4 Anwendung der FEM zur Untersuchung der Strukturstabilität

Bei beweglichen Konstruktionen wie Fahrzeugen aller Art (Kraftfahrzeuge, Schiffe, Flugzeuge) ist es notwendig das Eigengewicht soweit wie möglich zu senken, ohne aber die Betriebssicherheit in Frage zu stellen. Um dieses zu erreichen, bestehen viele Möglichkeiten. Im allgemeinen wird aber der Konstrukteur zunächst eine höhere Materialauslastung anstreben, wodurch die Bauteile schlanker bzw. dünnwandiger ausfallen. Werden hierbei die zulässigen Zugspannungen überschritten, kann dies durch eine höhere Materialfestigkeit ausgeglichen werden. Probleme mit der Strukturstabilität lassen sich auf diese Weise aber nicht lösen. Abhilfe bietet in diesem Fall nur eine ausgefeilte Konstruktion des betreffenden Bauteils und eine rechnerische Überprüfung.

Bei der Nutzung der nichtlinearen FEM und besonders bei der Implementierung eigener Elemente sind einige wichtige Punkte zu beachten. Die Kenntnis der theoretischen Grundlagen ist unbedingt erforderlich um erfolgreiche Berechnungen zu gewährleisten. Leider ist festzustellen, daß die Literatur über diese Punkte zum Teil recht dürftig ist. Im Rahmen des Forschungsvorhaben wurden am ISD einige Aufsätze angefertigt, welche die notwendigen Grundlagen, die Handhabung der eingesetzten Software sowie eigene Erfahrungswerte dokumentieren. Eine vollständige Wiedergabe dieser Erkenntnisse ist an dieser Stelle sicherlich nicht sinnvoll, so daß in den folgenden Abschnitten jeweils nur eine kurze Zusammenfassung enthalten ist. Weitergehende Informationen sind den “*institutsinternen Berichten*” /V17/, /V18/, /V19/ zu entnehmen.

4.1 Grundlagen der Strukturstabilität

Die Untersuchung der Strukturstabilität kann durch unterschiedliche Verfahren erfolgen. Eine Übersicht der einzelnen Verfahren und deren Zusammenhänge wird in /V17/ am Beispiel eines einfachen Knickstabes gegeben.

1) Die Betrachtung des Verzweigungspunktes in einem Kraft-Verformungs-Diagramm führt auf eine lineare Eigenwertuntersuchung. Für technisch relevante Systeme ist dabei nur der kleinste Eigenwert interessant. Weiterführende Untersuchungen betrachten den Eigenwert am vorverformten System.

2) Analytische Untersuchungen des Strukturverhaltens müssen sich auf wenige akademische Beispiele beschränken, da schon bei relativ einfachen Strukturen ein enormer mathematischer Aufwand zu betreiben ist /Chia/. Die analytische Lösung der Differentialgleichungen für reale technische Konstruktionen dürfte i.a. nicht möglich sein.

3) Als eine Mischung aus vorgefertigten Lösungen der Differentialgleichungen für bestimmte Randbedingungen und Erfahrungswerten können Berechnungs- und Bemessungsvorschriften (z.B. DIN, ISO, GL Vorschriften, DAST Richtlinien etc.) angesehen werden. So erfolgt die Berücksichtigung von Problemen der Strukturstabilität für allgemeine Stahlbauten auf der Basis DIN 18800(90).
   Zunehmend wird aber eine “Ausreizung” der Bauteile mit garantierter Sicherheit gefordert. Die Möglichkeiten der klassischen Dimensionierungsvorschriften reichen dann nicht mehr aus.

4) Werden die vorgenannten Punkte als nicht ausreichend bzw. undurchführbar erachtet, so bieten sich numerische Lösungsmethoden an. In der Praxis hat sich die Finite Elemente Methode (FEM) bewährt. In früheren Jahren wurden sogenannte *in-house codes* für jedes spezielle Problem entwickelt. Diese *special-purpose* Programme haben aber den Nachteil, daß viel Entwicklungsarbeit doppelt betrieben werden muß und nur für einen kleinen Anwenderkreis eine Nutzung sinnvoll ist. Aus diesem Grund setzt sich in zunehmenden Maße kommerzielle, *general-purpose* Software durch. Bietet das Programm zudem die Möglichkeit

über Schnittstellen auf den Quellcode zuzugreifen, so ist es auch für anspruchsvolle wissenschaftliche Anwendungen verwendbar.

An dieser Stelle ist es sicherlich nicht sinnvoll die angesprochenen Punkte detaillierter zu beschreiben. Erläuterungen zum Energiebegriff, zu den verschiedenen Versagensmechanismen und den typischen Last-Verformungskurven können /V17/ entnommen werden. Weiterhin wird dort auf das Knicken und Beulen von unversteiften und versteiften Platten und Schalen eingegangen.

4.2 Nichtlineare Strukturberechnungen mit der FEM

Wie bereits erwähnt, wird als Berechnungsmethode der Strukturmechanik sehr häufig die **Finite Element Methode (FEM)** angewendet. Bei der Analyse von (Struktur-) **Stabilitätsproblemen** mit dieser Methode sind einige Besonderheiten zu beachten, die im folgenden kurz erläutert werden.

Die Beschreibung des Tragverhaltens realer Konstruktionen wird i.a. durch vereinfachende Annahmen begleitet bzw. erst möglich gemacht. Diese Vereinfachungen beziehen sich auf die geometrischen und physikalischen Beziehungen und ggf. auch auf die Randbedingungen. Die ermittelten Lösungen sind dann i.a. nur für einen eingegrenzten Belastungsbereich hinreichend genau. Ist eine darüber hinaus gehende Beschreibung der Strukturantwort erforderlich, ist es notwendig, diese “Linearisierungen” wieder fallen zu lassen. Die zu untersuchenden Gleichungen werden dann nichtlinear. Die Lösung einer nichtlinearen Gleichung $f_{(x)}= 0$ ist aber nur in Ausnahmefällen in geschlossener Form möglich. In den meisten Fällen wird zur Lösung eines solchen Problems eine Näherung angestrebt. Als besonders universelles Werkzeug hat sich hierbei die Finite Element Methode sehr gut bewährt. Beschränkt man sich bei einer Betrachtung der Strukturstabilität mit Hilfe der FEM nicht auf Eigenwertuntersuchungen, sondern möchte auch Aussagen über den Kraft-Verformungsverlauf erhalten, so ist eine ausführliche, nichtlineare FE-Analyse erforderlich.

Nichtlineare Strukturanalysen werden in drei große Gruppen eingeteilt:

- Geometrisch nichtlinear
- Physikalisch nichtlinear
- Nichtlineare Belastungen $^{und}/_{oder}$ Randbedingungen

Geometrisch nichtlineares Verhalten ist bei großen Verformungen wie z.B. beim Beulen zu beachten. Da für den Schiffbau in den meisten Fällen Stahl verwendet wird, resultieren die Nichtlinearitäten des Materialverhalten aus der Überschreitung der Streckgrenze und dem veränderten Materialverhalten im plastischen Bereich. Es werden zwei grundlegende Vorgehensweisen unterschieden, das sog. Teilplastizieren und das Vollplastizieren. Die Teilplastizierung beschreibt den lokalen Strukturbereich, in dem das Material die Fließgrenze überschritten hat. Die Vollplastizierung ist die Grundlage der Traglasttheorie, in der das Verhalten der Konstruktion bis zum vollständigen Zusammenbruch beschrieben wird. Die erwähnte dritte Gruppe der Nichtlinearitäten sind nichtlineare Belastungen $^{und}/_{oder}$ nichtlineare Randbedingungen. Hierunter sind z.B. nichtlineare Federelemente zu verstehen. Desweiteren fallen Kontaktrechnungen (ggf. mit Reibung) in diesen Bereich, da sich die Kontaktfläche bei Belastungswechsel ändert.

Selbstverständlich können in einer Analyse mehrere Gründe für Nichtlinearitäten vorliegen (z.B. Plastizierungen beim Beulen), so daß die drei Gruppen miteinander kombiniert werden müssen. Vor der Durchführung einer FE-Analyse ist genau zu überlegen, ob diese linear durchgeführt werden kann oder nichtlinear durchgeführt werden muß. Sollte eine nichtlineare Untersuchung notwendig sein, so sind einige Punkte zu beachten. Die wenigsten nichtlinearen Analysen werden auf Anhieb die gewünschten Ergebnisse liefern! Auch wenn es auf den ersten Blick zeitraubend erscheint, sollten nichtlineare Berechnungen immer durch eine gezielte lineare Analyse oder durch Eigenwertuntersuchungen vorbereitet sein /Alten/ /Bathe/. Die Art der zu erwartenden nichtlinearen Strukturantwort (z.B. welche Beulform), die Eingrenzung der nichtlinearen Strukturbereiche (z.B. Ort der Plastizierungen), aber auch unkorrekte Modellierungen (z.B. Netzfehler) können durch lineare Voruntersuchungen beurteilt werden. Es empfiehlt sich außerdem in solchen Voruntersuchungen das FE-Netz zunächst grob zu gestalten, um die Berechnungszeiten möglichst gering zu halten. In dem Standardlehrbuch von *Bathe* /Bathe/ wird ausdrücklich davor gewarnt, bei den ersten Berechnungen die allgemeinste nichtlineare Formulierung und eine große Anzahl von Elementen zu verwenden. Statt dessen empfiehlt es sich, die Nichtlinearitäten und die Netzfeinheit mit Vorsicht zu erhöhen.

Auch die Ausführungen dieses Abschnittes müssen kurz gehalten werden. Weitere Informationen können dem *institutsinternen Bericht* /V18/ entnommen werden. Dort wird eine kurze Einführung in die Grundlagen der nichtlinearen FE-Rechnungen gegeben. Es wird die Fragestellung erörtert, ob eine Berechnung linear durchgeführt werden kann oder nichtlinear durchgeführt werden muß. Anschließend werden die verschiedenen inkrementell-iterativen Lösungsverfahren und die Wahl der Fehlerschranken erläutert. Diese sind für die Durchführung der Berechnung ebenso wichtig wie für die kritische Auswertung der Ergebnisse. Weiterhin wird die Nutzung von *total* und *updated Lagrange* beschrieben. Anzumerken ist, daß in /V18/ kein Wert auf Vollständigkeit gelegt wird. Im wesentlichen werden nur die Algorithmen erläutert, die bei den am ISD durchgeführten numerischen Berechnungen angewendet werden. Eine ausführliche Darstellung der Theorie von nichtlinearen Untersuchungen mit der FEM kann /Crisfield1/ /Crisfield2/ /Ramm82/ /Stein1/ entnommen werden.

4.3 FEM bei der Berechnung der Strukturstabilität

Sollen Probleme der Strukturstabilität im überkritischen Bereich mit der FEM untersucht werden, sind einige Besonderheiten zu beachten, die in /V19/ erläutert werden. Ein wichtiger Punkt sind die besonderen Randbedingungen bei der Ausnutzung von Symmetrie und Antimetrie /V35/. Weiter werden die Möglichkeiten erörtert, wie sich die verschiedenen Erscheinungsformen von Imperfektionen auf das FE-Modell übertragen lassen.

Im Falle eines ausgeprägten nichtlinearen Stabilitätsverhaltens können die Ergebnisse der linearen Untersuchung mitunter stark von den tatsächlichen Lösungen abweichen. Die Ursachen für die Nichtlinearitäten können geometrisch $^{\text{und}}/_{\text{oder}}$ physikalisch sein. Die inkrementell-iterative Lösungsstrategien (Last- und Wegsteuerung mit Newton-Raphson o.a.) sind bei Stabilitätsproblemen unter Umständen ungeeignet. Aus diesem Grund haben die Bogenlängenverfahren für die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit der FEM eine besondere Bedeutung. Desweiteren ist eine automatische Schrittweitenanpassung notwendig, um akzeptable Berechnungszeiten zu erhalten. Ein weiteres Problem ist die Tatsache, daß die Steifigkeitsmatrix in den kritischen Punkten nicht-positiv definit wird. Es werden zusätzliche Routinen im Programm erforderlich, um dennoch eine Berechnung durchführen zu können.

Da bei Strukturen mit Stabilitätsproblemen i.a. die Fließgrenze des Materials lokal überschritten wird, ist eine Berücksichtigung des elasto-plastischen Materialverhaltens notwendig. Alle die genannten Punkte sollten bei der Auswahl eines Programmsystem und bei der Durchführung der Berechnungen beachtet werden.

4.4 Anmerkungen zur Theorie

Bei den zweidimensionalen Elementen wird der MARC Elementtyp 75 eingesetzt. Dabei handelt es sich um ein vierknotiges Schalenelement mit sechs Freiheitsgraden pro Knoten und linearer Ansatzfunktion. Die Geometrie kann willkürlich verzerrt sein. Dies bedeutet, daß die Knoten nicht in einer Ebene liegen müssen. Die Elementkanten brauchen keinen rechten Winkel zueinander zu bilden, jedoch müssen übermäßig spitze oder flache Winkel vermieden werden, um keinen vorzeitigen Abbruch der Rechnung zu provozieren. Die *Elementlibrary* von MARC stellt kein eigentliches dreiknotiges Element zur Verfügung. Sollte es aus geometrischen Zwangsbedingungen erforderlich sein, Dreieckselemente zu verwenden, kann dies erreicht werden, indem der erste Knoten des Elementtyps 75 als vierter doppelt vergeben wird.

Für die Modellierung der Steifen (im Wallgang und ggf. im Doppelboden) werden Balkenelemente nach der Bernoulli-Theorie (Elementtyp78 oder 79) genutzt. Hierbei handelt es sich um Balkenelemente für dreidimensionale Anwendungen. An jedem der zwei Knoten müssen somit drei translatorische und drei rotatorische Freiheitsgrade berücksichtigt werden. Die lokale z-Achse des Balkenelementes wird durch die Koordinaten der beiden Knoten, die lokale xz-Ebene durch einen zusätzlich anzugebenden Richtungspunkt bestimmt. Das zu berechnende Profil kann über einen offenen oder geschlossenen Querschnitt verfügen. Zur Bestimmung der Ansatzfunktion wird für die Verformung in Längsrichtung ein linearer Verschiebungsansatz, für die Durchbiegung ein kubischer Ansatz gewählt. Da an verschiedenen Stellen des Profilquerschnittes die Spannungen bestimmt werden sollen (Spannungspunkte), reicht eine direkte Eingabe der Geometriedaten (A, I_{xx}, I_{yy}) nicht aus. Es ist somit notwendig, die Profilgeometrie im BEAM SECT Modul von MENTAT festzulegen.

Bezüglich der Größe der Verformungen ist zu bedenken, daß die Durchbiegung der Platte die Plattendicke übersteigen können. Spätestens ab diesem Punkt können die Membranspannungen als nicht mehr vernachlässigbar angesehen werden. Für eine FEM Rechnung bedeutet dies, daß große Verformungen zu beachten sind. Somit ist die *updated Lagrange* Formulierung zu nutzen, um die geometrischen Änderungen der belasteten Struktur zu berücksichtigen. Die Elementsteifigkeitsmatrix setzt sich so aus der Kernsteifigkeit und der geometrischen Steifigkeitsmatrix zusammen. Es erfolgt eine inkrementell-iterative Lösung des Gleichungssystems, wobei das Bogenlängenverfahren nach Crisfield mit einer automatischen Schrittweitensteuerung eingesetzt wird. Die Iteration erfolgt nach Full-Newton Raphson. Als Konvergenzkriterium wird *residual checking* verwendet.

4.5 Besondere Probleme

Bei der Betrachtung der Strukturstabilität mit der FEM sind einige Punkte zu beachten, die sonst zu falschen Ergebnissen bzw. Fehlern bei der Interpretation der Ergebnisse führen.

a) Natürlich sind die Eingabedaten eines FE-Modells entscheidend für die Qualität bzw. Brauchbarkeit der Ergebnisse. Neben ungeeigneten Werkstoff- und Geometriedaten kann auch die falsche Ausrichtung von Balkenelementen unbrauchbare Ergebnisse produzieren.

b) Die Güte der Vernetzung und die Wahl der Elementtypen ist ein weiterer wichtiger Punkt der vor der ersten Berechnung zu klären ist. So kann z.B. der Kollaps eines versteifenden Bauteils (z.B. Dennebaumprofil) über Balkenelemente nicht ausreichend erfaßt werden.

c) Die Bedeutung der Randbedingungen ist allgemein bekannt. Insbesondere bei der lokalen Betrachtung einzelner Bauteile aus einem Gesamtsystem können zu stark vereinfachende Annahmen leicht zu Fehlern führen.

d) Das Versagen einer stabilitätsgefährdeten Struktur beginnt, wenn die Verformungen für kleine (oder auch negative) Lastzunahmen schon relativ groß werden /V35/. In diesem Fall spricht man vom Kollaps einer Struktur, welcher durch die abnehmende Gesamtsteifigkeit hervorgerufen wird. Dies äußert sich in den Last-Verformungsdiagrammen durch einen Wendepunkt und ggf. durch ein Absenken der Belastungen bei gleichzeitigem Anwachsen der Verformungen.
   Problematisch sind die Wendepunkte, in denen die Steigung der Kurve zu null wird. Dies bedeutet, daß sich das System nach einer kleinen Störung in einem Gleichgewicht mit kleinerer potentieller Energie befindet. Wie den Grundlagen der Stabilitätstheorie entnommen werden kann, wird dieses als labiles Gleichgewicht bezeichnet. Eine mechanische oder physikalische Deutung dieses Problems ist in der Literatur sehr häufig mit dem Kugelgleichnis verknüpft /Pflüger1/. Bei einem labilen Gleichgewicht wird die Änderung der potentiellen Energie negativ.
   In numerischen Berechnungen (z.B. FEM) bedeutet dies, daß eine nichtlineare FE-Rechnung unterhalb eines kritischen Punktes (*limit point, bifurcation point*) zunächst ohne Probleme abläuft, da das Gleichgewicht stabil und die Tangentensteifigkeitsmatrix K_T positiv definit ist. Alle Eigenwerte des Systems sind positiv. Nähert sich die Berechnung einem Instabilitätspunkt, werden einige Pivot-Elemente in der Dreiecks-Faktorenzerlegung der Tangentensteifigkeitsmatrix immer kleiner, bis schließlich ein Pivot-Element zu Null bzw. kleiner Null wird. Die Tangentensteifigkeitsmatrix ist nicht positiv definit.
   Wenn keine besonderen Vorkehrungen getroffen werden, findet ein Abbruch der FE-Rechnung mit einer entsprechenden Fehlermeldung (*marc exit number 2004*) statt. Um dieses zu verhindern, erfolgt eine Manipulation, welches in der Literatur mit “Stabilisierung der Steifigkeitsmatrix” bezeichnet wird. Eine Übersicht über die verschiedenen Möglichkeiten und weiterführende Literaturhinweise ist in /Crisfield1/ / Crisfield2/ /Argyris2/ /Primer/ gegeben.
   Durch diese Beeinflussung der Matrix kann erreicht werden, daß die Berechnung auch über

diesen Punkt hinweg erfolgen kann. Das Programm kann aber nicht beurteilen, ob die nicht-positive Matrix auf einen Verzweigungspunkt zurückzuführen ist, oder ob andere Ursachen (z.B. eine Starrkörperverschiebung) vorliegen. Der USER hat die Berechnungsergebnisse demnach mit einer gewissen Vorsicht auszuwerten. Weitere Hinweise sind /V18/, /V19/, /V35/ zu entnehmen.

e) Da es sich bei der FEM um ein Näherungsverfahren handelt, müssen in nichtlinearen Berechnungen Angaben zur gewünschten Genauigkeit erfolgen. Neben der Auswahl des Iterationsverfahrens müssen auch Angaben zur Wahl der Fehlerschranken erfolgen.
Bei einem Berechnungsabbruch mit der *marc exit number 3002* konnte kein Gleichgewicht innerhalb der geforderten Toleranz gefunden werden. In diesem Fall ist es u.U. sinnvoll, den Standardwert für die Toleranz zu verändern. Ein zu kleiner Wert erfordert viele Iterationsschritte und somit eine hohe Berechnungszeit. Ein zu grober Wert liefert ungenaue oder sogar falsche Ergebnisse. Wie in /V35/ gezeigt wird, sind die Einstellungen der Toleranz mit Vorsicht durchzuführen. Bevor eine zu grobe Toleranz zu unbrauchbaren Ergebnissen führt, sind kleinere Belastungsinkremente und/oder Netzverfeinerungen unter um Umständen sinnvoller.