas}}/2} h_\psi^{(N_{\text{kas}})}(n) \quad \text{für} \quad \frac{n}{2^{N_{\text{kas}}}} \leq t < \frac{n+1}{2^{N_{\text{kas}}}} \quad (4.142)$$

der Sequenz $h_\psi^{(N_{\text{kas}})}(n)$ das zeitkontinuierliche Wavelet $\phi^{(N_{\text{kas}})}(t)$ zugeordnet. Die Sequenz $h_\psi^{(N_{\text{kas}})}(n)$ ergibt sich dabei ebenfalls als Impulsantwort einer N_{kas} Expander/Filter-Kaskaden umfassenden Synthesefilterbank. Als Konsequenz aus der Fourier-Transformation der Wavelet-Gleichung (4.121)

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}_\psi(e^{j\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (4.143)$$

ist das erste Synthesefilter hier allerdings $\hat{h}_\psi(z)$. Folglich gilt für die z -Transformierte

$$\hat{h}_\psi^{(N_{\text{kas}})}(z) = \hat{h}_\psi(z) \hat{h}_\psi(z^2) \cdots \hat{h}_\psi(z^{2^{N_{\text{kas}}-1}}) = \hat{h}_\psi(z) \prod_{i=1}^{N_{\text{kas}}-1} \hat{h}_\psi(z^{2^i}). \quad (4.144)$$

Die geführte Diskussion hat gezeigt, daß die Inter- und Intraskalenkoeffizienten einige ihrer Eigenschaften auf die Skalierungsfunktion und das Mother-Wavelet übertragen. Werden die genannten Randbedingungen eingehalten, so bewirkt die Orthonormalität von $h_\phi(n)$ und $h_\psi(n)$ zueinander und bezüglich geradzahlgiger Verschiebungen ihrer selbst die Orthonormalität der Skalierungsfunktionenmenge $\{\phi(t \Leftrightarrow k) : k \in \mathbb{Z}\}$ und der Wavelet-Funktionenmenge $\{\psi_{k,l} : k \in \mathbb{Z}\}$. Aus dem Kaskadenalgorithmus läßt sich weiter ableiten, daß eine endliche Anzahl $N + 1$ von null verschiedener Interskalenkoeffizienten eine auf das Intervall $0 \leq t \leq N$ beschränkte Skalierungsfunktion $\phi(t)$ und ein auf das Intervall $0 \leq t \leq N$ beschränktes Mother-Wavelet $\psi(t)$ erzeugen. Weitere vorteilhafte Charakteristiken der Wavelet-Elementarfunktionen können bei der Auswahl der Interskalenkoeffizienten berücksichtigt werden. Hiermit befaßt sich der folgende Abschnitt.

4.7.2 Eigenschaften der Wavelet-Elementarfunktionen in Abhängigkeit der Interskalenkoeffizienten

In vielen Applikationen ist eine Verwendung von möglichst glatten Elementarfunktionen zweckmäßig. Solche Funktionen sind als analoge Signale im allgemeinen leichter zu realisieren und eine Zerlegung des weiter zu verarbeitenden Signals in glatte Bestandteile ist vorteilhaft für zahlreiche Verarbeitungsschritte, die folgend auf das transformierte Signal angewendet werden sollen. Im Kontext der Wavelet-Transformation wird die Glattheit der Elementarfunktionen durch die Regularität des Mother-Wavelets angegeben. Aufgrund der Konstruktion des Wavelet-Funktionensystems stimmt die Regularität des Mother-Wavelets $\psi(t)$ mit der der Skalierungsfunktion $\phi(t)$ und allen Elementarfunktionen $\psi_{k,l}(t)$ überein.

Ein Mother-Wavelet $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ besitzt den Regularitäts- oder Glattheitsindex Γ , falls $\psi(t)$ entsprechend $\psi(t) \in C^\Gamma(\mathbb{R})$ Γ -mal stetig differenzierbar ist und alle Ableitungen $\psi^{(\gamma)}(t) < \infty$ für $0 \leq \gamma \leq \Gamma$ sind. Das Mother-Wavelet ist dann mit

$$|\hat{\psi}(\omega)| \leq \frac{C}{(1 + |\omega|)^{\Gamma+1}} \quad (4.145)$$

spektral lokalisiert, wobei $C < \infty$ eine Konstante ist. Für $\psi(t)$ mit der Regularität Γ sind die Ableitungen $\psi^{(\gamma)}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ für $0 \leq \gamma \leq \Gamma$, da nach dem Parsevalschen Theorem

$$\begin{aligned} \|\psi^{(\gamma)}(t)\|^2 &= \langle \psi^{(\gamma)}(t), \psi^{(\gamma)}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle (j\omega)^\gamma \hat{\psi}(\omega), (j\omega)^\gamma \hat{\psi}(\omega) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{2\gamma} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega < \infty \end{aligned} \quad (4.146)$$

mit $\mathcal{F}\{\psi^{(\gamma)}(t)\}(\omega) = (j\omega)^\gamma \hat{\psi}(\omega)$ gilt [14, 17, 22]. Ist $\psi(t)$ darüber hinaus entsprechend

$$|\psi(t)| \leq \frac{C}{(1 + |t|)^{\Gamma+1+\varepsilon}} \quad (4.147)$$

mit beliebigem $\varepsilon > 0$ und einer Konstanten $C < \infty$ auch zeitlich lokalisiert, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^\gamma \psi(t) dt = 0 \quad \text{für } \gamma = 0, 1, \dots, \Gamma. \quad (4.148)$$

Ein Mother-Wavelet endlicher Ausdehnung mit der Regularität Γ weist demnach mindestens $\Gamma + 1$ verschwindende Momente auf.

Die Anzahl der verschwindenden Wavelet-Momente M kann bereits bei der Bestimmung der $N + 1$ Interskalenkoeffizienten $h_\phi(0), h_\phi(1), \dots, h_\phi(N)$ beziehungsweise deren Fourier-Transformierten $\hat{h}_\phi(e^{j\omega})$ berücksichtigt werden. Wählt man

$$\hat{h}_\phi(e^{j\omega}) = \left(\frac{1 + e^{-j\omega}}{2} \right)^M \hat{q}(e^{j\omega}) \quad (4.149)$$

mit einem trigonometrischen Polynom $\hat{q}(e^{j\omega})$ als Fourier-Transformierte der Koeffizientensequenz $q(n)$ endlicher Länge $N \Leftrightarrow M$ und ohne Nullstellen bei $\omega = \pi$, so besitzt das aus $\phi(t)$ als Lösung der korrespondierenden Skalierungsgleichung hervorgehende Mother-Wavelet $\psi(t)$ genau M verschwindende Momente und erfüllt demnach die notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für eine Regularität $\Gamma = M \Leftrightarrow 1$ [14].

Ausgehend vom Tiefpaßfilter $h_0(n) = h_\phi(\Leftrightarrow n)$ eines konjugierten Quadratur-Spiegel-Filterpaares ist man somit in der Lage, ein Mother-Wavelet mit einer benötigten, die Regularität beeinflussenden Anzahl von verschwindenden Momenten zu erzeugen. Der Filterkonstruktionsprozeß ist dabei prinzipiell mit dem im Abschnitt 4.5 beschriebenen Verfahren zur Entwicklung orthonormaler Filterbänke identisch. Die zusätzliche Regularitätsrandbedingung impliziert allerdings eine Übertragungsfunktion entsprechend Gleichung (4.149). Dabei ist es möglich, die L^2 -Konvergenz des Kaskadenalgorithmus für diesen Ansatz durch die hinreichende Bedingung

$$\sup_{\omega} |\hat{q}(e^{j\omega})| \leq 2^{M-1} \quad (4.150)$$

bereits bei der Wahl des trigonometrischen Polynoms zu garantierten [14]. Schließlich kann die Konstruktionsaufgabe in der z -Domäne wie folgt zusammengefaßt werden: Gesucht ist die z -Transformierte

$$\hat{h}_\phi(z) = \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^M \hat{q}(z) \quad (4.151)$$

der Sequenz $h_\phi(n)$ endlicher Länge $N+1$ mit M -facher Nullstelle bei $z = \Leftrightarrow 1$ als spektraler Faktor des Halbbandfilters

$$\hat{p}(z) = \hat{h}_0(z)\hat{h}_0(z^{-1}) = \hat{h}_\phi(z^{-1})\hat{h}_\phi(z) = |\hat{h}_\phi(z)|^2 \quad (4.152)$$

mit

$$\hat{p}(z) + \hat{p}(\Leftrightarrow z) = 2. \quad (4.153)$$

Halbbandfilter, die der Bedingung (4.152) mit $\hat{h}_\phi(z)$ nach Gleichung (4.151) genügen, lassen sich durch

$$\begin{aligned} \hat{p}(z) = & 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^M \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^M \\ & \left(\sum_{m=0}^{M-1} \binom{M \Leftrightarrow 1 + m}{m} \left(\frac{1 \Leftrightarrow z}{2} \right)^m \left(\frac{1 \Leftrightarrow z^{-1}}{2} \right)^m \right. \\ & \left. + \left(\frac{1 \Leftrightarrow z}{2} \right)^M \left(\frac{1 \Leftrightarrow z^{-1}}{2} \right)^M \hat{p}' \left(\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1 \Leftrightarrow z}{2} \right)^M \left(\frac{1 \Leftrightarrow z^{-1}}{2} \right)^M \right) \right) \end{aligned} \quad (4.154)$$

mit beliebigem ungeraden Polynom $\hat{p}'(\cdot) \geq 0$ beschreiben [17, 22]. Das Polynom $\hat{p}(z)$ läßt sich in $2^{\lfloor M/2 \rfloor}$ verschiedene spektrale Faktorisierungen $\hat{h}_\phi(z)\hat{h}_\phi(z^{-1})$ zerlegen, so daß verschiedene Filterrealisationen bei gegebener Filterlänge und Anzahl von Nullstellen möglich sind [72].

Folgend sind einige auf diesem Ansatz basierende orthonormale Wavelet-Familien mit endlicher Ausdehnung der Elementarfunktionen aufgeführt, die in der Abbildung 4.8 dargestellt sind:

- DX-Wavelets:

Wavelets mit maximaler Anzahl an verschwindenden Momenten bei gegebener Länge N und minimalphasigem $\hat{h}_\phi(z)$.

Setzt man in (4.154) $\hat{p}'(z) = 0$ und ordnet $\hat{h}_\phi(z)$ alle Nullstellen von $p(z)$ zu, die innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ liegen, so erzeugen die korrespondierenden eindeutig definierten $N + 1$ Interskalenkoeffizienten ein Mother-Wavelet mit der maximalen Anzahl von verschwindenden Momenten $M = (N + 1)/2$. Die so konstruierten Wavelets, die hier durch die Abkürzung D und die Anzahl der verschwindenden Momente gekennzeichnet sind (z. B. D2-Wavelets), zählen zu den gemeinhin bekanntesten. I. Daubechies stellte mit dieser Familie in [14] erstmals Wavelets mit einer auf das Intervall $[0, N]$ beschränkten endlichen Ausdehnung und einer spektralen Lokalisierbarkeit vor. Wavelets dieser Familie haben für große N einen Regularitätsindex $\Gamma \approx 0.2M$.

- SX-Wavelets:

Wavelets mit maximaler Anzahl an verschwindenden Momenten bei gegebener Länge N und maximaler Symmetrie.

Diese auch als Symmlets bezeichneten Wavelets haben dasselbe Produktpolynom $p(z)$ wie die DX-Wavelets. $\hat{h}_\phi(z)$ werden hier aber die Nullstellen aus $p(z)$ so zugeordnet, daß die Phase von $\hat{h}_\phi(z)$ eine maximale Linearität erreicht. Das korrespondierende SX-Wavelet mit X verschwindenden Momenten weist dann die größte mögliche Symmetrie auf. Vollkommene Symmetrie oder Asymmetrie kann allerdings nicht erreicht werden.

- CX-Wavelets:

Wavelets mit maximaler Anzahl an verschwindenden Momenten für Mother-Wavelet und Skalierungsfunktion.

Neben der Bedingung, daß die ersten M Momente für das Mother-Wavelet verschwinden sollen, wird hier zusätzlich $\int_{-\infty}^{\infty} t^m \phi(t) dt = 0$, $m = 1, 2, \dots, M \Leftrightarrow 1$ für die Momente der Skalierungsfunktion gefordert [72]. So konstruierte Wavelets werden als Coiflets bezeichnet. Auch hier ist ein CX-Wavelet durch X als Anzahl der verschwindenden Momente gekennzeichnet.

Ausgehend von dem fundamentalen Halbbandfilteransatz (4.154) kann ferner durch das Austauschen von Nullstellen bei $z = \Leftrightarrow 1$ gegen zusätzliche Terme des Polynoms \hat{p} eine Regularitätsverbesserung bei gegebener Filterlänge erreicht werden [72]. Ein Regularitätsgewinn wird somit bei fester Filterlänge mit einem Verlust von verschwindenden Momenten erkauft.

Bei der Auswahl der Wavelet-Familie und des Mother-Wavelets selbst für den Einsatz in einer Anwendung ist die Anzahl der verschwindenden Wavelet-Momente von besonderer

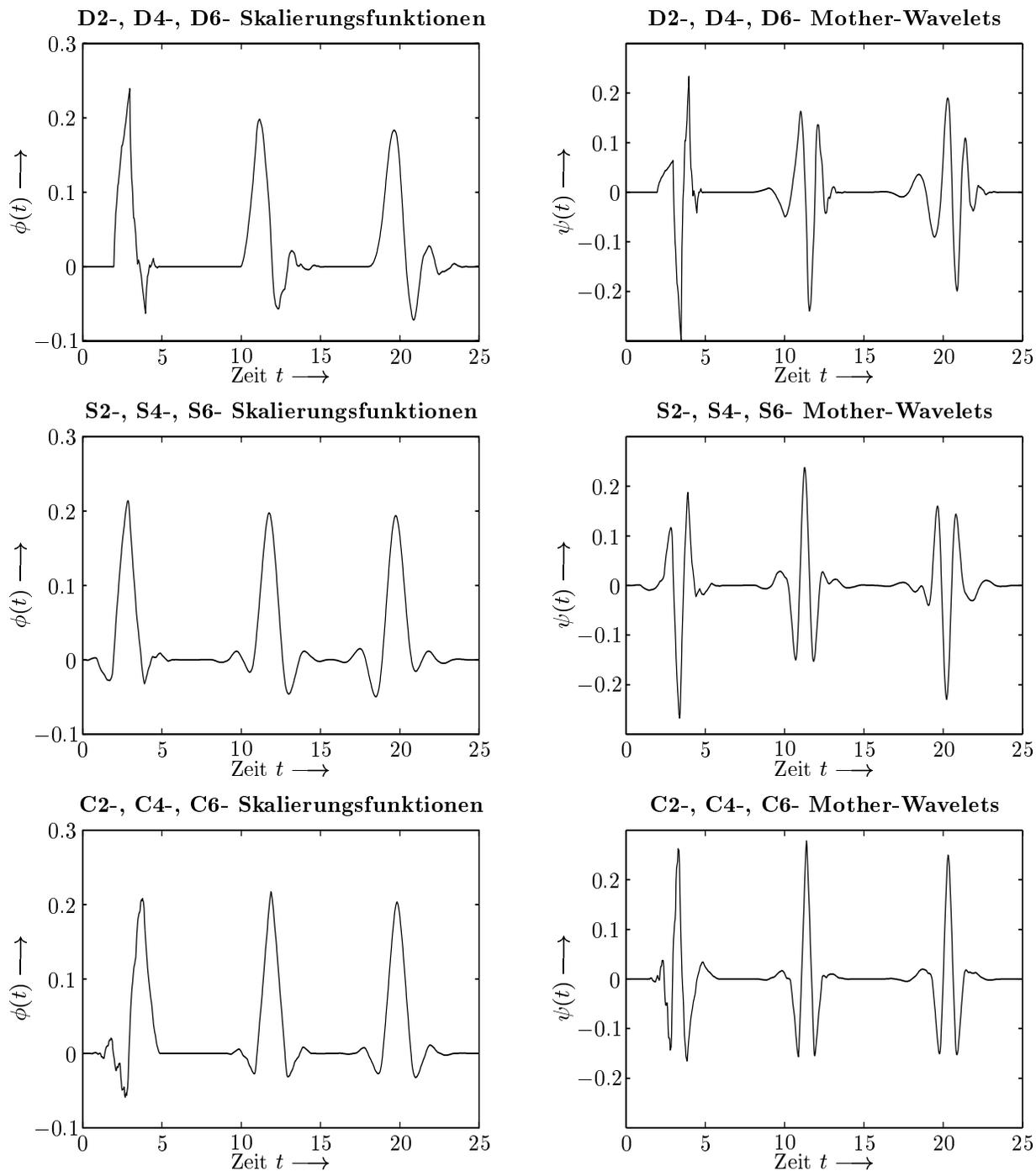


Abbildung 4.8: Skalierungsfunktionen und Mother-Wavelets für Daubechies-Wavelet- (DX) Symmlet- (SX) und Coiflet- (CX) Funktionensysteme. Dargestellt sind Daubechies- und Symmlet-Skalierungsfunktionen und Mother-Wavelets mit $M = 2, 4, 6$ verschwindenden Momenten und einer dementsprechenden Länge $2M \Leftrightarrow 1 = 3, 7, 11$ sowie Coiflet-Skalierungsfunktionen und Mother-Wavelets mit $M = 2, 4, 6$ verschwindenden Wavelet-Momenten und $M \Leftrightarrow 1 = 1, 3, 5$ verschwindenden Skalierungsfunktionsmomenten und einer Länge $3M \Leftrightarrow 1 = 5, 11, 17$.

Bedeutung, da sie die Approximationseigenschaften der entstehenden Transformation maßgeblich bestimmt. Es existiert hier der folgende elementare Zusammenhang: Weist $\hat{h}_\phi(z)$ M Nullstellen bei $z = \pm 1$ auf, womit das korrespondierende Mother-Wavelet $\psi(t)$ M verschwindende Momente hat, so kann ein Signal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit den Ableitungen $s^{(m)}(t) < \infty$ für $m = 0, 1, \dots, M$ durch dessen Projektion $s_{\text{app};l}(t) = \mathcal{A}_l\{s(t)\}(t)$ in den Approximationsraum \mathcal{A}_l mit einer Genauigkeit

$$\|s(t) \leftrightarrow_{s_{\text{app};l}}(t)\| \leq C S_l^M \|s^{(M)}(t)\| = \frac{C}{2^{lM}} \|s^{(M)}(t)\| \quad (4.155)$$

approximiert werden, wobei $C < \infty$ eine Konstante ist. Die Anzahl der verschwindenden Wavelet-Momente bestimmt durch den Faktor $S_l^M = 2^{-lM}$ somit asymptotisch die Approximationsqualität mit steigender Auflösung.

Betrachtet man Signale lokal als Polynome

$$s(t) = C_0 + C_1 t + \dots + C_P t^P \quad (4.156)$$

mit aus der Taylor-Reihenentwicklung resultierenden konstanten Koeffizienten C_0, \dots, C_P , so wird eine weitere Auswirkung der Beziehung (4.155) deutlich. Eine Linearkombination von Skalierungsfunktionen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0(k) \phi(t \leftrightarrow k) = s_{\text{app};0}(t)$ beschreibt jedes Polynom höchsten Grades $P = M \leftrightarrow 1$ exakt mit $\|s(t) \leftrightarrow_{s_{\text{app};0}}(t)\| = 0$, falls $\hat{h}_\phi(z)$ mindestens M Nullstellen bei $z = \pm 1$ besitzt. Da die korrespondierenden Wavelets $\{\psi(t \leftrightarrow k) : k \in \mathbb{Z}\}$ des Detailraums \mathcal{D}_0 und alle Wavelets der feineren Detailräume \mathcal{D}_l , $l > 0$ orthogonal zu den Skalierungsfunktionen aus \mathcal{A}_0 sind, sind sie auch zum Polynom $s(t) = C_0 + C_1 t + \dots + C_{M-1} t^{(M-1)}$ orthogonal, so daß alle Koeffizienten $c_{k,l} = 0$ für $l \geq 0$ sind. Ein Polynom höchsten Grades $M \leftrightarrow 1$ wird demnach eindeutig durch die Inneren Produkte mit Skalierungsfunktionen aus $\{\phi(t \leftrightarrow k) : k \in \mathbb{Z}\}$ beschrieben, sofern deren zugehörige Wavelets M verschwindende Momente aufweisen.

Aufgrund der kaskadierten Struktur der Approximations- und Detailräume kann ein Approximationsraum als orthogonale Summe von Detailräumen $\mathcal{A}_l = \mathcal{D}_{l-1} \oplus \mathcal{D}_{l-2} \oplus \dots$ dargestellt werden. Die Approximationsabschätzung (4.155) überträgt sich folglich mit

$$|c_{k,l}| \leq \frac{C}{2^{lM}} \|s^{(M)}(t)\| \quad (4.157)$$

auf die Wavelet-Transformationskoeffizienten $c_{k,l}$ und charakterisiert damit das Kompressionsverhalten der Wavelet-Transformation: Prinzipiell führen glatte, lokal durch wenige Polynomterme beschreibbare Signale und Wavelets mit einer großen Anzahl verschwindender Momente zu einem schnellen Abklingen der Entwicklungskoeffizienten. Dies impliziert eine Energiekonzentration in wenige Transformationskoeffizienten und somit eine hohe Kompression. Hieraus ergibt sich ein grundsätzlicher Vorteil gegenüber der Fourier-Transformation bei der Verarbeitung stückweise glatter Signale. Während bei der Wavelet-Transformation die lokale Glattheit des zu verarbeitenden Signals bei angepaßter Wahl der verschwindenden Wavelet-Momente das Abklingen der Entwicklungskoeffizienten bestimmt, ist für das Abklingen der Fourier-Transformationskoeffizienten die globale Welligkeit entscheidend. Unstetigkeitsstellen in einer relativ glatten Signalumgebung bewirken Wavelet-Koeffizienten

größeren Betrags nur in einer unmittelbaren Umgebung dieser Stelle, während die Entwicklungskoeffizienten einer Kurzzeit-Fouriertransformation verhältnismäßig gleichmäßig hiervon betroffen sind.

Obwohl eine maximale Anzahl von verschwindenden Momenten bei gegebener Filterlänge prinzipiell eine kompakte Signaldarstellung ermöglicht, ist diese Wahl nicht grundsätzlich für jede Anwendung geeignet. Selbst im Kontext der Signalübertragung und -kompression ist oft eine verbesserte Regularität der Wavelets bei geringerer energetischer Konzentration in den Entwicklungskoeffizienten sinnvoll. Der Grund hierfür ist, daß Kompressions- oder Quantisierungsfehler im rekonstruierten Signal eine Wavelet-Form annehmen, so daß beispielsweise bei der Kompression von Bilddaten fraktale Fehlerkomponenten geringer Energie leichter wahrzunehmen sind als glatte Fehleranteile mit hoher Energie [104].

Die durch die spezifische Applikation gegebenen Randbedingungen bestimmen Wert und Nutzen der Wavelet-Eigenschaften Kompressionsvermögen, Regularität, Symmetrie und verbunden zeitlich-spektrale Lokalisierbarkeit. Dabei können einige dieser Eigenschaften durch Modifikationen oder Verallgemeinerungen des in diesem Kapitel beschriebenen Konstruktionsvorgangs wesentlich verbessert werden. Der folgenden Abschnitt 4.8 beschreibt kurz zwei alternative Entwurfskonzepte, die zu Wavelet-Funktionensystemen mit verbesserten Merkmalen führen.

4.8 Biorthogonale Wavelets und Wavelet-Pakete

Sowie orthonormale FIR-Filterbänke unter Berücksichtigung der Konvergenzrandbedingung zu orthonormalen Wavelets mit endlicher Ausdehnung führen, haben auch die im Abschnitt 4.4 diskutierten biorthogonalen Filterbänke biorthogonale Wavelets zur Folge [105, 106]. Im Unterschied zu orthonormalen Transformationen kann hier eine Signalanalyse durch die Innere-Produkt-Bildung mit zueinander nicht orthogonalen Funktionen des Wavelet-Funktionensystems $\{\psi_{k,l}(t) : k, l \in \mathbb{Z}\}$ nicht durch eine Signalentwicklung in dasselbe Funktionensystem invertiert werden. Die zugehörige Analysematrix \mathbf{A} ist nicht orthonormal, so daß ihre Inverse ungleich ihrer Transponierten ist. Damit ist $\mathbf{S} \neq \mathbf{A}^T$. Dennoch ist die perfekte Signalrekonstruktion durch eine Signalentwicklung in ein duales Wavelet-Funktionensystem $\{\tilde{\psi}_{k,l}(t) : k, l \in \mathbb{Z}\}$ möglich, wobei sich sowohl der Analyse- als auch der Synthesevorgang im Kontext jeweils einer Multi-Skalen-Analyse beschreiben lassen. Dabei werden mit der der Signalanalyse zugehörigen Multi-Skalen-Analyse die Skalierungsfunktion $\phi(t)$ und das Mother-Wavelet $\psi(t)$ als Lösungen der Skalierungsgleichung mit den Interskalenkoeffizienten $h_\phi(n) = h_0(\Leftarrow n)$ und der Wavelet-Gleichung mit den Intraskalenkoeffizienten $h_\psi(n) = h_1(\Leftarrow n)$ assoziiert. Die mit der Signalsynthese korrespondierende Multi-Skalen-Analyse ist mit der Skalierungsfunktion $\tilde{\phi}(t)$ und dem Mother-Wavelet $\tilde{\psi}(t)$ als Lösung der Skalierungsgleichung und der Wavelet-Gleichung mit den Koeffizienten $h_{\tilde{\phi}}(n) = \tilde{h}_0(\Leftarrow n)$ und $h_{\tilde{\psi}}(n) = \tilde{h}_1(\Leftarrow n)$ verknüpft. Die Koeffizienten $h_0(n), h_1(n), \tilde{h}_0(n), \tilde{h}_1(n)$ entstammen einer

perfekt rekonstruierenden Filterbankkombination und genügen als Folgerung daraus den Bedingungen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n)\tilde{h}_0(n+2m) = \delta(m), \quad (4.158)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0(n)\tilde{h}_1(n+2m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n)\tilde{h}_0(n+2m) = 0, \quad (4.159)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1(n)\tilde{h}_1(n+2m) = \delta(m). \quad (4.160)$$

Vergleichbar mit der orthonormalen Multi-Skalen-Analyse kann auch hier der Kaskadenalgorithmus zur Bestimmung der Skalierungsfunktionen $\phi(t)$, $\tilde{\phi}(t)$ angewendet werden. Werden ähnliche Konvergenzbedingungen eingehalten [105], so übertragen sich die Orthonormalitätseigenschaften (4.158-4.160) der perfekt rekonstruierenden Filterbank auf die Analyse- und Synthese-Skalierungsfunktionen und Wavelets. Es ist dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t \Leftrightarrow n)\tilde{\phi}(t \Leftrightarrow m) = \delta(n \Leftrightarrow m), \quad (4.161)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t \Leftrightarrow n)\tilde{\psi}(t \Leftrightarrow m) = 0, \quad \text{für } n, m \in \mathbb{Z} \quad (4.162)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t \Leftrightarrow n)\tilde{\psi}(t \Leftrightarrow m) = \delta(n \Leftrightarrow m). \quad (4.163)$$

Hieraus ergeben sich die Orthogonalitäten $\mathcal{A}_l \perp \tilde{\mathcal{D}}_l$, $\mathcal{D}_l \perp \tilde{\mathcal{A}}_l$ zwischen Analyse-Approximationsraum \mathcal{A}_l und Synthese-Detailraum $\tilde{\mathcal{D}}_l$ und zwischen Analyse-Detailraum \mathcal{D}_l und Synthese-Approximationsraum $\tilde{\mathcal{A}}_l$. Da die kaskadierte Struktur einer Multi-Skalen-Analyse auch für den biorthogonalen Fall erhalten bleibt, läßt sich weiterhin jeder Approximationsraum als Summe der größeren Approximations- und Detailräume durch $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{l-1} + \mathcal{D}_{l-1}$ oder $\tilde{\mathcal{A}}_l = \tilde{\mathcal{A}}_{l-1} + \tilde{\mathcal{D}}_{l-1}$ beschreiben. Im Unterschied zur orthogonalen Signalzerlegung sind Approximations- und Detailräume einer Skala S_l hier nicht orthogonal zueinander, so daß sich der übergeordnete Approximationsraum nicht als orthogonale Summe sondern als direkte Summe berechnet.

Analyse-Wavelet-Funktionensystem $\{\psi_{k,l}(t) : k, l \in \mathbb{Z}\}$ und Synthese-Wavelet-Funktionensystem $\{\tilde{\psi}_{k,l}(t) : k, l \in \mathbb{Z}\}$ sind mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{k,l}(t)\tilde{\psi}_{k',l'}(t) = \delta(k \Leftrightarrow k')\delta(l \Leftrightarrow l') \quad (4.164)$$

folglich biorthogonale bzw. duale Basen des $L^2(\mathbb{R})$. Die korrespondierenden Signalzerlegungen und -rekonstruktionen können mit den schnellen Analyse- und Synthesearchivgorithmen aus

den Abbildungen 4.5 und 4.7 auf der Grundlage biorthogonaler Filterbänke durchgeführt werden.

Der Konstruktionsprozeß biorthogonaler Wavelet-Basen beinhaltet deutlich mehr Freiheitsgrade als der orthonormaler Wavelet-Basen. Die erweiterten Möglichkeiten sind dabei wesentlich auf verschiedene Faktorisierungen des Halbbandfilters $\hat{p}(z)$ zurückzuführen. Es können die spektralen Faktoren so gewählt werden, daß symmetrische Analyse- und Synthesefilterbänke entstehen. Gerade in der Bildverarbeitung ist das daraus resultierende Transformationsmerkmal der Linearphasigkeit der Elementarfunktionen besonders wichtig. Weiter sind Anzahl der verschwindenden Momente und Regularität für Analyse- und Synthesewavelets unterschiedlich wählbar. Da die Anzahl der verschwindenden Momente der Analyse-Wavelets die Regularität der Synthesewavelets beeinflußt, können biorthogonale Wavelet-Funktionensysteme konstruiert werden, die aufgrund einer großen Anzahl verschwindender Momente von $\psi(t)$ eine hohe Kompression ermöglichen und aufgrund der damit verbundenen geringen Welligkeit von $\tilde{\psi}(t)$ eine glatte Rekonstruktion garantieren.

In der Abbildung 4.9 ist beispielhaft eine Familie symmetrischer, biorthogonaler Spline-Wavelets endlicher Ausdehnung dargestellt. Solche Spline-Wavelets zeichnen sich dadurch aus, daß die Synthese-Skalierungsfunktion $\tilde{\phi}(t)$ ein B-Spline vom Grad $\tilde{M} \Leftrightarrow 1$ mit der endlichen Länge \tilde{M} ist. Eine B-Spline-Skalierungsfunktion ist Lösung einer Skalierungsgleichung für deren Interskalenkoeffizienten in der z -Domäne

$$\hat{h}_{\tilde{\phi}}(z) = \begin{cases} \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{\tilde{M}} & \text{für gerade } \tilde{M} \\ z^{-1/2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{\tilde{M}} & \text{für ungerade } \tilde{M} \end{cases} \quad (4.165)$$

gilt. Damit ist $\hat{h}_{\tilde{\phi}}(z)$ ein spektraler Faktor des Halbbandfilters $\hat{p}(z) = \hat{h}_{\phi}(z)\hat{h}_{\tilde{\phi}}(z)$ mit einer maximalen Anzahl von \tilde{M} Nullstellen bei $z = \Leftrightarrow 1$ und $\tilde{M} + 1$ Skalierungskoeffizienten. Der zweite spektrale Faktor $\hat{h}_{\phi}(z)$, der die zu $\tilde{\phi}(t)$ biorthogonale Analyse-Skalierungsfunktion $\phi(t)$ bestimmt, kann mit einer beliebigen geraden Nullstellenanzahl M bei $z = \Leftrightarrow 1$ für gerade \tilde{M} und ungeraden Nullstellenanzahl M für ungerade \tilde{M} gewählt werden. Das entstehende Produktfilter $\hat{h}_{\phi}(z)\hat{h}_{\tilde{\phi}}(z)$ muß dann ein Halbbandfilter $\hat{p}(z)$ nach Gleichung (4.154) mit $M \rightarrow (M + \tilde{M})/2$ oder $M \rightarrow (M + \tilde{M})/2 + 1$ und $\hat{p}'(z) = 0$ sein. In der Abbildung 4.9 sind die B-Spline-Skalierungsfunktion für $\tilde{M} = 3$, die dazu biorthogonalen Analyse-Skalierungsfunktionen und die korrespondierenden Analyse- und Synthese-Mother-Wavelets für $M = 5, 7, 9$ Nullstellen von $\hat{h}_{\phi}(z)$ bei $z = \Leftrightarrow 1$ dargestellt.

Die Konstant-Q-Charakteristik der Wavelet-Transformation ist, wie in den vorangegangenen Kapiteln erläutert, vorteilhaft zur Analyse und kompakten Beschreibung vieler in der Natur auftretender Signale verwendbar. Dabei ist das spektrale Transformationsmerkmal der Filterung konstanter Güte ursächlich in der dyadischen Filterbankstruktur der zugrunde liegenden Multi-Skalen-Analyse begründet. Eine flexiblere Zeit-Frequenz-Transformation auf der Basis der Wavelet-Theorie kann durch Zerlegung beliebiger Frequenzbänder erreicht werden. Werden die Frequenzbandzerlegungen in Abhängigkeit der Eigenschaften des zu

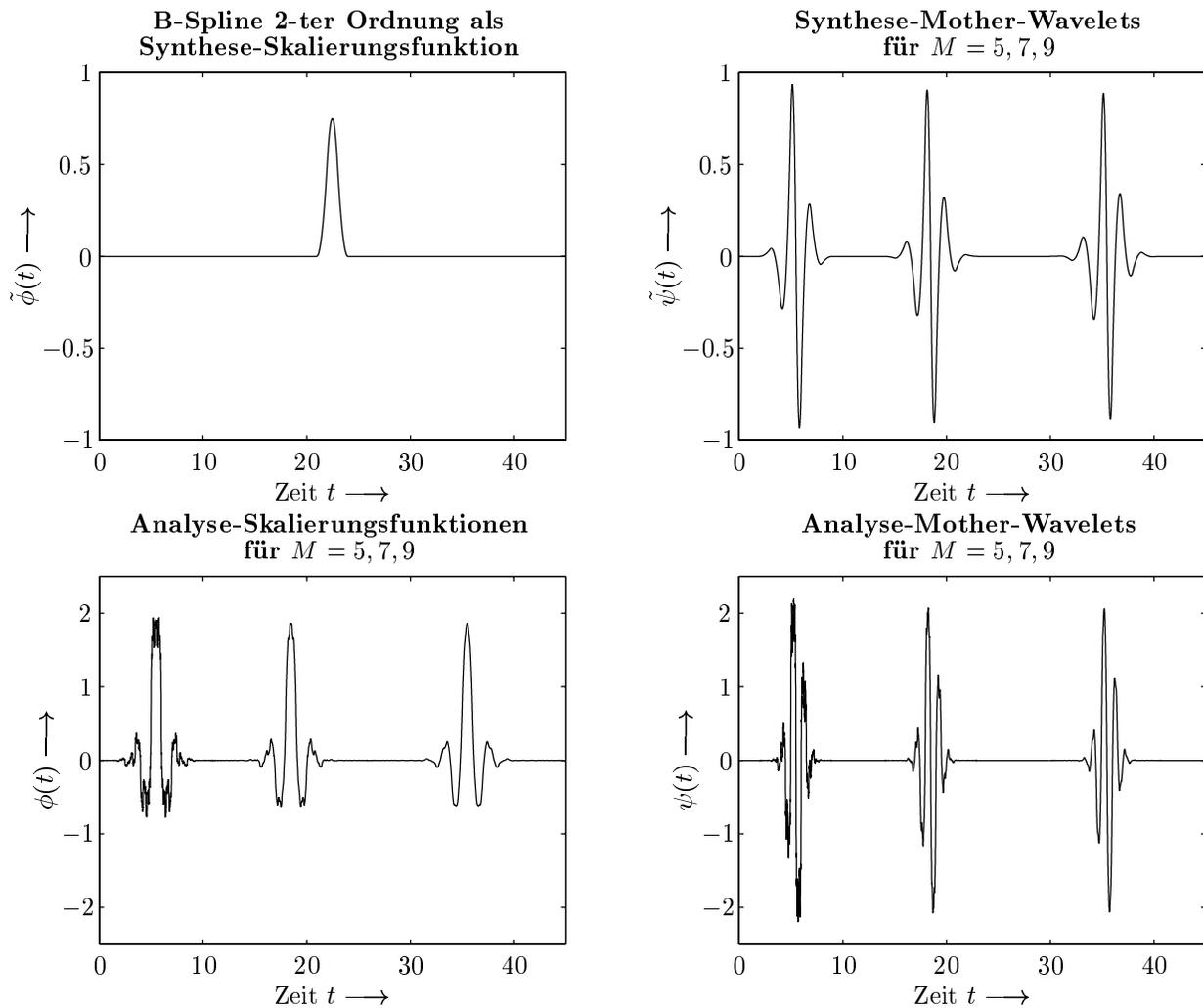


Abbildung 4.9: Eine Spline-Wavelet-Familie mit einem B-Spline $\tilde{M} \Leftrightarrow 1 = 2$ -ter Ordnung als Synthese-Skalierungsfunktion $\tilde{\phi}(t)$ und möglichen Analyse-Skalierungsfunktionen sowie Analyse- und Synthese-Mother-Wavelets für $M = 5, 7, 9$ Nullstellen von $\hat{h}_\phi(z)$ bei $z = \Leftrightarrow 1$. Zu erkennen ist, daß ein steigendes M hauptsächlich eine Glättung der Funktionen und keine Formveränderung erzeugt.

analysierenden Signals durchgeführt, so ist die zeitlich-spektrale Struktur der korrespondierenden Transformation an die Beschaffenheit des Signals anpaßbar und prinzipiell eine gleichwertige Signalbeschreibung durch eine geringere Anzahl von Entwicklungskoeffizienten möglich [33, 35–38, 107, 108]. Eine solche Abbildung wird als Wavelet-Paket-Transformation bezeichnet [109–111]. Abbildung 4.10 zeigt neben dem dyadischen Filterbaum zwei alternative Filterbaumkonstruktionen und die damit zu assoziierenden Phasenraumdiagramme, welche die zeitlich-spektrale Struktur der zugehörigen Wavelet-Paket-Transformationen charakterisieren. Die Entwicklungskoeffizienten ergeben sich hier durch eine Innere-Produkt-Bildung $c_{k,l,\zeta} = \langle s(t), \psi_{k,l,\zeta}(t) \rangle$ mit durch drei Indizes gekennzeichnete Elementarfunktionen

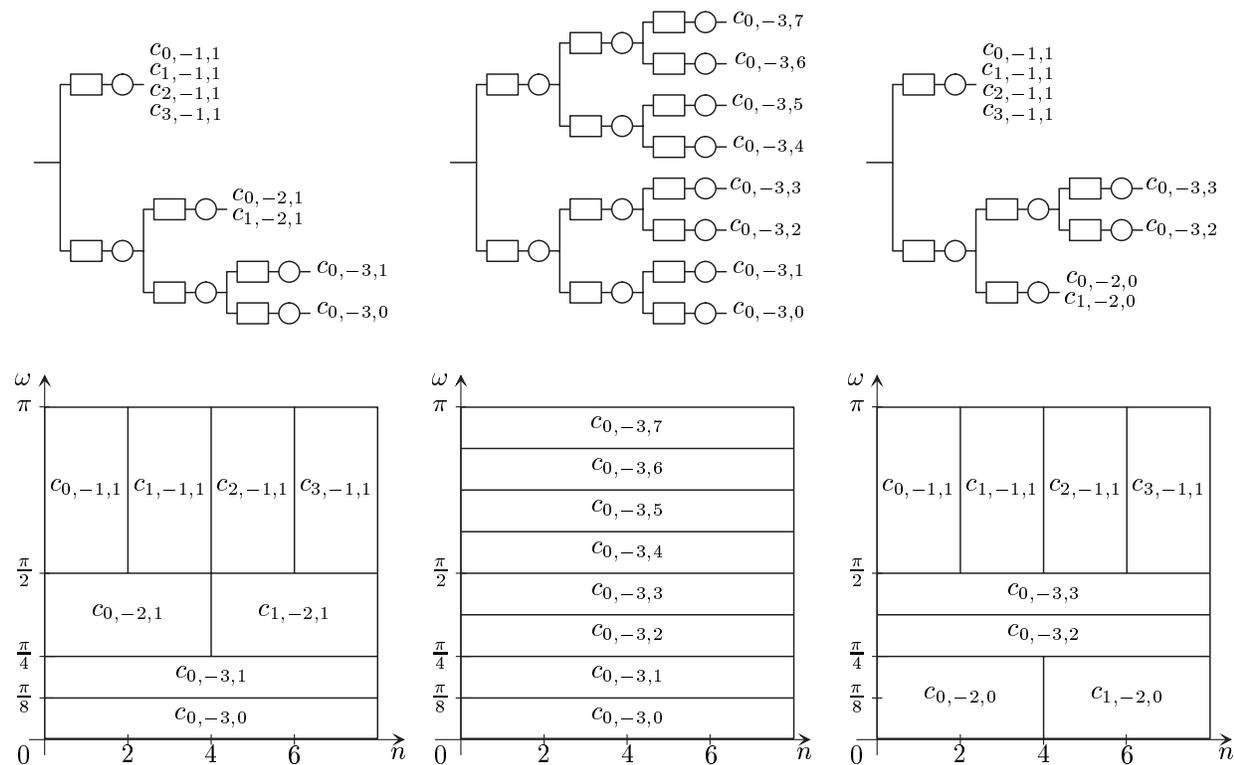


Abbildung 4.10: Der dyadische Filterbaum der Wavelet-Transformation und zwei alternative Wavelet-Paket-Bäume sowie die korrespondierenden Phasenraumdiagramme. Der mittlere Filterbaum erzeugt eine mit der Kurzzeit-Fourier-Transformation vergleichbare Aufteilung der Zeit-Frequenz-Ebene. Der rechte Filterbaum ermöglicht eine spektral genauere Lokalisierbarkeit von Frequenzkomponenten im Intervall $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

$\psi_{k,l,\zeta}(t)$ aus dem Wavelet-Paket-Funktionensystem

$$\{\psi_{k,l,\zeta}(t) : k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \zeta = 0, 1, 2, \dots, 2^{-l} \Leftrightarrow 1\}. \quad (4.166)$$

Dabei wird ζ als Modulationsindex bezeichnet, da er näherungsweise proportional zur Anzahl der Oszillationen der zugehörigen Basisfunktion ist.

Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten und die Signalrekonstruktion sind effektiv mit der modifizierten schnellen Wavelet-Transformation wie beispielhaft in Abbildung 4.10 dargestellt durchführbar. Die explizite Beschreibung jeder Wavelet-Paket-Elementarfunktion in Abhängigkeit des Mother-Wavelets oder der Skalierungsfunktion gestaltet sich im allgemeinen allerdings schwierig [73, 110, 111], was aber keine Einschränkungen bezüglich des Einsatzes in Anwendungen darstellt. Abbildung 4.11 zeigt beispielhaft D2-Wavelet-Paket-Elementarfunktionen und die zugehörigen Spektren.

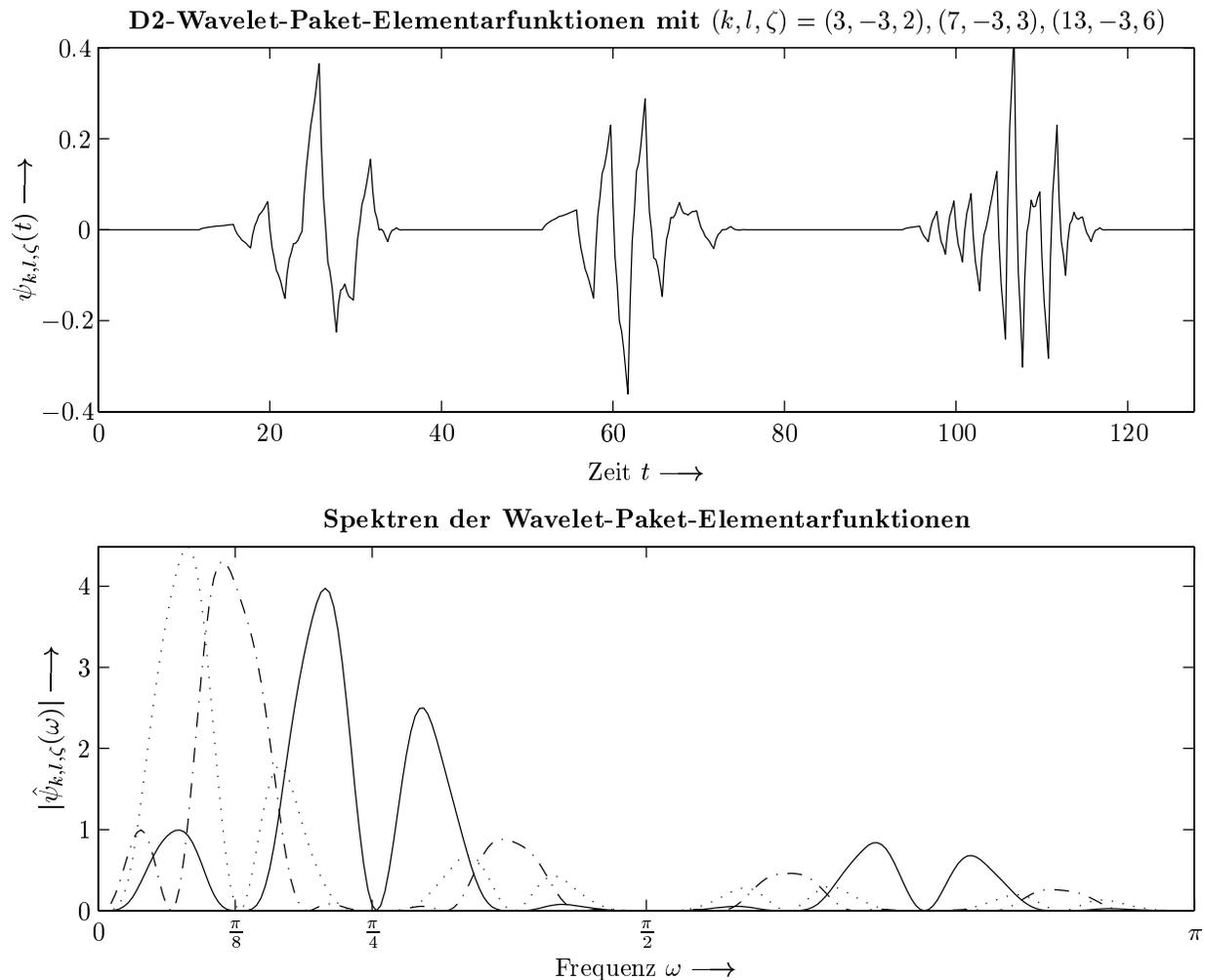


Abbildung 4.11: Einige aus der Daubechies $D2$ -Familie abgeleitete Wavelet-Paket-Elementarfunktionen mit zugehörigen Spektren. Dabei sind die Spektren den zeitlichen Darstellungen von links nach rechts zugeordnet.

4.9 Zusammenfassung

Um die Eigenschaften und Merkmale der Wavelet-Transformation analysierende Betrachtung abzuschließen, soll ein zusammenfassender Überblick über die wichtigsten Charakteristiken der Wavelet-Theorie, die in den Kapiteln 2, 3 und 4 unter besonderer Berücksichtigung einer Verwendung in Übertragungssystemen herausgestellt wurden, gegeben werden.

- Die Wavelet-Transformation ist eine lineare Transformation, deren Elementarfunktionen sich durch die Operationen Translation und Skalierung aus einer Prototypfunktion ableiten lassen und die eine orthonormale Basis der Menge aller Energiesignale bilden.
- Die Elementarfunktionen sind zeitlich und spektral lokalisiert, so daß verbunden zeitlich-spektrale Signalkomponenten leicht im Bildbereich der Transformation erkennbar

sind, und eine genaue Zuordnung möglich ist. Dabei weist das Zeit-Bandbreite-Produkt der Wavelets ein lokales Minimum hinsichtlich der Filter- und damit Elementarfunktionenlänge auf.

- Die Wavelet-Transformation verfügt über eine Konstant-Q-Filtercharakteristik.
- Es sind orthonormale und biorthogonale Signalzerlegungen unter Beibehaltung der Datenmenge bei gleichzeitiger zeitlich-spektraler Lokalisierbarkeit möglich.
- Die Wavelet-Theorie ist eng mit dem Konzept der Multi-Skalen-Analyse verknüpft, die eine Zerlegung in Signalapproximationen und -details ermöglicht. Hieraus resultieren die schnelle Wavelet-Transformation als effektiver Algorithmus zur Berechnung der Transformationskoeffizienten und die Verbindung zu orthonormalen und perfekt rekonstruierenden Filterbänken.
- Wavelets mit bestimmten Eigenschaften können unter Berücksichtigung zusätzlicher Bedingungen ausgehend von konjugierten Quadratur-Spiegel-Filtern endlicher Länge entworfen werden.
- Die Anzahl der verschwindenden Wavelet-Momente ist maßgeblich bestimmend für das Approximations- und Kompressionsverhalten der Transformation sowie die Regularität der Basisfunktionen.
- Es können symmetrische biorthogonale Wavelets konstruiert werden.
- Wavelet-Pakete ermöglichen eine universellere zeitlich-spektrale Signalzerlegung.

Neben den hier betrachteten aus reellwertigen FIR-Filterbänken hervorgehenden Wavelets existieren andere Wavelet-Familien, wie Meyer- und Lemarié-Battle-Wavelets [81], die mit IIR-Filtern in Verbindung stehen. Für IIR-Filter kann allerdings der schnelle Transformationsalgorithmus für endliche Verzögerungen nicht fehlerfrei implementiert werden, so daß sie für die im folgenden vorgestellten Applikationen nicht geeignet sind.

Das Kapitel 5 zeigt Anwendungen im Kontext der Übertragungstechnik auf, in denen Wavelets und die zugehörigen Filterbänke unter Berücksichtigung ihrer spezifischen Merkmale vorteilhaft eingesetzt werden können. Hieraus resultieren Verbesserungen gegenüber bestehenden Verfahren und neuartige Applikationen.