

# Kapitel 3

## Die kontinuierliche Wavelet-Transformation

Die Theorie der Wavelet-Transformation, wie sie heute etabliert ist, hat ihre primären Ursprünge in Arbeiten aus den achtziger Jahren dieses Jahrhunderts. Grundlegende Beiträge sind hier die Veröffentlichungen [14, 15, 17, 42, 61–73] von J. Morlet, S. G. Mallat, Y. Meyer und I. Daubechies. Neben dem Gewinn neuer Erkenntnisse wurden in vielen Publikationen aus dieser Zeit bereits bekannte Theorien und Verfahren wiederentdeckt und disziplinübergreifende Parallelen und Zusammenhänge erkannt [74]. Die Interpretation dieser bisher weniger beachteten Beziehungen in einem anderen Kontext und die zusätzlich gefundenen Erkenntnisse fügten sich sukzessiv zu einer umfassenden, fundierten und leistungsfähigen neuen Wissenschaft zusammen, deren wichtigste Wurzeln sich in der Mathematik, der Physik und der Signalverarbeitung befinden. Bis heute etablierte sich die Wavelet-Transformation besonders in der Signalverarbeitung als ein leistungsfähiges Werkzeug. Typische Einsatzgebiete sind hier Anwendungen aus den Bereichen der

- Analyse und Diagnose,
- Codierung, Quantisierung und Kompression,
- Übertragung und Speicherung,
- Aufbereitung, Rekonstruktion und Synthese

von Signalen.

Die für diese Entfaltung fundamentale Entwicklung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation durch J. Morlet ging dabei ursprünglich aus der Analyse seismischer Daten und deren spezifischen Eigenschaften hervor. Typischerweise erstrecken sich tieffrequente Komponenten geophysikalischer Signale über einen relativ langen Zeitraum, während hochfrequente Anteile eine vergleichsweise kurze Ausdehnung haben. Beide charakteristischen Zeit-Frequenz-

Merkmale können allerdings von konventionellen Kurzzeit-Fourier-Transformationen, wie in Kapitel 2 gezeigt, nicht gemeinsam aufgelöst werden. Zur angemessenen Signaluntersuchung ist ein grundlegend andersartiges Analysekonzept notwendig.

Aufgrund ihrer Bedeutung für die Theorie der Wavelet-Transformation verdient diese nicht nur seismische Daten kennzeichnende Signaleigenschaft eine genauere Betrachtung. Bezeichnend ist hier eine Signalkomposition aus elementaren Bestandteilen, deren spektrale Lage und Ausdehnung abhängig von ihrer zeitlichen Länge ist. Dabei sind tieffrequente Komponenten relativ schmalbandig und zeitlich weit ausgedehnt, während hochfrequente Anteile verhältnismäßig breitbandig und zeitlich wenig ausgedehnt sind. Hieraus resultiert qualitativ eine logarithmische spektrale Zusammensetzung des Signals. Die Bandbreiten der elementaren Komponenten sind proportional zu ihren Mittenfrequenzen. Diese Eigenschaft wird im Filterbankkontext als Filterung konstanter Güte  $Q$  bezeichnet, da das Verhältnis der Mittenfrequenz eines Filterkanals zu seiner Bandbreite  $Q = \text{const.}$  für alle Kanäle ist.

Es ist bemerkenswert, daß eine Vielzahl von in der Natur auftretenden Phänomenen in guter Näherung eine Konstant- $Q$ -Struktur aufweisen, so daß diese keinesfalls einen konstruierten Sonderfall darstellt. Beispielsweise sind relativ großflächige Bereiche mit nahezu gleichbleibenden Farb- oder Helligkeitsverläufen und lokalisierte Kanteneffekte, dort, wo verschiedene Objekte aneinander grenzen, typische Bestandteile von Bildern. Auch einige Sprachelemente zeigen annähernd ein Konstant- $Q$ -Verhalten. So wird etwa der Vokal „o“ im wesentlichen durch eine schmalbandige, relativ lange andauernde Schwingung im Vokaltrakt mit der tiefsten Resonanzfrequenz, des sogenannten ersten Formanten, erzeugt. Dagegen werden bestimmte Konsonanten wie „p“ oder „t“ durch impulsive Schwingungsverläufe hervorgerufen, die zeitlich kompakte, hochfrequente Signalanteile zur Folge haben [75, 76].

Transformiert man ein Signal mit dem Ziel der Analyse bestimmter Charakteristika, so werden diese im Bildbereich um so deutlicher, je besser die Eigenschaften des der Transformation zugrunde liegenden Funktionensystems an die zu beobachtenden Merkmale angepaßt sind. Morlet stimmte deshalb die Eigenschaften der Elementarfunktionen und die Struktur seines Funktionensystems auf die Konstant- $Q$ -Charakteristik der zu analysierenden Signale ab. Alternativ zur Kurzzeit-Fourier-Transformation konstruierte er das Wavelet-Funktionensystem durch Translation und Dilatation einer zeitlich lokalisierten Prototypfunktion  $\psi(t)$ , die als Mother-Wavelet bezeichnet wird und eine Bandpaßcharakteristik aufweist. Das so entstandene Funktionensystem

$$\mathcal{W}_\psi = \left\{ \psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left( \frac{t-b}{a} \right) : b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^{\neq 0} \right\} \quad (3.1)$$

beinhaltet Elementarfunktionen konstanter Form mit einer Ausdehnung, die sich proportional zum Dilatationsparameter  $a$  verhält und einer Bandbreite, die invers proportional zu  $a$  ist.  $\mathcal{W}_\psi$  verfügt damit über eine logarithmische spektrale Struktur, so daß die korrespondierende Wavelet-Transformation als Konstant- $Q$ -Analyse bezeichnet werden kann.

Unabhängig von dieser zur Naturbeschreibung vorteilhaften Eigenschaft berücksichtigt die Wavelet-Transformation eine weitere wichtige Besonderheit, die sie für die verbundene zeitlich-spektrale Signalanalyse empfiehlt. Da die Mittenfrequenz einer Signalkomponente direkt proportional zur Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit ist, benötigt man prinzipiell zur Analyse eines hochfrequenten Anteils ein geringeres Observationsintervall als zur Analyse eines tieffrequenten Anteils [77]. Diese zeitliche Analysestruktur bildet sich über die Unschärfere-lation wiederum in eine qualitativ logarithmische Unterteilung des Frequenzbereichs ab.

### 3.1 Konstruktion und Inversion der kontinuierlichen Wavelet-Transformation

Die kontinuierliche Wavelet-Transformation eines Signals  $s(t)$  bezüglich eines Mother-Wavelets  $\psi(t) = \psi_{0,1}(t)$  mit  $\|\psi(t)\| = 1$ ,  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , entwickelt  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  in das Funktionensystem  $\mathcal{W}_\psi$  durch Innere-Produkt-Bildung nach Gleichung (2.2) mit jeder Elementarfunktion

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^{\neq 0}. \quad (3.2)$$

Demnach bildet  $\mathcal{W}_\psi$  die eindimensionale Signaldarstellung bezüglich der Zeit durch

$$\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a) = \langle s(t), \psi_{b,a}(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.3)$$

ab auf eine durch Translation  $b$  und Skalierung (Dilatation)  $a$  beschriebene zweidimensionale Signalrepräsentation. Man spricht hier von der Zeit-Skalierungs-Ebene der Wavelet-Transformation. Durch die Anwendung der Parsevalschen Identität nach Gleichung (2.15) läßt sich die kontinuierliche Wavelet-Transformierte auch alternativ als Funktion der Fourier-Transformierten  $\hat{s}(\omega)$  und  $\hat{\psi}_{b,a}(\omega) = \mathcal{F}\{\psi_{b,a}(t)\}(\omega)$  darstellen. Es gilt

$$\mathcal{W}_\psi\{\hat{s}(\omega)\}(b, a) = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{s}(\omega), \hat{\psi}_{b,a}(\omega) \rangle = \frac{\sqrt{|a|}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega) \hat{\psi}^*(a\omega) e^{j b \omega} d\omega. \quad (3.4)$$

Wie auch schon bei den in Kapitel 2 diskutierten Transformationen ist eine eindeutige Rekonstruktion des Signals  $s(t)$  aus der Bildbereichsbeschreibung  $\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a)$  in vielen Anwendungen erforderlich. Von grundlegender Bedeutung für eine Berechnung dieser Inversion ist dabei die Beschreibung des Inneren Produktes zweier Signale  $\langle s_1(t), s_2(t) \rangle$  als Funktion ihrer Transformationen  $\mathcal{W}_\psi\{s_1(t)\}(b, a)$  und  $\mathcal{W}_\psi\{s_2(t)\}(b, a)$ . Für die Fourier-Transformation wird das Innere Produkt im Zeitbereich durch das Parsevalsche Theorem in ein Inneres Produkt im Frequenzbereich transformiert. Gesucht wird demnach das Pendant der Wavelet-Transformation zur Parsevalschen Identität. Für das Innere Produkt der Abbildun-

gen  $\mathcal{W}_\psi\{s_1(t)\}(b, a)$  und  $\mathcal{W}_\psi\{s_2(t)\}(b, a)$  mit den Fourier-Transformierten

$$\mathcal{F}\{\mathcal{W}_\psi\{s_1(t)\}(b, a)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{s_1(b) * \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{-b}{a}\right)\right\}(\omega) = \sqrt{|a|}\hat{s}_1(\omega)\hat{\psi}^*(a\omega), \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}\{\mathcal{W}_\psi\{s_2(t)\}(b, a)\}(\omega) = \mathcal{F}\left\{s_2(b) * \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{-b}{a}\right)\right\}(\omega) = \sqrt{|a|}\hat{s}_2(\omega)\hat{\psi}^*(a\omega) \quad (3.6)$$

gilt nach Gleichung (2.15)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_\psi\{s_1(t)\}(b, a)\mathcal{W}_\psi^*\{s_2(t)\}(b, a)db = \frac{|a|}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_1(\omega)\hat{s}_2^*(\omega)|\hat{\psi}(a\omega)|^2d\omega. \quad (3.7)$$

Die Multiplikation der Gleichung (3.7) mit  $1/a^2$  und eine anschließende Integration über den Parameter  $a$ , führt zu

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_\psi\{s_1(t)\}(b, a)\mathcal{W}_\psi^*\{s_2(t)\}(b, a)\frac{dbda}{a^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_1(\omega)\hat{s}_2^*(\omega)d\omega \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{|a|}da. \quad (3.8)$$

Substituiert man hier im zweiten Integralterm der rechten Seite das Argument  $a\omega$  und integriert, so erhält man eine nur von  $\hat{\psi}(\omega)$  abhängige Konstante  $C_\psi$ , für die die sogenannte Zulässigkeitsbedingung

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega < \infty \quad (3.9)$$

gelten muß. Erst dann ist die Umformung der Gleichung (3.7) zur Gleichung (3.8) gültig. Der erste Integralterm der rechten Seite kann über das Parsevalsche Theorem durch das Innere Produkt  $\langle s_1(t), s_2(t) \rangle$  ersetzt werden, so daß der gesuchte Zusammenhang gefunden ist. Es gilt für die „Parsevalsche Identität“ in der Zeit-Skalierungs-Ebene

$$C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_\psi\{s_1(t)\}(b, a)\mathcal{W}_\psi^*\{s_2(t)\}(b, a)\frac{dbda}{a^2}. \quad (3.10)$$

Für  $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$  folgt daraus

$$C_\psi \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a)|^2 \frac{dbda}{a^2}. \quad (3.11)$$

Damit ist die Wavelet-Transformation bis auf einen konstanten Faktor isometrisch.

Anhand der Beziehung (3.10) ist auch die logarithmische Skalierungsstruktur der Wavelet-Transformation erkennbar. Die Transformierten  $\mathcal{W}_\psi\{s_1(t)\}(b, a)$  und  $\mathcal{W}_\psi^*\{s_2(t)\}(b, a)$  gehen jeweils über eine zur Skalierung invers proportionale Gewichtung mit  $a^{-1}$  und damit mit einer zur Frequenz proportionalen Gewichtung in das Integral ein.

Die inverse Wavelet-Transformation  $\mathcal{W}_\psi^{-1}$  läßt sich aus der Gleichung (3.10) durch die Wahl von  $s_2(\tau)$  als translatierten Dirac-Impuls  $\delta(\tau - t)$  mit  $\mathcal{W}_\psi\{\delta(\tau - t)\}(b, a) = \psi_{b,a}(t)$  ableiten. Es ist

$$s(t) = \mathcal{W}_\psi^{-1}\{\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a)\}(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a) \psi_{b,a}(t) \frac{dbda}{a^2}. \quad (3.12)$$

Nachdem nun formal die Definitionen der kontinuierlichen Wavelet-Transformation (3.3) und ihrer Inversen (3.12) getroffen sind, soll das grundlegende, die gesamten Eigenschaften des Abbildungspaares  $\mathcal{W}_\psi, \mathcal{W}_\psi^{-1}$  bestimmende Mother-Wavelet  $\psi(t)$  näher betrachtet werden. Da die Wavelet-Transformation eine lokale Spektraltransformation ist, müssen ihre Elementarfunktionen  $\psi_{b,a}(t)$  in der Zeit-Frequenz-Ebene lokalisierbar sein und damit eine endliche effektive Ausdehnung  $\Delta_{t,\psi_{b,a}}$  und eine endliche effektive Bandbreite  $\Delta_{\omega,\psi_{b,a}}$  aufweisen. Betrachtet man die Berechnung der Wavelet-Transformation in Anlehnung an die Kurzzeit-Fourier-Transformation als Fensterung mit den parametrisierten Fensterfunktionen  $w(t) = \psi_{b,a}(t)$  und anschließender Integration, so impliziert die zeitlich-spektrale Lokalisierbarkeit die Mengenzugehörigkeiten

$$t\psi(t) \in L^2(\mathbb{R}), \quad (3.13)$$

$$\omega\hat{\psi}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (3.14)$$

analog zum Gleichungspaar (2.47). Erfüllt das Mother-Wavelet die Gleichung (3.13), so folgt über die Schwarzsche Ungleichung [77], daß  $\psi(t)$  auch absolut integrierbar ist. Nach einem Theorem der Fourier-Theorie ist damit die Transformierte  $\hat{\psi}(\omega)$  eine stetige Funktion [27]. In Kombination mit der Zulässigkeitsbedingung (3.9) läßt sich hieraus  $\hat{\psi}(0) = 0$  oder äquivalent

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3.15)$$

ableiten. Die Gleichungen (3.14) und (3.15) implizieren, daß  $\psi(t)$  und damit alle Elementarfunktionen  $\psi_{b,a}(t)$  Bandpaßfunktionen sind. Auf der Basis der angestellten Überlegungen kann nun eine Definition des zentralen Begriffs des Wavelets gegeben werden.

**Definition 3.1.1 (zulässiges Wavelet)**

*Eine quadratisch integrierbare Funktion  $\psi_{b,a}(t) \in L^2(\mathbb{R})$ , die durch Translation und Dilation nach Gleichung (3.2) aus einer zeitlich lokalisierten Bandpaßfunktion  $\psi(t)$  mit der Zulässigkeitskonstanten  $C_\psi < \infty$  hervorgeht, wird als zulässiges Wavelet bezeichnet.*

Diese Definition soll dabei nicht im mathematisch exakten Sinne verstanden werden, da eine solche Begriffsbestimmung für die Bezeichnung Wavelet in Anbetracht der unzähligen legitimen Ansätze im Kontext dieser Theorie nicht existieren kann [13]. Der Großteil der in dieser Arbeit als Wavelets bezeichneten Funktionen erfüllt aber die Definition 3.1.1, die darüber hinaus eine notwendige Voraussetzung für die Beschreibung spezifischer Wavelets ist.

Beispiele für Mother-Wavelets, die sich im Kontext der kontinuierlichen Wavelet-Transformation etabliert haben sind

- das Morlet-Wavelet

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \pi^{-1/4} \left( e^{-j\omega_0, \psi t} - e^{-\omega_0^2, \psi/2} \right) e^{-t^2/2} \quad \text{mit} \\ \hat{\psi}(\omega) &= \sqrt{2}\pi^{1/4} \left( e^{-(\omega - \omega_0, \psi)^2/2} - e^{-(\omega^2 + \omega_0^2, \psi)/2} \right),\end{aligned}\tag{3.16}$$

- das Mexican-Hat-Wavelet (die zweite Ableitung der Gauß-Funktion)

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}(1 - t^2)e^{-t^2/2} \quad \text{mit} \quad \hat{\psi}(\omega) = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\pi^{1/4}\omega^2 e^{-\omega^2/2},\tag{3.17}$$

- das Shannon-Wavelet

$$\psi(t) = \text{si} \left( \frac{2\pi t}{4} \right) \cos \left( \frac{3\pi t}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\omega| \in [\pi, 2\pi] \\ 0 & \text{für } |\omega| \notin [\pi, 2\pi] \end{cases},\tag{3.18}$$

- das Haar-Wavelet

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0 & \text{für } t \notin [0, 1] \end{cases} \quad \text{mit} \quad \hat{\psi}(\omega) = j\frac{4}{\omega} \sin^2 \left( \frac{\omega}{4} \right) e^{-j\omega/2}.\tag{3.19}$$

Dabei ist  $\text{si}(2\pi t) = \sin(2\pi t)/2\pi t$ . Diese Funktionen und ihre Spektren sind in der Abbildung 3.1 dargestellt. Für das Morlet-Wavelet wurde hier, wie in der Praxis oft üblich, eine Mittenfrequenz von  $\omega_{0, \psi} = 5$  gewählt. Dies hat zur Folge, daß das Verhältnis von erstem zu zweitem Maximum etwa 2 ist, und die zweiten, zur Einhaltung der Zulässigkeitsbedingung eingeführten Klammerterme in dem Gleichungspaar (3.16) in guter Näherung vernachlässigt werden können. Morlet favorisierte diese Wavelets in seinen ersten Arbeiten.

## 3.2 Eigenschaften der kontinuierlichen Wavelet-Transformation

Ist die effektive Ausdehnung des Mother-Wavelets durch  $\Delta_{t, \psi}$  mit dem Mittelpunkt  $t_{0, \psi}$  und die effektive Bandbreite durch  $\Delta_{\omega, \psi}$  mit der Mittenfrequenz  $\omega_{0, \psi}$  nach den Gleichungen (2.22) und (2.23) oder (2.25) gegeben, so gilt für die korrespondierenden Größen der durch Skalierung um  $a$  und Translation um  $b$  erzeugten Elementarfunktion  $\psi_{b, a}(t)$

$$\Delta_{t, \psi_{b, a}} = a\Delta_{t, \psi} \quad \text{mit} \quad t_{0, \psi_{b, a}} = b + at_{0, \psi},\tag{3.20}$$

$$\Delta_{\omega, \psi_{b, a}} = \frac{\Delta_{\omega, \psi}}{a} \quad \text{mit} \quad \omega_{0, \psi_{b, a}} = \frac{\omega_{0, \psi}}{a}.\tag{3.21}$$

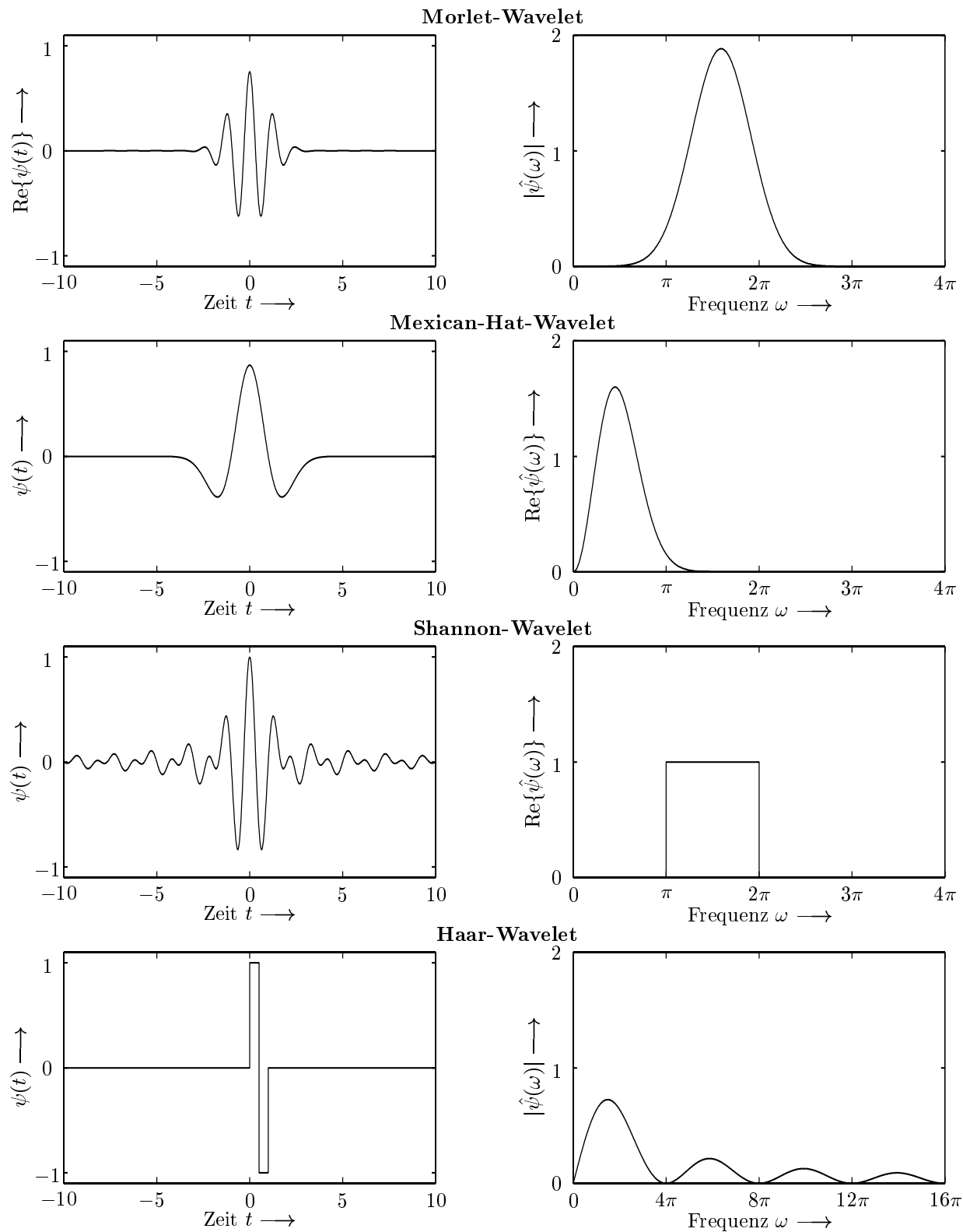


Abbildung 3.1: Die Mother-Wavelets des Typs Morlet, Mexican-Hat, Shannon, Haar und ihre Spektren. Für das komplexwertige Morlet-Wavelet wurde die Mittenfrequenz  $\omega_{0,\psi} = 5$  gewählt.

Somit können die Funktionen  $\psi_{b,a}(t)$  als Zeit-Frequenz-Atome mit den Rechteckkoordinaten

$$\left[ b + at_{0,\psi} - \frac{a\Delta_{t,\psi}}{2}, b + at_{0,\psi} + \frac{a\Delta_{t,\psi}}{2} \right] \times \left[ \frac{\omega_{0,\psi}}{a} - \frac{\Delta_{\omega,\psi}}{2a}, \frac{\omega_{0,\psi}}{a} + \frac{\Delta_{\omega,\psi}}{2a} \right] \quad (3.22)$$

in der Zeit-Frequenz-Ebene aufgefaßt werden. Im Unterschied zur Kurzzeit-Fourier-Transformation weist die Wavelet-Transformation ein von der spektralen Lage der korrespondierenden Zeit-Frequenz-Atome abhängiges Verhältnis von effektiver Ausdehnung zu effektiver Bandbreite auf. Hier ist die zeitlich-spektrale Struktur der Abbildung nicht durch die Konstante  $\Delta_{t,w}/\Delta_{\omega,w}$  als Charakteristikum der Fensterfunktion  $w(t)$ , sondern durch die konstante Güte

$$Q_\psi = \frac{\omega_{0,\psi}/a}{\Delta_{\omega,\psi}/a} = \frac{\omega_{0,\psi}}{\Delta_{\omega,\psi}} \quad (3.23)$$

als Charakteristikum des Mother-Wavelets  $\psi(t)$  gekennzeichnet. In der folgenden Abbildung 3.2 sind die Elementarfunktionen als Zeit-Frequenz-Atome in der Zeit-Frequenz-Ebene illustriert um die Konstant-Q-Eigenschaft der Wavelet-Transformation zu verdeutlichen. Dargestellt ist ein Mother-Wavelet  $\psi_{0,1}$  als Zeit-Frequenz-Atom mit Einheitsfläche in der durch  $t$  und  $\omega/\omega_{0,\psi}$  aufgespannten Zeit-Frequenz-Ebene und beispielhaft für  $(b, a) = (-2, 2)$ ,  $(1, 1/2)$ ,  $(2, 1/4)$  daraus abgeleitete Wavelets. Das inverse Verhältnis von Dilatation  $a$  zu Frequenz  $\omega$  wird hier offensichtlich.

Nachdem nun das Verhältnis von Skalierung zu Frequenz und damit die Bedeutung skaliert und translatierter Elementarfunktionen  $\psi_{b,a}(t)$  als Zeit-Frequenz-Atome in der Zeit-Frequenz-Ebene dargelegt wurden, soll sich der Signaldarstellung in der Zeit-Skalierungs-Ebene als adäquate graphische Beschreibung der Wavelet-Transformation eines Signals zugewandt werden. Neben der Linearität ist hier die Kovarianz bezüglich Translation und Dilatation des zu analysierenden Signals eine wesentliche Eigenschaft, die bei der Interpretation der kontinuierlichen Wavelet-Transformation in der Zeit-Skalierungs-Ebene zu berücksichtigen ist. Es gilt für eine feste Translation  $T$  und Dehnung  $A$

$$\mathcal{W}_\psi\{s(t - T)\}(b, a) = \mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b - T, a), \quad (3.24)$$

$$\mathcal{W}_\psi\left\{\frac{1}{\sqrt{A}}s\left(\frac{t}{A}\right)\right\}(b, a) = \mathcal{W}_\psi\{s(t)\}\left(\frac{b}{A}, \frac{a}{A}\right). \quad (3.25)$$

Weiter ist für die Abbildungsinterpretation von Bedeutung, welche Bildbereichsregion von einer zeitlich oder spektral lokalisierten Signalkomponente beeinflusst wird. Für die inverse Wavelet-Transformation ist dagegen entscheidend, auf welchen Zeit- und Frequenzbereich sich ein fester Bildpunkt durch die Signalsynthese abbildet. Die Abbildung 3.3 illustriert diese Zusammenhänge für positive Skalierungen  $a > 0$ . Dabei wurde angenommen, daß ein Wavelet  $\psi_{b,a}(t)$  nur im Bereich seiner effektiven Ausdehnung  $[b - a\Delta_{t,\psi}/2, b + a\Delta_{t,\psi}/2]$  mit  $t_{0,\psi} = 0$  und effektiven Bandbreite  $[\omega_{0,\psi}/a - \Delta_{\omega,\psi}/(2a), \omega_{0,\psi}/a + \Delta_{\omega,\psi}/(2a)]$  wesentliche Beiträge zum Transformationsintegral leistet. Ein auf den Zeitpunkt  $T$  lokalisierter Dirac-



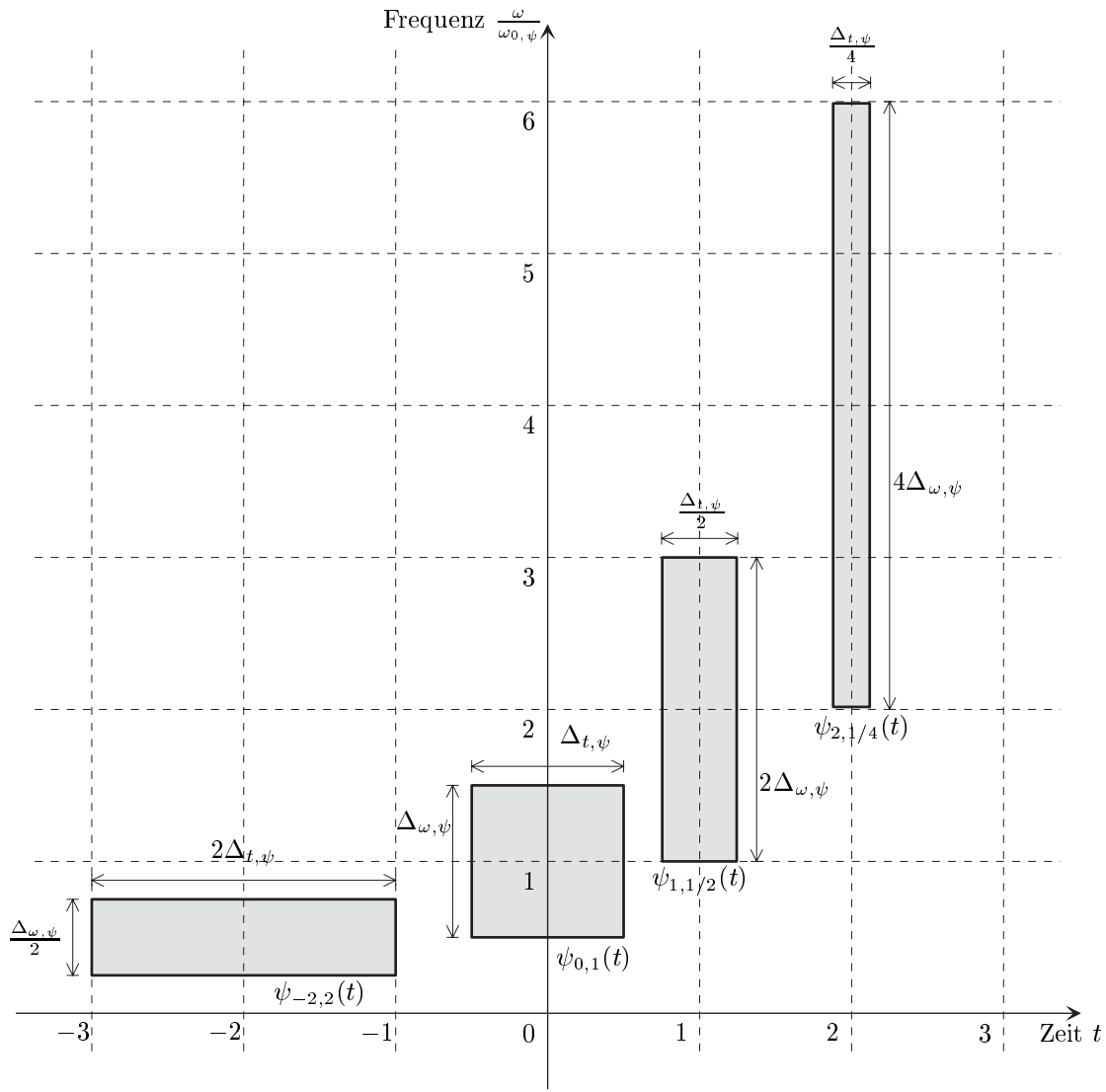


Abbildung 3.2: Die Elementarfunktionen  $\psi_{-2,2}(t)$ ,  $\psi_{0,1}(t)$ ,  $\psi_{1,1/2}(t)$  und  $\psi_{2,1/4}(t)$  als Zeit-Frequenz-Atome in der Zeit-Frequenz-Ebene.

Impuls  $s(t) = \delta(t - T)$  beeinflusst demnach die Entwicklungskoeffizienten im Gebiet

$$\mathcal{M}_b(T) = \left\{ (b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} : T - a \frac{\Delta_{t,\psi}}{2} \leq b \leq T + a \frac{\Delta_{t,\psi}}{2} \right\}, \quad (3.26)$$

und eine komplexe Exponentialfunktion  $s(t) = e^{j\Omega t}$  wirkt sich auf die Transformationskoeffizienten der Bildpunktmenge

$$\mathcal{M}_a(\Omega) = \left\{ (b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} : \frac{\omega_{0,\psi} - \Delta_{\omega,\psi}/2}{\Omega} \leq a \leq \frac{\omega_{0,\psi} + \Delta_{\omega,\psi}/2}{\Omega} \right\} \quad (3.27)$$

aus. In der Praxis ist zur Darstellung der relevanten Signalanteile oft eine logarithmische Einteilung der Skalierungsachse angebracht [78]. Die konische Gestalt des Einflußgebietes  $\mathcal{M}_b(T)$  bei linearer Skalierung nimmt dann einen exponentiellen Randverlauf an, wie anhand

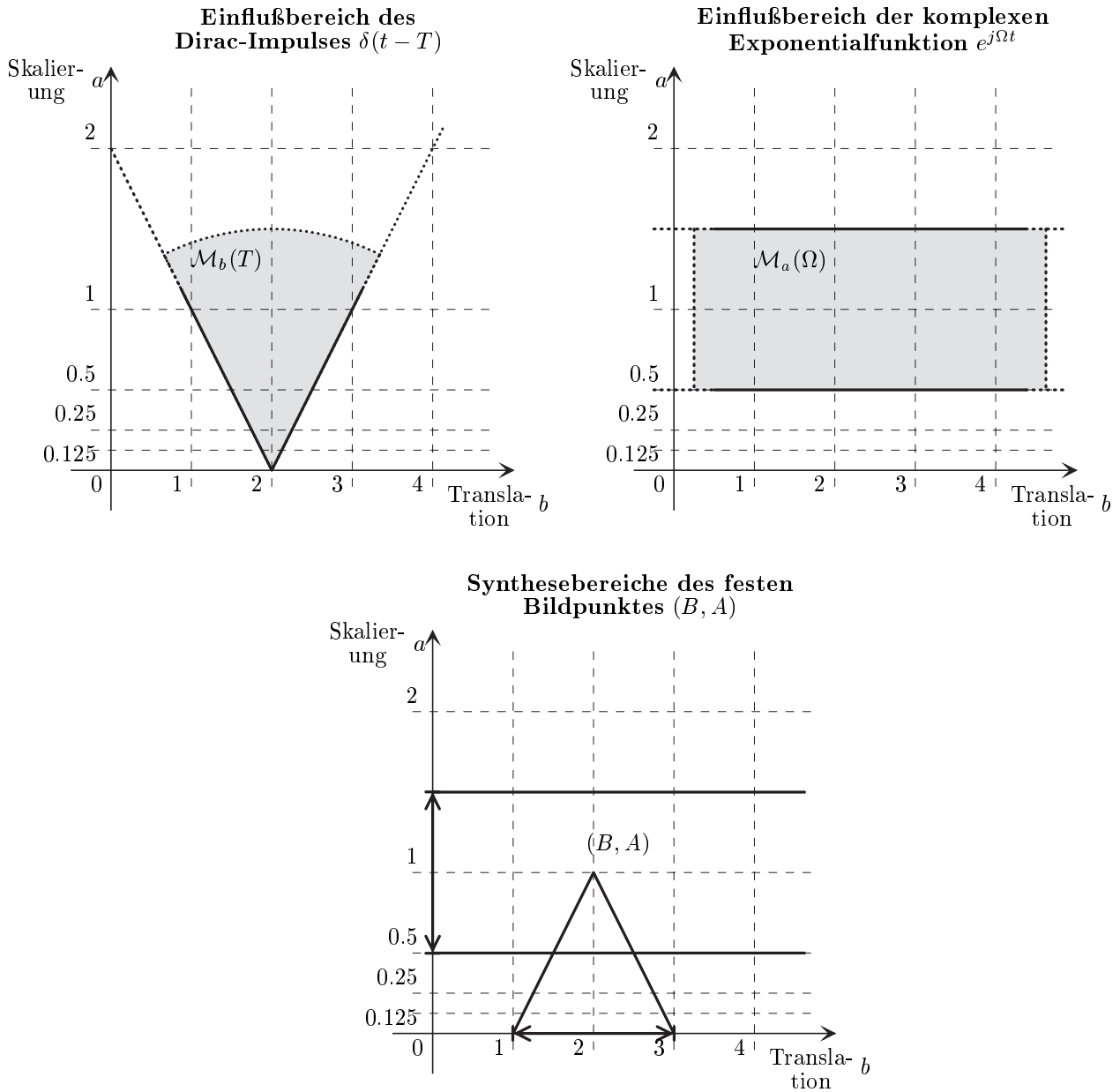


Abbildung 3.3: Die Einflußbereiche  $\mathcal{M}_b(T)$  und  $\mathcal{M}_a(\Omega)$  des zeitlich lokalisierten Dirac-Impulses  $\delta(t - T)$ ,  $T = 2$  und der spektral lokalisierten komplexen Exponentialfunktion  $e^{j\Omega t}$ ,  $\Omega = 1$ , für die kontinuierliche Wavelet-Transformation, sowie die Synthesebereiche für einen festen Bildpunkt  $(B, A)$ .

der Beispiele im nächsten Abschnitt zu erkennen ist. Für die zeitlichen und spektralen Synthesebereiche des festen Bildpunktes  $(B, A)$  gilt

$$\mathcal{M}_t(B, A) = \left\{ t \in \mathbb{R} : B - A \frac{\Delta_{t,\psi}}{2} \leq t \leq B + A \frac{\Delta_{t,\psi}}{2} \right\}, \quad (3.28)$$

$$\mathcal{M}_\omega(B, A) = \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \frac{\omega_{0,\psi} - \Delta_{\omega,\psi}/2}{A} \leq \omega \leq \frac{\omega_{0,\psi} + \Delta_{\omega,\psi}/2}{A} \right\}. \quad (3.29)$$

In der Abbildung 3.3 sind diese Zusammenhänge für die lokalisierten Funktionen  $\delta(t - 2)$ ,

$e^{jt}$  und  $\Delta_{t,\psi} = 2, t_{0,\psi} = 0, \Delta_{\omega,\psi} = 1, \omega_{0,\psi} = 1, B = 2, A = 1$  veranschaulicht. Unter Berücksichtigung dieser wichtigsten Merkmale und Eigenschaften werden nun einige der bereits in dem vorangegangenen Kapitel diskutierten Signale mit Hilfe der kontinuierlichen Wavelet-Transformation analysiert.

### 3.3 Signalanalyse mit der kontinuierlichen Wavelet-Transformation

Die folgende Abbildung 3.4 zeigt die kontinuierliche Wavelet-Transformierte des durch die Gleichung (A.19) gegebenen Chirp-Signals, des aus verschiedenen zeitlich begrenzten Cosinuskomponenten bestehenden Signals aus Gleichung (2.21) und des Signals

$$s(t) = \begin{cases} \sin(\Omega_1 t) + \sin\left(\frac{1}{2}\Omega_1 t\right) + \frac{50}{\sqrt{2\pi \cdot 30}} e^{-(t-500)^2/2 \cdot 30} & \text{für } t \in [0, T] \\ 0 & \text{für } t \notin [0, T] \end{cases} \quad (3.30)$$

mit  $\Omega_1 = 2\pi/100$  jeweils für  $T = 1000$ . Der Signalverlauf von  $s(t)$  als Überlagerung zweier Sinuskomponenten unterschiedlicher Frequenz und eines Gauß-Impulses stimmt dabei qualitativ mit dem in Abbildung 2.3 veranschaulichten Signal überein. Dargestellt ist der Betrag des Realteils der Wavelet-Transformierten  $|\operatorname{Re}\{\mathcal{W}_\psi(b, a)\}|$  für das Morlet-Mother-Wavelet nach Gleichung (3.16) mit  $\omega_{0,\psi} = 5$  bei einer logarithmischen Skalierung des Dilationsparameters  $a$ . Die Frequenzen der Sinus- und Cosinuskomponenten sind im Rahmen der Heisenbergschen Unschärferelation anhand der Betragsverteilung zu identifizieren. So liegen die durch die Sinus- und Cosinuskomponenten der Frequenzen  $\Omega_1 = 2\pi/100, \Omega_2 = 2\pi/40, \Omega_3 = 2\pi/20, \Omega_4 = 2\pi/10$  erzeugten lokalen Betragsmaxima nach dem Zusammenhang von Frequenz und Dilatation  $a = \omega_{0,\psi}/\omega$  bei den Skalierungswerten  $A_1 \approx 80, A_2 \approx 32, A_3 \approx 16, A_4 \approx 8$ . Darüber hinaus bewirken monofrequente Signalanteile in  $s(t)$  mit der doppelten Frequenz hinsichtlich der Translation auftretende Nullstellen in der Transformierten  $\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a)$ , wie in der Abbildung 2.3 ebenfalls zu erkennen ist. Der entscheidende Vorteil der Wavelet-Transformation gegenüber Kurzzeit-Fourier-Transformationen wird in der untersten Illustration deutlich. Der durch den Gauß-Impuls gegebene impulsive Signalanteil ist trotz guter spektraler Auflösung der Sinuskomponenten zeitlich genau lokalisierbar. Er erzeugt, wie auch die Diskontinuitäten, die an den Schnittstellen der Cosinuskomponenten in der zweiten Illustration auftreten, von null verschiedene Entwicklungskoeffizienten in einem sich proportional zur Skalierung verbreiternden Gebiet.

### 3.4 Diskretisierung der Transformationsparameter

Wie auch schon die im Kapitel 2 behandelte Kurzzeit-Fourier-Transformation kommt auch die Wavelet-Transformation in Anwendungsgebieten zum Einsatz, die möglichst wenig red-

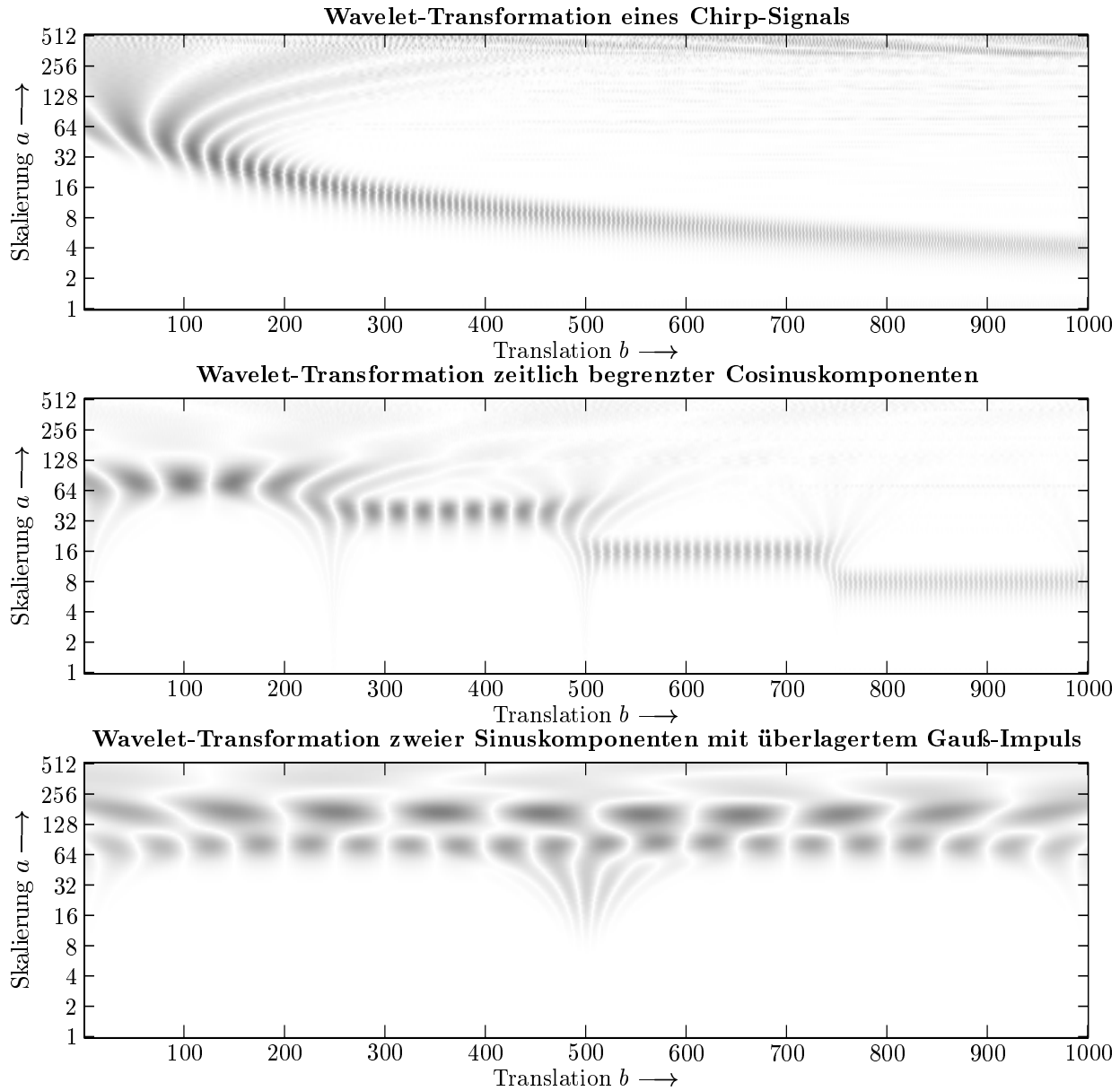


Abbildung 3.4: Die kontinuierliche Wavelet-Transformation  $|\operatorname{Re}\{\mathcal{W}_\psi(b, a)\}|$  der nichtstationären Signale nach Gleichung (A.19), (2.21) und (3.30) für das Morlet-Mother-Wavelet.

undanzbehaftete Signaldarstellungen benötigen. Der Redundanzgehalt einer Signalbeschreibung durch die kontinuierliche Wavelet-Transformation lässt sich anhand der Abhängigkeit zweier benachbarter Transformationskoeffizienten  $\mathcal{W}\{s(t)\}(b, a)$  und  $\mathcal{W}\{s(t)\}(b', a')$  bewerten [17]. Eine quantitative Aussage über diese wechselseitige Beziehung macht die Reproduktionskerngleichung

$$\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b', a') K(b, a; b', a') \frac{db' da'}{a'^2} \quad (3.31)$$

mit dem Reproduktionskern

$$K_\psi(b, a; b', a') = \mathcal{W}_\psi\{\psi_{b', a'}(t)\}(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{b', a'}(t) \psi_{b, a}^*(t) dt \quad (3.32)$$

als Wavelet-Transformierte des Wavelets  $\psi_{b', a'}(t)$  selbst. Die Lokalisationseigenschaften des Reproduktionskerns lassen dabei erkennen, wie stark benachbarte Werte bezüglich Translation und Skalierung miteinander korrelieren und welche Punkte in der Zeit-Skalierungsebene unabhängige Signalinformationen enthalten.

Um nun eine angemessene Datenreduktion zu erreichen, ist die Berechnung der Transformationskoeffizienten für eine möglichst beschränkte Menge von Translations- und Dilatationsparametern sinnvoll. Vergleichbar mit der Diskretisierung der Translations- und Modulationsparameter  $b \rightarrow kT$  und  $\omega \rightarrow l\Omega$  bei der Gabor-Reihenentwicklung werden hier die Transformationsparameter  $b$  und  $a$  der Struktur der Wavelet-Transformation angepaßt diskretisiert. Dabei sind allerdings Randbedingungen einzuhalten, die für den Einsatz in vielen Signalverarbeitungsalgorithmen unumgänglich sind. So soll neben einer effizienten Analyse durch Innere-Produkt-Bildung mit einer reduzierten Menge von Wavelet-Elementarfunktionen auch eine numerisch stabile Signalsynthese mit vorteilhaften Synthesefunktionen möglich sein.

In einem ersten Schritt kann die angestrebte Datenreduktion durch eine Diskretisierung des Dilatationsparameters erreicht werden. Um dabei die logarithmische spektrale Konstruktion der Wavelet-Transformation zu berücksichtigen, beschränkt sich die Signalanalyse auf die Innere-Produkt-Bildung mit Elementarfunktionen, deren effektive Bandbreiten sich für zwei aufeinanderfolgende diskrete Dilatationswerte  $a_l, a_{l+1}$  verdoppeln. Dies entspricht einer dyadischen Diskretisierung  $a \rightarrow a_l = 2^{-l}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  des Skalierungsparameters. Wenn aus einer Analyse mit dem so erzeugten Funktionensystem

$$\mathcal{W}_{\text{dyad}; \psi} = \{\psi_{b, 2^{-l}} = 2^{l/2} \psi(2^l(t - b)) : b \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z}\} \quad (3.33)$$

das Signal selbst wieder rekonstruiert werden kann, spricht man von dyadischen Wavelets  $\psi_{b, 2^{-l}}$ . Die Beschränkung auf die Transformationsparametermenge  $\{(b, 2^{-l}) : b \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z}\}$  bei Beibehaltung der Synthetisierbarkeit führt hier dazu, daß weiterreichende Bedingungen an dyadische Wavelets gestellt werden müssen, als an die Definition 3.1.1 erfüllenden Funktionen [77].

#### Definition 3.4.1 (dyadisches Wavelet)

Eine quadratisch integrierbare Funktion  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  und alle Funktionen  $\psi_{b, 2^{-l}}(t) = 2^{l/2} \psi(2^l(t - b))$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ , die durch Translation und Dilatation aus ihr hervorgehen, werden als dyadische Wavelets bezeichnet, falls zwei positive Konstanten  $C_{\min}, C_{\max}$  mit  $0 < C_{\min} \leq C_{\max} < \infty$  so existieren, daß

$$C_{\min} \leq \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-l}\omega)|^2 \leq C_{\max} \quad (3.34)$$

gilt.

Erfüllt eine Funktion die Bedingung (3.34), so impliziert dies, daß auch die Zulässigkeitsbedingung (3.9) eingehalten wird. Demnach ist die Menge aller dyadischen Wavelets eine Untermenge der Menge aller zulässigen Wavelets.

Zur Signalrekonstruktion aus den Koeffizienten  $\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, 2^{-l}) = \langle s(t), \psi_{b,2^{-l}}(t) \rangle$  wird ein zu  $\mathcal{W}_{\text{dyad};\psi}$  duales dyadisches Funktionensystem

$$\mathcal{W}_{\text{dyad};\tilde{\psi}} = \left\{ \tilde{\psi}_{b,2^{-l}} = 2^{l/2}\tilde{\psi}(2^l(t-b)) : b \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.35)$$

mit

$$\tilde{\psi}(\omega) = \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-l}\omega)|^2} \quad (3.36)$$

benötigt. Ist  $\psi(t)$  ein dyadisches Wavelet, so existiert immer ein solches duales dyadisches Funktionensystem [77] und ein Signal  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  läßt sich durch

$$s(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle s(t), \psi_{b,2^{-l}}(t) \rangle \tilde{\psi}_{b,2^{-l}}(t) db \quad (3.37)$$

synthetisieren.

Nach der Diskretisierung des Dilatationsparameters soll auch die Translationsvariable nur diskrete Werte  $b_k$  annehmen können. Typischerweise wird dabei die zeitliche Abtastperiode für eine Skalierung  $a_l = 2^0 = 1$  auf ein Einheitsintervall normiert, so daß die Signalanalyse für  $l = 0$  auf eine Innere-Produkt-Bildung mit Funktionen  $\psi(t-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  beschränkt ist. Für von null verschiedene Skalierungsindizes  $l \neq 0$  ist die Ausdehnung der Wavelets  $2^{l/2}\psi(2^l(t-b_k))$  um einen Faktor  $2^l$  kleiner als die Ausdehnung des Mother-Wavelets  $\psi(t)$ . Dieser Umstand wird durch eine skalierungsabhängige Abtastperiode  $b_k = k2^{-l}$  berücksichtigt. Somit ist sichergestellt, daß für jeden diskreten Dilatationswert  $a_l = 2^{-l}$  eine angepaßte Translationsdiskretisierung durchgeführt wird. Die Berechnung der Inneren Produkte eines Signals  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  mit den Elementarfunktionen  $\psi_{k,l}(t) = \psi_{b_k,a_l}(t) = \psi_{k2^{-l},2^{-l}}(t)$  des so entstandenen Funktionensystems

$$\mathcal{W}_{\text{dis};\psi} = \left\{ \psi_{k,l}(t) = 2^{l/2}\psi(2^l t - k) : k, l \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.38)$$

wird als diskrete Wavelet-Transformation  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  mit der Abbildungsvorschrift

$$\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}\{s(t)\}(k, l) = \langle s(t), \psi_{k,l}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) 2^{\frac{l}{2}} \psi^*(2^l t - k) dt \quad (3.39)$$

bezeichnet.  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  erzeugt die Menge

$$\mathcal{C}_\psi = \{c_{k,l} = \langle s(t), \psi_{k,l}(t) \rangle : k, l \in \mathbb{Z}\} \quad (3.40)$$

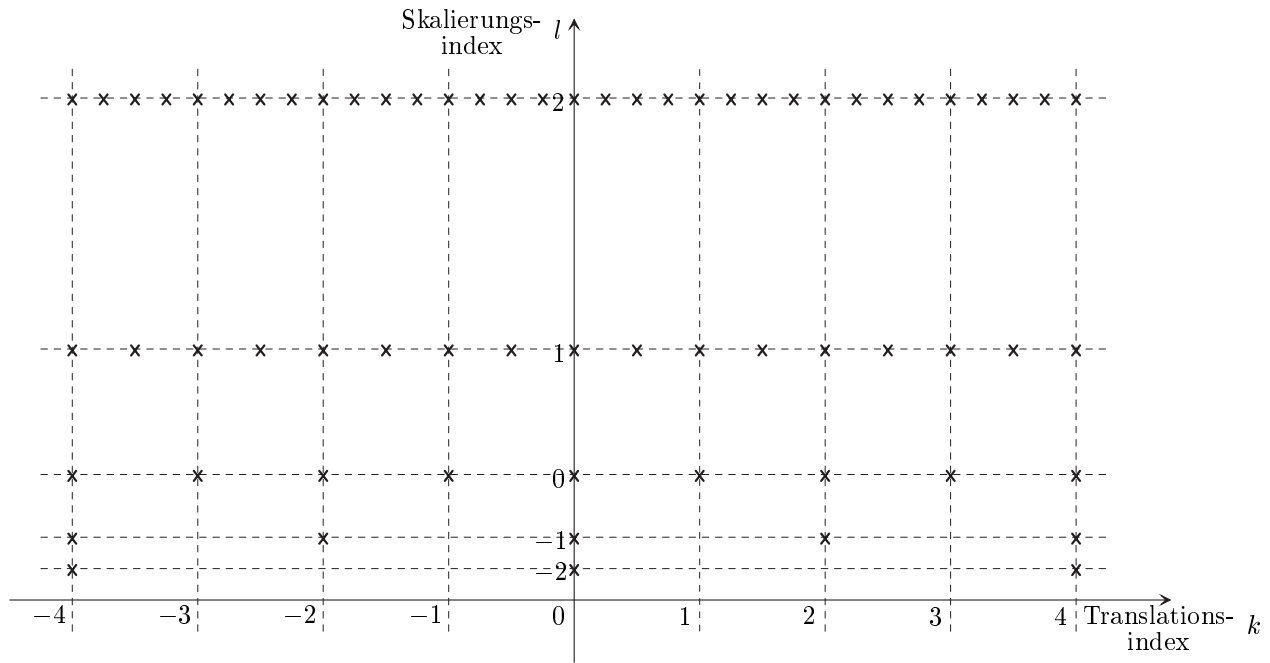


Abbildung 3.5: Das Abtastgitter der diskreten Wavelet-Transformation mit dem Translationsindex  $k$  für  $l = 0$  als Abzisseneinteilung.

der Wavelet-Transformationskoeffizienten. Die Abbildung 3.5 zeigt das mit der diskreten Wavelet-Transformation assoziierte Phasenraumgitter mit dem Translationsindex  $k$  für  $l = 0$  als Abzisseneinteilung. Dieses Abtastgitter liegt auch dem in Abbildung 2.3 gezeigten Phasenraumdiagramm als Darstellungsform der Transformationskoeffizienten zugrunde.

Für eine stabile Rekonstruktion des Signals muß die  $l^2(\mathbb{Z})$  Energie der Transformationskoeffizienten  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c_{k,l}|^2$  in gewissen Grenzen mit der  $L^2(\mathbb{R})$  Energie  $\|s(t)\|^2$  des Signals  $s(t)$  korrespondieren. Nach [17] muß für alle  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$  gelten

$$C_{\min} \|s(t)\|^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |c_{k,l}|^2 \leq C_{\max} \|s(t)\|^2 \quad (3.41)$$

damit das Funktionensystem  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  einen sogenannten Rahmen des  $L^2(\mathbb{R})$  bildet und eine Signalsynthese durch die Entwicklung in das zu  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  duale Funktionensystem

$$\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}} = \left\{ \tilde{\psi}_{k,l}(t) : k, l \in \mathbb{Z} \right\} \quad (3.42)$$

mit

$$s(t) = \mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}^{-1} \left\{ \mathcal{W}_{\text{dis};\psi} \{s(t)\} \right\} (t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} \tilde{\psi}_{k,l}(t) \quad (3.43)$$

möglich ist. Aus der Ungleichung (3.41) folgt für die Fourier-Transformierte von  $\psi(t)$

$$2C_{\min} \ln 2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \leq 2C_{\max} \ln 2. \quad (3.44)$$

Die Konstanten  $C_{\min} > 0$  und  $C_{\max} < \infty$  werden dabei als Rahmengrenzen bezeichnet. Sie sind ausschließlich vom Mother-Wavelet abhängig.  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}$  bildet ebenfalls einen Rahmen des  $L^2(\mathbb{R})$  mit den Rahmengrenzen  $C_{\max}^{-1}$  und  $C_{\min}^{-1}$ . Die Dualität der Funktionensysteme  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  und  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}$  impliziert ihre Austauschbarkeit. Demnach kann das Signal  $s(t)$  anstelle der Synthese durch die duale Funktionenmenge  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}$  auch in das Funktionensystem  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  selbst entwickelt werden. Die Entwicklungskoeffizienten berechnen sich dann über eine Signalanalyse nach Gleichung (3.3) mit den Elementarfunktionen der Menge  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}$ . Auf der rechten Seite der Gleichung (3.43) können folglich  $\psi_{k,l}(t)$  und  $\tilde{\psi}_{k,l}(t)$  vertauscht werden.

Die zur Elementarfunktion  $\psi_{k,l}(t)$  duale Funktion  $\tilde{\psi}_{k,l}(t)$  berechnet sich über eine Invertierung von Analyse- und Syntheseoperation  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$ ,  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}^{-1}$ . Dieser Zusammenhang kann durch

$$\tilde{\psi}_{k,l}(t) = \left( \mathcal{W}_{\text{dis};\psi}^{-1} \mathcal{W}_{\text{dis};\psi} \right)^{-1} \psi_{k,l}(t) \quad (3.45)$$

formuliert werden. Eine ausführliche Diskussion dieser Beziehung führt in [17, 18, 42] zu einer expliziten Beschreibung der dualen Funktion durch

$$\tilde{\psi}_{k,l}(t) = \frac{2}{C_{\min} + C_{\max}} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \mathcal{I} - \frac{2}{C_{\min} + C_{\max}} \mathcal{W}_{\text{dis};\psi}^{-1} \mathcal{W}_{\text{dis};\psi} \right)^m \psi_{k,l}(t). \quad (3.46)$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{I}$  die Identität. Im allgemeinen lassen sich die Rahmengrenzen für ein Mother-Wavelet nicht immer exakt berechnen [42], so daß auch das zu einem gegebenen Wavelet-Funktionensystem duale Funktionensystem nur approximiert werden kann. Einen wichtigen Spezialfall stellt allerdings der sogenannte enge Rahmen mit  $C_{\min} = C_{\max}$  dar. Hier ist die zu  $\psi_{k,l}(t)$  duale Funktion durch  $\tilde{\psi}_{k,l}(t) = C_{\min}^{-1} \psi_{k,l}(t)$  gegeben, so daß sich die vorteilhafte Signalbeschreibung

$$s(t) = \frac{1}{C_{\min}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \langle s(t), \psi_{k,l}(t) \rangle \psi_{k,l}(t) \quad (3.47)$$

ergibt. Ein enger Rahmen ist im allgemeinen noch redundanzbehaftet. Erst, wenn gilt  $C_{\min} = C_{\max} = 1$  sind die durch  $\|\psi(t)\|^2 = 1$  normierten Elementarfunktionen linear unabhängig und die zugehörige Funktionenmenge  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  ist orthonormal und bildet eine Basis des  $L^2(\mathbb{R})$ .

Die Forderung nach einem engen Wavelet-Rahmen oder einer Wavelet-Basis ist mit verringerten Freiheitsgraden bei der Konstruktion des Mother-Wavelets verbunden. Für viele Anwendungen ist aber die Analyse und Synthese mit demselben Funktionensystem nicht notwendig. Es soll dagegen eine perfekte Rekonstruktion bei angepaßter Konstruktion des Analyse- und/oder Synthesevorgangs möglich sein. Das Konzept des dualen Funktionensystems bietet sich hier an. Im allgemeinen gestaltet sich das zu  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  duale Funktionensystem  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}$  allerdings nicht aus dilatierten und translatierten Modifikationen einer einzigen Prototypfunktion. Folglich existiert nicht immer ein Mother-Wavelet  $\tilde{\psi}(t)$ , und  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}$  ist oftmals kein strukturiertes Funktionensystem und damit auch kein Wavelet-Funktionensystem. Jede duale Funktion  $\tilde{\psi}_{k,l}(t)$  müßte einzeln berechnet und gespeichert werden. Für den Einsatz in echtzeitfähigen Anwendungen und Algorithmen ist aber eine effektive Berechnung der



Signalanalyse und -synthese eine notwendige Voraussetzung. Aus diesem Grund soll der Begriff des Wavelets für die folgende Diskussion weiter eingeschränkt werden.

**Definition 3.4.2 (Wavelet)**

Eine quadratisch integrierbare Funktion  $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  und alle Funktionen  $\psi_{k,l}(t) = 2^{l/2}\psi(2^l t - k)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ , die durch Translation und Dilatation aus ihr hervorgehen, werden im folgenden als Wavelets bezeichnet, falls ein zum Rahmen  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi} = \{\psi_{k,l}(t) : k, l \in \mathbb{Z}\}$  des  $L^2(\mathbb{R})$  duales Funktionensystem  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}} = \{\tilde{\psi}_{k,l}(t) = 2^{l/2}\tilde{\psi}(2^l t - k) : k, l \in \mathbb{Z}\}$  existiert, das sich ebenfalls aus translatierten und dilatierten Versionen eines Mother-Wavelets  $\tilde{\psi}(t)$  zusammensetzt. Ein solches Funktionensystem ist eindeutig.

Für Wavelets, die der Definition 3.4.2 genügen, bestehen zwei alternative Möglichkeiten der Wavelet-Reihenentwicklung für ein Signal  $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ . Es ist

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} \tilde{\psi}_{k,l}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_{k,l} \psi_{k,l}(t) \quad (3.48)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten  $c_{k,l}$  aus  $\mathcal{C}_\psi$  nach Gleichung (3.40) und  $d_{k,l}$  aus

$$\mathcal{C}_{\tilde{\psi}} = \left\{ d_{k,l} = \langle s(t), \tilde{\psi}_{k,l}(t) \rangle : k, l \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (3.49)$$

Demnach sind bei der Signalentwicklung in Wavelet-Funktionensysteme, mit der Ausnahme von zu sich selbst dualen orthonormalen Wavelets, immer Wavelet-Paare zu betrachten.

Die Bezeichnung der Abbildungsvorschrift  $\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}$  nach Gleichung (3.39) als diskrete Wavelet-Transformation und  $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}^{-1}$  nach Gleichung (3.43) als inverse diskrete Wavelet-Transformation haben sich in der Wavelet-Theorie etabliert. Beachtenswert ist hierbei allerdings, daß die Benennung „diskret“ in diesem Kontext einen anderen Sachverhalt kennzeichnet als bei der diskreten Fourier-Transformation und allen mit ihr verwandten Spektral-Transformationen. Die diskrete Fourier-Transformation wird angewendet auf diskrete Signale  $s(n)$  und ordnet diesen ein periodisches diskretes Frequenzspektrum zu. Die diskrete Wavelet-Transformation wird dagegen auf kontinuierliche Signale  $s(t)$  angewendet und erzeugt eine invertierbare Signaldarstellung für diskrete Parameterwerte  $b_k = k2^{-l}$ ,  $a_l = 2^{-l}$ . Die diskrete Wavelet-Transformation entspricht der nur für diskrete Transformationsvariablen berechneten kontinuierlichen Wavelet-Transformation

$$\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a)|_{b=k2^{-l}; a=2^{-l}} = \mathcal{W}_{\text{dis};\psi}\{s(t)\}(k, l) \quad (3.50)$$

und wird deshalb auch als diskrete Parameter Wavelet-Transformation bezeichnet [79]. Als Konsequenz aus dem Zusammenhang (3.50) ergibt sich auch eine unterschiedliche Bedeutung des Begriffs Reihenentwicklung im Kontext der Wavelet- und Fourier-Theorie. Die Fourier-Reihenentwicklung benötigt die Voraussetzung der Signalperiodizität um die Synthese durch eine unendliche Reihe von durch Entwicklungskoeffizienten gewichtete diskret parametrisierte Basisfunktionen zu ermöglichen. Für die Wavelet-Reihenentwicklung (3.48) gilt keine vergleichbare Einschränkung.

Die diskutierte diskrete und inverse diskrete Wavelet-Transformation mit Wavelets und dualen Wavelets, die die Definition 3.4.2 erfüllen, ist von überragender Bedeutung für Anwendungen in der digitalen Signalverarbeitung. Wird das analoge Signal  $s(t)$  durch eine angepaßte Tiefpaßfilterung mit einem Filter der Impulsantwort  $\phi(-t)$  und einer anschließenden Abtastung in eine zeitdiskrete Darstellung  $s(n)$  überführt, so existiert für diese Wavelets ein schneller Algorithmus zur Entwicklungskoeffizientenberechnung und Signalrekonstruktion durch die iterative Anwendung von diskreten Analyse- und Synthesefilterpaaren  $h_0(n)$ ,  $h_1(n)$  und  $\tilde{h}_0(n)$ ,  $\tilde{h}_1(n)$ . Die Impulsantworten dieser Filter und die Impulsantwort des Tiefpaßfilters stehen dabei zueinander in enger, die Verbindung von Wavelets und Filterbänken beschreibender Beziehung. Die genauen Zusammenhänge werden in Kapitel 4 deutlich.

### 3.5 Skalierung versus Modulation

Das in diesem Kapitel angewendete Rahmenkonzept zur Untersuchung der stabilen Invertierbarkeit der diskreten Wavelet-Transformation läßt sich auch auf die in Kapitel 2 diskutierte Kurzzeit-Fourier-Transformation mit diskreten Transformationsparametern und die Gabor-Reihenentwicklung übertragen. Als notwendige Voraussetzung für die Bildung eines Rahmens des  $L^2(\mathbb{R})$  durch das Funktionensystem  $\mathcal{F}_{w;T,\Omega} = \{w(t - kT)e^{jl\Omega} : k, l \in \mathbb{Z}\}$  muß dann die Rahmenungleichung (3.41) für die Entwicklungskoeffizienten  $f_{k,l} = \langle s(t), w(t - kT)e^{jl\Omega} \rangle$  anstelle der Wavelet-Koeffizienten  $c_{k,l}$  erfüllt sein. Hieraus ergibt sich für die Fensterfunktion

$$C_{\min} \leq \frac{2\pi}{T\Omega} \|w(t)\|^2 \leq C_{\max}. \quad (3.51)$$

Im Gegensatz zur Zulässigkeitsbedingung, die aus der Einhaltung der korrespondierenden Ungleichung (3.44) für die Wavelet-Transformation resultiert, hat die Bedingung (3.51) keine vergleichbare Einschränkung der normierten Fensterfunktion  $w(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\|w(t)\|^2 = 1$  zur Folge. Die Rahmenbedingung (3.51) impliziert stattdessen die Abtastbedingung  $T\Omega \leq 2\pi$  als notwendige Voraussetzung für die Invertierbarkeit und  $T\Omega = 2\pi$  als notwendige Voraussetzung für eine Basis [17]. Eine vergleichbare Einschränkung bezüglich der Diskretisierungsdichte existiert wiederum bei der Wavelet-Transformation nicht [17, 22, 42].

Im Abschnitt 2.3.2 des vorherigen Kapitels wurde erwähnt, daß die Gabor-Koeffizienten zwar eine eindeutige Signalcharakterisierung erlauben, aber im allgemeinen keine stabile Signalrekonstruktion zulassen. Dieser Sachverhalt zeigt sich in dem Fehlen einer unteren Grenze  $C_{\min}$ , so daß die Elementarfunktionen der Gabor-Reihenentwicklung keinen Rahmen des  $L^2(\mathbb{R})$  bilden. Das Balian-Low-Theorem verallgemeinert diesen Zusammenhang mit der Aussage, daß grundsätzlich kein aus zeitlich und spektral lokalisierten Elementarfunktionen bestehendes Kurzzeit-Fourier-Funktionensystem existieren kann, das für  $T\Omega = 2\pi$  einen Rahmen des  $L^2(\mathbb{R})$  bildet. Damit existiert keine Kurzzeit-Fourier-Basis. Die zeitlich-spektrale Lokalisierbarkeit der Elementarfunktionen eines Rahmens impliziert ihre lineare Abhängigkeit und damit eine gewisse Redundanz der Entwicklungskoeffizienten. Im Gegensatz dazu gibt es Wavelet-Funktionensysteme, deren Elementarfunktionen eine endliche

effektive Ausdehnung und Bandbreite aufweisen und dennoch eine Basis des  $L^2(\mathbb{R})$  bilden. Im Kontext der Wavelet-Theorie gelang es Y. Meyer in [68] erstmalig eine solche Basis zu konstruieren. Spline-basierte Ansätze [70,80,81] führten in den folgenden Jahren zu weiteren Wavelet-Basen mit verbesserten verbunden zeitlich-spektralen Lokalisationseigenschaften.

Im Zuge dieser Entwicklung entwarf S. Mallat mit der Multi-Skalen-Analyse ein Konzept, auf dessen Basis eine umfassende, universelle Interpretation der verschiedenen Ansätze möglich ist. Darüber hinaus ist die Multi-Skalen-Analyse ein Werkzeug zur systematischen Konstruktion von Wavelet-Funktionensystemen und dazu dualen Wavelet-Funktionensystemen, die aus Elementarfunktionen nach Definition 3.4.2 bestehen. Die Multi-Skalen-Analyse stellt die Beziehung zwischen zeitkontinuierlichen Wavelets und diskreten Filterbänken her. Dieser Zusammenhang wird im folgenden Kapitel ausführlich diskutiert.

Abschließend sind die wesentlichen in Kapitel 2 und 3 diskutierten Unterschiede zwischen der diskreten Wavelet-Transformation und der Kurzzeit-Fourier-Transformation mit diskreten Parametern in der Tabelle 3.1 gegenübergestellt.

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung der wichtigsten Eigenschaften von diskret parametrierter Kurzzeit-Fourier-Transformation und diskreter Wavelet-Transformation.

<b>Kurzzeit-Fourier-Transformation</b>	<b>Wavelet-Transformation</b>
$\mathcal{F}_{w;T,\Omega}\{s(t)\}(k,l) = \langle s(t), w(t-kT)e^{j\Omega t} \rangle = f_{k,l}$ $\mathcal{F}_{\tilde{w};T,\Omega}^{-1}\{f_{k,l}\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{k,l} \tilde{w}(t-kT)e^{j\Omega t} = s(t)$	$\mathcal{W}_{\text{dis};\psi}\{s(t)\}(k,l) = \langle s(t), 2^{\frac{l}{2}}\psi(2^l(t-k)) \rangle = c_{k,l}$ $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}^{-1}\{c_{k,l}\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} \tilde{\psi}_{k,l}(t) = s(t)$
Verhältnis von effektiver Ausdehnung zu effektiver Bandbreite $\Delta_{t,w}/\Delta_{\omega,w} = \text{const.}$ für alle Elementarfunktionen.	Verhältnis von Mittenfrequenz zu effektiver Bandbreite $\omega_{0,\psi}/\Delta_{\omega,\psi} = Q_{\psi}$ für alle Elementarfunktionen.
Abtastbedingung $T\Omega \leq 2\pi$ ist notwendige Voraussetzung zur Bildung eines Rahmens.	Wavelet-Rahmen sind für alle Produkte $B \ln A < \infty$ mit der Parameterdiskretisierung $a_l = A^l, b_k = kBA^l$ möglich.
Basen sind nur für $T\Omega = 2\pi$ möglich.	Basen sind für $B \ln A < \infty$ möglich.
Es existieren keine verbunden zeitlich-spektral lokalisierten Basisfunktionen.	Zeitlich und spektral lokalisierte Basisfunktionen existieren.
Keine Zulässigkeitsbedingung für die Prototypfunktionen $w(t), \tilde{w}(t)$ .	Zulässigkeitsbedingung $\hat{\psi}(\omega) = \tilde{\psi}(\omega) = 0$ als notwendige Voraussetzung für die Mother-Wavelets $\psi(t), \tilde{\psi}(t)$ .
Duales Funktionensystem $\mathcal{F}_{\tilde{w};T,\Omega}$ ist immer aus einer dualen Fensterfunktion $\tilde{w}(t)$ ableitbar.	Duales Funktionensystem $\mathcal{W}_{\text{dis};\tilde{\psi}}$ nicht immer aus einem dualen Mother-Wavelet $\tilde{\psi}(t)$ ableitbar.