

Kapitel 2

Zeit-Frequenz-Transformationen

Heutzutage nutzen dem Stand der Technik entsprechende Übertragungssysteme umfangreiche und anspruchsvolle Signalverarbeitungsalgorithmen, um eine wettbewerbsfähige Funktionalität zu erreichen. Typische Bestandteile nachrichtentechnischer Signalverarbeitungssysteme sind Analyse und Diagnose, Codierung, Quantisierung und Kompression, Übertragung und Speicherung sowie Synthese und Rekonstruktion. Die direkte Verarbeitung des Signals als Funktion der Zeit ist dabei vielfach nicht die geeignete Grundlage zur Lösung dieser Aufgaben. Ein erster algorithmischer Schritt ist deshalb oft die Überführung in eine dem Problem angepaßtere Signalbeschreibung. Das Signal wird transformiert. Eine zweckmäßigere Darstellung kann betrachtet werden. Die relevanten Eigenschaften sind nun deutlicher erkennbar, so daß die erzeugte adäquate Signaldarstellung eine geeignetere Basis für die folgende Bearbeitung bietet.

Ein klassischer Ansatz ist das zu verarbeitende Signal in ein dem Problem angepaßten Funktionensystem zu entwickeln. Die Auswahl des Funktionensystems ermöglicht so eine Signalbeschreibung, die konform der spezifischen Aufgabe ist. Dieses Prinzip liegt auch der schwerpunktmäßig in dieser Arbeit diskutierten Wavelet-Transformation zugrunde.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über lineare Spektraltransformationen und deren Eigenschaften, wobei von der in Nachrichtentechnik und Signalverarbeitung grundlegenden Fourier-Transformation ausgegangen wird. Nachgezeichnet wird dabei die Weiterentwicklung der Fourier-Transformation zu flexibleren Signalzerlegungen in der Zeit-Frequenz-Ebene, die den mit technischem Fortschritt steigenden Ansprüchen in Signalverarbeitungs- und Übertragungssystemen besser genügen. Die skizzierte Entwicklung endet mit wünschenswerten Eigenschaften, welche Kurzzeit-Fourier-Transformation und auch quadratische Zeit-Frequenz-Verteilung (exemplarisch wird im Anhang A die Wigner-Verteilung diskutiert) und die mit ihnen verwandten Transformationsmethoden nicht aufweisen. Diese Defizite motivierten die Entstehung der kontinuierlichen Wavelet-Transformation in den achtziger Jahren dieses Jahrhunderts maßgeblich. Zuvor werden einige Vereinbarungen und Definitionen getroffen, die für die folgende Diskussion von grundlegender Bedeutung sind.

2.1 Grundlegende Definitionen und Konventionen

Ein grundsätzliches Ziel der in dieser Arbeit betrachteten Algorithmen und Verfahren ist die Anwendung auf meßbare elektrische Signale. Ein wesentliches Merkmal realer Signale ist, daß sie eine endliche Energie aufweisen. Aus diesem Grund werden, sofern nicht anders vermerkt, alle analogen zu verarbeitenden Signale $s(t)$ als Funktionen endlicher Energie E_s mit dem Definitionsbereich der reellen Zahlen \mathbb{R} angenommen. Wie in der Nachrichtentechnik üblich, werden die Signale und alle weiteren Funktionen einheitenlos bezüglich der normierten Zeit t als unabhängige Variable dargestellt. Ein solches sogenanntes Energiesignal $s(t)$ ist über den gesamten Zeitbereich definiert und hat die Eigenschaft

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.1)$$

Ein Energiesignal $s(t)$ wird entsprechend der Lebesgue-Theorie [20] durch die Mengenzugehörigkeit $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ gekennzeichnet.

Um umfangreiche Berechnungen und Vergleiche mit den Elementen der Menge $L^2(\mathbb{R})$ durchführen zu können, ist die Verwendung eines Inneren Produktes sowie einer Metrik in der Gestalt einer Norm sinnvoll. Das Innere Produkt zweier Signale $s_1(t), s_2(t) \in L^2(\mathbb{R})$ sei definiert als

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2^*(t) dt, \quad (2.2)$$

wobei $*$ die komplexe Konjugation kennzeichnet. Für die $L^2(\mathbb{R})$ -Norm eines Energiesignals $s(t)$ soll gelten

$$\|s(t)\| = \sqrt{\langle s(t), s(t) \rangle} = \sqrt{E_s}. \quad (2.3)$$

Mit den Definitionen (2.2) und (2.3) bildet die vollständige Menge $L^2(\mathbb{R})$ einen Hilbert-Raum [20]. In einem Hilbert-Raum lassen sich die Beziehungen der Elemente, in diesem Fall der Energiesignale, mathematisch vorteilhaft beschreiben und berechnen. Darüber hinaus sind die Verhältnisse anschaulich geometrisch interpretierbar. So ist die Orthogonalität zweier Signale $s_1(t), s_2(t) \in L^2(\mathbb{R})$ über das Innere Produkt definiert als

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = 0 \quad (2.4)$$

und kann geometrisch als Rechtwinkligkeit aufgefaßt werden. Der Norm kommt die geometrische Bedeutung einer Länge zu. Für die Betrachtungen in dieser Arbeit sind die zu verarbeitenden analogen Signale Elemente des beschriebenen Hilbert-Raums $L^2(\mathbb{R})$ der Funktionen endlicher Energie.

In der Signalverarbeitung sind die durch

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

$$s_1(t) \star s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(\tau + t) d\tau \quad (2.6)$$

definierte Faltung und Korrelation zweier reeller Signale $s_1(t), s_2(t) \in L^2(\mathbb{R})$ von grundlegender Bedeutung. Sie stehen untereinander und mit dem in der Funktionenanalyse bedeutenden Inneren Produkt in enger Beziehung. Für den Zusammenhang von Faltung und Korrelation gilt

$$s_1(t) \star s_2(t) = s_1(-t) * s_2(t), \quad (2.7)$$

$$s_1(t) * s_2(t) = s_1(-t) \star s_2(t). \quad (2.8)$$

Das Innere Produkt und die Faltung sind durch

$$s_1(t) * s_2(t) = \langle s_1(\tau), s_2^*(t - \tau) \rangle, \quad (2.9)$$

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = s_1(\tau) * s_2^*(-\tau)|_{\tau=0} \quad (2.10)$$

miteinander verknüpft.

Der Verwandtschaft von Faltung und Innerem Produkt kommt in der Signalverarbeitung eine besondere Bedeutung zu. Signale werden hier bevorzugt transformiert, indem sie linear auf ein neues orthonormales Funktionensystem abgebildet werden. Die neuen Koordinaten, die Entwicklungs- oder Transformationskoeffizienten, die das Signal bezüglich des neuen Funktionensystems hat, werden durch die Inneren Produkte $\langle s(t), f(t) \rangle$ aller das Funktionensystem umfassenden Funktionen mit dem zu transformierenden Signal berechnet. Das Signal wird auf die neuen Koordinatenachsen projiziert. Da sich das Ausgangssignal eines Filters als Faltung von Eingangssignal und Impulsantwort ergibt, lassen sich die Entwicklungskoeffizienten über die Zusammenhänge (2.9) und (2.10) am Ausgang einer Filterbank erzeugen. Die Impulsantworten der Filterkanäle bestimmen sich dann aus den reellwertigen Funktionen eines Funktionensystems durch zeitliche Spiegelung und Translation zur Gewährleistung der Kausalität. Komplexwertige Funktionen werden durch eine getrennte Filterbankrealisation von Real- und Imaginärteil berücksichtigt.

Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten durch das Anwenden einer Filterbank ist die grundlegende Idee der diskreten Wavelet-Transformation [15, 21, 22]. Erst diese Form der Implementation verhalf ihr zum Durchbruch und ermöglichte eine effiziente und schnelle Durchführung der Transformation. Der Zusammenhang von Filterbänken und Wavelets wird ausführlich in Kapitel 4 diskutiert.

2.2 Die Fourier-Transformation

Neben der Beschreibung eines Signals $s(t)$ als Funktion der Zeit findet die Beschreibung durch die Fourier-Transformierte $\hat{s}(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}(\omega)$ gerade in Signalverarbeitung und Nachrichtentechnik eine breite analytische und algorithmische Verwendung. Das Fourier-Spektrum beschreibt das Signal als gewichtete Summe komplexer Funktionen der Menge

$$\mathcal{F} = \{f_{\mathcal{F};\omega}(t) = e^{j\omega t} : \omega \in \mathbb{R}\}, \quad (2.11)$$

deren Lineare Hülle den Funktionenraum $L^2(\mathbb{R})$ beinhaltet. Jedes Gewicht $\hat{s}(\Omega)$ gibt dabei den Beitrag der Funktion $f_{\mathcal{F};\Omega}(t) = e^{j\Omega t}$ mit der festen Frequenz Ω zum Signal $s(t)$ an und wird als Inneres Produkt durch

$$\langle s(t), f_{\mathcal{F};\Omega}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\Omega t} dt = \hat{s}(\Omega) \quad (2.12)$$

berechnet. Die Abbildungsvorschriften der Fourier- und inversen Fourier-Transformation lauten demnach

$$\hat{s}(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.13)$$

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{s}(\omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.14)$$

Dieses Transformationspaar ordnet jedem Energiesignal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ genau ein Spektrum $\hat{s}(\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ mit endlicher Energie zu und umgekehrt. Die Fourier-Transformation \mathcal{F} bildet $L^2(\mathbb{R})$ auf sich selbst ab und behält dabei die Norm bis auf einen konstanten Faktor bei. Dieser Zusammenhang wird durch die Parsevalsche Identität

$$\langle s_1(t), s_2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{s}_1(\omega), \hat{s}_2(\omega) \rangle \quad (2.15)$$

für reellwertige Signale beschrieben. Nach Gleichung (2.15) berechnet sich die Signalenergie im Frequenzbereich ebenfalls als Inneres Produkt und es gilt

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{s}(\omega), \hat{s}(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|\hat{s}(\omega)\|^2. \quad (2.16)$$

Ein wesentlicher Grund für die weite Verbreitung der Fourier-Transformation ist der Bezug zur Faltung. Zusammenhänge und Prozesse aus Naturwissenschaft und Technik können in guter Näherung durch lineare und zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme) modelliert werden. LTI-Systeme reagieren auf ein Eingangssignal $s(t)$ mit einem Ausgangssignal $g(t) = s(t) * h(t)$, das sich durch Faltung von Eingangssignal $s(t)$ und Stoßantwort $h(t)$

des Systems ergibt. Jede Funktion $f_{\mathcal{F};\omega}(t) = e^{j\omega t}$ hat die Eigenschaft, daß sie durch die Faltung mit einer beliebigen Stoßantwort ihre Form nicht ändert, sondern lediglich mit einem systemabhängigen Amplitudenfaktor $\hat{h}(\omega)$ multipliziert wird. Die Elementarfunktionen der Fourier-Transformation sind demnach Eigenfunktionen dieser Faltungs-Abbildung. Sie erlauben die vorteilhafte Darstellung von LTI-Systemen durch ihre Übertragungsfunktion $\hat{h}(\omega)$ als Fourier-Transformierte der Stoßantwort $h(t)$ und die einfache Berechnung des Ausgangssignals durch eine Multiplikation im Frequenzbereich mit

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega)\hat{s}(\omega). \quad (2.17)$$

Weiter findet die Fourier-Transformation über die Verwandtschaft von Korrelation und Faltung eine umfangreiche Anwendung in der statistischen Signalverarbeitung. Ein bedeutendes Maß der statistischen Signalanalyse ist die Autokorrelation von Leistungssignalen, die aus der Impulsautokorrelation für Energiesignale $R_{ss}^E(\tau)$ unter bestimmten Voraussetzungen [23, 24] abgeleitet werden kann [25]. Für reelle Signale endlicher Energie ist diese nach Gleichung (2.6) mit $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$ definiert als

$$R_{ss}^E(\tau) = s(\tau) \star s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t + \tau)dt. \quad (2.18)$$

Somit errechnet sich das Energiedichtespektrum als Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion $R_{ss}^E(\tau)$ eines Signals $s(\tau)$ durch

$$\mathcal{F}\{R_{ss}^E(\tau)\}(\omega) = \mathcal{F}\{s(-\tau) * s(\tau)\}(\omega) = \hat{s}^*(\omega)\hat{s}(\omega) = |\hat{s}(\omega)|^2. \quad (2.19)$$

Die Fourier-Transformation und ihre diskrete Variante weisen darüber hinaus noch weitere vorteilhafte Eigenschaften auf [26–29]. Der primäre Grund für ihre weite Verwendung in der Nachrichten- und Systemtechnik ist aber die beschriebene Beziehung zur Faltung und Korrelation. System- und Signalbeschreibungen durch die Fourier-Transformation nach Gleichung (2.13) sind gerade in den Bereichen von großer Bedeutung, in denen die Modelleigenschaften Linearität und Zeitinvarianz oder Stationarität besonders berechtigt sind. In wichtigen Gebieten der Signalverarbeitung wie der Filtertheorie und der Übertragungstechnik ist die Fourier-Transformierte die vorrangige System- und Signalbeschreibung und gebräuchlicher als die Beschreibung im Zeitbereich. Filter, Systeme und Signale werden typischerweise durch ihre Frequenzcharakteristik beschrieben.

2.3 Lineare zeitlich-spektrale Signaldarstellungen

Die Forderungen nach zeitinvariantem Systemverhalten oder stationären Signaleigenschaften begrenzen den sinnvollen Einsatz der Fourier-Transformation in vielen Bereichen. Hängt das Verhalten eines Systems von der Zeit ab, oder ändern sich die statistischen Eigenschaften eines Signals, so ist die generelle Beschreibung durch eine Übertragungsfunktion oder ein Energiedichtespektrum zur umfassenden Beschreibung nicht korrekt. Ferner verfügt die Fourier-

Transformation inhärent über eine globale Charakteristik, da sich ihre Elementarfunktionen über den vollständigen Zeitbereich erstrecken und somit keine zeitliche Lokalisierbarkeit aufweisen. Um das spektrale Verhalten eines Signals anhand der Fourier-Transformierten zu bewerten, ist folglich die Kenntnis des Signals in der gesamten Zeitdomäne notwendig. Dies beinhaltet auch zukünftige Signalinformationen. Weiter wirkt sich eine Veränderung des Signals in einem kleinen zeitlichen Intervall grundsätzlich auf das ganze Spektrum aus. Diese Umstände machen die Fourier-Transformation für Echtzeitanwendungen und die Verarbeitung nichtstationärer Signale unzuverlässig. Dennoch ist man auch in diesem Fall an einer Aussage über die spektrale Komposition des Signals interessiert.

In der folgenden Abbildung 2.1 wird der Globalitätsnachteil der Fourier-Transformation deutlich. Die dargestellten Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ mit

$$s_1(t) = \begin{cases} \cos(\Omega_1 t) + \cos(\Omega_2 t) + \cos(\Omega_3 t) + \cos(\Omega_4 t) & \text{für } t \in [0, T] \\ 0 & \text{für } t \notin [0, T], \end{cases} \quad (2.20)$$

$$s_2(t) = \begin{cases} \cos(\Omega_1 t) & \text{für } t \in [0, \frac{T}{4}) \\ \cos(\Omega_2 t) & \text{für } t \in [\frac{T}{4}, \frac{T}{2}) \\ \cos(\Omega_3 t) & \text{für } t \in [\frac{T}{2}, \frac{3T}{4}) \\ \cos(\Omega_4 t) & \text{für } t \in [\frac{3T}{4}, T] \\ 0 & \text{für } t \notin [0, T] \end{cases} \quad (2.21)$$

sind für ein Intervall der Länge $T = 1000$ von null verschieden und beinhalten jeweils Cosinuskomponenten der Frequenzen $\Omega_1 = 2\pi/100, \Omega_2 = 2\pi/40, \Omega_3 = 2\pi/20, \Omega_4 = 2\pi/10$. In $s_1(t)$ erstreckt sich jede Cosinusschwingung über das gesamte Intervall $[0, T]$. In $s_2(t)$ sind die Signalanteile sequentiell angeordnet. Beide Betragsspektren zeigen qualitativ ein ähnliches Verhalten. Eine Betrachtung des Spektrums führt in beiden Fällen zur Erkenntnis, daß das Signal im wesentlichen aus vier Frequenzkomponenten besteht. Die wichtigen transienten Informationen im Signal $s_2(t)$ können nicht aus dem Betragsspektrum abgeleitet werden.

Da transiente Phänomene durch eine im Verhältnis zum Observationsintervall kurze Zeitdauer gekennzeichnet sind, muß zu ihrer Auflösung ein genügend kurzer Beobachtungszeitraum eingehalten werden. Das Signal kann dann für diese Zeitdauer als stationär angenommen werden. Als Konsequenz hieraus sollten die Elementarfunktionen, in die das zu observierende Signal entwickelt wird, anders als bei der Fourier-Transformation im wesentlichen auf ein zeitliches Intervall beschränkt sein. Allgemein wird eine Darstellungsform benötigt, die Zeitintervallen spektrale Informationen zuordnet und umgekehrt. Daher ist ein zusätzlicher Zeitparameter zur zeitabhängigen Darstellung des Spektrums sinnvoll.

Durch die genannten Unzulänglichkeiten der Fourier-Transformation motiviert, schlug Gabor eine zeit- und frequenzabhängige Verbunddarstellung zur Signalbeschreibung vor [30]. In diesem Ansatz zur linearen Beschreibung nichtstationärer Signale ist historisch einer der wichtigsten Ursprünge für die spätere Entwicklung der Wavelet-Transformation zu sehen. Die Zeit-Frequenz-Verbunddarstellungen werden deshalb ausgehend von Gabors Ansatz

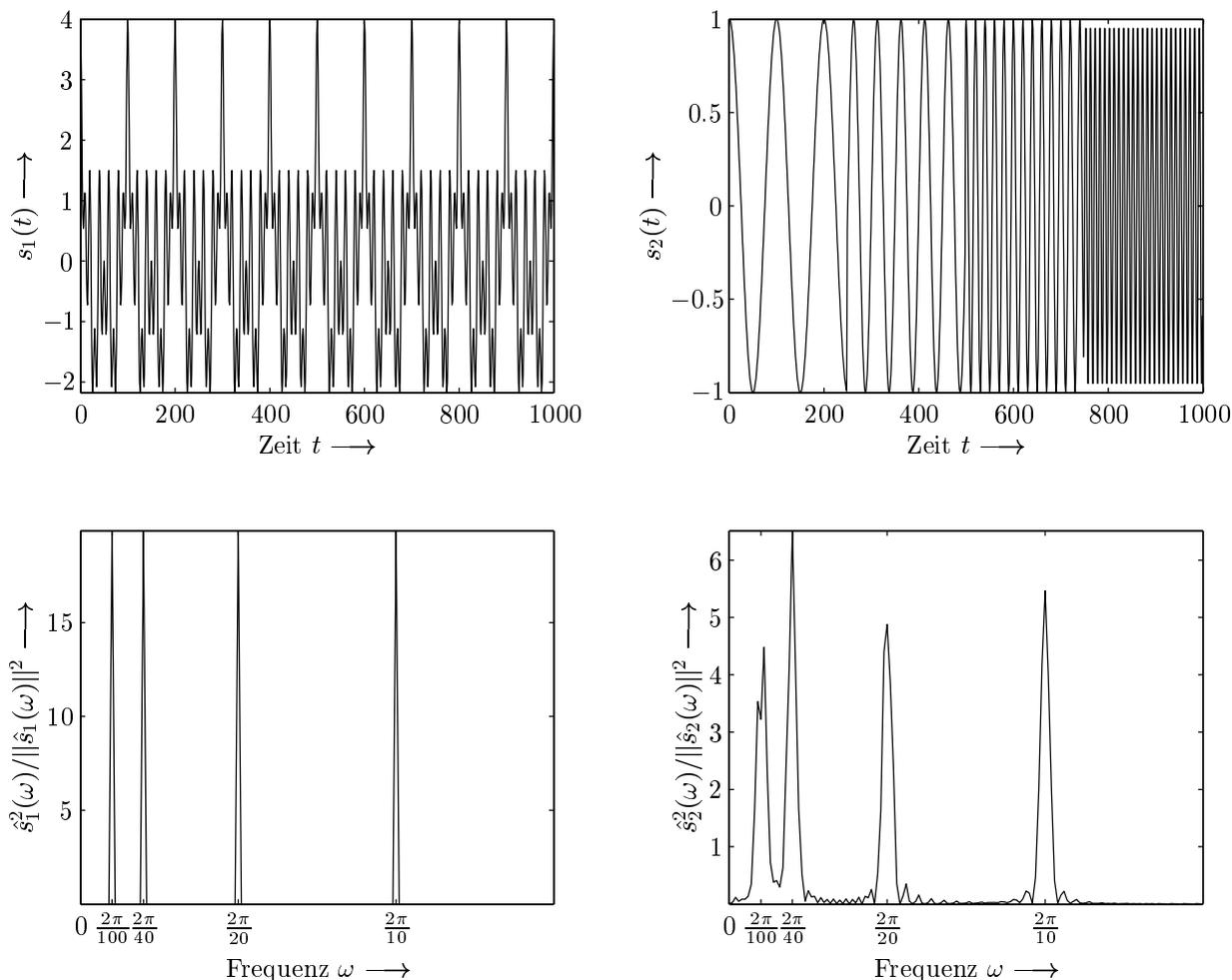


Abbildung 2.1: *Fourier-Transformation der Signale $s_1(t)$ und $s_2(t)$ mit gleichen Frequenzkomponenten $\Omega_1 = 2\pi/100$, $\Omega_2 = 2\pi/40$, $\Omega_3 = 2\pi/20$, $\Omega_4 = 2\pi/10$, die zeitliche unterschiedlich angeordnet sind.*

skizziert. Zuvor soll jedoch ein Überblick über Unschärferelation und Phasenraumdarstellung in der Zeit-Frequenz-Ebene gegeben werden, da diesen Begriffen gerade in der linearen Verbunddarstellung von Signalen eine grundlegende Bedeutung zukommt.

2.3.1 Unschärferelation und Phasenraumdarstellung in der Zeit-Frequenz-Ebene

Die Fourier-Transformation hat die Eigenschaft, Signale endlicher Ausdehnung auf ein unendlich ausgedehntes Spektrum abzubilden. Begrenzten Spektren werden unendlich ausgedehnte Signale zugeordnet. Beschreibt man die Lokalisation eines Signals im Zeit- oder Frequenzbereich demnach durch Breite und Mittelpunkt von Intervallen, für die das Signal oder das Spektrum von null verschiedene Werte annimmt, so führt diese Eigenschaft dazu, daß eine solche Lokalisationsbeschreibung für die zeitliche und spektrale Darstellung eines

Signals nie gemeinsam getroffen werden kann. Für einige wichtige Funktionen, wie z.B. die Gauß-Funktion, erhält man in keiner der beiden Domänen eine verwertbare Aussage. Ein sinnvolles quantitatives Lokalisationsmaß sollte die energetische Konzentration so bewerten, daß für in der Zeit-Frequenz-Ebene lokalisierbare Signale effektive Ausdehnung und effektive Bandbreite gleichzeitig definiert sind.

Eine weitere Eigenschaft der Fourier-Transformation ist, daß eine um den Faktor C gestauchte Funktion entsprechend $\mathcal{F}\{s(Ct)\}(\omega) = (1/|C|)\hat{s}(\omega/C)$ auf ein um die Konstante C gestrecktes Spektrum abgebildet wird. Die Definition der Lokalisationsmaße sollte diese Eigenschaft ebenfalls widerspiegeln, so daß das Produkt aus effektiver Ausdehnung und effektiver Bandbreite invariant zu Dehnung, Verschiebung, Modulation und Signalmultiplikation mit einer Konstanten ein Charakteristikum der Signalform darstellt.

Die Definitionen der effektiven Ausdehnung

$$\Delta_{t,s} = \sqrt{2\pi} \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_{0,s})^2 |s(t)|^2 dt \right\}^{1/2}}{\|s(t)\|} \quad \text{mit} \quad t_{0,s} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |s(t)|^2 dt}{\|s(t)\|^2} \quad (2.22)$$

und der effektiven Bandbreite

$$\Delta_{\omega,s} = \sqrt{2\pi} \frac{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_{0,s})^2 |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}}{\|\hat{s}(\omega)\|} \quad \text{mit} \quad \omega_{0,s} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{s}(\omega)|^2 d\omega}{\|\hat{s}(\omega)\|^2} \quad (2.23)$$

des Signals $s(t)$ als Standardabweichungen der normierten Funktionsverläufe $|s(t)|^2/\|s(t)\|^2$ und $|\hat{s}(\omega)|^2/\|\hat{s}(\omega)\|^2$ mit den Mittelwerten $t_{0,s}$ und $\omega_{0,s}$ haben sich als Lokalisationsmaße für Funktionen mit einer Tiefpaßcharakteristik und analytische Bandpaßfunktionen etabliert [19, 30]. Allgemein werden $t_{0,s}$ und $\omega_{0,s}$ als Mittelpunkte der effektiven Ausdehnung und effektiven Bandbreite bezeichnet. Dabei setzt ein endliches $\Delta_{t,s}$ ein im Mittel stärker als $|t|^{-3/2}$ für $|t| \rightarrow \infty$ fallendes Signal $s(t)$ voraus. Ein endliches $\Delta_{\omega,s}$ verlangt einen glatten Signalverlauf, so daß auch die Ableitung des Signals $s(t)$ ein Energiesignal $s'(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ist [19].

Da reellwertige Signale ein symmetrisches Energiedichtespektrum $|\hat{s}(\omega)|^2 = |\hat{s}(-\omega)|^2$ aufweisen, ist die Definition des Mittelpunktes und daher auch der effektiven Bandbreite nach Gleichung (2.23) für reellwertige Bandpaßsignale ungeeignet. Unabhängig von der spektralen Verteilung gilt $\omega_{0,s} = 0$, da $\omega |\hat{s}(\omega)|^2$ immer eine ungerade Funktion ist. Im Kontext der Wavelet-Transformation sind aber gerade reelle Elementarfunktionen mit einer Bandpaßcharakteristik von besonderer Bedeutung. Für solche Funktionen soll daher eine alternative Definition des Mittelpunktes der effektiven Bandbreite gelten. Durch die Abbildung eines Signals $s(t)$ auf das zugehörige analytische Signal $s^+(t)$ mit

$$s^+(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{s}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{und} \quad \hat{s}^+(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < 0 \\ \hat{s}(\omega) & \text{für } \omega = 0 \\ 2\hat{s}(\omega) & \text{für } \omega > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Tabelle 2.1: *Zeit-Bandbreite-Produkte für komplexwertige Gaußsche Elementarfunktionen und Wavelets als reellwertige Bandpaßsignale.*

Zeit-Frequenz-Atom	$\Delta_{t,s}\Delta_{\omega,s}$	$\Delta_{t,s}\Delta_{\omega,s}^+$
Gaußsche Elementarfunktionen	π	
Daubechies <i>D3</i> -Wavelets		8.17
Daubechies <i>D4</i> -Wavelets		6.30
Daubechies <i>D5</i> -Wavelets		5.71
Symmlet <i>S2</i> -Wavelets		4.90
Symmlet <i>S4</i> -Wavelets		3.71
Symmlet <i>S5</i> -Wavelets		3.65
Coiflet <i>C4</i> -Wavelets		4.71
Coiflet <i>C8</i> -Wavelets		3.58

beschränkt man das Spektrum auf den positiven Frequenzbereich $\omega \geq 0$ bevor der Mittelpunkt der effektiven Bandbreite für reelle Bandpaßsignale $\omega_{0,s}^+$ und die effektive Bandbreite eines reellen Bandpaßsignals $\Delta_{\omega,s}^+$ nach

$$\Delta_{\omega,s}^+ = \sqrt{2\pi} \frac{\left\{ \int_0^{\infty} (\omega - \omega_{0,s}^+)^2 |\hat{s}^+(\omega)|^2 d\omega \right\}^{1/2}}{\|\hat{s}^+(\omega)\|} \quad \text{mit} \quad \omega_{0,s}^+ = \frac{\int_0^{\infty} \omega |\hat{s}^+(\omega)|^2 d\omega}{\|\hat{s}^+(\omega)\|^2} \quad (2.25)$$

berechnet werden.

Die Heisenbergsche Unschärferelation der Signalverarbeitung sagt aus, daß das Ausdehnungs-Bandbreite-Produkt $\Delta_{t,s}\Delta_{\omega,s}$ nach unten streng begrenzt ist, so daß effektive Ausdehnung und effektive Bandbreite nicht gleichzeitig beliebig reduzierbar sind. Als Konsequenz impliziert die durch Stauchung erlangte Genauigkeit in der einen Domäne eine gewisse durch die Signalform vorgegebene Unschärfe in der anderen Domäne. Gabor leitete in Analogie zur Quantenmechanik den quantitativen Zusammenhang

$$\Delta_{t,s}\Delta_{\omega,s} \geq \pi \quad (2.26)$$

in [30] her und zeigte, daß nur die Familie der komplexen Exponentialfunktionen mit Gaußscher Hüllkurve $e^{-\pi t^2/\sigma^2}$ die Unschärferelation (2.26) minimiert. Der Streuungsparameter $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ beschreibt dabei die Signaldehnung. Die Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über zeitliche und spektrale Lokalisationseigenschaften einiger in dieser Arbeit behandelte Funktionen anhand der hier definierten Lokalisationsmaße. Auf die Bedeutung der Bezeichnungen der Wavelet-Familien wird im Kapitel 4 eingegangen.

Um zu einer optimal lokalisierbaren Signaldarstellung zu gelangen, wählte Gabor ein aus translatierten und modulierten Gauß-Funktionen bestehendes Funktionensystem zur Signalbeschreibung. Signalrepräsentationen auf der Grundlage dieses Funktionensystems werden

daher allgemein als Gabor-Transformation bezeichnet. Sie soll im folgenden Abschnitt 2.3.2 näher betrachtet werden.

Die Definitionen (2.22) und (2.23) oder (2.25) erlauben eine aussagekräftige Darstellung der Elementarfunktionen einer Transformation in der Zeit-Frequenz-Ebene. Die in dieser Arbeit diskutierten Funktionensysteme der Gabor-, Kurz-Zeit-Fourier- und Wavelet-Transformation zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Elementarfunktionen ein endliches Ausdehnungs-Bandbreite-Produkt haben. Damit können sie als Rechtecke mit den entsprechenden Kantenlängen $\Delta_{t,s}$ und $\Delta_{\omega,s}$ und der Lage des Mittelpunktes $(t_{0,s}, \omega_{0,s})$ in der Zeit-Frequenz-Ebene veranschaulicht werden. Anhand der Größenverhältnisse und der Lage der Rechtecke werden Eigenschaften der Transformation offensichtlich. Haben die Rechtecke eine geringe Fläche nahe der Heisenbergschen Unschärfegrenze π , so verfügt die Transformation über eine nahezu optimale Zeit-Frequenz-Auflösung. Rechtecke mit geringer Seitenlänge $\Delta_{t,s}$ korrespondieren mit Funktionen guter Zeitauflösung, Rechtecke mit geringer Seitenlänge $\Delta_{\omega,s}$ mit Funktionen guter Frequenzauflösung. Überlappen die Rechtecke in der Zeit-Frequenz-Ebene zu einem großen Teil, so sind die Transformationskoeffizienten redundanzbehaftet und das Funktionensystem überbestimmt. Wird die gesamte Fläche nicht vollständig mit Rechtecken abgedeckt, so führt die korrespondierende Transformation zu einer Unterabtastung des Signals.

Im Kontext der linearen Entwicklung eines Signals in zeitlich-spektral lokalisierbare Funktionen hat sich eine Beschreibung aus der Chemie etabliert. Es werden die Elementarfunktionen als Zeit-Frequenz-Atome bezeichnet, die, entsprechend der Entwicklungskoeffizienten kombiniert, ein als Zeit-Frequenz-Molekül interpretiertes Signal $s(t)$ erzeugen. Im Unterschied zur Chemie findet ein solches Signal allerdings, analog zur Entwicklung in unterschiedlichen Funktionensystemen, Repräsentationen in verschiedenen Zeit-Frequenz-Molekülen, die jeweils aus unterschiedlichen Mengen von Zeit-Frequenz-Atomen zusammengesetzt werden. Weiterhin ist nicht jedes beliebige Signal grundsätzlich als eine gewichtete Summe von Zeit-Frequenz-Atomen und damit als Zeit-Frequenz-Molekül beschreibbar. In der Abbildung 2.2 sind verschiedene Zeit-Frequenz-Atome im Zeit- und Frequenzbereich und als Rechtecke in der Zeit-Frequenz-Ebene dargestellt. Hier werden die Verhältnisse von effektiver Ausdehnung und effektiver Bandbreite zum zeitlichen und spektralen Signalverlauf deutlich.

Aus der Darstellung der Elementarfunktionen einer Transformation als Rechtecke in der Zeit-Frequenz-Ebene kann ein mit Zeit-Frequenz- oder Zeit-Skalierungs-Transformationen assoziiertes Zerlegungsschema der Zeit-Frequenz-Ebene abgeleitet werden. In diesem sogenannten Phasenraumdiagramm wird die Zeit-Frequenz-Ebene in ein idealisiertes Rechteckraster unterteilt. Mit jedem Rechteck korrespondiert eine Elementarfunktion $f_{k,l}(t)$ des zugrunde liegenden Funktionensystems, wobei $k, l \in \mathbb{Z}$ Elemente der zugehörigen Indizierungsmenge sind. Die Mittelpunkte der Rechtecke werden an einem Indizierungsraaster ausgerichtet, so daß jedem Phasenraumrechteck ein Zeitindex k und ein Frequenz- oder Skalierungsindex l als Koordinaten zugeordnet sind. Das Indizierungsraaster beschreibt somit das Zeit-Frequenz-Verhalten der Transformation in idealisierter Form. Da die Rechtecke in

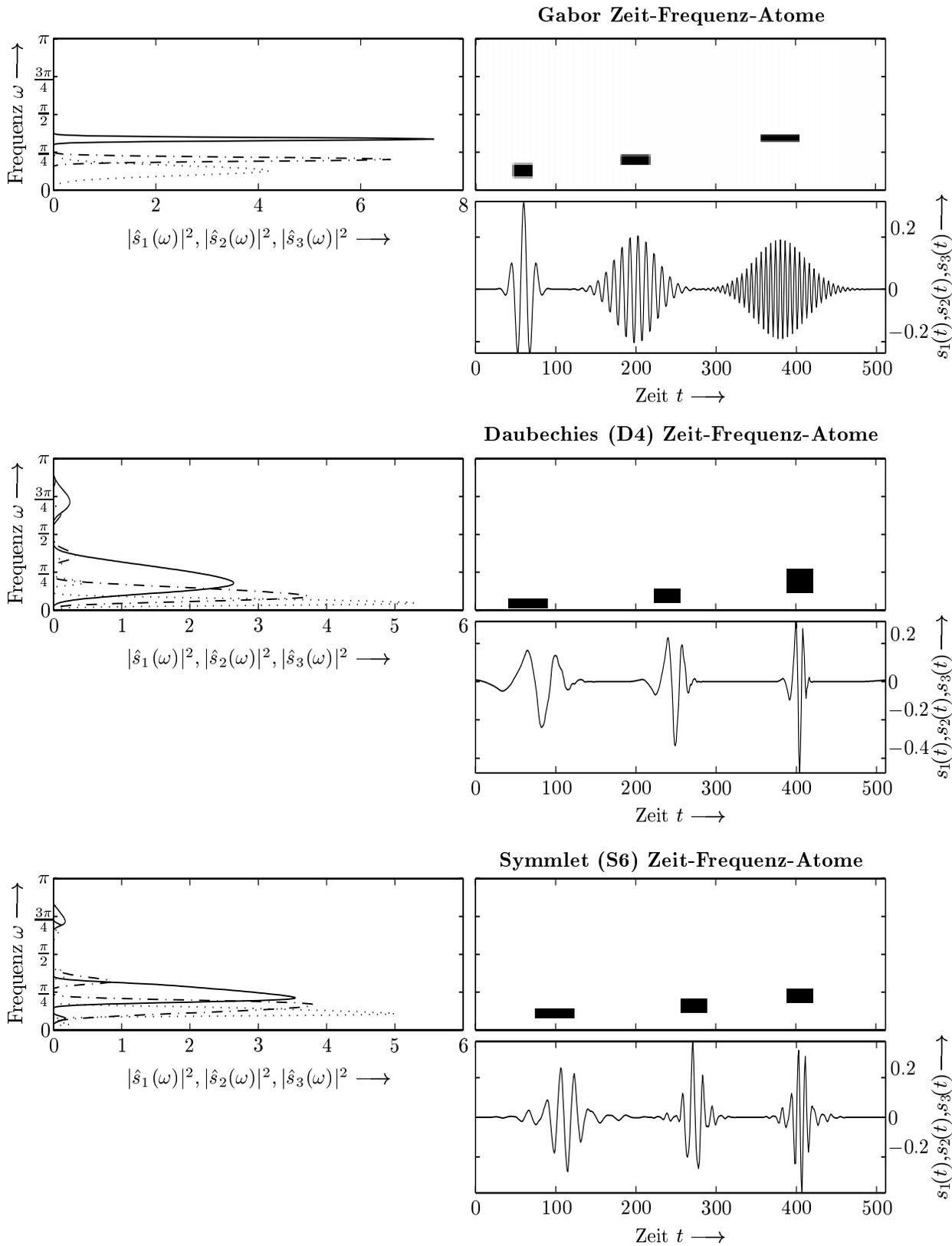


Abbildung 2.2: Verschiedene Gaborische Elementarfunktionen, D_4 -Wavelets und S_6 -Symmlet-Wavelet-Pakete im Zeit- und Frequenzbereich sowie als Rechtecke mit den Seitenlängen $\Delta_{t,s}$ und $\Delta_{\omega,s}^+$ in der Zeit-Frequenz-Ebene.

der Phasenraumdarstellung aneinander anschließen, sind ihre Ausmaße bestimmt durch das Indizierungsschema des zugehörigen Funktionensystems und nicht, wie bei der Darstellung einer Elementarfunktion in der Zeit-Frequenz-Ebene, durch die effektive Ausdehnung und effektive Bandbreite. In dieser Vernachlässigung besteht die Idealisierung der Phasenraumzerlegung der Zeit-Frequenz-Ebene bezüglich einer Transformation.

Wird ein Signal $s(t)$ in ein Funktionensystem von lokalisierbaren Funktionen entwickelt, so ist das zeitliche und spektrale Signalverhalten anhand der graphisch im Phasenraumdiagramm dargestellten Transformationskoeffizienten leicht erkennbar, indem den Rechtecken den Zahlenwerten der Entwicklungskoeffizienten entsprechende Farbwerte oder Höhenkoordinaten zugeordnet werden. Das Phasenraumdiagramm bietet eine vorteilhaft interpretierbare Signaldarstellung, insbesondere von transienten und nichtstationären Phänomenen. Signalmerkmale sind in erster Linie an den Größenverhältnissen der Entwicklungskoeffizienten erkennbar und können dann direkt zeitlich und spektral zugeordnet werden. Ferner spiegeln sich in dieser idealisierten Darstellung auch Eigenschaften des Funktionensystems und damit der angewendeten Transformation selbst wieder.

Die folgende Abbildung 2.3 zeigt beispielhaft die Zerlegung eines aus zwei Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz und einem impulsartigen Anteil bestehenden Signals in vier Phasenraumdiagramme. Entwicklungskoeffizienten mit hohem Betrag werden dabei durch dunklere Schattierungen gekennzeichnet. Erkennbar ist, daß der zeitlich lokalisierte Impuls durch die Fourier-Transformation nicht aufgelöst werden kann, und daß anhand der Dirac-Abtastung keine Frequenzzuordnung möglich ist. Eine geringe Verbesserung leistet die Entwicklung in Gabor'sche Elementarfunktionen. Die Wavelet-Transformation ermöglicht dagegen prinzipiell eine bessere gemeinsame Erkennung von Impuls- und Sinusanteil.

Die Verbesserung von Transformationseigenschaften hinsichtlich einer Energiekonzentration in wenige Entwicklungskoeffizienten durch die signaladaptive Gestaltung des Funktionensystems und damit des Phasenraums ist Bestandteil vieler Veröffentlichungen der letzten Jahre [31–38].

2.3.2 Die Gabor-Transformation

Die ursprüngliche Idee Gabors war die Signalsynthese durch elementare Funktionen mit einem minimalen Zeit-Bandbreite-Produkt. Das Signal wird so durch eine gewichtete Summe von modulierten und translatierten Gauß-Funktionen, den sogenannten Informationsquanten oder Gabor'schen Elementarfunktionen, beschrieben. Diese weisen bezüglich der in (2.3.1) definierten Unschärferelation eine zeitliche und frequentielle Lokalisierbarkeit in einem optimalen Sinne auf. Diese Form der Signalrepräsentation wird als Gabor-Reihenentwicklung bezeichnet, auf die später noch eingegangen wird. Die Gabor-Transformation soll hier allerdings ausgehend von ihren Analyseigenschaften betrachtet werden.

Um einem Spektrum eine lokale Bedeutung zu geben, müssen die Elementarfunktionen des

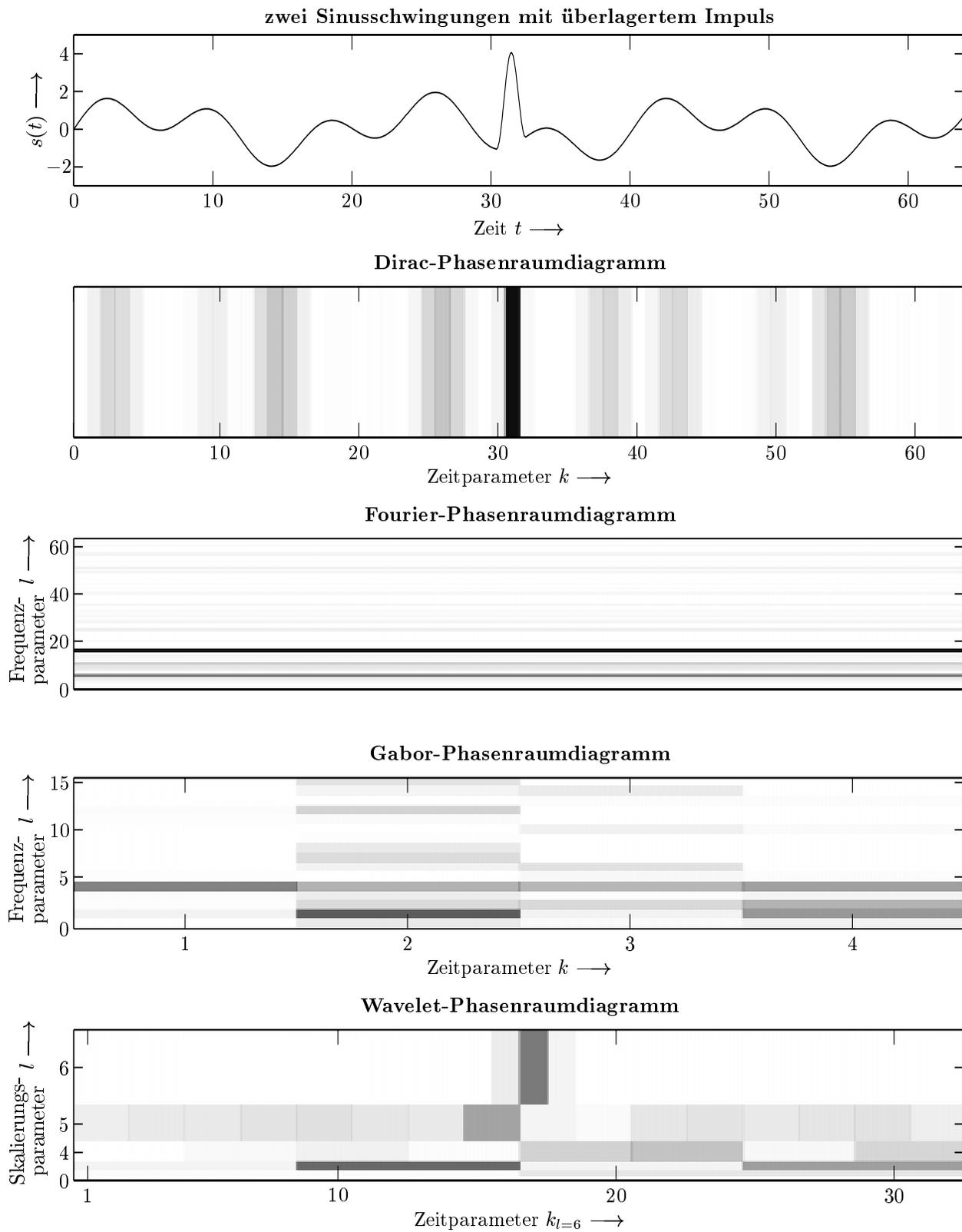


Abbildung 2.3: Verschiedene Phasenraumdarstellungen eines Signals, das aus zwei Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz und einem impulsartigen Anteil besteht.

der Transformation zugrunde liegenden Funktionensystems eine endliche effektive Ausdehnung aufweisen. Ausgehend von den Fourier-Basisfunktionen kann dies erreicht werden, indem man sie mit zeitlich lokalisierten und translatierten Fensterfunktionen $w(t - b)$ multipliziert, wobei $b \in \mathbb{R}$ die Verschiebung der um $t = 0$ zentrierten Funktion $w(t)$ angibt. Das Analysefenster muß dabei lediglich die energetische Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 dt = 1 \quad (2.27)$$

erfüllen. Eine geeignete Fensterfunktion sollte nicht nur die Eigenschaft der zeitlichen Lokalisierbarkeit haben, sondern gleichzeitig auch die spektralen Komponenten detailliert auflösen können. Wie in Abschnitt 2.3.1 dargelegt, erfüllen gauß-impulsartige Analysefenster mit

$$w_{\text{gau\ss};\sigma}(t - b) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)^{1/2} e^{-\pi(t-b)^2/\sigma^2}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^{>0}, \quad b \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

diese Anforderungen optimal. Der Parameter σ definiert die Ausdehnung der Gauß-Funktion und damit die Breite des Zeitbereiches, dessen lokales Spektrum berechnet wird. Der Parameter b bestimmt die Zeitabhängigkeit des Spektrums durch die zeitliche Position dieses Intervalls.

Die Gabor-Transformation \mathcal{G}_σ ist somit für $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ und $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ definiert als

$$\mathcal{G}_\sigma\{s(t)\}(b, \omega) = \langle s(t), f_{\mathcal{G}_\sigma; b, \omega}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) w_{\text{gau\ss};\sigma}(t - b) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.29)$$

Die Abbildungsvorschrift \mathcal{G}_σ nach Gleichung (2.29) transformiert $s(t)$ durch die Innere-Produkt-Bildung mit den Elementarfunktionen des Funktionensystems

$$\mathcal{G}_\sigma = \{f_{\mathcal{G}_\sigma; b, \omega}(t) = w_{\text{gau\ss};\sigma}(t - b) e^{j\omega t} : b, \omega \in \mathbb{R}\} \quad (2.30)$$

und ordnet damit jedem Energiesignal ein komplexwertiges Spektrum über der Zeit-Frequenz-Ebene zu.

Der Streuungsparameter σ beeinflusst das Analyseverhalten der Transformation \mathcal{G}_σ nachhaltig. Er sollte grundsätzlich so gewählt werden, daß die effektive Ausdehnung der Fensterfunktion in der Größenordnung der kleinsten aufzulösenden transienten Signalanteile liegt. Für die effektive Ausdehnung der Funktionen aus \mathcal{G}_σ in Abhängigkeit von σ gilt nach Gleichung (2.22)

$$\Delta_{t, w_{\text{gau\ss};\sigma}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}. \quad (2.31)$$

Damit ist die effektive Bandbreite durch

$$\Delta_{\omega, w_{\text{gau\ss};\sigma}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sigma} \quad (2.32)$$

festgelegt.

Wendet man die Parsevalsche Identität für die Berechnung der Transformationskoeffizienten an, so gilt nach Gleichung (2.15)

$$\langle s(t), f_{\mathcal{G}_{\sigma;B,\Omega}}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{s}(\omega), \hat{f}_{\mathcal{G}_{\sigma;B,\Omega}}(\omega) \rangle \quad \text{mit} \quad (2.33)$$

$$\hat{f}_{\mathcal{G}_{\sigma;B,\Omega}}(\omega) = \mathcal{F} \{ f_{\mathcal{G}_{\sigma;B,\Omega}}(t) \} (\omega) \quad (2.34)$$

Demnach kann die in den Entwicklungskoeffizienten enthaltene Information, welche durch die Untersuchung des Signals $s(t)$ um den Zeitpunkt $t = B$ unter Verwendung der Funktion $f_{\mathcal{G}_{\sigma;B,\Omega}}(t)$ gewonnen wird, alternativ auch dem Spektrum $\hat{s}(\omega)$ entnommen werden. Eine Observation des Spektrums $\hat{s}(\omega)$ in der Umgebung der Frequenz $\omega = \Omega$ mit der Spektralfunktion $(1/2\pi)\hat{f}_{\mathcal{G}_{\sigma;B,\Omega}}(\omega)$ liefert dieselbe Information. Folglich extrahiert ein Gaußsches Zeit-Frequenz-Atom $f_{\mathcal{G}_{\sigma;B,\Omega}}(t)$ aus einem zu observierenden Signal $s(t)$ ein Informationsquantum $\mathcal{G}_{\sigma}\{s(t)\}(B, \Omega)$ mit der Lage

$$\left[B - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}, B + \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \right] \times \left[\Omega - \frac{\pi}{\sqrt{2}\sigma}, \Omega + \frac{\pi}{\sqrt{2}\sigma} \right] \quad (2.35)$$

in der Zeit-Frequenz-Ebene.

Die Abbildung 2.4 veranschaulicht die kombinierte Zeit-Frequenz-Analyseeigenschaft der Gabor-Transformation. Dargestellt sind vier Transformationen nach Gleichung (2.29) des Signals $s_2(t)$ aus der Gleichung (2.21) als jeweils dem Betragsquadrat entsprechende Grauwertverteilungen. Der Parameter σ ist dabei so gewählt, daß die effektive Ausdehnung der Elementarfunktionen $\Delta_{t, w_{\text{gauß};\sigma}}$ die Werte $T/4$, $T/8$, $T/16$ und $T/32$ mit $T = 1000$ annimmt. Hieraus resultierten nach Gleichung (2.31) $\sigma_1 = 354$, $\sigma_2 = 178$, $\sigma_3 = 88.5$, $\sigma_4 = 44.25$. Durch einen Vergleich mit der Abbildung 2.1 ist deutlich erkennbar, daß eine Analyse nichtstationärer Signale mit Gaborschen Elementarfunktionen die beschriebenen nachteiligen Globalisierungseigenschaften der Fourier-Transformation verbessern. Offensichtlich wird an diesem Beispiel auch, daß eine Zunahme der zeitlichen Auflösung zwangsläufig eine Unschärfe des Spektrums zur Folge hat und umgekehrt.

Für die analysierende Verarbeitung nichtstationärer Signale stellt die Gabor-Transformation einen leistungsfähigen Vorverarbeitungsschritt für Klassifizierungs- und Mustererkennungsprobleme dar [39–41]. Signalverarbeitungsalgorithmen aus anderen Bereichen beinhalten allerdings nicht nur die Analyse, sondern, nach einer Bearbeitung des Signals im Bildbereich der Transformation auch wieder die Signalsynthese. Ausgehend von der inversen Fourier-Transformation nach Gleichung (2.14) kann das mit dem Analysefenster $w_{\text{gauß};\sigma}(t - b)$ multiplizierte Signal $s(t)$ durch

$$s(t)w_{\text{gauß};\sigma}(t - b) = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{G}_{\sigma}\{s(t)\}(b, \omega) \} (t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_{\sigma}\{s(t)\}(b, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.36)$$

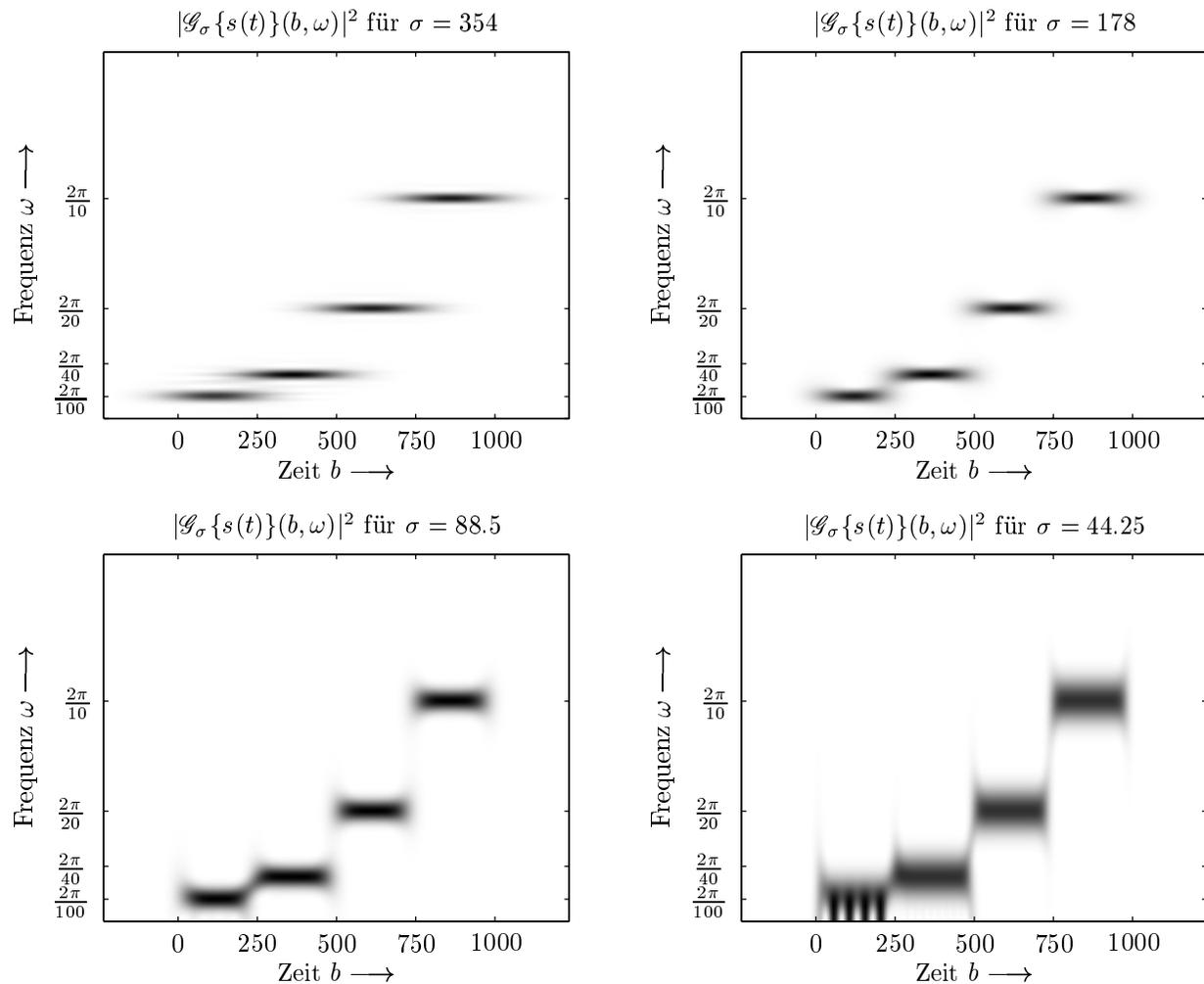


Abbildung 2.4: Gabor-Transformation des nichtstationären Signals $s_2(t)$ aus Gleichung (2.21) für die Streuparameter $\sigma_1 = 354$, $\sigma_2 = 178$, $\sigma_3 = 88.5$, $\sigma_4 = 44.25$.

rekonstruiert werden. Das Signal $s(t)$ selbst erhält man durch die Multiplikation der Gleichung (2.36) mit einem dualen Synthesefenster $\tilde{w}_{\text{gauß};\sigma}(t-b)$, welches lediglich die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\text{gauß};\sigma}(t)\tilde{w}_{\text{gauß};\sigma}(t)dt = 1 \quad (2.37)$$

erfüllen muß, und einer anschließenden Integration über den Zeitparameter b . Da $w_{\text{gauß};\sigma}(t)$ selbst der Bedingung (2.37) genügt, kann $\tilde{w}_{\text{gauß};\sigma}(t) = w_{\text{gauß};\sigma}(t)$ gewählt werden. Aus der Analyse eines Signals $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit Gaborschen Elementarfunktionen $f_{\mathcal{G}_\sigma; b, \omega}(t)$ des Funktionensystems \mathcal{G}_σ ist dieses Signal demnach durch die inverse Gabor-Transformation \mathcal{G}_σ^{-1} mit

$$s(t) = \mathcal{G}_\sigma^{-1}\{\mathcal{G}_\sigma\{s(t)\}(b, \omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_\sigma\{s(t)\}(b, \omega) w_{\text{gauß};\sigma}(t-b) e^{j\omega t} db d\omega \quad (2.38)$$

wieder synthetisierbar. Ein Nachteil des Transformationspaares $\mathcal{G}_\sigma, \mathcal{G}_\sigma^{-1}$ ist allerdings die hohe Redundanz der Darstellung im Bildbereich. Die Entwicklungskoeffizienten hängen stark voneinander ab und sind damit teilweise überflüssig. Gerade nachrichtentechnische Anwendungen wie Quellcodierung und Kompression haben eine möglichst reduzierte, aber wenig fehlerbehaftete Signalbeschreibung zum Ziel. Es stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen das Funktionensystem \mathcal{G}_σ auf eine verminderte Anzahl von Elementarfunktionen verringert werden kann, so daß die korrespondierenden Transformationskoeffizienten trotzdem eine vollständige Signaldarstellung und -rekonstruktion ermöglichen.

Die Gabor'sche Reihenentwicklung beinhaltet eine Signalsynthese durch um kT verschobene und mit $l\Omega$ modulierte Gauß-Funktionen als Elementarfunktionen mit minimalem Zeit-Bandbreite-Produkt. Wird die Abtastbedingung

$$T\Omega \leq 2\pi \quad (2.39)$$

eingehalten, so kann ein Signal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mit mindestens schwacher Konvergenz [42] für den Fall $T\Omega = 2\pi$ bei geeigneter Wahl des Streuparameters σ durch eine gewichtete Summe von Gabor'schen Elementarfunktionen $f_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t)$ der Menge

$$\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega} = \{f_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t) = w_{\text{gauß};\sigma}(t - kT)e^{jl\Omega t} : k, l \in \mathbb{Z}\} \quad (2.40)$$

durch

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_{k,l} w_{\text{gauß};\sigma}(t - kT)e^{jl\Omega t} \quad (2.41)$$

rekonstruiert werden [42]. Die komplexwertigen Gewichte $g_{k,l}$ werden dabei als Gabor-Koeffizienten bezeichnet.

Anhand des die Elementarfunktionendichte in der Zeit-Frequenz-Ebene beschreibenden Produkts $T\Omega$ ist eine Aussage über Redundanz und Vollständigkeit des korrespondierenden Funktionensystem $\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega}$ möglich. Die Abtastbedingung (2.39) ist notwendige Voraussetzung für die Vollständigkeit eines Gabor-Funktionensystems. Ist $T\Omega < 2\pi$, so sind die Elementarfunktionen linear abhängig und damit redundanzbehaftet. Ein Signal läßt sich dann, bei geeigneter Wahl des Fensterparameters σ , durch verschiedene Linearkombinationen der Elementarfunktionen beschreiben. Für $T\Omega > 2\pi$ findet eine Unterabtastung statt, so daß nicht jedes Signal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ synthetisiert werden kann. Einen Grenzfall stellt die von Gabor in [30] gewählte kritische Abtastung $T\Omega = 2\pi$ mit $T = \Delta_{t,w_{\text{gauß};\sigma}}$ dar. Das zugehörige Funktionensystem spannt zwar den gesamten Funktionenraum $L^2(\mathbb{R})$ auf, und jedes Signal findet eine eindeutige Beschreibung durch genau eine Menge von Gabor-Koeffizienten, jedoch ist die quadratische Summe dieser Entwicklungskoeffizienten nicht für alle $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ begrenzt [42]. Dieser Umstand führt zu einer numerischen Instabilität bei der Signalrekonstruktion, so daß die Reihenentwicklung aus Gleichung (2.41) nicht für die $L^2(\mathbb{R})$ -Norm, sondern lediglich im Sinne einer Distribution konvergiert [43].

Abbildung 2.5 zeigt jeweils drei Gabor'sche Cosinus- und Sinuselementarfunktionen für die Zeitindizes $k = 1, 2, 3$ pro Frequenzindex $l = 1, 2, 3$ bei kritischer Abtastung mit

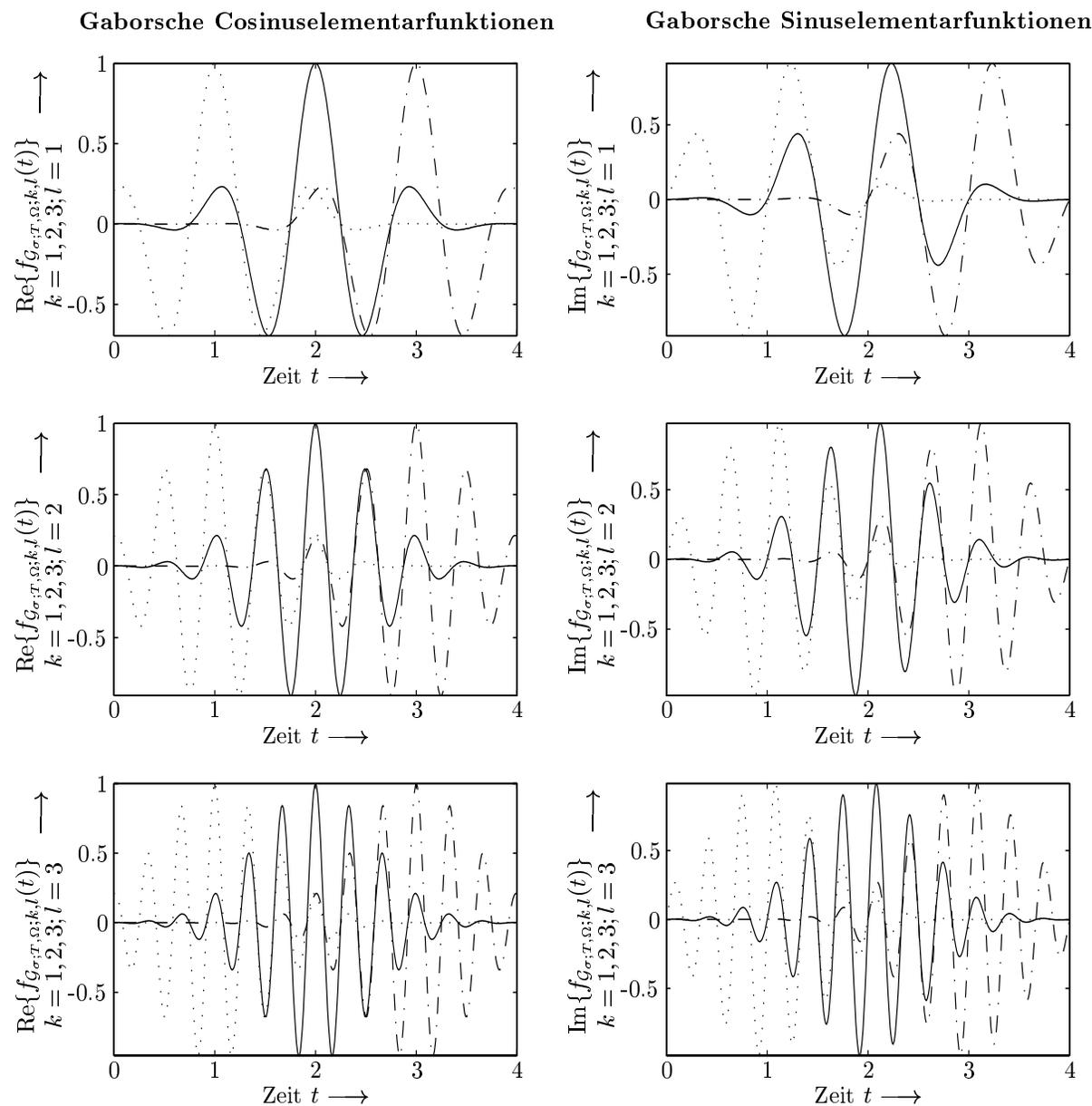


Abbildung 2.5: *Gaborsche Cosinus- und Sinuselementarfunktionen bei kritischer Abtastung* $T\Omega = 2\pi$ mit $T = 1, \sigma = \sqrt{2}, \Omega = 2\pi$ für die Zeitindizes $k = 1, 2, 3$ und die Frequenzindizes $l = 1, 2, 3$.

$T = \Delta_{t, w_{\text{gauß}; \sigma}} = 1 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2}$ und $\Omega = 2\pi$. In der Abbildung 2.6 sind die zwei von Gabor in [30] vorgeschlagenen Phasenraumdarstellungen der Signalsynthese durch das Funktionensystem $\mathcal{G}_{\sigma, T, \Omega}$ bei kritischer Abtastung $T\Omega = 2\pi$ illustriert. Gabor bezeichnete diese Zerlegung der Zeit-Frequenz-Ebene aufgrund der optimalen Lokalisierbarkeit der Elementarfunktionen als Informationsdiagramm. Das rechte Diagramm beschreibt den Beitrag jeder Elementarfunktion $f_{G_{\sigma, T, \Omega; k, l}}(t)$ durch ein mit dem komplexen Gabor-Koeffizienten $g_{k, l}$ gewichtetes Einheitsrechteck. Alternativ zeigt das linke Diagramm den Synthesebeitrag von

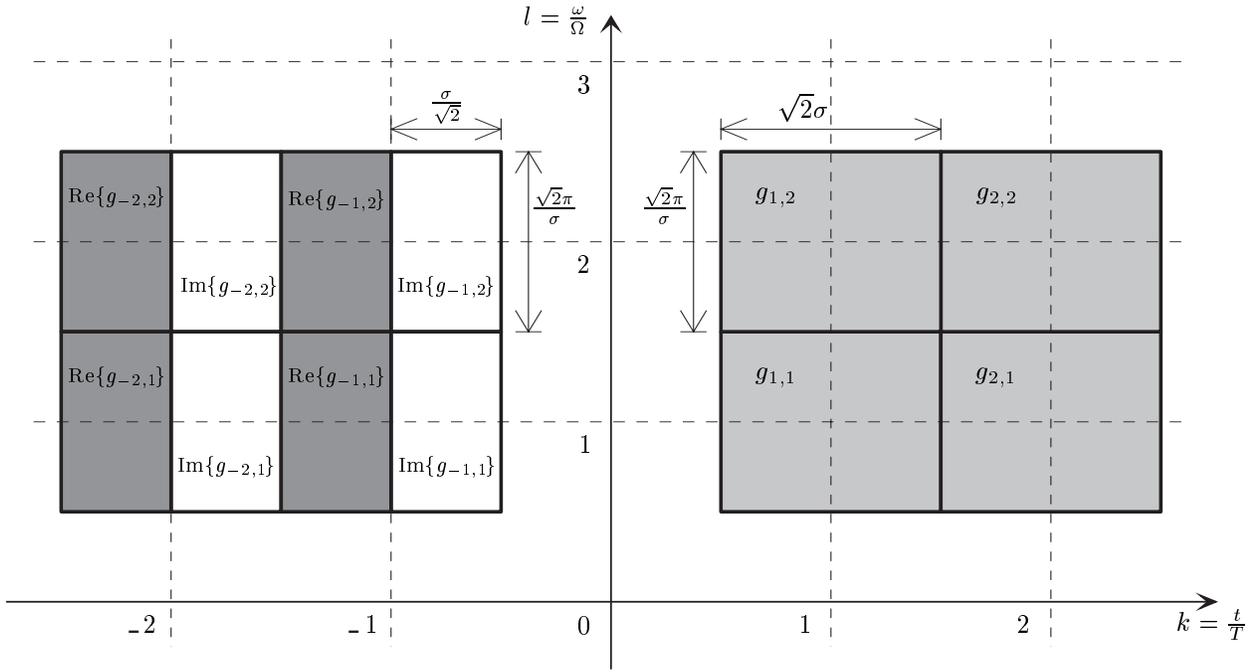


Abbildung 2.6: Die zwei alternativen Darstellungsmöglichkeiten einer Signalsynthese durch Gabor'sche Elementarfunktionen bei kritischer Abtastung $T\Omega = 2\pi$ im Phasenraum.

Cosinus- und Sinuselementarfunktion nach Real- und Imaginärteil $\text{Re}\{g_{k,l}\}$, $\text{Im}\{g_{k,l}\}$ des Gabor-Koeffizienten getrennt. Für diese Darstellung haben die korrespondierenden Rechtecke die minimale Fläche π in der Zeit-Frequenz-Ebene.

Ist die Vollständigkeit des Funktionensystems $\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega}$ gegeben, so lassen sich die Gabor-Koeffizienten $g_{k,l}$ durch eine Analyse des Signals $s(t)$ mit den zu $f_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t)$ biorthogonalen bzw. dualen Funktionen $\tilde{f}_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t) = \tilde{w}_{\text{gauß};\sigma}(t - kT)e^{jl\Omega t}$ durch

$$g_{k,l} = \langle s(t), \tilde{f}_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \tilde{w}_{\text{gauß};\sigma}^*(t - kT) e^{-jl\Omega t} dt \quad (2.42)$$

berechnen [43–46]. Die duale Fensterfunktion $\tilde{w}_{\text{gauß};\sigma}(t)$ muß dabei die Biorthogonalitätsbedingung

$$\langle w_{\text{gauß};\sigma}(t - kT) e^{jl\Omega t}, \tilde{w}_{\text{gauß};\sigma}(t - k'T) e^{jl'\Omega t} \rangle = \delta(k - k') \delta(l - l') \quad \text{für alle } k, k', l, l' \in \mathbb{Z} \quad (2.43)$$

mit dem Kronecker-Symbol

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.44)$$

erfüllen.

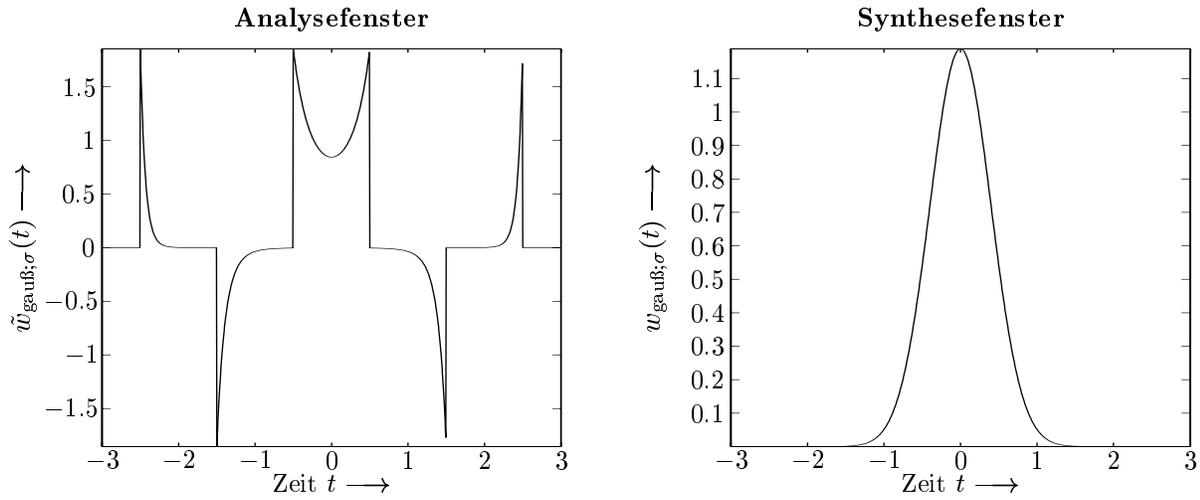


Abbildung 2.7: Die zueinander biorthogonalen Analyse- und Synthesefenster $\tilde{w}_{\text{gauB};\sigma}(t)$, $w_{\text{gauB};\sigma}(t)$ der Gabor-Reihenentwicklung für $\sigma = 1$ und $T = 1$.

Das Synthesefunktionensystem $\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega}$ und das dazu biorthogonale Analysefunktionensystem $\{\tilde{f}_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t) = \tilde{w}_{\text{gauB};\sigma}(t - kT)e^{jl\Omega t} : k, l \in \mathbb{Z}\}$ weisen eine identische Struktur auf. Zwei zueinander biorthogonale Elementarfunktionen $f_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t)$ und $\tilde{f}_{\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega};k,l}(t)$ unterscheiden sich lediglich durch Synthesefenster $w_{\text{gauB};\sigma}(t)$ und Analysefenster $\tilde{w}_{\text{gauB};\sigma}(t)$. Vergleicht man Synthese- und Analysetransformationspaar (2.41), (2.42) und die Abhängigkeitsbedingung (2.43) der Gabor-Reihenentwicklung mit den korrespondierenden Gleichungen (2.29), (2.38) und (2.37) der Gabor-Transformation, so stellt man fest, daß die Diskretisierung der Translations- und Modulationsparameter Einschränkungen bezüglich der Wahl der Fensterfunktionen zur Folge hat. Die einzuhaltende Biorthogonalitätsbedingung hat, da $\mathcal{G}_{\sigma;T,\Omega}$ nicht orthogonal und gleichzeitig vollständig sein kann, ein kompliziertes, für den Fall der kritischen Abtastung nicht lokalisiertes Analysefenster zur Folge, dessen analytische Herleitung in [44] beschrieben ist. Es ist

$$\tilde{w}_{\text{gauB};\sigma}(t) = (2\pi)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{C}{\pi}\right)^{-\frac{3}{2}} e^{\pi t^2/\sigma^2} \sum_{n > \frac{t}{T} - \frac{1}{2}} (-1)^n e^{-\pi(n+1/2)^2} \quad (2.45)$$

mit $C = 1.8540746$. Abbildung 2.7 zeigt das Analysefenster $\tilde{w}_{\text{gauB};\sigma}(t)$ und das Synthesefenster $w_{\text{gauB};\sigma}(t)$ für $\sigma = 1$ und $T = 1$.

2.3.3 Die Kurzzeit-Fourier-Transformation

Der vorangegangene Abschnitt hat gezeigt, daß die Optimalität des Gabor-Funktionensystems mit einigen Nachteilen erkauft wird. So führt die Gabor-Reihenentwicklung bei kritischer Abtastung zu numerischen Instabilitäten und die Diskretisierung von Translations- und Modulationsparametern hat eine nachteilige Biorthogonalfunktion zur Folge. Weiter ist der Gauß-Impuls $w_{\text{gauB};\sigma}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ von null verschieden und damit nur näherungsweise

implementierbar. Für viele Anwendungsbereiche eignet sich die Gabor-Reihenentwicklung oder die Gabor-Transformation deshalb nicht. Andere Fensterfunktionen mit größerer Zeit-Frequenz-Unschärfe aber besseren anderen Eigenschaften können alternativ verwendet werden. Damit das aus dem Fourier-Funktionensystem \mathcal{F} durch Multiplikation mit translatierten Fensterfunktionen $w(t - b)$ erzeugte Funktionensystem

$$\mathcal{F}_w = \{f_{\mathcal{F}_w; b, \omega}(t) = w(t - b)e^{j\omega t} : b, \omega \in \mathbb{R}\} \quad (2.46)$$

mit einer Kurzzeit-Fourier-Transformation korrespondiert, muß die gewählte Fensterfunktion eine endliche effektive Ausdehnung und Bandbreite aufweisen. Betrachtet man die Gleichungen (2.22) und (2.23) so erwachsen hieraus die Forderungen

$$tw(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \omega \hat{w}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.47)$$

Die Kurzzeit-Fourier-Transformation \mathcal{F}_w ist dann für $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ und ein Analysefenster mit $w(t), \hat{w}(\omega)$ nach Gleichung (2.47) durch

$$\hat{s}_w(b, \omega) = \mathcal{F}_w\{s(t)\}(b, \omega) = \langle s(t), f_{\mathcal{F}_w; b, \omega}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w^*(t - b)e^{-j\omega t} dt \quad (2.48)$$

definiert. Für die inverse Kurzzeit-Fourier-Transformation \mathcal{F}_w^{-1} gilt

$$s(t) = \mathcal{F}_w^{-1}\{\hat{s}_w(b, \omega)\}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}_w(b, \omega) \tilde{w}(t - b) e^{j\omega t} db d\omega \quad (2.49)$$

mit einem dualen Synthesefenster $\tilde{w}(t)$ analog zu Gleichung (2.37).

Die Parameterdiskretisierungen $b \rightarrow kT$ und $\omega \rightarrow l\Omega$ haben hier eine allgemeinere einschränkende Dualitätsbedingung als im Fall der Gabor-Transformation nach Gleichung (2.43) zur Folge, da keine der beiden Fensterfunktionen fest vorgegeben ist. Soll ein Signal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ aus der Menge der Entwicklungskoeffizienten $\{f_{k,l} : k, l \in \mathbb{Z}\}$, die sich aus der Kurzzeit-Fourier-Transformation mit diskreten Parameterwerten $b = kT, \omega = l\Omega$ nach

$$f_{k,l} = \mathcal{F}_{w; T, \Omega}\{s(t)\}(k, l) = \langle s(t), f_{\mathcal{F}_{w; T, \Omega}; k, l}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)w^*(t - kT)e^{-jl\Omega t} dt \quad (2.50)$$

berechnen, durch die Abbildung $\mathcal{F}_{\tilde{w}; T, \Omega}^{-1}$ mit

$$s(t) = \mathcal{F}_{\tilde{w}; T, \Omega}^{-1}\{f_{k,l}\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_{k,l} \tilde{w}(t - kT) e^{jl\Omega t} \quad (2.51)$$

rekonstruiert werden, so muß der Zusammenhang

$$\frac{2\pi}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \tilde{w} \left(t + m \frac{2\pi}{\Omega} - nT \right), w^*(t - nT) \right\rangle = \delta(m), \quad m, n \in \mathbb{Z} \quad (2.52)$$

mit $T\Omega \leq 2\pi$ zwischen den Fensterfunktionen $w(t)$ und $\tilde{w}(t)$ bestehen [47]. Erfüllen die zueinander dualen Fensterfunktionen $w(t)$ und $\tilde{w}(t)$ die Bedingung (2.52), so erwächst hieraus eine bedeutende Eigenschaft, die vollständige Funktionensysteme diskret modulierter und translaterter Fensterfunktionen

$$\mathcal{F}_{w;T,\Omega} = \{f_{\mathcal{F}_{w;T,\Omega};k,l}(t) = w(t - kT)e^{jl\Omega t} : k, l \in \mathbb{Z}\} \quad (2.53)$$

grundsätzlich aufweisen. Wie auch im Spezialfall der Gabor-Reihenentwicklung setzt sich das duale Funktionensystem

$$\mathcal{F}_{\tilde{w};T,\Omega} = \{f_{\mathcal{F}_{\tilde{w};T,\Omega};k,l}(t) = \tilde{w}(t - kT)e^{jl\Omega t} : k, l \in \mathbb{Z}\} \quad (2.54)$$

immer ebenfalls aus Modulationen und Translationen einer einzigen Prototypfunktion $\tilde{w}(t)$ zusammen [22, 42].

Eine wesentliche Einschränkung bestimmt allerdings die zeitlich-spektralen Analyse- und Syntheseigenschaften von Funktionensystemen, die aus modulierten Fensterfunktionen bestehen. Nach dem Balian-Low-Theorem existiert keine lokalisierbare Fensterfunktion $w(t)$ mit $\Delta_{t,w} < \infty$ und $\Delta_{\omega,w} < \infty$ so, daß die Signalanalyse eines beliebigen Energiesignals $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ durch Innere-Produkt-Bildung mit den Elementarfunktionen des Funktionensystems $\mathcal{F}_{w;T,\Omega}$ bei kritischer Abtastung $T\Omega = 2\pi$ eine numerisch stabile Signalsynthese ermöglicht [48]. Das Balian-Low-Theorem impliziert somit auch, daß kein orthonormales und vollständiges Kurzzeit-Fourier-Funktionensystem für die Menge der Energiesignale $L^2(\mathbb{R})$ existieren kann. Dies wurde schon am Beispiel der kritisch abgetasteten Gabor-Transformation im vorherigen Abschnitt deutlich.

Die Freiheitsgrade bezüglich Abtastung und Auswahl von Analyse- und Synthesefenstern ermöglichen eine Anpassung an die spezifischen Anforderungen einer Anwendung. Dabei bestimmt das Verhältnis der zeitlichen zur spektralen Abtastrate Ω/T das feste Seitenverhältnis der Gitterstruktur im Phasenraumdiagramm und charakterisiert die Beziehung von effektiver Ausdehnung zur effektiven Bandbreite der Elementarfunktionen. In den letzten Jahren befaßten sich eine Großzahl von Veröffentlichungen mit dem Themengebiet der problemadaptiven Auswahl der Parameter [49–53]. Grundlage vieler solcher, die Kurzzeit-Fourier-Transformation verwendender Algorithmen, ist die Implementation des Analyse/Synthese-Paares in Form von Filterbänken, wie es die Abbildung 2.8 zeigt. Hier wird die Verwandtschaft von Faltung und Innerem Produkt aus Gleichung (2.10) zur Realisation von Transformation und inverser Transformation genutzt.

Wie in diesem und den vorangegangenen Abschnitten beschrieben, ist die Elementarzellenstruktur und das Abtastgitter verbunden zeitlich-spektraler Kurzzeit-Fourier-Transformationen den erwarteten oder bekannten Eigenschaften des zu verarbeitenden Signals anpaßbar. Das Auflösungsvermögen ist hier durch die Heisenbergsche Unschärferelation begrenzt. Die effektive Ausdehnung der verwendeten Fenster orientiert sich dabei an der Länge der aufzulösenden quasi-stationären Signalsegmente. Die Analyse von Signalen, die impulsartige und zeitlich weit ausgedehnte Charakteristika aufweisen, ist durch ein festes Abtastgitter zu

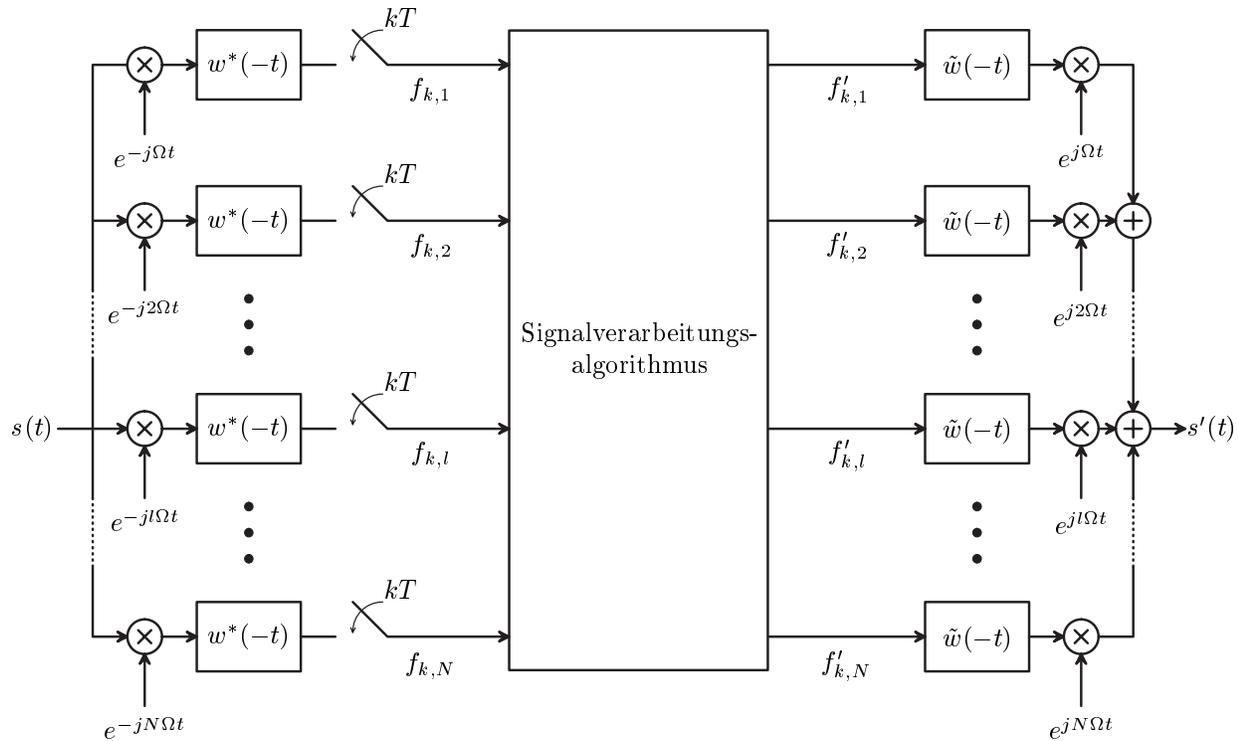


Abbildung 2.8: Realisation des Analyse- und Synthesevorgangs der Kurzzeit-Fourier-Transformation durch Filterbänke.

stark limitiert, so daß oftmals kein ausreichender Kompromiß zwischen zeitlicher und spektraler Auflösung gefunden werden kann. Dieser inhärente Nachteil linearer Zeit-Frequenzabbildungen, die auf Kurzzeit-Fourier-Transformationen basieren, kann durch eine Analyse des quadratischen Signalverhaltens umgangen werden. Die Klasse der quadratischen Zeit-Frequenz-Verbunddarstellungen ist neben den in dieser Arbeit vorrangig betrachteten linearen Zeit-Frequenz-Transformationen für viele analysierende Signalverarbeitungsalgorithmen von Bedeutung. Alternativ steht hier eine möglichst exakte Analyse der zeitlichen und spektralen Energie- oder Leistungsverteilung im Vordergrund. Im Anhang A ist beispielhaft die am weitesten verbreitete quadratische Verbunddarstellung, die Wigner-Verteilung, diskutiert.

2.4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel gibt ausgehend von der Fourier-Transformation einen Überblick über lokale Spektraltransformationen, deren Eigenschaften, Vor- und Nachteile sowie die Motivationen,

die zur jeweiligen Weiterentwicklung oder Modifikation führten. Prinzipiell werden dabei lineare von quadratische Signalrepräsentationen unterschieden. Da die Kurzzeit-Fourier-Transformation typische Charakteristika linearer Zeit-Frequenz-Transformationen aufweist und Ausgangspunkt für die Entwicklung vieler hier nicht vorgestellter Signaldarstellungen ist, werden einige ihrer grundlegenden Merkmale exemplarisch anhand der im Kontext der Informationsdarstellung wichtigen Gabor-Transformation beschrieben. Eigenschaften quadratischer Zeit-Frequenz-Transformationen sind am Beispiel der Wigner-Verteilung im Anhang A erörtert.

Die bisherige Diskussion basiert auf einer Betrachtung zeit- und wertkontinuierlicher Transformationen und Funktionen sowie analoger Energiesignale, da für das in diesem Kapitel vorrangig verfolgte Ziel einer gegenüber der reinen Zeit- oder Frequenzdarstellung verbesserten Beschreibung nichtstationärer und transienter Signale eine Diskretisierung prinzipiell nicht von Bedeutung ist. Für den Einsatz auf digitaler Ebene sind allerdings die Auswirkungen von Abtastung und Quantisierung zu berücksichtigen. Ein entscheidendes Kriterium für die Anwendung einer Zeit-Frequenz-Transformation als Bestandteil eines digitalen Signalverarbeitungssystems ist ferner der zu ihrer Realisation benötigte Aufwand sowie die für die Ausführung des Algorithmus notwendige Anzahl an elementaren Rechenoperationen. Mit der Fast-Fourier-Transformation existiert eine effektive und mit geringem Programmieraufwand implementierbare Berechnungsvorschrift für die diskrete Fourier-Transformation. Dies ist ein wesentlicher Grund für den häufigen Einsatz der Kurzzeit-Fourier-Transformation in Signalverarbeitungssystemen mit kritischen Echtzeit- oder Kostenanforderungen. Wie im Kapitel 4 gezeigt wird, verfügt die diskrete Wavelet-Transformation ebenfalls über schnelle Analyse- und Synthesearchgorithmen, so daß auch die Wavelet-Transformation diese notwendige Voraussetzung für den effizienten Einsatz in Echtzeit-Signalverarbeitungssystemen erfüllt.

Im Kapitel 3 soll die Wavelet-Transformation in Anlehnung an ihren historischen Entstehungsprozeß, ausgehend von der kontinuierlichen Wavelet-Transformation diskutiert werden. Primäre Gründe für deren Entwicklung waren unzureichende Analyseeigenschaften der in diesem Kapitel beschriebenen linearen und quadratischen Zeit-Frequenz-Transformationen. Dabei ist das zeitlich-spektrale Analyseverhalten der linearen Transformationen im wesentlichen durch

- die nach der Heisenbergschen Unschärferelation nach unten begrenzte Lokalisierbarkeit der Elementarfunktionen in der Zeit-Frequenz-Ebene,
- das den Signaleigenschaften anzupassende Verhältnis von effektiver Ausdehnung zu effektiver Bandbreite der Fensterfunktionen und
- die unabhängig von Zeit, Frequenz und Signalverlauf nur durch die Konstanten T und Ω bestimmte feste Abtastgitterstruktur

charakterisiert.

Für die quadratischen Verteilungen sind hauptsächlich

- die gegenüber linearen Zeit-Frequenz-Transformationen verbesserten energetischen Lokalisationseigenschaften, die nicht durch eine minimal erreichbare Unschärfe begrenzt sind,
- die Auto- und Kreuzinterferenzterme mit stark unterschiedlicher Ausprägung in Abhängigkeit des untersuchten Signals und
- die zur Rechtfertigung einer Interpretation als Energieverteilung und zur Interferenzunterdrückung notwendigen spektralen und zeitlichen Glättungsoperationen

kennzeichnend.

Im Kontext der Nachrichten- und Übertragungstechnik werden lineare Zeit-Frequenz-Transformationen zumeist zur Codierung oder Kompression von Daten und in Anwendungen, die eine Signalrekonstruktion erfordern, eingesetzt. Ein typisches Beispiel hierfür ist die Verwendung der diskreten Cosinus-Transformation zur Kompression von Audio- und Videodaten im MPEG-Standard (Moving Picture Expert Group) [54, 55]. Quadratische Verbunddarstellungen dagegen werden überwiegend in einem analysierenden Zusammenhang verwendet. Charakteristische Anwendungen sind hier die Signaldetektion [56–58] und die Schätzung des momentanen Spektrums oder der momentanen Frequenz [59, 60], welche in der Radartechnik zum Einsatz kommen.

Bei den beispielhaften Anwendungen der vorgestellten Transformationen auf repräsentative Signale ist deutlich geworden, daß eine universell optimale Verbunddarstellung nicht existieren kann und daß die Wahl der adäquaten Transformationsmethode immer abhängig von den zu erwartenden Signaleigenschaften und den an die Algorithmen gestellten Anforderungen ist. So entstand auch die kontinuierliche Wavelet-Transformation aus Defiziten bisheriger Zeit-Frequenz-Transformationen hinsichtlich spezifischer Anforderungen einer Applikation. Anfang der achtziger Jahre dieses Jahrhunderts befaßte sich J. Morlet mit der Analyse seismischer Daten. Mit Kurzzeit-Fourier-Transformationsmethoden war es ihm dabei nicht möglich, einen befriedigenden Kompromiß zwischen Zeit- und Frequenzauflösung zu finden, da die zu untersuchenden Signale sowohl relativ lange quasi-stationäre Signalanteile als auch zeitlich extrem lokalisierte impulsive Beiträge aufweisen, die beide von Bedeutung sind. Quadratische Verteilungsanalysen erbringen ebenfalls nicht die erwünschten Resultate, da die Signale aus zuvielen miteinander interferierenden Komponenten bestehen. Sein erstmals in [61] für geophysikalische Signale vorgeschlagenes alternatives Analysekonzept der kontinuierlichen Wavelet-Transformation stellt einen wesentlichen Ursprung der heute verbreiteten Wavelet-Theorie dar und wird im folgenden Kapitel vorgestellt.