

Anhang A

Zeit-Frequenz-Verteilungen am Beispiel der Wigner-Verteilung

Das grundlegende Ziel der Signalbeschreibung durch eine Zeit-Frequenz-Verteilung $\mathcal{P}_{ss}(t, \omega)$ besteht darin, eine gemeinsame Funktion der Variablen Zeit und Frequenz zur Verfügung zu stellen, die den Energiegehalt bzw. die Intensität des Signals $s(t)$ zugleich im Zeit- als auch im Frequenzbereich wiedergibt. Idealerweise sollte eine Integration über den Frequenzparameter $\omega/2\pi$ die als momentane Intensität des Signals bezeichnete Größe $|s(t)|^2$ ergeben und eine Integration über den Zeitparameter t das Energiedichtespektrum $|\hat{s}(\omega)|^2$ zur Folge haben. Es sollten also die Randbedingungen

$$|s(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{ss}(t, \omega) d\omega, \quad (\text{A.1})$$

$$|\hat{s}(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{ss}(t, \omega) dt \quad (\text{A.2})$$

gelten und die Signalenergie E_s durch

$$E_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}_{ss}(t, \omega) dt d\omega \quad (\text{A.3})$$

berechnet werden können. Im weiteren Sinne werden jedoch auch Verteilungen wie das Spektrogramm $|\mathcal{F}_w(t, \omega)|^2$ oder das aus der in den folgenden Kapiteln beschriebenen Wavelet-Transformation hervorgehende Skalogramm $|\mathcal{W}_\psi(b, a)|^2$ als Zeit-Frequenz-Verteilungen verstanden, obwohl die Randbedingungen (A.1), (A.2) nicht eingehalten werden. L. Cohen zeigte in [144], daß durch die Anwendung der Formel

$$\mathcal{P}_{ss}(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) \Xi(\tau, \theta) e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} du d\tau d\theta \quad (\text{A.4})$$

mit dem Kern $\Xi(\tau, \theta)$ beliebige als Zeit-Frequenz-Verteilungen interpretierbare Transformationen erzeugt werden können, die den Gleichungen (A.1), (A.2) und (A.3) genügen, falls

$$\Xi(0, \theta) = 1, \quad \Xi(\tau, 0) = 1 \quad \text{und} \quad \Xi(0, 0) = 1 \quad (\text{A.5})$$

gilt. Alternativ kann die Verteilung auch aus der Fourier-Transformierten $\hat{s}(\omega)$ durch

$$\mathcal{P}_{ss}(t, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(u - \frac{\theta}{2}) \hat{s}^*(u + \frac{\theta}{2}) \Xi(\tau, \theta) e^{-j\theta t - j\tau\omega + j\theta u} du d\tau d\theta \quad (\text{A.6})$$

berechnet werden. Dabei kann der Kern prinzipiell Funktion der Zeit t , der Frequenz ω als auch des Signals $s(t)$ selbst sein. Fordert man allerdings die für die Interpretation der Verteilung wichtige Eigenschaft der Zeitinvarianz und des entsprechenden spektralen Verhaltens, d. h. eine Translation des Signals $s(t) \rightarrow s(t + t_0)$ bewirkt eine Translation der Verteilung $\mathcal{P}_{ss}(t, \omega) \rightarrow \mathcal{P}_{ss}(t + t_0, \omega)$ und eine Modulation $\hat{s}(\omega) \rightarrow \hat{s}(\omega + \omega_0)$ erzeugt die Abbildung $\mathcal{P}_{ss}(t, \omega) \rightarrow \mathcal{P}_{ss}(t, \omega + \omega_0)$, so muß der Kern invariant bezüglich Zeit t und Frequenz ω sein [145]. Ist Ξ darüber hinaus unabhängig von der Funktion $s(t)$, so wird die korrespondierende Verteilung als bilinear oder quadratisch und zeit- und frequenzverschiebungsinvariant bezeichnet. Solche Verteilungen sind der sogenannten Cohenschen Klasse zugehörig. Für jede Cohensche Verteilungen gilt, daß sie durch eine zweidimensionale Faltung im Zeit- und Frequenzbereich mit dem bilinearen Kern $\Xi_{\text{bi}}(t - \tau, \omega - \theta)$ aus der in der folgenden Gleichung (A.11) definierten Wigner-Verteilung $\mathcal{V}_{ss}(t, \omega)$ abgeleitet werden kann. Die Gleichung (A.4) läßt sich somit für Cohensche Verteilungen zu

$$\mathcal{P}_{ss}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Xi_{\text{bi}}(t - \tau, \omega - \theta) \mathcal{V}_{ss}(\tau, \theta) d\tau d\theta = \Xi_{\text{bi}}(t, \omega) *_{t, \omega} \mathcal{V}_{ss}(t, \omega) \quad (\text{A.7})$$

vereinfachen. Dabei beschreibt $*_{t, \omega}$ die zweidimensionale Faltung bezüglich t und ω . Der Großteil der praktisch zur Anwendung kommenden Zeit-Frequenz-Verteilungen gehört der Cohenschen Klasse an. Grundsätzlich bestimmt der Kern Ξ oder der bilineare Kern Ξ_{bi} einer Verteilung deren Eigenschaften. Zeit-Frequenz-Verteilungen werden deshalb anhand der Eigenschaften ihres Kerns klassifiziert und charakterisiert [47, 145].

Um aus $\mathcal{P}_{ss}(t, \omega)$ das Signal $s(t)$ zu rekonstruieren, berechnet man die inverse Fourier-Transformation der Gleichung (A.4) und erhält

$$s(u + \frac{\tau}{2}) s^*(u - \frac{\tau}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_{ss}(x, \omega)}{\Xi(\tau, \theta)} e^{j\theta x + j\tau\omega - j\theta u} dx d\omega d\theta \quad (\text{A.8})$$

und durch Substitution

$$s^*(t') s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_{ss}(x, \omega)}{\Xi(t - t', \theta)} e^{j(t-t')\omega + j\theta(x - (t+t')/2)} dx d\omega d\theta. \quad (\text{A.9})$$

Mit einem beliebig wählbaren Zeitpunkt t' , z. B. $t' = 0$ folgt

$$s(t) = \frac{1}{s^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{P}_{ss}(x, \omega)}{\Xi(t, \theta)} e^{jt\omega + j\theta(x-t/2)} dx d\omega d\theta. \quad (\text{A.10})$$

Demnach ist ein Signal $s(t)$ aus der zugehörigen Zeit-Frequenz-Verteilung $\mathcal{P}_{ss}(t, \omega)$ bis auf einen konstanten, im allgemeinen komplexen Faktor $1/s^*(0)$ wieder rekonstruierbar.

Am Beispiel der grundlegenden Wigner-Verteilung, die in [146] zur Analyse quantenmechanischer Vorgänge vorgeschlagen wurde, sollen im folgenden einige typische Eigenschaften bilinearer Verbunddarstellungen diskutiert werden.

Die Wigner-Verteilung \mathcal{V}_{ss} ergibt sich aus der allgemeinen Verteilungsgleichung (A.4) mit dem Kern $\Xi_{\mathcal{V}}(\tau, \theta) = 1$ zu

$$\mathcal{V}_{ss}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (\text{A.11})$$

oder alternativ als Funktion des Spektrums zu

$$\mathcal{V}_{ss}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}\left(\omega - \frac{\theta}{2}\right) \hat{s}^*\left(\omega + \frac{\theta}{2}\right) e^{-j\theta t} d\theta \quad (\text{A.12})$$

und erzeugt eine rein reellwertige Darstellung des Signals $s(t)$ über der Zeit-Frequenz-Ebene. Für die Inversionsvorschrift gilt dabei nach Gleichung (A.10)

$$s(t) = \frac{1}{s^*(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{ss}\left(\frac{t}{2}, \omega\right) e^{j\omega t} d\omega. \quad (\text{A.13})$$

Häufig wird die Wigner-Verteilung auch als Fourier-Transformation der sogenannten momentanen Korrelationsfunktion

$$r(t, \tau) = s\left(t + \frac{\tau}{2}\right) s^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \quad (\text{A.14})$$

verstanden, so daß

$$\mathcal{V}_{ss}(t, \omega) = \mathcal{F}\{r(t, \tau)\}(t, \omega) \quad (\text{A.15})$$

ist und anhand der Wigner-Verteilung das Korrelationsverhalten eines Signals in der Zeit-Frequenz-Ebene analysiert werden kann.

Für das Verständnis und die Interpretation von Zeit-Frequenz-Verteilungen ist die Berücksichtigung des quadratischen Superpositionsprinzips bilinearer Abbildungen von grundlegender Bedeutung. Im Gegensatz zu linearen Abbildungen transformiert sich ein aus additiven Komponenten bestehendes Signal

$$s(t) = C_1 s_1(t) + C_2 s_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.16})$$

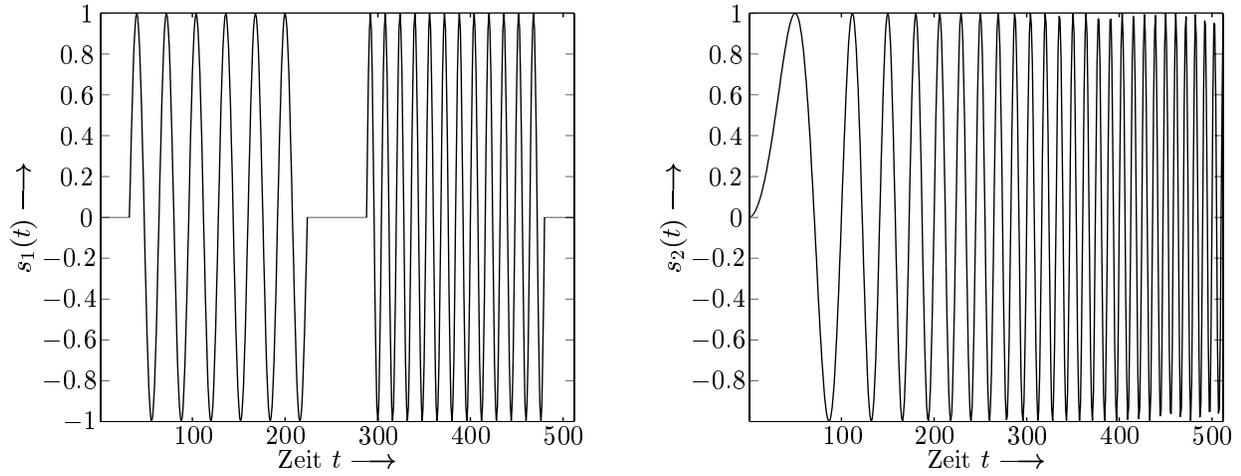


Abbildung A.1: Signal $s_1(t)$ bestehend aus zwei streng begrenzten Sinuskomponenten und das Chirp-Signal $s_2(t)$ zur Veranschaulichung von Eigenschaften der Wigner-Verteilung.

nicht in eine Summe entsprechend gewichteter Verteilungen der einzelnen Terme. Für quadratische Transformationen eines Summensignals $s(t)$ gilt stattdessen

$$\mathcal{P}_{s_s}(t, \omega) = C_1^2 \mathcal{P}_{s_1 s_1}(t, \omega) + C_2^2 \mathcal{P}_{s_2 s_2}(t, \omega) + C_1 C_2 (\mathcal{P}_{s_1 s_2}(t, \omega) + \mathcal{P}_{s_2 s_1}(t, \omega)). \quad (\text{A.17})$$

Die Auswirkungen des quadratischen Superpositionsprinzips und weitere Eigenschaften der Wigner-Verteilung werden in der Abbildung A.2 deutlich. Beispielhaft wird die Transformation des aus zwei zeitlich streng begrenzten Anteilen unterschiedlicher Frequenz bestehenden Signals $s_1(t)$ und des Chirp-Signals $s_2(t)$ mit

$$s_1(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t}{32}\right) & \text{für } t \in [32, 224] \\ \sin\left(\frac{2\pi t}{16}\right) & \text{für } t \in [288, 480] \\ 0 & \text{für } t \notin [32, 224] \cup [288, 480] \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

$$s_2(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{2\pi t^2}{10^4}\right) & \text{für } t \in [0, T] \\ 0 & \text{für } t \notin [0, T] \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

$T = 512$ betrachtet. Beide Signale sind in der Abbildung A.1 dargestellt.

Die Wigner-Verteilung $\mathcal{V}_{s_1 s_1}(t, \omega)$ des Signals $s_1(t)$ weist zu den jeweiligen Intervallmitten $[32, 224]$ und $[288, 480]$ streng monoton ansteigende Energieverläufe bei den Frequenzen $\pm 2\pi/16$ und $\pm 2\pi/32$ auf. Daneben existieren aber auch unerwünschte oszillierende Interferenzmuster hoher Amplitude. Insbesondere die aus der Wechselwirkung der beiden Sinusterme resultierenden Kreuzenergieverläufe in der zeitlichen und spektralen Mitte zwischen beiden erwünschten Beiträgen sind nachteilig, da mit ihnen weder Signalanteile von $s_1(t)$ im Zeitbereich noch spektrale Komponenten von $\hat{s}_1(\omega)$ im Frequenzbereich assoziiert werden können. Diese Interferenzen resultieren aus Kreuzkorrelationstermen, die sich in der Abbildung der momentanen Korrelationsfunktion $r_1(t, \tau)$ als zwei Rauten mit den Mittelpunkten $(256, \pm 128)$ in der (t, τ) -Ebene darstellen. Weiter treten in beiden Verteilungen

niederfrequente Interferenzterme auf, die auf die Wechselwirkungen von positiven und negativen Frequenzen zurückzuführen sind. Sie können durch eine der Verteilungsberechnung vorangehende Abbildung reeller Signale auf ihre analytische Variante vermieden werden. Die Wigner-Verteilung $\mathcal{W}_{s_2 s_2}(t, \omega)$ des Signals $s_2(t)$ zeigt bis auf diese Autointerferenzen die gewünschte, im Vergleich zu linearen Zeit-Frequenz-Transformationen exaktere, energetische Lokalisierbarkeit im Zeit- als auch im Frequenzbereich.

Das dargelegte Beispiel veranschaulicht die Vorteile der kompakten Energiedarstellung durch die Wigner-Verteilung bei der Analyse von Signalen mit einer frequenzmodulierenden Charakteristik. Zudem wird die Problematik bei der Betrachtung schmalbandiger, zeitlich begrenzter Summensignale als Resultat der quadratischen Superposition sichtbar. Dieses qualitative Ergebnis läßt sich zu einer grundlegenden Eigenschaft Cohenscher Verteilungen verallgemeinern und wird in [147] für verschiedene Signalklassen und Verteilungen diskutiert.

Die Kreuzinterferenzterme der Wigner-Verteilung schränken ihren Einsatz in praktischen Anwendungen stark ein. Da Interferenzterme eine oszillierende Charakteristik aufweisen, kann ihre Abschwächung durch Tiefpaßfilterung in Zeit- und Frequenzdomäne erreicht werden. Wählt man demnach den bilinearen Kern $\Xi_{\text{bi}}(\tau, \theta)$ entsprechend Gleichung (A.7) mit einer Tiefpaßcharakteristik bezüglich der Argumente τ und θ , so wird eine Cohensche Verteilung mit unterdrückten Interferenzen erzeugt. Eine solche quadratische Abbildung wird als Smoothed-Wigner-Verteilung bezeichnet. Von besonderer Bedeutung sind dabei separable bilineare Kerne

$$\Xi_{\text{bi}}(t - \tau, \omega - \theta) = w_t(t - \tau) \hat{w}_\omega(\omega - \theta) \quad (\text{A.20})$$

deren zeitliches und spektrales Glättungsverhalten sich unabhängig voneinander durch das Tiefpaßverhalten der Fensterfunktionen $w_t(t)$ und $\hat{w}_\omega(\omega)$ anpassen läßt. Quadratische Zeit-Frequenz-Transformationen mit einem Kern nach Gleichung (A.20) werden als Pseudo-Smoothed-Wigner-Verteilungen bezeichnet.

Die Abbildung A.3 verdeutlicht den Glättungseffekt der Pseudo-Smoothed-Wigner-Verteilungen anhand der Beispielsignale $s_1(t)$ und $s_2(t)$. Hier wurden $w_t(t)$ und $w_\omega(\omega)$ als Gaußsche Fensterfunktionen nach Gleichung (2.28) mit den Streuparametern $\sigma_t = 30, \sigma_\omega = 10$ für $s_1(t)$ und $\sigma_t = 25, \sigma_\omega = 7$ für $s_2(t)$ gewählt. Neben der Artefaktdämpfung wirkt sich die Glättungsoperation der Faltung mit einer zweidimensionalen Tiefpaßfunktion allerdings grundsätzlich nachteilig auf die Energiekonzentration aus. Demnach muß ein den Anforderungen der Anwendung entsprechender Kompromiß zwischen Interferenzunterdrückung und energetischer Konzentration gefunden werden.

Auch das Spektrogramm $|\mathcal{F}_w\{s(t)\}(t, \omega)|^2$ und das Skalogramm $|\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a)|^2$ eines Signals $s(t)$ lassen sich als geglättete Wigner-Verteilung interpretieren. Dabei geht die Fensterfunktion $w(t)$ und das Wavelet $\psi(t)$ ebenfalls über die Wigner-Verteilung in den Kern

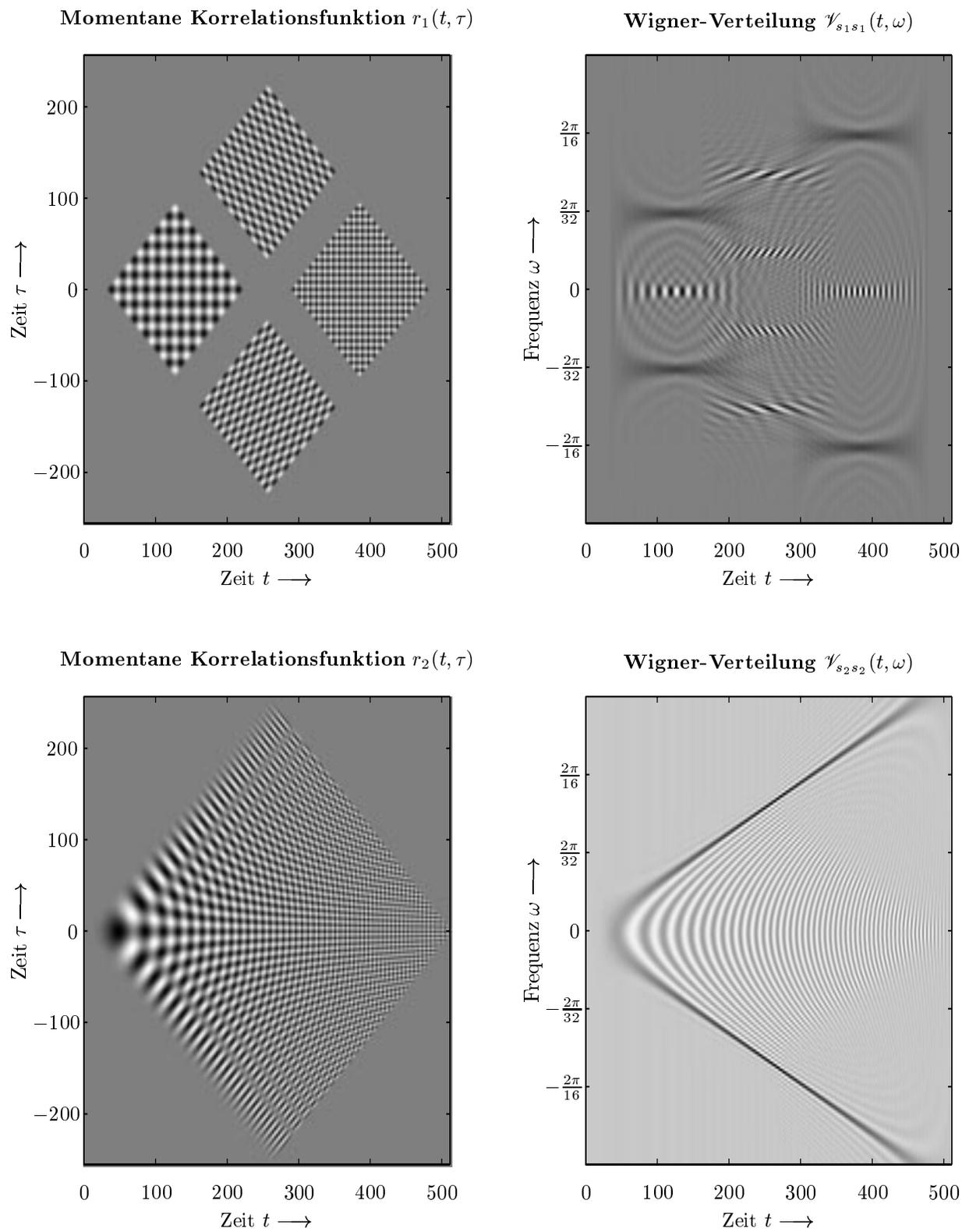


Abbildung A.2: Die momentanen Korrelationsfunktionen $r_1(t, \tau)$, $r_2(t, \tau)$ der Signale $s_1(t)$, $s_2(t)$ aus Abbildung A.1 und deren Wigner-Verteilungen $\mathcal{V}_{s_1 s_1}(t, \omega)$, $\mathcal{V}_{s_2 s_2}(t, \omega)$.

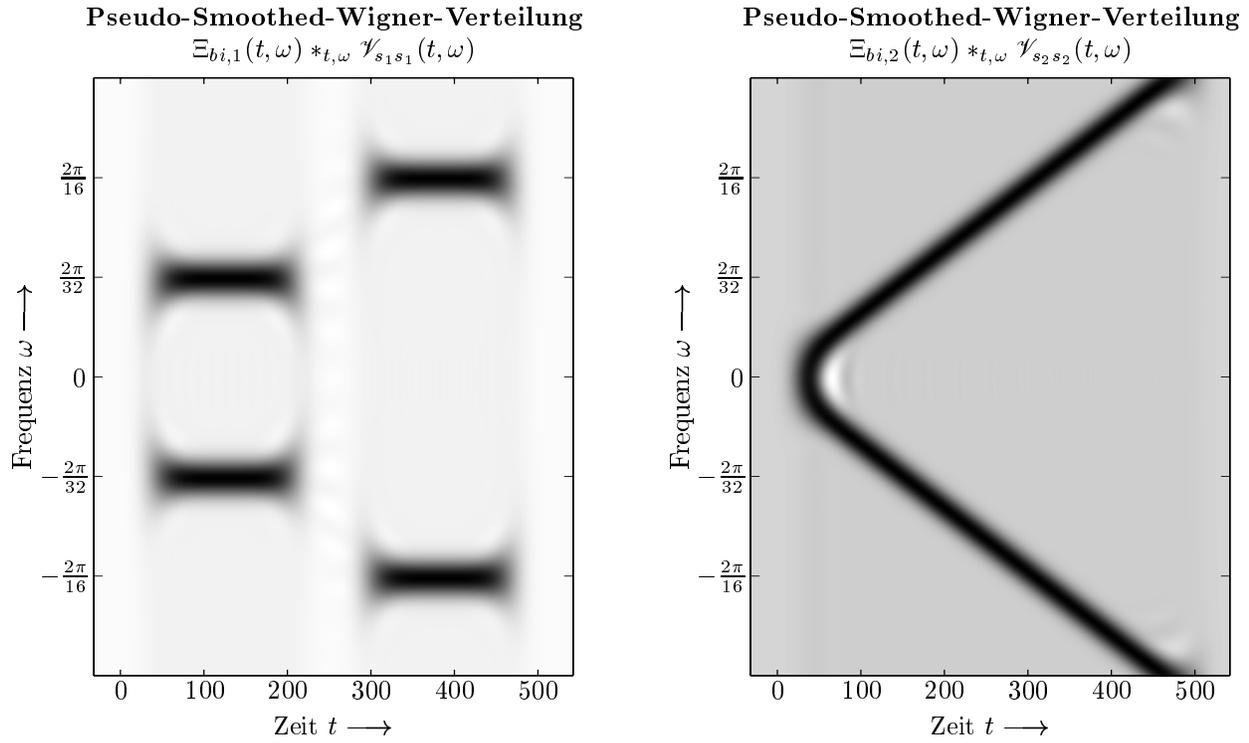


Abbildung A.3: Die Pseudo-Smoothed-Wigner-Verteilungen $\Xi_{bi,1}(t, \omega) *_{t, \omega} \Psi_{s_1 s_1}(t, \omega)$ und $\Xi_{bi,2}(t, \omega) *_{t, \omega} \Psi_{s_2 s_2}(t, \omega)$ der Signale $s_1(t)$, $s_2(t)$ aus der Abbildung A.1 mit gauß-impulsförmigen Glättungsfensterfunktionen $\Xi_{bi,1}(t, \omega) = w_{\text{gau\beta},30}(t)w_{\text{gau\beta},10}(\omega)$ und $\Xi_{bi,2}(t, \omega) = w_{\text{gau\beta},25}(t)w_{\text{gau\beta},7}(\omega)$.

ein. Es gelten die in [148] und [149] hergeleiteten Zusammenhängen

$$|\mathcal{F}_w\{s(t)\}(t, \omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{ss}(\tau, \theta) \mathcal{V}_{ww}(\tau - t, \theta - \omega) d\tau d\theta \quad (\text{A.21})$$

$$|\mathcal{W}_\psi\{s(t)\}(b, a)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{ss}(\tau, \theta) \mathcal{V}_{\psi\psi}\left(\frac{\tau - b}{a}, a\theta\right) d\tau d\theta. \quad (\text{A.22})$$

Das Spektrogramm ist somit eine Cohensche Verteilung und kann als Smoothed-Wigner-Verteilung mit dem Kern $\mathcal{V}_{ww}(-t, -\omega)$ aufgefaßt werden. Das Skalogramm ist dagegen kein Element der Cohenschen Klasse sondern der sogenannten affinen Klasse [47,149], da der Kern sich nicht als Funktion der Argumente $t-\tau$ und $\omega-\theta$ darstellen läßt. Die daraus resultierende affine Glättung der Wigner-Verteilung in Gleichung (A.22) zeichnet sich dadurch aus, daß das Glättungsausmaß bezüglich des Zeitparameters b und des Skalierungsparameters (oder Dilatationsparameters) a invers propotional zur zu analysierenden Frequenz θ ist.

Anhang B

MIT-BIH Datenbasis, repräsentative Signalrealisation

Die Tabelle B.1 definiert die Zuordnung der 48 EKG-Aufzeichnungen aus dem CD-ROM-Verzeichnis mitdb der MIT-BIH Datenbasis zu den EKG-Signalprozessrealisationen j_s , $j = 1, \dots, 48$. Dabei ist jeweils die erste von zwei Aufzeichnungen, die sich in einer Datei befinden der Realisation (oder Musterfunktion) j_s zugeordnet.

Tabelle B.1: *Indexzuweisung für die MIT-BIH EKG-Aufzeichnungen.*

EKG-Aufzeichnung	j	EKG-Aufzeichnung	j	EKG-Aufzeichnung	j	EKG-Aufzeichnung	j
100.dat	1	113.dat	13	201.dat	25	217.dat	37
101.dat	2	114.dat	14	202.dat	26	219.dat	38
102.dat	3	115.dat	15	203.dat	27	220.dat	39
103.dat	4	116.dat	16	205.dat	28	221.dat	40
104.dat	5	117.dat	17	207.dat	29	222.dat	41
105.dat	6	118.dat	18	208.dat	30	223.dat	42
106.dat	7	119.dat	19	209.dat	31	228.dat	43
107.dat	8	121.dat	20	210.dat	32	230.dat	44
108.dat	9	122.dat	21	212.dat	33	231.dat	45
109.dat	10	123.dat	22	213.dat	34	232.dat	46
111.dat	11	124.dat	23	214.dat	35	233.dat	47
112.dat	12	200.dat	24	215.dat	36	234.dat	48

Das $\chi = 1200$ EKG-Zyklen umfassende repräsentative Signal $^{\text{rep}}\mathbf{s}$ setzt sich, wie in Tabelle B.2 dargestellt, aus Anteilen verschiedener EKG-Aufzeichnungen zusammen.

Tabelle B.2: *Zusammensetzung des repräsentativen Signals $^{\text{rep}}\mathbf{s}$.*

EKG-Aufzeichnung	j	Zyklusanzahl	Startzeit	Stopzeit
100.dat	1	200	8 s	2 min 49 s
104.dat	5	200	2 min 26 s	5 min 6 s
106.dat	7	200	3 min 8 s	6 min 28 s
107.dat	8	100	1 min 34 s	2 min 58 s
109.dat	10	100	2 min 18 s	3 min 28 s
113.dat	13	100	52 s	2 min 35 s
117.dat	17	100	1 min 1 s	3 min
118.dat	18	100	5 s	1 min 26 s
200.dat	24	100	16 s	1 min 42 s

Anhang C

Gleichsetzung von Entwicklungskoeffizienten und Abtastwerten

Im Kapitel 4 wurde im Definitionspunkt 5 der Multi-Skalen-Analyse die diskrete Approximationsabbildung $\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(l)}$ eingeführt, die dazu verwendet werden kann einem Signal $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ über die Gleichung (4.106) eine Approximationssequenz $v_l(k)$ für eine Auflösungsstufe $S_l = 2^{-l}$ zu zuordnen. Umgekehrt kann diese Sequenz über die Gleichung (4.107) wiederum auf das kontinuierliche Signal $s_{\text{app};l}(t)$ als Projektion von $s(t) \in L^2(\mathbb{R})$ in den Approximationsraum \mathcal{A}_l abgebildet werden. Berücksichtigt man diese Abbildungsschemen, so muß die Sequenz $s(n)$, aus der die Entwicklungskoeffizienten durch Anwendung einer dyadischen Filterbank berechnet werden, als Approximationssequenz

$$s(n) = v_0(k)|_{k=n} \quad (\text{C.1})$$

interpretiert werden. Dabei ergibt sich $s(n)$ nach Gleichung (4.106) aus einem Signal $s_{\text{org}}(t)$ durch Innere-Produkt-Bildung mit translatierten Skalierungsfunktionen entsprechend

$$\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(0)}\{s_{\text{org}}(t)\}(k) = \langle s_{\text{org}}(t), \phi(t-k) \rangle = v_0(k) = s(n)|_{n=k}. \quad (\text{C.2})$$

Über Gleichung (4.107) ist $s(n)$ dann die Signalapproximation

$$s_{\text{app};0}(t) = \mathcal{A}_0\{s_{\text{org}}(t)\}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)\phi(t-k) \quad (\text{C.3})$$

zugeordnet und das Konvergenzverhalten der aus $s(n)$ hervorgehenden Entwicklungskoeffizienten wird für $l \leq 0$ nach Gleichung (4.157) von $s_{\text{app};0}(t)$ und der Anzahl der verschwindenden Wavelet-Momente bestimmt.

Bei den durch die Gleichungen (C.2) und (C.3) gegebenen Zuordnungen, ist zu beachten, daß im allgemeinen $s_{\text{org}}(t)$ und $s_{\text{app};0}(t)$ nicht mit dem ursprünglich akquirierten analogen Signal $s_{\text{akq}}(t)$ und mit dessen Anti-Alias-Filterung $s(t)$, aus der $s(n)$ wie in Abbildung 5.1

dargestellt durch Abtastung hervorgegangen ist, übereinstimmen. Demnach sind die Entwicklungskoeffizienten, die aus der in Abbildung 4.5 dargestellten Filterbank mit dem Eingangssignal $s(n)$ resultieren, prinzipiell den Wavelet-Transformationskoeffizienten des tiefpaßgefilterten akquirierten Signals $s(t)$ ungleich. Für das Konvergenzverhalten der Entwicklungskoeffizienten ist dieser Sachverhalt von entscheidender Bedeutung, da daß aus der Sequenz $s(n)$ nach Gleichung (C.3) synthetisierte Signal $s_{\text{app};0}(t)$ zumeist deutlich schlechtere Regularitätseigenschaften aufweist als das tiefpaßgefilterte Signal $s(t)$. Im allgemeinen ist daher eine Filterung der Sequenz $s(n)$ im Hinblick auf ein rasches Abklingen der Entwicklungskoeffizienten notwendig bevor die Sequenz $s(n)$ der Filterbank zugeführt wird [22].

Für die hier betrachteten EKG-Signale kann allerdings in sehr guter Näherung

$$\mathcal{S}_{\text{dis};\phi}^{(0)}\{s(t)\}(k) = \langle s(t), \phi(t-k) \rangle = v_0(k) \approx s(n)|_{n=k} \quad (\text{C.4})$$

mit

$$s(t) \approx s_{\text{app};0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(k)\phi(t-k) \quad (\text{C.5})$$

gesetzt werden, falls der Skalierungsfunktion $\phi(t)$ Wavelets mit einer ausreichenden Anzahl verschwindender Momente zugeordnet sind.

In der Abbildung C.1 ist die Rechtfertigung der Annahmen (C.4) und (C.5) qualitativ zu erkennen: Das obere Bild zeigt das aus dem repräsentativen Signal $^{\text{rep}}s(n)$ abgeleitete Energiedichtespektrum für eine logarithmische Ordinatenkalierung. Die senkrechten gestrichelten Linien markieren dabei die 100 Hz Grenzfrequenz des Anti-Alias-Filters, der bei der Digitalisierung des Signals eingesetzt wurde [116]. Aus dieser Darstellung kann abgeleitet werden, daß das tiefpaßgefilterte EKG-Signal vor der Abtastung im wesentlichen auf den Frequenzbereich $(-100 \text{ Hz}, 100 \text{ Hz})$ beschränkt war. Das untere Bild zeigt das Betragsspektrum des Signals $^{\text{rep}}s(t)$, die Betragsspektren der Haar-Skalierungsfunktion ($\cdot-$), der $D2$ -Skalierungsfunktion ($--$), der $D4$ -Skalierungsfunktion ($-$) und die Filtercharakteristik eines Raised-Cosine-Filters mit Roll-Off-Faktor 0.5 als Beispiel eines Anti-Aliasing-Filters (\cdots). Es ist hier erkennbar, daß das Innere-Produkt von Signal und verschobenen $D4$ -Skalierungsfunktionen in sehr guter Näherung das selbe Ergebnis zur Folge hat wie die Anti-Aliasing-Filterung mit dem Raised-Cosine-Filter und einer anschließenden Abtastung. Gleichung (C.4) gilt somit prinzipiell für $D4$ -Skalierungsfunktionen und praktisch für alle Skalierungsfunktionen, deren Fourier-Transformierte im Frequenzbereich $(-100 \text{ Hz}, 100 \text{ Hz})$ einen nahezu flachen Verlauf aufweisen. Die Spektren von $D2$ - und Haar-Skalierungsfunktionen sind nicht ausreichend flach aufgrund der zu geringen Anzahl verschwindender Wavelet-Momente, so daß für sie die Gleichung (C.4) nicht gilt.

Die für das Konvergenzverhalten entscheidende Approximation von $s(t)$ durch $s_{\text{app};0}(t)$ nach Gleichung (C.5) trifft für Skalierungsfunktionen umso besser zu, je ausgeprägter die Dämpfung der spektralen Anteile von $\hat{s}(e^{j\omega})$ in der Umgebung der Frequenzen $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ durch

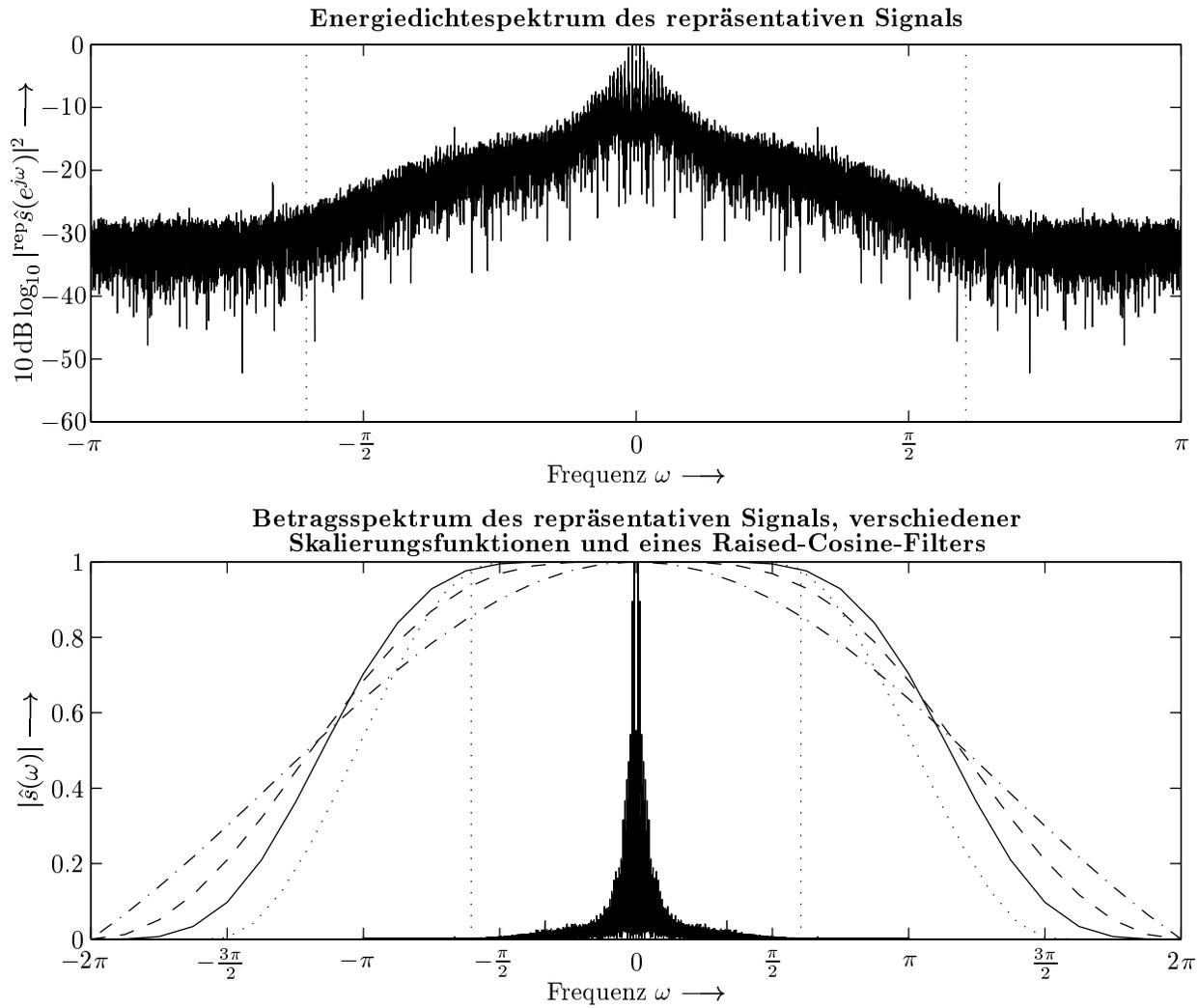


Abbildung C.1: Spektrale Darstellung des repräsentativen EKG-Signals, eines Raised-Cosine-Filters mit Roll-Off-Faktor 0.5 und Haar-, D2- und D4-Skalierungsfunktionen. Die erste Abbildung zeigt den Basisbandausschnitt aus dem der Sequenz ${}^{\text{rep}}s(n)$ zugeordnetem Spektrum ${}^{\text{rep}}\hat{s}(e^{j\omega})$ in logarithmischer Darstellung. Die gestrichelten senkrechten Linien bezeichnen in beiden Abbildungen die 100 Hz-Eckfrequenz des Anti-Aliasing-Filters. In der zweiten Darstellung sind zusätzlich die Betragsspektren des Raised-Cosine-Filters (\cdots), der Haar-Skalierungsfunktion ($-\cdot-$), der D2-Skalierungsfunktion ($--$) und der D4-Skalierungsfunktion ($—$) gezeigt.

$\hat{\phi}(\omega)$ ausfallen. Dies wird aus der Fourier-Transformation

$$\hat{s}(\omega) \approx \hat{s}_{\text{app};0}(\omega) = \hat{\phi}(\omega)\hat{s}(e^{j\omega}) \quad (\text{C.6})$$

der Gleichung (C.5) deutlich. Qualitativ ist aus dem zweiten Bild der Abbildung C.1 erkennbar, daß diese Approximation mit steigender Anzahl von verschwindenden Wavelet-Momenten immer besser wird und für eine praktisch richtige Gleichsetzung von $s(t)$ und $s_{\text{app};0}(t)$ mindestens 4 verschwindende Wavelet-Momente benötigt werden.