Klassischer Grenzfall, Semiklassik und Quantenchaos bei kollektiv gekoppelten n-Niveau-Atomen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)
vorgelegt am Fachbereich Physik der
Universität Gesamthochschule Essen

von

Sven Gnutzmann
geboren in Ulm am 6.September 1970

Essen, Juni 2000

Referent: Prof. Dr. Fritz Haake
Korreferent: Prof. Dr. Robert Graham

Disputation: Essen, den 23. Juni 2000

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1. Einleitung

Noch bevor die Quantenmechanik als Theorie vollständig ausgearbeitet wurde, stellte *Niels Bohr* 1923 das Korrespondenzprinzip auf [1], das einen Zusammenhang zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik herstellt. Das Korrespondenzprinzip besagt, daß die Quantenmechanik in die klassische Mechanik übergeht, wenn die typischen Wirkungen der Dynamik sehr groß gegen das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ sind (also im allgemeinen für große Quantenzahlen). Das Korrespondenzprinzip hat zusammen mit der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung den Weg zur endgültigen Formulierung der Quantenmechanik gewiesen und bildet heute das Fundament der semiklassischen Methoden.

Semiklassische Methoden kommen immer dann zur Anwendung, wenn $\hbar$ klein gegen alle typischen Wirkungen der Dynamik ist [2–10]. Den semiklassischen Methoden ist gemeinsam, daß man sich die Information über die quantenmechanische Dynamik (etwa den Propagator) aus der Kenntnis der Dynamik des klassischen Gegenstücks holt. So hat etwa die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung, die später durch *A. Einstein, L. Brillouin* und *J. B. Keller* sauber formuliert wurde (EBK-Quantisierung) [11–13], als semiklassische Methode noch heute viele Anwendungen.

Der enge Zusammenhang zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik tritt auch im Rahmen der kanonischen Quantisierung auf. Die kanonische Quantisierung ist ein Programm, um aus den (als bekannt vorausgesetzten) Poisson-Klammern der klassischen Observablen die entsprechenden Vertauschungsregeln der quantisierten Observablen (hermitescher Operatoren) zu gewinnen. Dabei ist im wesentlichen die Ersetzung $\{\cdot,\cdot\} \longrightarrow \frac{i}{\hbar}[\cdot,\cdot]$ durchzuführen. Gleichzeitig werden die klassischen Observablen durch hermitesche Operatoren ersetzt. In dieser Allgemeinheit ist das Programm nicht immer durchführbar, so daß man sich auf eine minimale Algebra von Observablen beschränken muß. In dieser Arbeit wird nicht auf die Schwierigkeiten im Programm der kanonischen Quantisierung eingegangen. Wichtig für diese Untersuchung ist die Übereinstimmung einiger algebraischer Eigenschaften von klassischen und quantenmechanischen Observablen. Bei besonders einfachen Hamilton-Operatoren (bzw. Hamilton-Funktionen) führt die algebraische Ähnlichkeit dazu, daß sich die Lösung der dynamischen Gleichungen der klassischen Dynamik direkt auf die quantenmechanische Dynamik übertragen läßt.

Die übereinstimmende algebraische Struktur klassischer und quantenmechanischer Observabler sowie das Korrespondenzprinzip spielen in der Theorie der kohärenten Zustände eine große Rolle. Kohärente Zustände wurden das erste Mal von *E. Schrödinger* für den harmonischen Oszillator entdeckt [14]. Er suchte quantenmechanische Zustände, deren Dynamik der klassischen Dynamik eines harmonischen Oszillators ähnelt. Tatsächlich fand er Wellenfunktionen mit minimaler Heisenberg-Unschärfe, die unter der Dynamik ihre Form erhalten und deren Orts- und Impulserwartungswerte den klassischen Bewegungsgleichungen gehorchen. Solche Zustände mit sehr klassischen Eigenschaften sind seit *R. Glauber* [15,16], *J. R. Klauder* [17,18] und *E. G. G. Sudarshan* [19] als kohärente Zustände bekannt und sind auf andere Systeme verallgemeinert worden. Kohärente Zustände bilden seitdem (häufig wegen ihrer algebraischen Eigenschaften) ein wichtiges Hilfsmittel sowohl in streng quantenmechanischen Anwendungen – besonders in der Quantenoptik [20,21] – als auch zur Begründung von semiklassischen Methoden [22]. Kohärente Zustände ermöglichen es, einen beliebigen quantenmechanischen Zustand als Funktion auf dem Phasenraum zu betrachten [20–24]. Damit kann der vom Korrespondenzprinzip geforderte Übergang zur klassischen Dynamik im Phasenraum untersucht werden [22].

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Quantenmechanik und dem klassischen Grenzfall von n-Niveau-Atomen mit kollektiver Kopplung. Der klassische Grenzfall wird erreicht, wenn die Anzahl der Atome gegen unendlich geht. Die makroskopischen Observablen von kollektiv wechselwirkenden n-Niveau-Atomen sind die Besetzungszahlen der Niveaus und die Kohärenzen, die durch Operatoren beschrieben werden, die jeweils ein Niveau in ein anderes überführen. Diese makroskopischen Observablen haben die gleichen Vertauschungsrelationen wie die Erzeuger der Lie-Gruppe SU_n und werden in dieser Arbeit als SU_n-Observable bezeichnet. Die Lie-Gruppe SU_n spielt eine große Rolle sowohl für die quantenmechanische Dynamik als auch für den klassischen Grenzfall. Die Einführung in die bekannte quantenmechanische Beschreibung von n-Niveau-Atomen, der zugehörigen makroskopischen Observablen und der Hilbert-Räume befindet sich in Kapitel 2. Die Hilbert-Räume lassen sich immer so wählen (ausreduzieren), daß sie mit irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe SU_n verbunden sind.

Für n-Niveau-Atome lassen sich kohärente Zustände definieren, die eng mit der Lie-Gruppe SU_n verknüpft sind. Die generelle Struktur der kohärenten Zustände und des klassischen Grenzfalles sind seit längerem bekannt [25–38]. In dieser Arbeit gilt es zunächst, die Eigenschaften der kohärenten Zustände explizit anzugeben, wozu einige Entflechtungs- und Umordnungstheoreme bewiesen werden müssen, die in Kapitel 3 enthalten sind. Dort werden auch andere Eigenschaften der Lie-Gruppen SU_n und $GL_n(\mathbb{C})$ (Gauß-Zerlegung, Gruppenmultiplikation, invariante Maße, irreduzible Darstellungen) zusammengefaßt dargestellt bzw. teilweise hergeleitet. Diese etwas technischen Ausführungen bekommen ihre Anwendung in Kapitel 4, dem Kapitel über kohärente Zustände der Lie-Gruppe SU_n. Die wichtigsten Eigenschaften kohärenter Zustände (Skalarprodukt, Auflösung des Einheitsoperators bzw. Vollständigkeit, Matrixelemente der makroskopischen Observablen, etc.) sind dort explizit angegeben, so daß die Kapitel 3 und 4 zusammen eine Formelsammlung für den Umgang mit kohärenten Zuständen der Lie-Gruppe SU_n bilden. Außerdem wird in Kapitel 4 die bekannte symplektische Struktur auf den kohärenten Zuständen dargestellt [35–37].

In Kapitel 5 folgt die Darstellung der klassischen makroskopischen Observablen für n-Niveau-Atome. Diese werden in Abschnitt 5.1 mit ihren Poisson-Klammern und den Phasenräumen, in denen sich ihre Dynamik abspielt, vorgestellt. Der klassische Grenzfall, der den Übergang von der quantenmechanischen zur klassischen Dynamik von n-Niveau-Atomen beschreibt, wird in Abschnitt 5.2 explizit durchgeführt.

Global gekoppelte n-Niveau-Atome haben einen kompakten klassischen Phasenraum und daher quantenmechanisch einen Hilbert-Raum mit endlicher Dimension. Damit eignen sich diese Systeme sehr gut für Untersuchungen von quantenmechanischen Signaturen von Chaos und Integrabilität.[1] Der Fall $n = 2$ ist in dieser Hinsicht bereits sehr gut untersucht worden [39–50]. Der klassische Phasenraum ist in diesem Fall zweidimensional (die Oberfläche einer Kugel), so daß chaotische Dynamik nur dann möglich ist, wenn das System periodisch getrieben wird.[2] Will man Chaos in einer autonomen Dynamik von n-Niveau-Atomen finden, muß man den Fall $n \geq 3$ betrachten. Diese Systeme besitzen in ihrer Struktur zusätzlichen Reichtum gegenüber $n = 2$. Auf quantenmechanischer Seite gibt es eine große Anzahl sehr verschiedener irreduzibler Darstellungen, die durch $n-1$ ganzzahlige Parameter $\lambda = [\lambda_1; \ldots ; \lambda_{n-1}]$ charakterisiert werden (im Falle $n = 2$ gibt es nur einen Parameter $\lambda_1 = 2j$, mit der üblichen Drehimpulsquantenzahl j). Die Dimension des Hilbert-Raums $\mathcal{H}$ steigt monoton in jedem λ_k. Also gibt es sehr viele Möglichkeiten, den klassischen Grenzfall $\hbar \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} \to \infty$ durchzuführen. Tatsächlich führen die verschiedenen Routen zum klassischen Grenzfall in verschiedene Phasenräume, die sich sogar in ihrer Dimension unterscheiden können (dies wird in den Kapiteln 4 und 5 dargestellt). Für jede gegebene irreduzible SU_n-Darstellung gibt es jedoch eine eindeutige kanonische Route zum klassischen Grenzfall.

Für $n = 3$ ist die Dimension des klassischen Phasenraums entweder vier oder sechs. Die Dynamik von SU_3-Observablen mit einem vierdimensionalen klassischen Grenzfall ist im Zusammenhang von Semiklassik und Quantenchaos in den letzten Jahren häufig untersucht worden [35,36,51–64]. Bei den verschiedenen Routen zum klassischen Grenzfall und den sich daraus ergebenden verschiedenen Dimensionen des klassischen Phasenraums stellt sich die Frage, ob es möglich ist, einen Hamilton-Operator zu konstruieren, der neben der Energie noch genau eine weitere Bewegungskonstante hat, so daß die klassische Dynamik im vierdimensionalen Phasenraum integrabel ist, jedoch nichtintegrabel wird, wenn der klassische Grenzfall in einem sechsdimensio-

---

[1] Bei Hilbert-Räumen mit unendlicher Dimension muß der Hilbert-Raum für numerische Rechnungen immer abgeschnitten werden, was die Ergebnisse stark verfälschen kann.

[2] Die Vertauschungsrelationen der makroskopischen Observablen sind in diesem Fall äquivalent zu denen eines Drehimpulses. Daher werden diese Systeme als (gekickte) Kreisel bezeichnet.

nalen Phasenraum vollzogen wird. Auf quantenmechanischer Seite sollten sich dann die Signaturen von Chaos und Integrabilität etwa in der Niveauabstandsverteilung $P(s)$ für ein und denselben Hamilton-Operator (als Funktion der makroskopischen SU_3-Observablen) von einer irreduziblen SU_3-Darstellung zur anderen ändern. Einige Beispiele für solche Hamilton-Operatoren werden in Kapitel 6 näher untersucht. In Abschnitt 6.1 wird die Niveauabstandsverteilung $P(s)$ in verschiedenen irreduziblen Darstellungen mit Phasenraumportraits der klassischen Dynamik verglichen. Auf die Niveaudynamik für einparametrige Familien von Hamilton-Operatoren $H(\lambda)$ wird in Abschnitt 6.2 eingegangen. Es wird eine ausführliche Diskussion des Status von deutlich vermiedenen und von echten oder schwach vermiedenen Kreuzungen im chaotischen und integrablen Regime durchgeführt.

Im abschließenden Kapitel 7 wird eine semiklassische Methode zur Bestimmung des Spektrums untersucht. Üblicherweise bestimmt man das Spektrum semiklassisch über die von *M. C. Gutzwiller* entdeckte Spurformel [2,65–68] für die Niveaudichte. In die Gutzwillersche Spurformel geht eine Summe über alle periodischen Bahnen einer gegebenen Energie ein. Für jede periodische Bahn bestimmt die Stabilitätsmatrix, die Länge der Periode, die Wirkung und die Energie der periodischen Bahn den Beitrag zur Spurformel. Die Summe über alle periodischen Bahnen birgt jedoch erhebliche Schwierigkeiten. In einer chaotischen Dynamik[3] wächst die Anzahl der periodischen Bahnen exponentiell mit der Länge der Periode – man spricht von exponentieller Proliferation. Damit ist einerseits die Konvergenz in Frage gestellt, andererseits ist es numerisch ein meist nicht lösbares Problem, alle periodischen Bahnen zu finden. Es ist bekannt, daß man nicht alle periodischen Bahnen braucht, um das Spektrum aufzulösen, sondern nur alle periodischen Bahnen, deren Periode kürzer ist als die sogenannte Heisenberg-Zeit τ_H [69]. Die Heisenberg-Zeit ist durch die mittlere Niveaudichte ρ bestimmt. Damit gehen nur endlich viele periodische Bahnen in die semiklassische Spurformel ein. Im allgemeinen bleibt es jedoch auch dann äußerst aufwendig (wenn nicht unmöglich), alle notwendigen periodischen Bahnen numerisch zu finden.[4] Eine effizientere Methode für die semiklassische Bestimmung des Spektrums könnte darin bestehen, das Spektrum eines autonomen Systems aus der semiklassischen Spur des zeitabhängigen Propagators $u(t) = \sum_k \exp(-i\frac{E_k t}{\hbar})$ zu bestimmen. Für den Propagator läßt sich ebenfalls eine semiklassische Spurformel angeben, die ihn durch eine Summe über periodische Bahnen ausdrückt. In einem autonomen System mit einem kompakten klassischen Phasenraum enthält die Spur des Propagators immer endlich viele periodische Bahnen (es gehen alle periodischen Bahnen mit der Periode t ein). Im Prinzip braucht man in einem N-dimensionalen Hilbert-Raum die Spur des Propagators $u(t)$ nur an $\frac{N}{2}$ Fußpunkten t_k bestimmen,

---

[3] Die Gutzwillersche Spurformel gilt bei mehr als zwei klassischen Freiheitsgraden nur in stark chaotischen (hyperbolischen) Systemen.

[4] Außer man kennt eine symbolische Dynamik wie für die Bäcker-Abbildung oder den Sinai-Billard.

um alle Informationen über das Spektrum zu besitzen. Es stellt sich die Frage, wie groß die Zeiten t_k tatsächlich gewählt werden müssen, um eine gute semiklassische Näherung des Spektrums zu erhalten. Die berechtigte Hoffnung ist, daß man deutlich unterhalb der Heisenberg-Zeit bleiben kann, so daß sich gegenüber den üblichen Verfahren für autonome Systeme ein erheblicher Effizienzvorteil ergäbe. Diese Hoffnung nährt sich aus der beliebig hohen Auflösung von Phasenraumstrukturen, die für $\hbar \approx 0$ (aber endlich) entsteht, wenn man alle periodischen Bahnen bis zur Heisenberg-Zeit betrachtet. D.h. es werden Substrukturen einer Planck-Zelle beliebig gut aufgelöst, was quantenmechanisch keinen Sinn macht. Benutzt man jedoch nur periodische Bahnen mit erheblich kürzerer Periode, kann man hoffen, das Spektrum immer noch hinreichend genau zu bestimmen, ohne beliebig kleine Substrukturen einer Planck-Zelle aufzulösen. In Kapitel 7 wird eine Methode zur semiklassischen Bestimmung des Spektrums vorgestellt, die auf der Spur des Propagators beruht und versucht, mit möglichst kurzen periodischen Bahnen auszukommen. Als Beispielsystem dienen zwei gekoppelte Drehimpulsvektoren. Dies ist neben den Drei-Niveau-Atomen das einfachste System mit klassisch kompaktem Phasenraum, das bei autonomer Dynamik Chaos zuläßt. In dieser Arbeit konnte nur die Durchführbarkeit der semiklassischen Methode gezeigt werden. Die Untersuchung der Effizienz verlangt nach anderen Systemen, für die es einfacher ist, die periodischen Bahnen aufzufinden.

Es sind zwei mathematische Anhänge angefügt. Anhang A faßt den mathematischen Hintergrund über kompakte Lie-Gruppen, deren Lie-Algebren und deren irreduzible Darstellungen zusammen. Anhang B stellt die symplektische Struktur auf den Bahnen der koadjungierten Darstellung vor. Die Phasenräume, die sich im klassischen Grenzfall der Dynamik von n-Niveau-Atomen ergeben, werden mathematisch durch koadjungierte Bahnen beschrieben.

2. Die Quantenmechanik kollektiv wechselwirkender n-Niveau-Atome

In diesem Kapitel soll die quantenmechanische Beschreibung einer Anzahl N von n-Niveau-Atomen mit kollektiver Kopplung zusammengefaßt und für die weitere Untersuchung bereitgestellt werden.

Zunächst wird in Abschnitt 2.1 ein einziges n-Niveau-Atom mit seinem Hilbert-Raum und seinen Observablen und deren Vertauschungsregeln beschrieben.

In Abschnitt 2.2 werden die Observablen und die Hilbert-Räume einer Anzahl N von n-Niveau-Atomen dargestellt. Den Observablen entsprechen Operatoren, die Leiteroperatoren bzw. SU_n-Observable genannt werden. Die kollektiven (makroskopischen) Observablen sind die Besetzungszahlen der Atomniveaus und Kohärenzen (bzw. Polarisationen). Letztere werden durch Operatoren beschrieben, die jeweils ein Atomniveau in ein anderes überführen. Die kollektiven Observablen gehorchen den gleichen Vertauschungsregeln wie die Observablen eines Atoms. Der Hilbert-Raum der Atome ist das N-fache Tensorprodukt des Hilbert-Raums eines Atoms. Dieser Hilbert-Raum zerfällt in irreduzible unitäre Darstellungen der Lie-Gruppe SU_n. Jede irreduzible SU_n-Darstellung ist durch die Werte von $n-1$ Casimir-Operatoren festgelegt, die in Abschnitt 2.2.3 eingeführt werden.

Von besonderer physikalischer Bedeutung sind Atome, bei denen nur eine kleine Anzahl von Niveaus $n = 2, 3, \ldots$ in die Dynamik eingehen. Die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ werden ausführlich behandelt.[1]

In dieser Untersuchung bilden kollektiv wechselwirkende n-Niveau-Atome ein physikalisches Beispiel für ein quantenmechanisches System mit einem Hilbert-Raum endlicher Dimension und einem kompakten Phasenraum im klassischen Grenzfall. Der mathematische Grund dieser Eigenschaften liegt in der Kompaktheit der Lie-Gruppe SU_n, deren Generatoren quantenmechanische Observable sind. Die Konstruktionen in den folgenden Kapiteln (kohärente Zustände, Konstruktion des klassischen Grenzfalls) sind nicht auf die Lie-Gruppen SU_n beschränkt. Verallgemeinerungen auf andere kompakte Lie-Gruppen sind möglich, werden aber nicht explizit durchgeführt. Der mathematische Anhang A enthält eine Einführung in kompakte Lie-Gruppen und deren irreduzible Darstellungen.

---

[1] Der Fall $n = 2$ ist äquivalent zur Behandlung eines Drehimpulses.

2.1 Quantenmechanische Beschreibung eines n-Niveau-Atoms

2.1.1 Der Hilbert-Raum eines Atoms

Der Hilbert-Raum für die inneren Quantenzustände eines einzigen n-Niveau-Atoms wird von n orthonormalen Vektoren („Niveaus") aufgespannt, die im folgenden mit $|i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnet werden. Der Anteil des Hilbert-Raums, der die translatorischen Freiheitsgrade eines Atoms beschreibt, ist für diese Untersuchung von geringem Interesse und wird daher nicht behandelt. Die Atomniveaus $|i\rangle$ entsprechen der Standardbasis des Hilbert-Raums $\mathbb{C}^n$

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad |n\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{2.1}$$

Die unitären nichttrivialen Basistransformationen eines n-Niveau-Atoms sind Gruppenelemente der Lie-Gruppe SU_n der speziellen unitären $n \times n$-Matrizen (bzw. U_n, wenn triviale globale Phasenänderungen einbezogen werden). Die Lie-Gruppe SU_n und deren Lie-Algebra $\mathfrak{su}_n$ werden im folgenden auch für viele kollektiv wechselwirkende Atome eine große Rolle spielen. Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}_n$ ist eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ (der Lie-Algebra aller komplexen $n \times n$-Matrizen)

$$\mathfrak{su}_n := \left\{ A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A^\dagger = -A, \, \mathrm{Spur} A = 0 \right\}, \tag{2.2}$$

d.h. sie wird durch die antihermiteschen spurlosen $n \times n$-Matrizen aufgespannt.[2]

2.1.2 Leiteroperatoren: die Observablen eines n-Niveau-Atoms

Übergänge zwischen den Basiszuständen werden durch die **Leiteroperatoren**

$$\tau_{ij} = |i\rangle\langle j| \tag{2.3}$$

beschrieben. Der Leiter- oder Übergangsoperator τ_{ij} läßt den Zustand $|j\rangle$ in den Zustand $|i\rangle$ übergehen und vernichtet alle übrigen Zustände (siehe Abbildung 2.1). Den τ_{ij} entsprechen physikalische Observable: für $i = j$ die Besetzungszahl des i-ten Niveaus und für $i \neq j$ die komplexen Polarisationen oder Kohärenzen.[3]

---

[2] Die Elemente $A \in \mathfrak{su}_n$ werden im folgenden meist in der Form $A = -iQ$ (mit hermiteschem

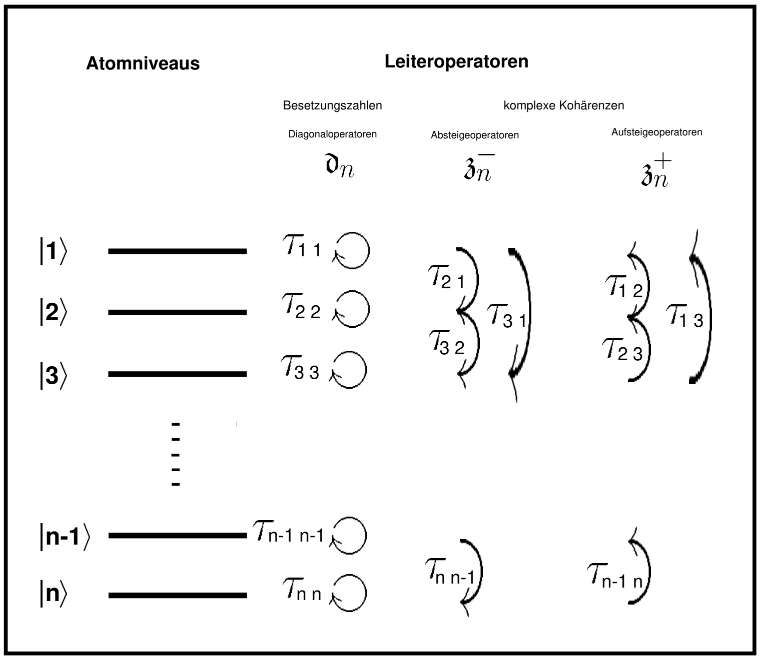

Abb. 2.1: Schema eines n-Niveau-Atoms und der Wirkung der Operatoren τ_{ij}.

Den Operatoren τ_{ij} entsprechen Matrizen (die im folgenden ebenfalls mit τ_{ij} bezeichnet werden). Die Matrixelemente von τ_{ij} verschwinden fast alle – bis auf ein einziges in der i-ten Reihe und j-sten Spalte, wo eine Eins steht

$$\tau_{11} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots . \tag{2.4}$$

Es ergeben sich die Vertauschungsregeln

$$[\tau_{ij}, \tau_{kl}] = \delta_{kj}\, \tau_{il} - \delta_{il}\, \tau_{kj} . \tag{2.5}$$

Die Matrizen τ_{ij} sind eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums der komplexen $n\times n$-Matrizen (mit dem Skalarprodukt $\langle A|B\rangle = \mathrm{Spur} A^\dagger B = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{A}_{ij} B_{ij}$).[4] Mit den

---

Q) geschrieben, weil dann Q einer physikalischen Observablen entspricht.
Außerdem werden die Elemente einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ (und ihre Darstellungen in Hilbert-Räumen) im folgenden als Generatoren der zugehörigen Lie-Gruppe G bezeichnet.

[3] Die Operatoren $\tau_{ij} = \tau_{ji}^\dagger$ sind nicht hermitesch – es ist jedoch einfach hermitesche Operatoren einzuführen, die reellen physikalischen Observablen entsprechen.

[4] In dieser Arbeit bedeutet $\overline{z}$ das komplex konjugierte von z.

Vertauschungsregeln (2.5) bilden sie die (definierende Darstellung der) Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Zusätzlich zu den Eigenschaften, die aus den Vertauschungsregeln (2.5) folgen, kann jedes Produkt der Operatoren τ_{ij} in eine Linearkombination der τ_{ij} entwickelt werden, indem man

$$\tau_{ij}\tau_{kl} = |i\rangle\langle j|k\rangle\langle l| = \delta_{kj}\tau_{il} \tag{2.6}$$

benutzt. Im Heisenberg-Bild werden die Observablen zeitabhängig und durch Matrizen $\tau_{ij}(t)$ mit $\tau_{ij}(t=0) = \tau_{ij}$ dargestellt. Die Heisenberg-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) = \frac{i}{\hbar}\left[H, \tau_{ij}(t)\right] \tag{2.7}$$

sind für jeden Hamilton-Operator $H = H(\tau_{ij})$ linear in den Matrizen $\tau_{ij}(t)$ und damit (zumindest für nicht zu große n) leicht zu integrieren.

2.1.3 Unterteilung in Diagonal-, Aufsteige- und Absteigeoperatoren

Die Observablen τ_{ij} können in drei Mengen aufgeteilt werden, die jeweils eine geschlossene Unteralgebra aufspannen, d.h. der Kommutator zweier Observabler aus der gleichen Unteralgebra gehört auch selbst zu dieser Unteralgebra.

Eine solche Unteralgebra wird durch die **Besetzungszahloperatoren** bzw. **Diagonalmatrizen** τ_{ii} aufgespannt, die alle untereinander vertauschen. Diese sogenannte **Cartan-Algebra** (siehe Anhang A und Abschnitt 3.2.2) wird im folgenden mit $\mathfrak{d}_n$ bezeichnet. Die beiden anderen Unteralgebren werden durch die **Absteigeoperatoren** τ_{ij} mit $i > j$ und durch die **Aufsteigeoperatoren** τ_{ij} mit $i < j$ aufgespannt. Sie werden in dieser Arbeit mit $\mathfrak{z}_n^-$ und $\mathfrak{z}_n^+$ bezeichnet. In $\mathfrak{z}_n^-$ haben alle Matrizen nur unterhalb der Diagonalen nichtverschwindende Beiträge, und die Matrizen aus $\mathfrak{z}_n^+$ haben nur oberhalb der Diagonalen nichtverschwindende Beiträge

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_n &:= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\} \\ \mathfrak{z}_n^- &:= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A_{ij} = 0 \text{ für } i \leq j\} \\ \mathfrak{z}_n^+ &:= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Es gilt

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{d}_n \oplus \mathfrak{z}_n^- \oplus \mathfrak{z}_n^+. \tag{2.9}$$

Die Wirkung der Operatoren τ_{ij} sowie die Aufteilung in Diagonal-, Aufsteige- und Absteigeoperatoren ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

2.2 Eine Anzahl N von n-Niveau-Atomen mit kollektiver Wechselwirkung

2.2.1 Der Hilbert-Raum für N Atome

Der Hilbert-Raum der inneren Zustände von N identischen jedoch unterscheidbaren Atomen ist durch das N-fache Tensorprodukt des Hilbert-Raums $\mathcal{H}$ eines einzelnen Atoms gegeben

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n}_{N\text{Faktoren}}. \tag{2.10}$$

Dabei wird angenommen, daß die Atome räumlich gut getrennt sind, d.h. der Abstand zwischen den Atomen ist größer als die de-Broglie-Wellenlänge und die Atome sind effektiv unterscheidbar. Bei höheren räumlichen Dichten müßte der Fermionen- oder Bosonencharakter der Atome berücksichtigt werden, der nur Zustände in $\mathcal{H}$ zuläßt, die vollständig symmetrisch (Bosonen) oder vollständig antisymmetrisch (Fermionen) unter Vertauschung der einzelnen Atome sind.

2.2.2 Kollektive Leiteroperatoren

Die makroskopischen Besetzungszahlen und Kohärenzen werden durch die Operatoren

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \tau_{ij}^k \tag{2.11}$$

beschrieben, wobei τ_{ij}^k durch das Tensorprodukt

$$\tau_{ij}^k = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \quad \underbrace{\otimes \mathbb{I} \otimes \tau_{ij}}_{k-\text{terFaktor}} \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I} \tag{2.12}$$

gegeben ist, d.h. τ_{ij}^k wirkt wie τ_{ij} auf das k-te Atom und als Identität auf alle anderen. Diese kollektiven Leiteroperatoren erfüllen die gleichen Vertauschungsregeln wie die Matrizen τ_{ij}

$$[S_{ij}, S_{kl}] = \delta_{kj}\, S_{il} - \delta_{il}\, S_{kj}. \tag{2.13}$$

Die Operatoren S_{ij} spannen mit ihren komplexen Linearkombinationen eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ auf (siehe Anhang A) und werden im folgenden SU_n-Observable genannt. Alle Eigenschaften der τ_{ij}, die sich nur aus den Vertauschungsregeln ergeben, gelten auch für die kollektiven Leiteroperatoren S_{ij}. Die Produktregel (2.6) gilt jedoch nur für die τ_{ij} – ein Produkt $S_{st}S_{kl}$ läßt sich im allgemeinen *nicht* als Linearkombination aller S_{ij} schreiben. Die Summe aller Besetzungszahlen ergibt die Anzahl der Atome

$$\sum_{k=1}^{N} S_{kk} = N\mathbb{I}. \tag{2.14}$$

Bei einer großen Anzahl von gleichberechtigten Atomen ist der Zustand und die Dynamik eines bestimmten Atoms selten von Interesse. Die physikalisch interessante und relevante Information steckt meistens in den kollektiven Observablen S_{ij}. Das gilt besonders für kollektive Wechselwirkungen, die jetzt beschrieben werden.

2.2.3 Kollektive Wechselwirkung

Zwischen n-Niveau-Atomen herrscht **kollektive Wechselwirkung**, wenn sich der Hamilton-Operator der N Atome alleine durch die kollektiven Leiteroperatoren S_{ij} darstellen läßt

$$H = H(S_{ij}) \Leftrightarrow \textbf{kollektive Wechselwirkung.} \tag{2.15}$$

Besonders interessant sind Hamilton-Operatoren, die nichtlinear in den S_{ij} sind. Dann sind auch die Heisenberg-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} S_{ij}(t) = \frac{i}{\hbar} \left[H, S_{ij}(t)\right] \tag{2.16}$$

nichtlinear. Ein gut untersuchtes Beispiel eines solchen Hamilton-Operators ist das Lipkin-Modell (mit $n = 3$)

$$H_{\text{Lipkin}} = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i S_{ii} + k \sum_{i,j=1;i\neq j}^{3} S_{ij}^2. \tag{2.17}$$

Der Hamilton-Operator H_{Lipkin} beschreibt ein Atomkernschalenmodell und ist in letzter Zeit häufig im Zusammenhang von Quantenchaos und Semiklassik untersucht worden [54–56,62,63]. Ähnliche Wechselwirkungen sind für n-Niveau-Atome denkbar, die mit einer Mode des elektromagnetischen Feldes eines Resonators gekoppelt sind. Ist die Frequenz der Mode gegenüber einem Atomübergang stark verstimmt, kann die Mode adiabatisch eliminiert werden. Es entsteht eine effektive Atomdynamik mit einem effektiven Hamilton-Operator, der quadratisch in den Leiteroperatoren S_{ij} ist. Auch die adiabatische Elimination weiterer Atomniveaus führt zu effektiven quadratischen Hamilton-Operatoren .

Weil der Hamilton-Operator hermitesch ist, kann er nur von hermiteschen Linearkombinationen der S_{ij} abhängen. Der Hamilton-Operator ist also (i.a. nichtlinear)

aus den Generatoren der Lie-Gruppe U_n aufgebaut. Die Leiteroperatoren S_{ij} sind im Hilbert-Raum der N Atome bei geeigneter Wahl der Basis gleichzeitig in eine blockdiagonale Form zu bringen. Jeder Block gehört zu einer irreduziblen Darstellung der Lie-Gruppe SU_n. Der Hamilton-Operator hat die gleiche blockdiagonale Form, und die Dynamik läuft in allen Blöcken unabhängig voneinander ab (weiter unten in diesem Abschnitt wird der Zerfall in irreduzible Darstellungen für $n = 2$ beschrieben – es sei auf die Literatur über Darstellungstheorie von Lie-Gruppen [70–74], auf Standardlehrbücher der Quantenmechanik [75,76] und auf Anhang A verwiesen). Ab jetzt wird immer vorausgesetzt, daß die Dynamik vollständig reduziert wurde, so daß nur ein Block vorhanden ist, der genau zu einer irreduziblen Darstellung gehört.
Ersetzt man die Leiteroperatoren

$$S_{ij} \longrightarrow S'_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij}\mathbb{I}, \tag{2.18}$$

so gilt

$$\sum_{k=1}^{n} S'_{kk} = 0. \tag{2.19}$$

Die Vertauschungsregeln (2.13) bleiben für die gestrichenen Leiteroperatoren erhalten. Also hängt $H = H(S'_{ij})$ nur von Generatoren der Lie-Gruppe SU_n ab. Ab jetzt wird der Strich bei S'_{ij} wieder weggelassen, und (2.19) gilt im folgenden immer. Die n-Niveau-Atome werden in dieser Arbeit als physikalisches Beispiel verwendet, in dem eine Dynamik von SU_n-Observablen realisiert wird. Die folgenden Konstruktionen kohärenter Zustände und des klassischen Grenzfalls sind aber für alle physikalischen Systeme relevant, bei denen der Hamilton-Operator aus den Generatoren der Lie-Gruppe SU_n (U_n) aufgebaut ist (wie zum Beispiel der Hamilton-Operator des Lipkin-Modells (2.17)).

Die Fälle SU_2 und SU_3

Der Fall SU_2 führt auf die bekannte quantenmechanische Behandlung des Drehimpulses. Die Operatoren

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \\ J_+ &= S_{12} = J_1 + iJ_2 \\ J_- &= S_{21} = J_1 - iJ_2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

erfüllen die Vertauschungsregeln der Komponenten eines Drehimpulsvektors $\vec{J}$. Der Hilbert-Raum von N Zwei-Niveau-Atomen entspricht dann dem Hilbert-Raum von

N Teilchen mit Spin 1/2. Wenn jetzt – wie angenommen – der Hamilton-Operator nur von den Komponenten des Drehimpulses abhängt $H = H(J_1, J_2, J_3)$, vertauscht er mit dem Betragsquadrat des Drehimpulses

$$[H(J_1, J_2, J_3), J^2] = 0. \tag{2.21}$$

Damit ist der Betrag des Drehimpulses eine Konstante der Bewegung und ohne genauere Kenntnis von H kann in eine Basis übergegangen werden, in der H und die Komponenten J_i gleichzeitig blockdiagonal sind. In jedem Block hat dann das Betragsquadrat des Drehimpulses den Wert

$$J^2 = j(j+1), \tag{2.22}$$

wobei die Größe eines Blockes $(2j+1) \times (2j+1)$ ist. Die Quantenzahl j charakterisiert die verschiedenen irreduziblen Darstellungen von SU_2.
Für SU_3 benutzt man in der Teilchenphysik gerne folgende spurlose Kombinationen der Diagonaloperatoren S_{ii} zur Charakterisierung von Elementarteilchen

$$\begin{aligned} T_3 &= \tfrac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \\ Y &= \tfrac{1}{3}(S_{11} + S_{22} - 2S_{33}). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Man nennt T_3 die dritte Komponente des Isospin und Y die Hyperladung eines Teilchens. Obwohl kein direkter Zusammenhang zur Elemtarteilchentheorie besteht, sollen beide Namen im folgenden Verwendung finden. Die beiden Operatoren

$$\begin{aligned} C_2 &= \sum_{i,j=1}^{3} S_{ij} S_{ji} \\ C_3 &= \sum_{i,j,k=1}^{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

vertauschen beide mit jedem Hamilton-Operator $H = H(S_{ij})$. Genau wie im Fall der quantenmechanischen Drehgruppe SU_2 zerfällt der Hilbert-Raum in Blöcke. In jedem Block sind C_2 und C_3 konstant. Sie entsprechen irreduziblen Darstellungen von SU_3, und die Werte von C_2 und C_3 charakterisieren diese Darstellungen eindeutig. Operatoren wie C_2 und C_3 findet man für alle Lie-Gruppen SU_n. Sie heißen Casimir-Operatoren und werden nun kurz vorgestellt.

Casimir-Operatoren

Ein Operator der aus den Generatoren einer Lie-Gruppe (hier SU_n oder U_n) aufgebaut ist und mit *allen* Generatoren dieser Gruppe vertauscht, heißt **Casimir-Operator**. Casimir-Operatoren spielen eine besondere Rolle, weil sie Konstanten der Bewegung für *jede* Quantendynamik sind, deren Hamilton-Operator selbst aus den gleichen Generatoren aufgebaut ist. In jeder irreduziblen Darstellung der Lie-Gruppe müssen sie daher einen festen Wert haben. Andersherum bestimmen die Werte aller unabhängigen Casimir-Operatoren eindeutig die irreduzible Darstellung. Für U_n gibt es n unabhängige Casimir-Operatoren C_k. Um sie anzugeben, wird die Matrix $\mathcal{S}$ benutzt, deren Matrixelemente die Operatoren S_{ij} sind

$$\mathcal{S} = \{S_{ij}\}\,. \tag{2.25}$$

Die Casimir-Operatoren erhält man durch Spuren von Potenzen von $\mathcal{S}$

$$C_k = \mathrm{Spur}\,\mathcal{S}^k,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.26}$$

Über den ersten Casimir-Operator konnte ohne Beschränkung der Allgemeinheit verfügt werden (2.19)

$$C_1 = \sum_{k=1}^{n} S_{kk} = 0. \tag{2.27}$$

Es verbleiben die $n-1$ Casimir-Operatoren $C_2, C_3, \ldots, C_n$ für SU_n. Im Falle SU_2 ist der Casimir-Operator C_2 proportional zum Betragsquadrat des Drehimpulses

$$C_2 = \frac{1}{2}J^2 - \frac{1}{4}C_1^2 = \frac{1}{2}J^2 \qquad \text{für } SU_2. \tag{2.28}$$

3. Die Matrixgruppen $GL_n(\mathbb{C})$ und SU_n und ihre Darstellungen

Die Bedeutung der Lie-Gruppen U_n und SU_n für n-Niveau-Atome mit kollektiver Wechselwirkung wurde in Kapitel 2 beschrieben: Die makroskopischen Observablen erfüllen die Vertauschungsregeln der Generatoren von U_n bzw. SU_n (d.h. die Operatoren dieser Observablen bilden eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{u}_n$ bzw. $\mathfrak{su}_n$), und der Hilbert-Raum von N identischen n-Niveau-Atomen zerfällt in orthogonale Unterräume, die zu irreduziblen Darstellungen von SU_n gehören, so daß der Hamilton-Operator blockdiagonal in diesen Unterräumen wird.

Da der Hilbert-Raum ein komplexer Vektorraum ist, können komplexe Observable betrachtet werden, die sich aus komplexen Linearkombinationen der reellen Observablen ergeben (tatsächlich sind die Kohärenzen bereits komplexe Observable). Aus der Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{u}_n$ erhält man so eine Darstellung der komplexifizierten Lie-Algebra ${\mathfrak{u}_n}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Außerdem ist es häufig hilfreich, die Lie-Gruppen U_n und SU_n als Untergruppen von $GL_n(\mathbb{C})$ und $SL_n(\mathbb{C})$ zu betrachten. Die Lie-Gruppen $GL_n(\mathbb{C})$ und $SL_n(\mathbb{C})$ sind als Komplexifizierungen der kompakten Lie-Gruppen U_n und SU_n anzusehen.

In diesem Kapitel sollen Eigenschaften der Lie-Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und einiger ihrer Untergruppen zusammengefaßt und teilweise hergeleitet werden, die für die Definition und Eigenschaften kohärenter Zustände der Lie-Gruppe SU_n, für die Konstruktion der symplektischen Struktur auf kohärenten Zuständen und für die Durchführung des klassischen Grenzfalls benötigt werden (siehe Kapitel 4 und 5). Viele dieser Eigenschaften finden sich in Lehrbüchern, wobei das Buch von *A. Barut* und *R. Rączka* [71] besondere Erwähnung verdient.

Der Abschnitt 3.1 stellt die Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und einige ihrer Untergruppen dar, die in Abschnitt 3.1.1 definiert werden. Zur Parametrisierung von $GL_n(\mathbb{C})$ wird die Gauß-Zerlegung verwendet (Abschnitt 3.1.2). Nach der Vorstellung der Gruppenmultiplikation und Invertierung der Untergruppe aller oberen bzw. unteren Dreiecksmatrizen $Z_n^{\pm}$ und einem daraus folgenden sehr allgemeinen Entflechtungstheorem in Abschnitt 3.1.3, wird in Abschnitt 3.1.4 das zentrale Umordnungstheorem für $GL_n(\mathbb{C})$ hergeleitet, das eines der zentralen Ergebnisse dieses Kapitels darstellt. Mithilfe des zentralen Umordnungstheorems lassen sich die Gruppenmultiplikation und Invertierung für Gauß-zerlegte Matrizen aus den Lie-Gruppen $GL_n(\mathbb{C})$ und SU_n

in den Abschnitten 3.1.5 und 3.1.6 angeben. Invariante Formen und Maße werden für Gauß-zerlegte Matrizen aus $GL_n(\mathbb{C})$ und SU_n in Abschnitt 3.1.7 hergeleitet. Viele der hier beschriebenen Resultate sind für den speziellen Fall $n = 3$ in [77] enthalten. Umordnungs- und Entflechtungstheoreme und weitere algebraische oder geometrische Eigenschaften der Lie-Gruppen SU_n und ihrer Darstellungen (z.B. geometrische Phasen) sind in den letzten Jahren immer wieder von Interesse gewesen (oft speziell für SU_2 oder SU_3) [61,64,78–83].

Der Abschnitt 3.2 ist eine Zusammenfassung von Lehrbuchmaterial über die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe SU_n [70–74,84,85]. Ein grobes Verständnis dieser Darstellungen ist für den Umgang mit kohärenten SU_n-Zuständen unerläßlich. Man kann den Abschnitt 3.2 als eine explizite Anwendung der in Anhang beschriebenen A allgemeinen Darstellungstheorie kompakter halbeinfacher Lie-Gruppen betrachten.

In Abschnitt 3.2.1 wird die in der Darstellungstheorie wichtige adjungierte Darstellung von SU_n vorgestellt. Es folgt in Abschnitt 3.2.2 die Beschreibung der Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ und die Berechnung der Wurzeln (d.h. der Gewichte der adjungierten Darstellung). In Abschnitt 3.2.3 werden die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe SU_n nach ihrem höchsten Gewicht klassifiziert. In Abschnitt 3.2.4 wird ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren für irreduzible SU_n-Darstellungen eingeführt. Schließlich wird in den Abschnitten 3.2.5 und 3.2.6 die explizite Konstruktion der irreduziblen SU_n-Darstellungen gegeben, wie sie von *I. M. Gelfand* und *M. L. Zetlin* durchgeführt wurde [71]. D.h. es wird eine Basis $\{|m\rangle\}$ des Darstellungsraumes angegeben (Abschnitt 3.2.5), in dem die Matrixelemente $\langle m'|S_{ij}|m\rangle$ explizit bekannt sind (Abschnitt 3.2.6). Damit lassen sich über die Exponentialfunktion und die Entflechtungs- und Umordnungstheoreme die Matrixelemente von endlichen Drehungen aus SU_n und auch aus $GL_n(\mathbb{C})$ (zumindest im Prinzip) explizit ausrechnen. Die Fälle SU_2 und SU_3 werden ausführlich behandelt.

3.1 Die Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und ihre Untergruppen

3.1.1 Die Definition der Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und einiger Untergruppen

Per Definition ist $GL_n(\mathbb{C})$ die Lie-Gruppe aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen g mit komplexen Einträgen. Sie ist eine offene Untermenge von $\mathbb{C}^{n^2}$, die durch die Invertierbarkeitsbedingung

$$\det g \neq 0 \tag{3.1}$$

definiert ist. Damit ist $GL_n(\mathbb{C})$ nicht kompakt und hat die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} GL_n(\mathbb{C}) = n^2. \tag{3.2}$$

$GL_n(\mathbb{C})$ hat eine invariante abelsche Untergruppe, die durch Matrizen der Form $z\mathbb{I}$ mit $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ gegeben ist ($\mathbb{I}$ ist die Einheitsmatrix). Lie-Gruppen ohne eine invariante abelsche Untergruppe nennt man **halbeinfach**, $GL_n(\mathbb{C})$ ist nicht halbeinfach.

Es gibt viele interessante Untergruppen von $GL_n(\mathbb{C})$ – die wichtigsten bei der Betrachtung von kollektiv wechselwirkenden n-Niveau-Atomen sind U_n und SU_n. Die Untergruppen, die für die weitere Untersuchung von Interesse sind, sollen kurz vorgestellt werden:

- $SL_n(\mathbb{C})$, die Lie-Gruppe aller $n \times n$-Matrizen g mit komplexen Einträgen und

  $$\det g = 1. \tag{3.3}$$

  Damit ist $SL_n(\mathbb{C})$ eine abgeschlossene Untermenge von $\mathbb{C}^{n^2}$ mit Dimension

  $$\dim_{\mathbb{C}} SL_n(\mathbb{C}) = n^2 - 1, \tag{3.4}$$

  die jedoch nicht beschränkt und daher auch nicht kompakt ist. $SL_n(\mathbb{C})$ ist halbeinfach.

- U_n, die Lie-Gruppe aller unitären komplexen $n \times n$-Matrizen u, also

  $$u^\dagger u = u u^\dagger = \mathbb{I}. \tag{3.5}$$

  U_n ist eine kompakte Untermenge von $\mathbb{C}^{n^2}$ mit (reeller) Dimension

  $$\dim_{\mathbb{R}} U_n = n^2. \tag{3.6}$$

  U_n ist nicht halbeinfach. Für $u \in U_n$ gilt

  $$\det u = \exp(i\phi) \tag{3.7}$$

  mit $\phi \in [0, 2\pi)$. Die Komplexifizierung von U_n ergibt wieder $GL_n(\mathbb{C}) = {U_n}^{\mathbb{C}}$.

- SU_n, die kompakte halbeinfache Lie-Gruppe der speziellen unitären $n \times n$-Matrizen, die sich durch Einschränkung von U_n auf Matrizen u mit $\det u = 1$ ergibt. Es gilt

  $$\dim_{\mathbb{R}} SU_n = n^2 - 1 \tag{3.8}$$

  und die Komplexifizierung führt zurück auf $SL_n(\mathbb{C}) = {SU_n}^{\mathbb{C}}$.

- D_n, die Lie-Gruppe aller diagonalen $n \times n$-Matrizen mit Diagonalelementen aus $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ und Dimension

  $$\dim_{\mathbb{C}} C_n = n. \tag{3.9}$$

- $C_n \equiv SD_n \subset D_n$, die Lie-Gruppe der Dimension

  $$\dim_{\mathbb{C}} C_n = n - 1 \tag{3.10}$$

  aller diagonalen $n \times n$-Matrizen c mit $\det c = 1$.

- B_n^+ und B_n^-, die Lie-Gruppen der oberen und unteren Dreiecksmatrizen mit nichtverschwindender Determinante, d.h. alle Diagonalelemente sind nichtverschwindende komplexe Zahlen. B_n^+ und B_n^- werden auch **Borel-Gruppen** genannt und haben die Dimension

  $$\dim_{\mathbb{C}} B_n^+ = \dim_{\mathbb{C}} B_n^- = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{3.11}$$

  Eine Matrix $b^+ \in B_n^+$ hat die Form

  $$\begin{pmatrix} b_{11}^+ & b_{12}^+ & b_{13}^+ & \cdot & \cdot & b_{1n}^+ \\ 0 & b_{22}^+ & b_{23}^+ & \cdot & \cdot & b_{2n}^+ \\ 0 & 0 & b_{33}^+ & \cdot & \cdot & b_{3n}^+ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn}^+ \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

- SB_n^+ und SB_n^-, die Lie-Gruppen der speziellen oberen und unteren Dreiecksmatrizen, die sich durch Einschränkung von B_n^+ und B_n^- auf Matrizen b mit $\det b = 1$ ergeben.

- Z_n^+ und Z_n^-, die Lie-Gruppen der oberen und unteren Dreiecksmatrizen, bei denen alle Diagonalelemente eins sind. Z_n^+ und Z_n^- haben die Dimension

  $$\dim_{\mathbb{C}} Z_n^+ = \dim_{\mathbb{C}} Z_n^- = \frac{n(n-1)}{2} \tag{3.13}$$

und eine Matrix $z^+ \in Z_n^+$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & z_{12}^+ & z_{13}^+ & \cdot & \cdot & z_{1n}^+ \\ 0 & 1 & z_{23}^+ & \cdot & \cdot & z_{2n}^+ \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & z_{3n}^+ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_{n-1,n}^+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{3.14}$$

Für $n = 2$ ist $Z_2^\pm$ äquivalent zur Lie-Gruppe der komplexen Zahlen unter Addition. Für $n = 3$ ergibt sich eine Äquivalenz zur Heisenberg-Weyl-Gruppe, die für den harmonischen Oszillator und seine kohärenten Zustände von Bedeutung ist. Die Darstellungen der Heisenberg-Weyl-Gruppe W_1 durch untere oder obere Dreiecksmatrizen aus $Z_3^\pm$ ist in der Physik nicht sehr üblich, da es sich nicht um eine unitäre Darstellung handelt (die unitären irreduziblen Darstellungen von W_1 lassen sich nicht in Hilbert-Räumen endlicher Dimension verwirklichen).

- P_n, die diskrete Gruppe der Permutationen von n Elementen, die in diesem Zusammenhang auch **Weyl-Reflexionen** genannt werden. Sie sind durch $n \times n$-Matrizen dargestellt, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau ein nichtverschwindendes Element haben, das den Wert eins hat. Solche Matrizen vertauschen die Elemente eines n-dimensionalen Vektors $x \in \mathbb{C}^n$ (unter der Konjugation $A \longrightarrow p\,A\,p^{-1}$ mit $p \in P_n$ vertauschen sie die entsprechenden Spalten und Zeilen einer $n \times n$-Matrix). Jede Permutation $p \in P_n$ kann als Produkt von Transpositionen $t_{ij} \in P_n$ geschrieben werden, wobei t_{ij} das i-te Element mit dem j-sten vertauscht und als Matrix die Form

$$t_{ij} = \left(\begin{array}{cccccccccccc} & & & & & i & & & j & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{array} \right) \tag{3.15}$$

hat.

3.1.2 Die Gauß-Zerlegung von $GL_n(\mathbb{C})$

Fast jede Matrix $g \in GL_n(\mathbb{C})$ läßt sich eindeutig als Produkt

$$g = z^{(-)}\, d\, z^{(+)} \tag{3.16}$$

dreier Matrizen mit $z^{(-)} \in Z_n^-$, $d \in D_n$ und $z^{(+)} \in Z_n^+$ schreiben. Diese Zerlegung heißt **Gauß-Zerlegung** von $GL_n(\mathbb{C})$, und g heißt **Gauß-zerlegbar**, wenn die Zerlegung möglich ist. Gauß-zerlegbare Matrizen bilden eine offene und dichte Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$, d.h. jede Matrix aus $GL_n(\mathbb{C})$ ist beliebig nah an einer Matrix, die Gauß-zerlegbar ist

$$GL_n(\mathbb{C}) = \overline{Z_n^-\, D_n\, Z_n^+}. \tag{3.17}$$

Dabei ist $\overline{Z_n^-\, D_n\, Z_n^+}$ der Abschluß von $Z_n^-\, D_n\, Z_n^+$. Tatsächlich läßt sich *jede* Matrix $g \in GL_n(\mathbb{C})$ nach Konjugation mit einer Weyl-Reflexion $p \in P_n$ als Produkt

$$p\, g\, p^{-1} = z^{(-)}\, d\, z^{(+)} \tag{3.18}$$

schreiben.

Gauß-Zerlegungen vom Typ (3.18) liefern nützliche Parametrisierungen (Karten) von $GL_n(\mathbb{C})$ durch die n^2 unabhängigen Matrixelemente von $z^{(+)}$,d und $z^{(-)}$. Die Gauß-Zerlegung überträgt sich auf alle Untergruppen von $GL_n(\mathbb{C})$, wobei die Matrixelemente von $z^{(\pm)}$ und d im allgemeinen nicht unabhängig bleiben (für $SL_n(\mathbb{C})$ muß zum Beispiel d aus C_n gewählt werden).

Für SU_n ist es sinnvoll, die $\frac{n(n-1)}{2}$ komplexen Matrixelemente von $z^{(-)}$ und die $n-1$ Phasen der Diagonalmatrix d als unabhängige Koordinaten zu betrachten (das sind genau n^2-1 unabhängige reelle Parameter, siehe Abschnitt 3.1.6).

Ist $g = \{g_{ij}\} \in GL_n(\mathbb{C})$ eine Matrix mit der Gauß-Zerlegung ist $g = z^{(-)}\, d\, z^{(+)}$, dann lassen sich die Matrixelemente von $z^{(\pm)}$ und d als Funktion der Matrixelemente von g angeben. Dazu ist es nützlich, eine Reihe von Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(g)$ zu definieren. Für $k = l$ ist $\Delta_{kk}(g)$ definiert als die Determinante der $k \times k$-Matrix der ersten k Spalten der ersten k Reihen von g

$$\Delta_{kk}(g) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{kk} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Für $k > l$ ist $\Delta_{kl}(g)$ die Determinante der $l \times l$-Matrix, die sich aus den ersten l Spalten und aus den ersten $l-1$ Reihen und der k-ten Reihe von g ergibt

$$\Delta_{kl}(g) \underset{k>l}{=} \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot\ \cdot\ \cdot & g_{1l} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot\ \cdot\ \cdot & g_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ g_{l-1,1} & g_{l-1,2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & g_{l-1,l} \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdot\ \cdot\ \cdot & g_{kl} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Entsprechend ist $\Delta_{kl}(g)$ für $k < l$ die Determinante der $k \times k$-Matrix aus den ersten k Reihen und den $k-1$ ersten Spalten sowie der l-ten Spalte von g

$$\Delta_{kl}(g) \underset{k<l}{=} \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot\ \cdot & g_{1,k-1} & g_{1l} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot\ \cdot & g_{2,k-1} & g_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdot\ \cdot & g_{k,k-1} & g_{kl} \end{pmatrix}. \tag{3.21}$$

Zusätzlich wird $\Delta_{00}(g) = \Delta_{0l} = \Delta_{k0} = 1$ und $\Delta_{1j}(g) = g_{1j}$, $\Delta_{j1}(g) = g_{j1}$ gesetzt. Die Matrixelemente von $z^{\pm}$ und d mit $z^{(-)}\, d\, z^{(+)} = g$ sind durch Quotienten der Unterdeterminanten $\Delta_{ij}(g)$ gegeben

$$\begin{aligned} d_{kk} &= \frac{\Delta_{kk}(g)}{\Delta_{k-1,k-1}(g)} \\ z^{(+)}_{kl} &\underset{k\leq l}{=} \frac{\Delta_{kl}(g)}{\Delta_{kk}(g)} \\ z^{(-)}_{kl} &\underset{k\geq l}{=} \frac{\Delta_{kl}(g)}{\Delta_{ll}(g)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Diese Formeln sind leicht nachgewiesen, wenn g bereits eine Diagonal- oder Dreiecksmatrix ist (der Beweis für allgemeine g wird im Buch von *A. Barut* und *R. Rączka* als Übungsaufgabe gestellt [71]).

Für $n = 3$ lautet die Gauß-Zerlegung explizit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{g_{31}}{g_{11}} & \frac{g_{11}g_{32}-g_{12}g_{31}}{g_{11}g_{22}-g_{21}g_{12}} & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g_{11}g_{22}-g_{21}g_{12}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det g}{g_{11}g_{22}-g_{21}g_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{g_{12}}{g_{11}} & \frac{g_{13}}{g_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{g_{11}g_{23}-g_{13}g_{21}}{g_{11}g_{22}-g_{21}g_{12}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Die Formeln (3.22) werden in Abschnitt 3.1.4 zur Gewinnung des zentralen Umordnungstheorems für $GL_n(\mathbb{C})$ benutzt.

3.1.3 Gruppenmultiplikation und Invertierung in Z_n^+ und Z_n^-

Bei der Gauß-Zerlegung einer Matrix $g \in GL_n(\mathbb{C})$ kommen obere und untere Dreiecksmatrizen aus $Z_n^\pm$ vor. Diese Matrizen bilden jeweils eine Untergruppe, die in diesem Abschnitt näher betrachtet werden soll. Untere Dreiecksmatrizen werden später in Kapitel 4 zur Parametrisierung von kohärenten Zuständen benutzt.
Besteht zwischen drei oberen (unteren) Dreiecksmatrizen $x^{(\pm)}, y^{(\pm)}, z^{(\pm)} \in Z_n^\pm$ die Beziehung $z^{(\pm)} = y^{(\pm)}\,x^{(\pm)}$, lauten die Matrixelemente von $z^{(\pm)}$

$$
\begin{aligned}
z_{ij}^{(+)} &= \begin{cases} 0 & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ \sum\limits_{k=i}^{j} y_{ik}^{(+)} x_{kj}^{(+)} & \text{falls } i < j, \end{cases} \\
z_{ij}^{(-)} &= \begin{cases} \sum\limits_{k=j}^{i} y_{ik}^{(-)} x_{kj}^{(-)} & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i < j. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Damit sind die Gruppenmultiplikationsregeln von $Z_n^\pm$ vollständig beschrieben. Das Inverse $[x^{(\pm)}]^{-1}$ von $x^{(\pm)} \in Z_n^\pm$ erhält man aus (3.24), indem man $y^{(\pm)} = [x^{(\pm)}]^{-1}$ und $z^{(\pm)} = \mathbb{I}$ setzt. Löst man diese Gleichungen auf, erhält man

$$
\begin{aligned}
\left[x^{(+)}\right]_{ij}^{-1} &= \begin{cases} 0 & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ \begin{aligned} -x_{ij}^{(+)} &+ \sum\limits_{i<k_1<j} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1 j}^{(+)} - \\ &- \sum\limits_{i<k_1<k_2<j} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1 k_2}^{(+)} x_{k_2 j}^{(+)} + \ldots \end{aligned} & \text{falls } i < j, \end{cases} \\
\left[x^{(-)}\right]_{ij}^{-1} &= \begin{cases} \begin{aligned} -x_{ij}^{(+)} &+ \sum\limits_{j<k_1<i} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1 j}^{(+)} - \\ &- \sum\limits_{i<k_1<k_2<j} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1 k_2}^{(+)} x_{k_2 j}^{(+)} + \ldots \end{aligned} & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i < j. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Für $n = 4$ ist das explizit für obere Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_{12} & -x_{13} + x_{12}x_{23} & -x_{14} + x_{12}x_{24} + x_{13}x_{34} - x_{12}x_{23}x_{34} \\ 0 & 1 & -x_{23} & -x_{24} + x_{23}x_{34} \\ 0 & 0 & 1 & -x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Die in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Lie-Algebren der Auf- und Absteigeoperatoren $\mathfrak{z}_n^+$ und $\mathfrak{z}_n^-$ sind aus den Generatoren die Lie-Gruppen Z_n^+ und Z_n^- aufgebaut. Entsprechend ist die Matrix $\exp(\sum_{i<j} a_{ij}\tau_{ij}) \in Z_n^-$ eine untere Dreiecksmatrix

$$\begin{aligned} Z_n^+ \ni \exp\left(\sum_{i>j} a_{ij}\tau_{ij}\right) &= \mathbb{I} + \sum_{i>j} a_{ij}\tau_{ij} + \frac{1}{2!}\sum_{i>k_1>j} a_{ik_1}a_{k_1j}\tau_{ij} + \\ &\quad + \frac{1}{3!}\sum_{i>k_1>k_2>j} a_{ik_1}a_{k_1k_2}a_{k_2j}\tau_{ij} + \ldots \\ Z_n^- \ni \exp\left(\sum_{i<j} a_{ij}\tau_{ij}\right) &= \mathbb{I} + \sum_{i<j} a_{ij}\tau_{ij} + \frac{1}{2!}\sum_{i<k_1<j} a_{ik_1}a_{k_1j}\tau_{ij} + \\ &\quad + \frac{1}{3!}\sum_{i<k_1<k_2<j} a_{ik_1}a_{k_1k_2}a_{k_2j}\tau_{ij} + \ldots, \end{aligned} \tag{3.27}$$

oder explizit für obere Dreiecksmatrizen und $n = 4$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} + \frac{1}{2}a_{12}a_{23} & a_{14} + \frac{1}{2}\left(a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34}\right) + \frac{1}{6}a_{12}a_{23}a_{34} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} + \frac{1}{2}a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.28}$$

Wegen $\tau_{ij}^2 = 0$ gilt speziell

$$\exp(x\,\tau_{ij}) = \mathbb{I} + x\,\tau_{ij}. \tag{3.29}$$

Eine Matrix $z^{(\pm)} \in Z_n^\pm$ läßt sich immer als Produkt von Matrizen der Form (3.29) schreiben

$$z^{(\pm)} = \mathcal{N}^\pm \left(\prod_{i \lessgtr j} \exp\left(z_{ij}^{(\pm)} \tau_{ij} \right) \right) . \tag{3.30}$$

Der Operator $\mathcal{N}^\pm$ ordnet die Reihenfolge in der die Matrizen τ_{ij} multipliziert werden, wobei folgende Produktordnung gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ (\tau_{ij} \tau_{kl}) &= \begin{cases} \tau_{ij}\, \tau_{kl} & \text{falls } l < j \text{ oder } l = j, k < i \\ \tau_{kl}\, \tau_{ij} & \text{falls } l > j \text{ oder } l = j, k > i \end{cases} \\ \mathcal{N}^- (\tau_{ij} \tau_{kl}) &= \begin{cases} \tau_{ij}\, \tau_{kl} & \text{falls } k > i \text{ oder } k = i, l > j \\ \tau_{kl}\, \tau_{ij} & \text{falls } k < i \text{ oder } k = i, l < j \end{cases} . \end{aligned} \tag{3.31}$$

Denkt man sich die Matrizen τ_{ij} selbst als Matrixelemente einer $n \times n$-Matrix $\mathcal{T}$,

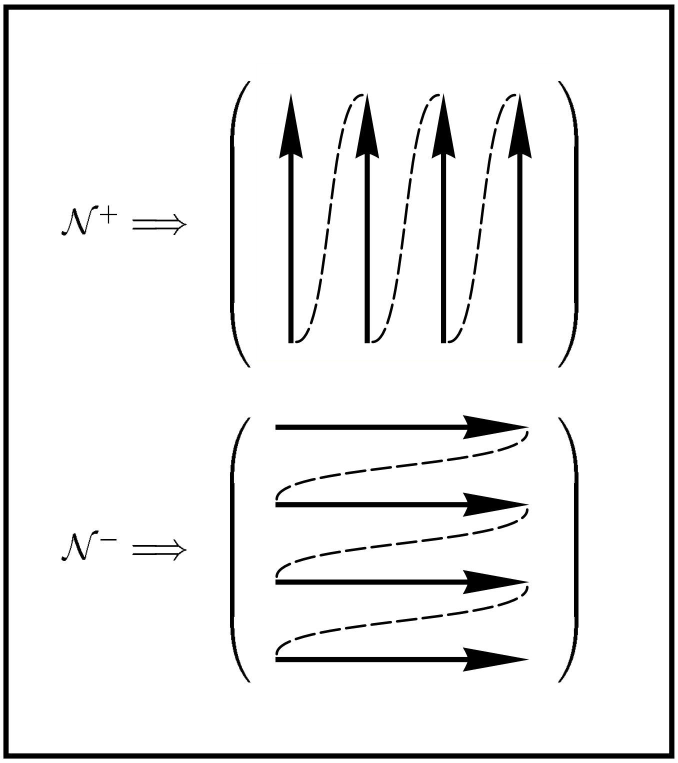

Abb. 3.1: Schema der Operatorproduktordnungen $\mathcal{N}^\pm$.

beginnt die durch $\mathcal{N}^{\pm}$ gegebene Operatorordnung in der letzten Spalte der letzten Zeile und folgt dem Schema aus Abbildung 3.1. Eine Matrix τ_{ij} steht links von τ_{kl}, wenn sie näher am Ende des Pfeils ist. Die Ordnung innerhalb einer Spalte für $\mathcal{N}^{+}$ (innerhalb einer Zeile für $\mathcal{N}^{-}$) hat nur für die Diagonalelemente τ_{ii} eine Bedeutung, weil alle anderen τ_{ij} in einer Spalte (Zeile) miteinander vertauschen (in (3.30) kommen nur τ_{ij} oberhalb beziehungsweise unterhalb der Diagonalen vor, so daß die Produktentwicklung (3.30) auch für entsprechend abgeänderte Operatorordnungen gilt). Die Operatorordnungen $\mathcal{N}^{\pm}$ gelten ganz entsprechend auch für kollektive Leiteroperatoren S_{ij}.

Aus der Gruppenmultiplikation (3.24), der Produktentwicklung (3.30) und den Gleichungen (3.28) und (3.29) folgt ein allgemeines Entflechtungstheorem für die Leiteroperatoren S_{ij}, die die gleichen Vertauschungsregeln befolgen wie die Matrizen τ_{ij} (siehe (2.5) und (2.13)). Dieses Entflechtungstheorem läßt sich in den Formeln

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum\nolimits_{i<j} a_{ij}S_{ij}\right) &= \mathcal{N}^{+}\left(\prod\nolimits_{i<j}\exp\left(x_{ij}^{(+)}S_{ij}\right)\right) \\ \exp\left(\sum\nolimits_{i>j} a_{ij}S_{ij}\right) &= \mathcal{N}^{-}\left(\prod\nolimits_{i>j}\exp\left(x_{ij}^{(-)}S_{ij}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.32}$$

zusammenfassen. Die Koeffizienten $x_{ij}^{(\pm)}$ auf der rechten Seite sind Funktionen der Koeffizienten a_{ij} auf der linken Seite von (3.32). Aus (3.27) lassen sich diese Funktionen direkt ablesen

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(+)} &= \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i = j+1 \\ a_{ij} + a_{i,i-1}a_{i-1,j} & \text{falls } i = j+2 \\ \begin{aligned} a_{ij} \quad &+ a_{i,i-1}a_{i-1,j} + a_{i,i-2}a_{i-2,j} + \\ &+ a_{i,i-1}a_{i-1,i-2}a_{i-2,j} \end{aligned} & \text{falls } i = j+3 \\ \ldots & \ldots \end{cases} \\ x_{ij}^{(-)} &= \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i = j-1 \\ a_{ij} + a_{i,i+1}a_{i+1,j} & \text{falls } i = j-2 \\ \begin{aligned} a_{ij} \quad &+ a_{i,i+1}a_{i+1,j} + a_{i,i+2}a_{i+2,j} + \\ &+ a_{i,i+1}a_{i+1,i+2}a_{i+2,j} \end{aligned} & \text{falls } i = j-3 \\ \ldots & \ldots . \end{cases} \end{aligned} \tag{3.33}$$

Ein einfaches Beispiel für dieses Entflechtungstheorem liefert

$$\begin{aligned} &\exp\left(a_{21}S_{21} + a_{31}S_{31} + a_{32}S_{32}\right) = \\ &= \exp\left(a_{32}S_{32}\right)\exp\left((a_{31} + a_{32}a_{21})S_{31}\right)\exp\left(a_{21}S_{21}\right). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Das Entflechtungstheorem (3.32) läßt sich auch direkt aus den Kommutatorregeln der Operatoren S_{ij} gewinnen (für nicht zu großes n ist das kein sehr großer Aufwand).

Hier wurde das Entflechtungstheorem (3.32) zunächst in der definierenden Darstellung der Lie-Gruppen $Z_n^{\pm}$ gewonnen. Da die Leiteroperatoren S_{ij} mit $i < j$ $(i > j)$ in ihrem Hilbert-Raum eine Darstellung von Z_n^+ (Z_n^-) erzeugen (über die Exponentialfunktion), gilt es dann allgemein. Diese Vorgehensweise wird uns auch zum zentralen Umordnungstheorem für $GL_n(\mathbb{C})$ führen (siehe Abschnitt 3.1.4).
Aus der Produktentwicklung (3.30) folgt, daß eine Matrix $z^{(\pm)} \in Z_n^{\pm}$ im Hilbert-Raum der S_{ij} durch den Operator

$$\begin{aligned} z^{(+)} &\longmapsto \mathcal{D}(z^{(+)}) = \mathcal{N}^+ \left(\prod_{i<j} \exp\left(z_{ij}^{(+)} S_{ij} \right) \right) \\ z^{(-)} &\longmapsto \mathcal{D}(z^{(-)}) = \mathcal{N}^- \left(\prod_{i>j} \exp\left(z_{ij}^{(-)} S_{ij} \right) \right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

dargestellt wird. Diese Darstellungen von oberen und unteren Dreiecksmatrizen im Hilbert-Raum einer irreduziblen Darstellung der Lie-Gruppe SU_n können zur Definition kohärenter Zustände benutzt werden (siehe Kapitel 4).

3.1.4 Das zentrale Umordnungstheorem für $GL_n(\mathbb{C})$

Bei der Berechnung des Skalarprodukts zweier kohärenter Zustände der Lie-Gruppe SU_n, muß man ein Operatorprodukt der Form

$$\mathcal{N}^+ \left[\prod_{k<l} \exp\left(x_{kl}^{(+)} S_{kl} \right) \right] \mathcal{N}^- \left[\prod_{k'>l'} \exp\left(x_{k'l'}^{(-)} S_{k'l'} \right) \right], \tag{3.36}$$

in dem alle Aufsteigeoperatoren S_{kl} mit $k < l$ links von den Absteigeoperatoren S_{kl} mit $k > l$ stehen, so umordnen, daß alle Aufsteigeoperatoren rechts von den Absteigeoperatoren stehen. Die allgemeine Lösung dieses Problems liefert das **zentrale Umordnungstheorem**, das in diesem Abschnitt hergeleitet wird.
Zur Herleitung des Theorems werden zunächst obere und untere Dreiecksmatrizen als Elemente der Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ betrachtet. Kann man für diese Matrizen ein Umordnungstheorem beweisen, bei dem nur Produkte von Matrizen aus $GL_n(\mathbb{C})$ auftauchen, dann gilt dieses Umordnungstheorem auch für alle Darstellungen von $GL_n(\mathbb{C})$.
Sind $x^{(+)} \in Z_n^+$ und $x^{(-)} \in Z_n^-$ eine obere und eine untere Dreiecksmatrix, dann ist ihr Produkt $g = x^{(+)}\, x^{(-)}$ im allgemeinen Gauß-zerlegbar

$$g = x^{(+)}\, x^{(-)} = z^{(-)}\, d\, z^{(+)} \tag{3.37}$$

mit $z^{(\pm)} \in Z_n^{\pm}$ und $d \in D_n$. Die Matrixelemente von $z^{(\pm)}$ und d_n sind Funktionen

$$\begin{aligned} z_{kl}^{(\pm)} &= \zeta_{kl}^{(\pm)}(x^{(+)}, x^{(-)}) \\ d_{kk} &= \delta_k(x^{(+)}, x^{(-)}) \end{aligned} \tag{3.38}$$

der Matrixelemente von $x^{(\pm)}$, die sich aus (3.22) und

$$g_{ij} = \sum_{k \geq \max(i,j)} x_{ik}^{(+)} x_{kj}^{(-)} \tag{3.39}$$

ergeben.
Diese Gauß-Zerlegung, die in der definierenden Darstellung von $GL_n(\mathbb{C})$ durchgeführt wurde, ist in allen Darstellungen von $GL_n(\mathbb{C})$ gültig. In dem Hilbert-Raum, in dem die Operatoren S_{ij} definiert sind (also in allen Darstellungsräumen irreduzibler Darstellungen von SU_n), werden obere und untere Dreiecksmatrizen durch (3.35) dargestellt. Eine Diagonalmatrix $d \in D_n$ wird durch

$$d \longmapsto \mathcal{D}(d) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log(d_{jj}) S_{jj}\right) \tag{3.40}$$

dargestellt. Benutzt man (3.35) und (3.40) um alle Matrizen in (3.37) durch Operatoren im Hilbert-Raum der S_{ij} darzustellen , erhält man das zentrale Umordnungstheorem für $GL_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}^+ \left[\prod_{k<l} \exp\left(x_{kl}^{(+)} S_{kl}\right)\right] \mathcal{N}^- \left[\prod_{k'>l'} \exp\left(x_{k'l'}^{(-)} S_{k'l'}\right)\right] = \\ &\quad \mathcal{N}^- \left[\prod_{k>l} \exp\left(\zeta_{kl}^{(-)}(x^{(+)}, x^{(-)}) S_{kl}\right)\right] \times \\ &\quad \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \log\left(\delta_j(x^{(+)}, x^{(-)})\right) S_{jj}\right) \times \\ &\quad \mathcal{N}^+ \left[\prod_{k'<l'} \exp\left(\zeta_{k'l'}^{(+)}(x^{(+)}, x^{(-)}) S_{k'l'}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Auf der linken Seite von (3.41) steht das Operatorprodukt, von dem ausgegangen wurde und bei dem alle Aufsteigeoperatoren links von den Absteigeoperatoren stehen. Auf der rechten Seite von (3.41) ist die Operatorordnung so verändert, daß nun die Aufsteigeoperatoren immer rechts der Absteigeoperatoren stehen (dafür müssen zusätzliche Diagonaloperatoren eingefügt werden).

Für $n = 3$ lauten die Funktionen $\zeta_{ij}^{(\pm)}$ und δ_i explizit

$$\begin{aligned}
\zeta_{21}^{(-)} &= \frac{x_{21}^{(-)} + x_{23}^{(+)} x_{31}^{(-)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \\
\zeta_{31}^{(-)} &= \frac{x_{31}^{(-)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \\
\zeta_{32}^{(-)} &= \frac{x_{32}^{(-)} + x_{31}^{(-)} x_{12}^{(+)} x_{32}^{(-)} - x_{31}^{(-)} x_{12}^{(+)}}{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)} \\
\delta_1 &= 1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)} \\
\delta_2 &= \frac{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \qquad (3.42) \\
\delta_3 &= \frac{1}{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)} \\
\zeta_{23}^{(+)} &= \frac{x_{23}^{(+)} + x_{13}^{(+)} x_{21}^{(-)} x_{23}^{(+)} - x_{13}^{(+)} x_{21}^{(-)}}{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)} \\
\zeta_{13}^{(+)} &= \frac{x_{13}^{(+)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \\
\zeta_{12}^{(+)} &= \frac{x_{12}^{(+)} + x_{32}^{(-)} x_{13}^{(+)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}},
\end{aligned}$$

wobei die Anordnung der Gleichungen den Operatorordnungen $\mathcal{N}^{\pm}$ entspricht. Das zentrale Umordnungstheorem in der Form (3.37) ermöglicht es, die Gruppenmultiplikation von $GL_n\,(\mathbb{C})$ explizit zu berechnen (in der Parametrisierung, die durch die Gauß-Zerlegung gegeben ist – in der Parametrisierung durch die Matrixelemente g_{ij} von $g \in GL_n\,(\mathbb{C})$ ist die Gruppenmultiplikation einfach).

3.1.5 Gruppenmultiplikation und Invertierung für $GL_n\,(\mathbb{C})$

Unter Verwendung von (3.37) und (3.24) läßt sich die Gruppenmultiplikationsgleichung für $GL_n\,(\mathbb{C})$ explizit angeben. Sind $g'' = z''^{(-)}\, d''\, z''^{(+)}$, $g' = z'^{(-)}\, d'\, z'^{(+)}$ und

$g = z^{(-)}\, d\, z^{(+)}$ drei Gauß-zerlegte Matrizen in $GL_n(\mathbb{C})$ mit

$$g'' = g'\, g, \tag{3.43}$$

dann lauten die Matrixelemente von $z''^{(\pm)}$ und d''

$$\begin{aligned}
z''^{(-)}_{kl} &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k < l \\ 1 & \text{falls } k = l \\ \displaystyle\sum_{j=l}^{k} z'^{(-)}_{kj}\, \zeta^{(-)}_{jl}\big(z^{(+)}, z'^{(-)}\big)\frac{d'_j}{d'_l} & \text{falls } k > l \end{cases} \\[2ex]
d''_{kl} &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ d'_{kk}\, \delta_k\big(z^{(+)}, z'^{(-)}\big)\, d_{kk} & \text{falls } k = l \end{cases} \\[2ex]
z''^{(+)}_{kl} &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k > l \\ 1 & \text{falls } k = l \\ \displaystyle\sum_{j=k}^{l} z^{(+)}_{kj}\, \zeta^{(+)}_{jl}\big(z^{(+)}, z'^{(-)}\big)\frac{d_l}{d_j} & \text{falls } k < l. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Die Gruppenmultiplikation (3.24) in $Z_n^{\pm}$ und die Zerlegung (3.37) sind Spezialfälle von (3.44).

Entsprechend lassen sich für eine Matrix $g = z^{(-)}\, dz^{(+)} \in GL_n(\mathbb{C})$ die Matrixelemente der inversen Matrix $\tilde{g} \equiv g^{-1} = \tilde{z}^{(-)}\, \tilde{d}\, \tilde{z}^{(+)} = {z^{(+)}}^{-1} d^{-1} {z^{(-)}}^{-1}$ angeben

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{kk} &= \frac{\Delta_{kk}\big({z^{(+)}}^{-1} d^{-1} {z^{(-)}}^{-1}\big)}{\Delta_{k-1,k-1}\big({z^{(+)}}^{-1} d^{-1} {z^{(-)}}^{-1}\big)} \\[2ex]
\tilde{z}^{(+)}_{kl} &\underset{k \leq l}{=} \frac{\Delta_{kl}\big({z^{(+)}}^{-1} d^{-1} {z^{(-)}}^{-1}\big)}{\Delta_{kk}\big({z^{(+)}}^{-1} d^{-1} {z^{(-)}}^{-1}\big)} \\[2ex]
\tilde{z}^{(-)}_{kl} &\underset{k \geq l}{=} \frac{\Delta_{kl}\big({z^{(+)}}^{-1} d^{-1} {z^{(-)}}^{-1}\big)}{\Delta_{ll}\big({z^{(+)}}^{-1} d^{-1} {z^{(-)}}^{-1}\big)},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

wobei die Funktionen Δ_{kl} durch (3.19), (3.20) und (3.21) gegeben sind. Die Invertierung (3.25) von Dreiecksmatrizen ist ein Spezialfall von (3.45).

Im Hilbert-Raum der Operatoren S_{ij} können wir die Darstellung $\mathcal{D}(g)$ der Matrix $g = z^{(-)} dz^{(+)}$ unter Verwendung von (3.35) und (3.40) explizit angeben

$$g \longmapsto \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(z^{(-)})\mathcal{D}(d)\mathcal{D}(z^{(+)}). \tag{3.46}$$

Die Gruppenmultiplikation (3.44) gilt dann auch in diesen Darstellungen

$$\mathcal{D}(g'') = \mathcal{D}(g')\mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(g'g). \tag{3.47}$$

3.1.6 Gruppenmultiplikation und Invertierung für SU_n

Die Lie-Gruppe SU_n der speziellen unitären Matrizen ist eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$, die durch ihre Determinante $\det g = 1$ und Unitarität $g^\dagger = g^{-1}$ bestimmt ist. Damit hat sie $n^2 - 1$ reelle Parameter. Eine Gauß-zerlegbare Matrix $g \in SU_n$ hat die Form

$$
\begin{aligned}
g(\gamma, \phi) = \;& \gamma\, d_\phi\, \beta^{-1} \\
= \;& \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\gamma_{21} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\
\gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdot & \cdot & 1
\end{pmatrix} \times \\
\times & \begin{pmatrix}
\sqrt{\frac{1}{f_1}}e^{-i\phi_1} & 0 & 0 & \cdot\;\cdot & 0 \\
0 & \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}e^{-i(\phi_2-\phi_1)} & 0 & \cdot\;\cdot & 0 \\
0 & 0 & \sqrt{\frac{f_2}{f_3}}e^{-i(\phi_3-\phi_2)} & \cdot\;\cdot & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot\;\cdot & \sqrt{f_{n-1}}e^{i\phi_{n-1}}
\end{pmatrix} \times \\
\times & \begin{pmatrix}
1 & -\beta_{12} & -\beta_{13} + \beta_{12}\beta_{23} & \cdot\;\cdot & -\beta_{1n} + \sum\limits_{1<k<n} \beta_{1k}\beta_{kn} - \ldots \\
0 & 1 & -\beta_{23} & \cdot\;\cdot & -\beta_{2n} + \sum\limits_{2<k<n} \beta_{2k}\beta_{kn} - \ldots \\
0 & 0 & 1 & \cdot\;\cdot & -\beta_{3n} + \sum\limits_{3<k<n} \beta_{3k}\beta_{kn} - \ldots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot\;\cdot & 1
\end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Hier ist $\gamma \in Z_n^-$ eine untere Dreiecksmatrix und $\beta \in Z_n^+$ eine obere Dreiecksmatrix, deren Inverses β^{-1} (gegeben durch (3.25)) in (3.48) eingeht.

Die Bedingung $\det g = 1$ ist in dieser Form offensichtlich erfüllt. Eine sinnvolle Wahl der freien Parameter liefern die $\frac{n(n-1)}{2}$ komplexen Einträge der unteren Dreiecksmatrix $\gamma \in Z_n^-$ und die $n-1$ (reellen) Phasen ϕ_i der Diagonalmatrix d_ϕ (die Phasen werden im folgenden zum Vektor $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-1})$ zusammengefaßt). Eine Matrix $g \in SU_n$ ist durch γ und ϕ eindeutig festgelegt $g = g(\gamma, \phi)$. Umgekehrt ist fast

jede Matrix $g \in SU_n$ Gauß-zerlegbar (bis auf eine Menge vom Maß null) und läßt sich somit als $g(\gamma, \phi)$ schreiben.
Die reellen Funktionen $f_i = f_i(\gamma, \phi)$ und die Einträge der oberen Dreiecksmatrix $\beta = \beta(\gamma, \phi) \in Z_n^+$ sind nichttriviale Funktionen von γ und ϕ, die sich durch die Unitaritätsbedingung ergeben. Tatsächlich lassen sich die Gleichungen $g^\dagger g = g g^\dagger = \mathbb{I}$ mit etwas Geschick nach den f_i und β_{kl} auflösen. Dazu formt man die Unitaritätsbedingung zunächst um

$$\begin{array}{rll} & g^\dagger g & = \mathbb{I} \\ \Longleftrightarrow & \beta^{-1\dagger} d_\phi^\dagger \gamma^\dagger \gamma \, d_\phi \, \beta^{-1} & = \mathbb{I} \\ \Longleftrightarrow & \gamma^\dagger \gamma & = d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger \beta \, d_\phi^{-1} \\ \Longleftrightarrow & \zeta \, \delta \, \zeta^\dagger & = (d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger d_\phi^\dagger)(d_\phi^{-1\dagger} d_\phi^{-1})(d_\phi \, \beta \, d_\phi^{-1}). \end{array} \tag{3.49}$$

Beim Übergang von der vorletzten auf die letzte Zeile, wurde auf der linken Seite das zentrale Umordnungstheorem $\gamma^\dagger \gamma = \zeta \, \delta \, \zeta^\dagger$ mit $\gamma, \zeta \in Z_n^-$, $\gamma^\dagger, \zeta^\dagger \in Z_n^+$ und $\delta \in D_n$ angewandt (siehe (3.37) und (3.38)). Die Matrixelemente von ζ und δ sind also Funktionen der Matrixelemente von γ (und den dazu komplex konjugierten Matrixelementen). Auf der rechten Seite der letzten Zeile ist $d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger d_\phi^\dagger \in Z_n^-$ eine untere Dreiecksmatrix, $d_\phi \, \beta \, d_\phi^{-1} \in Z_n^+$ eine obere Dreiecksmatrix und $d_\phi^{-1\dagger} d_\phi^{-1} \in D_n$ eine Diagonalmatrix. In der letzten Zeile steht also auf beiden Seiten die Gauß-Zerlegung einer Matrix. Deren Eindeutigkeit erlaubt es, die Matrizen einzeln gleichzusetzen

$$\begin{array}{lllll} \zeta & = d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger d_\phi^\dagger & \Leftrightarrow & d_\phi^\dagger \, \zeta \, d_\phi^{\dagger -1} & = \beta^\dagger \\ \zeta^\dagger & = d_\phi \, \beta \, d_\phi^{-1} & \Leftrightarrow & d_\phi^{-1} \zeta^\dagger d_\phi & = \beta \\ \delta & = d_\phi^{-1\dagger} d_\phi^{-1} & \Leftrightarrow & \delta^{-1} & = d_\phi \, d_\phi^\dagger. \end{array} \tag{3.50}$$

In der dritten Zeile von (3.50) fallen auf der rechten Seite bei den Einträgen der Diagonalmatrix $d_\phi \, d_\phi^\dagger$ alle Phasen ϕ_i weg und man kann direkt nach den Funktionen f_i auflösen

$$f_i(\gamma, \overline{\gamma}) = \Delta_{ii}(\gamma^\dagger \gamma) \tag{3.51}$$

mit den durch (3.19) gegebenen Funktionen Δ_{ii}. Es ist sinnvoll, die Funktionen $f_i = f_i(\gamma, \overline{\gamma})$ als Funktionen von γ und dessen komplex konjugierten $\overline{\gamma}$ zu betrachten. Das ermöglicht es, die Funktionen f_i analytisch fortzusetzen, indem man γ und $\overline{\gamma} \equiv \gamma'$ als unabhängige komplexe Variable betrachtet. Die Gleichung (3.51) ist auch für $i = n$ gültig

$$f_n(\gamma, \overline{\gamma}) = \Delta_{nn}(\gamma^\dagger \gamma) = \det \gamma^\dagger \gamma = 1. \tag{3.52}$$

Die erste und zweite Zeile von (3.50) enthalten dieselbe Information (die Gleichungen sind hermitesch konjugiert); aus der zweiten Zeile lassen sich direkt die nichttrivialen

Matrixelemente β_{ij} $(i<j)$ ablesen

$$\beta_{ij}(\gamma,\phi) \underset{i<j}{=} \Delta_{ij}(\gamma^\dagger\gamma)\sqrt{\frac{f_{j-1}}{f_i f_{i-1} f_j}}\exp[i(\phi_i-\phi_{i-1}-\phi_j+\phi_{j-1})] \tag{3.53}$$

mit den in (3.21) gegebenen Funktionen Δ_{ij}. Für die Gültigkeit dieser Gleichung muß man formal $f_0=1$ und $\phi_0=\phi_n=0$ setzen.
Sind $g''(\gamma'',\phi''), g'(\gamma',\phi'), g(\gamma,\phi)$ drei Matrizen aus SU_n mit

$$g''(\gamma'',\phi'') = g'(\gamma',\phi')\,g(\gamma,\phi), \tag{3.54}$$

dann ergeben sich die Funktionen

$$\begin{aligned}\gamma'' &= \gamma''(\gamma',\phi';\gamma,\phi)\\ \phi'' &= \phi''(\gamma',\phi';\gamma,\phi)\end{aligned} \tag{3.55}$$

aus den Gruppenmultiplikationsgleichungen (3.44). Durch die Unitarität gilt für die Inversion einer SU_n-Matrix

$$[g(\gamma,\phi)]^{-1} = [g(\gamma,\phi)]^\dagger = g(\beta^{-1\dagger},-\phi). \tag{3.56}$$

Im Hilbert-Raum der Leiteroperatoren S_{ij} ist eine Darstellung von $g(\gamma,\phi)\in SU_n$ durch

$$g(\gamma,\phi) \longmapsto \mathcal{D}(g(\gamma,\phi)) = \mathcal{D}(\gamma)\,\mathcal{D}(d_\phi)\,\mathcal{D}(\beta^{-1}) \tag{3.57}$$

mit $\mathcal{D}(g'\,g)=\mathcal{D}(g')\,\mathcal{D}(g)$ gegeben.

3.1.7 Invariante 1-Formen und das invariante Maß für $GL_n(\mathbb{C})$ und SU_n

Für eine Matrixgruppe $G\subset GL_n(\mathbb{C})$ kann man eine Matrix von 1-Formen

$$\mathbf{\Omega} = g^{-1}\mathbf{d}g \tag{3.58}$$

mit $g\in G$ definieren [86].[1] Für $GL_n(\mathbb{C})$ erhält man so n^2 linear unabhängige komplexe invariante 1-Formen. Betrachtet man Real- und Imaginärteil getrennt, erhält man $2n^2$ reelle invariante 1-Formen – entsprechend der reellen Dimension von $GL_n(\mathbb{C})$. Bildet man äußere Produkte der invarianten 1-Formen, erhält man eine Basis aller linksinvarianten Formen des (reellen) Grades $1,2,\dots 2n^2$. Das invariante Maß (das Haar-Maß) von $GL_n(\mathbb{C})$ läßt sich durch das äußere Produkt aller unabhängigen invarianten 1-Formen bilden. Entsprechendes gilt für die Untergruppen von $GL_n(\mathbb{C})$

---

[1] Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Matrixelemente von $\mathbf{\Omega}$ linksinvariante 1-Formen sind. Unter der Abbildung $g\mapsto hg$ gilt $g^{-1}\mathbf{d}g\mapsto(hg)^{-1}\mathbf{d}(hg)=g^{-1}h^{-1}h\mathbf{d}g=g^{-1}\mathbf{d}g$.

– dann sind zwar nicht mehr alle Matrixelemente von $\boldsymbol{\Omega}$ linear unabhängig, aber $\boldsymbol{\Omega}$ enthält immer eine Basis linear unabhängiger 1-Formen.
Für $GL_n(\mathbb{C})$ kann man das Haar-Maß $\boldsymbol{\mu}_{GL_n(\mathbb{C})}$ direkt angeben (und leicht nachprüfen)

$$\boldsymbol{\mu}_{GL_n(\mathbb{C})} = \mathcal{C}\frac{1}{|\mathrm{det} g|^{2n}}\,\mathbf{d}^{2n^2} g. \tag{3.59}$$

Hier ist $\mathcal{C} \neq 0$ eine beliebige reelle Konstante, $g = \{g_{ij}\} \in GL_n(\mathbb{C})$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{2n^2} g \quad &= \mathbf{d}\mathrm{Re}\, g_{11} \wedge \mathbf{d}\mathrm{Im}\, g_{11} \wedge \mathbf{d}\mathrm{Re}\, g_{12} \wedge \mathbf{d}\mathrm{Im}\, g_{12} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\mathrm{Re}\, g_{nn} \wedge \mathbf{d}\mathrm{Im}\, g_{nn} \\ &= \tfrac{1}{-2i}\,\mathbf{d}g_{11} \wedge \mathbf{d}\overline{g_{11}} \wedge \tfrac{1}{-2i}\,\mathbf{d}g_{12} \wedge \mathbf{d}\overline{g_{12}} \wedge \cdots \wedge \tfrac{1}{-2i}\,\mathbf{d}g_{nn} \wedge \mathbf{d}\overline{g_{nn}}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Die mit der Gauß-Zerlegung $g = z^{(-)}dz^{(+)}$ verbundene Jacobimatrix $\frac{\partial(g_{ij})}{\partial(z_{ij}^{(-)};d_{ii};z_{ij}^{(+)})}$ läßt sich mit der Hilfe der Eigenschaften von Differentialformen leicht berechnen. Das Haar-Maß von $GL_n(\mathbb{C})$ in der Gaußzerlegung hat die Form

$$\boldsymbol{\mu}_{GL_n(\mathbb{C})} = \mathcal{C}\prod_{j=1}^{n} |d_j|^{2n-4j}\,\mathbf{d}^{2n} d \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(-)} \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(+)} \tag{3.61}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{2n} d \quad &= \mathbf{d}^2 d_{11} \wedge \mathbf{d}^2 d_{22} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2 d_{nn} \\ \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(-)} \quad &= \mathbf{d}^2 z_{21}^{(-)} \wedge \mathbf{d}^2 z_{32}^{(-)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2 z_{n1}^{(-)} \\ \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(+)} \quad &= \mathbf{d}^2 z_{12}^{(+)} \wedge \mathbf{d}^2 z_{23}^{(+)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2 z_{1n}^{(+)} \end{aligned} \tag{3.62}$$

und $\mathbf{d}^2 z = \mathbf{d}\,\mathrm{Re}\, z \wedge \mathbf{d}\mathrm{Im}\, z$.
Aus dieser Form des Haar-Maßes für $GL_n(\mathbb{C})$ läßt sich durch Integration das Haar-Maß von SU_n bestimmen. In Abschnitt 3.1.6 wurde die Parametrisierung von SU_n-Matrizen $g = \gamma\, d_\phi \beta^{-1}$ durch untere Dreiecksmatrizen γ und $n-1$ Phasen ϕ von d_ϕ eingeführt (siehe Gleichungen (3.48),(3.51) und (3.53)). In diesen Parametern hat das Haar-Maß von SU_n die Form

$$\boldsymbol{\mu}_{SU_n} = \mathcal{F}(\gamma, \phi)\,\mathbf{d}^{n-1}\phi \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma \tag{3.63}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{n-1}\phi \quad &= \mathbf{d}\phi_1 \wedge \mathbf{d}\phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_{n-1} \\ \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma \quad &= \mathbf{d}^2\gamma_{21} \wedge \mathbf{d}^2\gamma_{32} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2\gamma_{n1}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Die Funktion $\mathcal{F}(\gamma, \phi)$ erhält man aus der Integration über die $2n^2$-dimensionale δ-Funktion

$$\begin{aligned} & \delta^{2n^2}(z^{(-)}\, d\, z^{(+)} - \gamma\, d_\phi\, \beta^{-1}) = \\ & = \delta^{2n^2-1}(g(\gamma,\phi)^\dagger g(\gamma,\phi) - \mathbb{I})\, \delta(\det g - 1) = \\ & = \delta^{n(n-1)}(z^{(-)} - \gamma)\delta^{2n}(d - d_\phi)\delta^{n(n-1)}(z^{(+)} - \beta^{-1}) \end{aligned} \tag{3.65}$$

(mit $\delta^2(z) = \delta(z)\delta(\overline{z})$) aus dem Haar-Maß von $GL_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} F(\gamma,\phi) \quad & = \mathcal{C} \int_{GL_n(\mathbb{C})} \delta^{2n^2}(z^{(-)}\, d\, z^{(+)} - \gamma\, d_\phi\, \beta^{-1})\, \boldsymbol{\mu}_{GL_n(\mathbb{C})} \\ & = \mathcal{C} \prod_{j=1}^{n-1} f_j(\gamma, \overline{\gamma})^{-2}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Die Funktionen f_j sind in Gleichung (3.51) gegeben. Die Integration von der ersten auf die zweite Zeile von (3.66) ist am einfachsten, wenn man zunächst über die Diagonalmatrix d integriert. Der verbleibende Integrant ist dann nur noch von γ abhängig, so daß die weiteren Integrationen keinen zusätzlichen Faktor mehr liefern. Es ist bei der kompakten Gruppe SU_n sinnvoll, das Haar-Maß zu normieren

$$\int_{SU_n} \boldsymbol{\mu}_{SU_n} = 1. \tag{3.67}$$

Dazu muß

$$\mathcal{C}^{-1} = \int_{SU_n} \mathcal{F}(\gamma,\overline{\gamma}) \mathbf{d}^{n-1}\phi \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma = (2\pi)^{n-1} \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\dots(n-1)!} \tag{3.68}$$

gesetzt werden [87].

3.2 Die irreduziblen SU_n-Darstellungen

3.2.1 Die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Die Matrizen τ_{ij} bilden eine vollständige Basis des Vektorraums $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ (der Lie-Algebra aller komplexen $n \times n$ Matrizen). Mit dem Skalarprodukt

$$\langle A|B\rangle = \mathrm{Spur}\, A^\dagger B \tag{3.69}$$

wird $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ein Hilbert-Raum, und die Matrizen $\{\tau_{ij}\}$ werden zu einer Orthonormalbasis.[2] Um den Vektorcharakter der Matrizen hervorzuheben, wird im folgenden die Schreibweise $|\tau_{ij}\rangle \equiv \tau_{ij}$ benutzt.
In $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ kann man die Operatoren S_{ij}^{ad} durch

$$S_{ij}^{\mathrm{ad}}|\tau_{kl}\rangle = |\,[\tau_{ij},\tau_{kl}]\rangle \tag{3.70}$$

definieren. Man rechnet leicht nach, daß die Operatoren S_{ij}^{ad} die gleichen Vertauschungsregeln erfüllen wie die Matrizen τ_{ij}. Sie spannen eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ auf, wobei $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ gleichzeitig der Darstellungsraum (d.h. der Vektorraum) ist, auf dem die Darstellung wirkt. Man nennt diese Darstellung die **adjungierte Darstellung** von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Es läßt sich zeigen, daß es eine irreduzible Darstellung ist [70–72], d.h. alle Operatoren, die mit allen S_{ij}^{ad} vertauschen sind proportional zum Identitätsoperator (Schurs Lemma). Das hermitesch konjugierte eines Operators S_{ij}^{ad} ist gegeben durch

$$S_{ij}^{\mathrm{ad}\dagger} = S_{ji}^{\mathrm{ad}}. \tag{3.71}$$

Jede irreduzible SU_n-Darstellung induziert eine Darstellung der Matrizen τ_{ij} durch Operatoren S_{ij}, so daß (3.71) gilt. Die adjungierte Darstellung ist von großer Bedeutung für die Darstellungstheorie. Hier sollen nur die Eigenschaften und Begriffe vorgestellt werden, auf die im Laufe der Untersuchung immer wieder zurückgegriffen wird.

3.2.2 Die Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ und die Wurzeln der adjungierten Darstellung

Im Abschnitt 2.1.2 wurde im Prinzip die Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ eingeführt, d.h. die Zerlegung von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ in die Lie-Algebren $\mathfrak{d}_n$ der Besetzungszahloperatoren, $\mathfrak{z}_n^-$ der Absteigeoperatoren und $\mathfrak{z}_n^+$ der Aufsteigeoperatoren. Die von ihnen erzeugten Lie-Gruppen D_n,Z_n^+ und Z_n^- wurden in diesem Kapitel ausführlich im Zusammenhang mit der Gauß-Zerlegung einer Matrix $g \in GL_n(\mathbb{C})$ behandelt. Auf algebraischer

---

[2] Dieses Skalarprodukt ist im wesentlichen äquivalent zur Killing-Form, siehe Anhang A.

Ebene führt diese Zerlegung zu neuen Einsichten, die hier kurz zusammengefaßt werden sollen.

Die Algebra $\mathfrak{d}_n$ der Diagonalmatrizen heißt auch **Cartan-Algebra** von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Sie ist die größte abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ (d.h. die größte Unteralgebra, so daß alle ihre Elemente untereinander vertauschen). In der adjungierten Darstellung wird die Cartan-Algebra durch die hermiteschen Operatoren S_{ii}^{ad} aufgespannt. Da die S_{ii}^{ad} untereinander vertauschen, gibt es eine Vektorraumbasis von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, so daß alle S_{ii}^{ad} gleichzeitig diagonal werden. Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese Basis bereits durch die Basis $\{|\tau_{ij}\rangle\}$ gegeben ist

$$S_{ii}^{\mathrm{ad}}|\tau_{kl}\rangle = (\delta_{ik} - \delta_{il})\,|\tau_{kl}\rangle. \tag{3.72}$$

Da der Operator $N^{\mathrm{ad}} = \sum_{i=1}^{n} S_{ii}^{\mathrm{ad}}$ mit allen Operatoren S_{kl}^{ad} vertauscht, ist es sinnvoll, den Vektorraum $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ auf spurlose Kombinationen der $|\tau_{ij}\rangle$ zu beschränken. Der verbleibende Vektorraum ist dann $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ (also die Lie-Algebra aller spurlosen komplexen $n \times n$-Matrizen).

Im folgenden werden zwei Basen $\mathcal{B}_\rho = \{|\tau_{ij}\rangle\ (i \neq j); |\rho_k\rangle\ \ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ und $\mathcal{B}_\kappa = \{|\tau_{ij}\rangle\ (i \neq j); |\kappa_k\rangle\ \ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ mit

$$\begin{aligned} |\rho_k\rangle &= |\tau_{k,k}\rangle - |\tau_{k+1,k+1}\rangle & k &= 1, 2, \ldots, n-1 \\ |\kappa_k\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\textstyle\sum_{l=1}^{k} |\tau_{ll}\rangle - k|\tau_{kk}\rangle\right) & k &= 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{3.73}$$

benutzt. Die Basis $\mathcal{B}_\kappa$ ist eine Orthonormalbasis (im Gegensatz zu $\mathcal{B}_\rho$ – die Vektoren $|\rho_k\rangle$ sind weder normiert noch orthogonal) und hat daher im folgenden die größere Bedeutung für die Darstellungstheorie. Physikalisch würde man bei der Beschreibung von n-Niveau-Atomen vielleicht der Basis $\mathcal{B}_\rho$ den Vorzug geben, weil die Matrizen $|\rho_k\rangle$ die Inversion von zwei Atomniveaus beschreiben. Zwischen den Matrizen $|\rho_k\rangle$ und $|\kappa_l\rangle$ besteht der Zusammenhang

$$|\rho_k\rangle = \sqrt{\frac{k+1}{k}}|\kappa_k\rangle - \sqrt{\frac{k-1}{k}}|\kappa_{k-1}\rangle. \tag{3.74}$$

Schränkt man die Cartan-Algebra $\mathfrak{d}_n$ von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ entsprechend ein, erhält man die Cartan-Algebra $\mathfrak{c}_n$ von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Die Operatoren S_{ij}, die in einem beliebigen Darstellungsraum einer irreduziblen SU_n-Darstellung wirken, lassen sich entsprechend auf eine (irreduzible) Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ einschränken

$$\begin{aligned} R_k &= S_{kk} - S_{k+1,k+1} \\ K_k &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\sum_{l=1}^{k} S_{ll} - kS_{kk} \right) \\ R_k &= \sqrt{\frac{k+1}{k}} K_k - \sqrt{\frac{k-1}{k}} K_{k-1}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Da die Operatoren K_k alle untereinander vertauschen und hermitesch sind, gibt es in jedem Darstellungsraum V (mit einem Hilbert-Raum V) eine Basis, in der sie alle gleichzeitig diagonal werden. Ist $|x\rangle$ ein Vektor aus dieser Basis, gilt also

$$K_k|x\rangle = \nu_k(x)|x\rangle \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{3.76}$$

mit reellen Eigenwerten ν_k. Die Eigenwerte lassen sich zu Vektoren

$$\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \ldots, \nu_{n-1}(x)) \tag{3.77}$$

zusammenfassen, die man die **Gewichte** der Darstellung nennt. Entsprechend bezeichnet man die Eigenvektoren zur Cartan-Algebra als **Gewichtsvektoren**. Im allgemeinen sind die Gewichte jedoch entartet, d.h. es gibt mehr als einen Gewichtsvektor mit dem gleichen Gewicht ν.

Von besonderer Bedeutung sind die Gewichte α der adjungierten Darstellung (die adjungierte Darstellung ist irreduzibel). Hier bilden die Basis $\mathcal{B}_\kappa$ eine Basis von Gewichtsvektoren. Für die Diagonalmatrizen $|\kappa_k\rangle$ verschwinden die Gewichte identisch

$$\alpha(\kappa_k) = (0, 0, \ldots, 0)\,. \tag{3.78}$$

Die nichtverschwindenden Gewichte der adjungierten Darstellung heißen **Wurzeln** von $\mathfrak{su}_n$ (bzw. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$). Die Wurzeln $\alpha(\tau_{ij})$ für $i < j$ heißen **positive Wurzeln** und entsprechend für $i > j$ **negative Wurzeln**. Die positiven Wurzeln gehören zu Matrizen $|\tau_{ij}\rangle$ aus der Lie-Algebra der Aufsteigeoperatoren $\mathfrak{z}_n^+$. Die Positivität einer Wurzel $\alpha(\tau_{ij})$ kann man ihr direkt ansehen: ihr letztes nichtverschwindendes Element ist positiv.

Eine positive Wurzel α heißt **einfach**, wenn sie sich nicht als Summe $\alpha_1 + \alpha_2$ anderer positiver Wurzeln darstellen läßt. Es gibt $n-1$ einfache Wurzeln

$$\alpha^{(k)} = (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(k)}) \equiv \alpha(\tau_{k,k+1}), \tag{3.79}$$

die zu den Matrizen $|\tau_{k,k+1}\rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ gehören, und deren Elemente durch

$$\alpha^{(K)}_{(k),l} = \begin{cases} 0 & \text{falls } l < k-1 \\ -\sqrt{\frac{k-1}{k}} & \text{falls } l = k-1 \\ \sqrt{\frac{k+1}{k}} & \text{falls } l = k \\ 0 & \text{falls } l > k \end{cases} \tag{3.80}$$

gegeben sind. Alle anderen positiven Gewichte ergeben sich aus

$$\alpha(\tau_{k,k+l+1}) = \sum_{j=0}^{l} \left(\begin{array}{c} l \\ j \end{array} \right) \alpha^{(k)} \tag{3.81}$$

und die negativen Gewichte aus

$$\alpha(\tau_{kl}) = -\alpha(\tau_{lk}). \tag{3.82}$$

3.2.3 Die Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen von SU_n durch ihr höchstes Gewicht

In jedem Darstellungsraum V einer irreduziblen Darstellung von SU_n gibt es einen Gewichtsvektor **höchsten Gewichts** $|\mu\rangle$ mit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1})$, der durch

$$\mathfrak{z}_n^+|\mu\rangle = 0 \Longleftrightarrow S_{ij}|\mu\rangle = 0 \qquad \text{für alle } i < j \tag{3.83}$$

bis auf einen Faktor $a \in \mathbb{C}$ eindeutig definiert ist. Das höchste Gewicht legt eine irreduzible Darstellung von SU_n eindeutig fest. Alle anderen Gewichte der Darstellung lassen sich durch die Anwendung von Absteigeoperatoren und Vertauschungsregeln bestimmen. Auch die Entartung von Gewichten läßt sich auf diese Wiese bestimmen. Nicht jedes $n-1$-Tupel von reellen Zahlen ist das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung von SU_n. Die erlaubten höchsten Gewichte liegen auf einem $n-1$-dimensionalen Gitter, daß von den sogenannten **Fundamentalgewichten** $\mu^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \ldots, \mu_{n-1}^{(k)})$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ aufgespannt wird. Die Fundamentalgewichte sind durch die einfachen Wurzeln eindeutig bestimmt

$$\frac{2\mu^{(k)} \cdot \alpha^{(l)}}{\alpha^{(l)} \cdot \alpha^{(l)}} = \delta_{kl} \tag{3.84}$$

(mit $\mu \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \alpha_j$ als Skalarprodukt). Die Lösung dieser Gleichungen gibt

$$\mu_l^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } l < k \\ \frac{k}{\sqrt{l(l+1)}} & \text{falls } l \geq k. \end{cases} \tag{3.85}$$

Die $n-1$ irreduziblen Darstellungen von SU_n mit den Fundamentalgewichten $\mu^{(k)}$ als höchsten Gewichten nennt man **Fundamentaldarstellungen**. Der Vektor höchsten Gewichts ist ein Eigenvektor zu den Diagonaloperatoren R_i. In den Fundamentaldarstellungen sind die zugehörigen Eigenwerte besonders einfach

$$R_k|\mu^{(l)}\rangle = \delta_{kl}|\mu^{(l)}\rangle. \tag{3.86}$$

Eine beliebige irreduzible Darstellung läßt sich nun eindeutig durch ein $n-1$-Tupel $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}]$ von ganzen Zahlen $\lambda_i \geq 0$ charakterisieren. Das höchste Gewicht der durch λ gegebenen Darstellung lautet

$$\mu^{(\lambda)} = \lambda_1\mu^{(1)} + \lambda_2\mu^{(2)} + \cdots + \lambda_{n-1}\mu^{(n-1)} \tag{3.87}$$

und die Eigenwerte der Diagonaloperatoren R_k im Vektor höchsten Gewichts lauten gerade

$$R_k|\mu^{(\lambda)}\rangle = \lambda_k|\mu^{(\lambda)}\rangle. \tag{3.88}$$

Eine irreduzible SU_n-Darstellung heißt **entartet**, wenn mindestens eines der λ_i verschwindet, entsprechend heißt sie **nichtentartet**, wenn alle λ_i größer als null sind.

Aus (3.88) ergibt sich zusammen mit der Konvention $C_1 = \sum_{k=1}^{n} S_{kk} = 0$

$$S_{kk}|\mu\rangle = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{j}{n}\lambda_{n-j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n}\lambda_j. \tag{3.89}$$

3.2.4 Ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren

In Abschnitt 2.2.3 wurden die Casimir-Operatoren $C_k = \mathrm{Spur}\mathcal{S}^k$ eingeführt ($\mathcal{S}$ ist die Matrix, die aus den Operatoren S_{ij} gebildet wird). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll auch hier $C_1 = \sum_{l=1}^{n} S_{ll} = 0$ gelten (siehe Gleichungen (2.19) und (2.27)). Die Casimir-Operatoren vertauschen mit allen Operatoren S_{ij}, daher müssen sie nach Schurs Lemma in jeder irreduziblen Darstellung proportional zur Identität sein, wobei der Faktor eine Funktion des $n-1$-Tupels λ ist

$$C_k = \hat{c}_k(\lambda)\mathbb{I}. \tag{3.90}$$

Die C_k haben für SU_n eine ähnliche Bedeutung wie das Betragsquadrat des Drehimpulses für die quantenmechanische Drehgruppe SU_2 (siehe Abschnitt 2.2.3). Es sind Konstanten der Bewegung für jeden Hamilton-Operator für n-Niveau-Atome mit kollektiver Kopplung. Als Observable messen sie, zu welcher irreduziblen Darstellung ein Zustand gehört – aus der Kenntnis aller Werte der Casimir-Operatoren C_k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ läßt sich das höchste Gewicht der Darstellung ermitteln.

In einer SU_n-Darstellung λ sind die Gewichte ν im allgemeinen entartet (eine Ausnahme bilden die Fundamentaldarstellungen). Um einen Basiszustand eindeutig durch Quantenzahlen festzulegen, braucht man also zusätzlich zu den Operatoren K_l aus der Cartan-Algebra weitere Operatoren, die mit der Cartan-Algebra vertauschen und deren Quantenzahlen den Zustand eindeutig festlegen können. Diese weiteren Operatoren können nicht linear in S_{ij} sein, weil die Cartan-Algebra bereits die größte abelsche Algebra aus solchen Linearkombinationen ist. Um eine sinnvolle Wahl für solche Operatoren zu finden, betrachtet man eine Kette von Unteralgebren von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \supset \mathfrak{g}l_{n-1}(\mathbb{C}) \supset \cdots \supset \mathfrak{g}l_1(\mathbb{C}). \tag{3.91}$$

Dabei wird $\mathfrak{g}l_k(\mathbb{C})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ durch die Operatoren S_{ij} mit $i, j \leq k$ aufgespannt. Es gilt

$$[K_l, \mathfrak{g}l_k(\mathbb{C})] = 0 \qquad \text{für } l \geq k. \tag{3.92}$$

Daraus ergibt sich eine Kette von Untergruppen

$$SU_n \supset U_{n-1} \supset U_{n-2} \cdots \supset U_1, \tag{3.93}$$

wenn man in $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})$ nur antihermitesche Kombinationen zuläßt und die Exponentialfunktion anwendet. Eine irreduzible SU_n-Darstellung wird im allgemeinen reduzibel, wenn man die Untergruppe $U_{n-1} \subset SU_n$ betrachtet, d.h man kann sie bezüglich U_{n-1} in irreduzible Darstellungen zerlegen. Dieser Prozeß setzt sich fort, bis man bei irreduziblen Darstellungen von U_1 ankommt, die alle eindimensional sind. Man kann zeigen, daß diese Kette von Untergruppen mit ihren irreduziblen Darstellungen einen Gewichtsvektor einer SU_n-Darstellung eindeutig festlegen.
Ein vollständiger Satz von vertauschbaren Operatoren enthält $\frac{n(n-1)}{2}$ Operatoren, deren Quantenzahlen einen Zustand eindeutig festlegen. Das entspricht der Anzahl von klassischen Freiheitsgraden, die eine Dynamik von klassischen SU_n-Observablen generisch hat (siehe Kapitel 5). Ein solcher Satz ist durch die Casimir-Operatoren der Untergruppen U_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$C_j^{(k)} \equiv \mathrm{Spur}\, \mathcal{S}_{(k)}^j \qquad j = 1, 2, \ldots k \tag{3.94}$$

gegeben, wobei die Matrix $\mathcal{S}_{(k)}$ durch Abschneiden nach der k-ten Zeile und Spalte aus $\mathcal{S}$ entsteht. Man beachte, daß $C_1^{(k)}$ im allgemeinen nicht verschwindet, also eine nichttriviale Quantenzahl liefert. Die Anzahl der Casimir-Operatoren $C_j^{(k)}$ ergibt gerade die notwendige Anzahl von $\frac{n(n-1)}{2}$ Operatoren. Außerdem vertauschen sie durch Konstruktion.
Die Casimir-Operatoren $C_j^{(k)}$ für $k = 1, 2, \ldots, n-1$ legen auch das höchste Gewicht der U_k-Darstellung fest, zu der ein Zustand gehört (das höchste Gewicht einer U_k-Darstellung ist durch die k Eigenwerte von $S_{ll}, l = 1, 2, \ldots, k$ im Zustand höchsten Gewichts definiert; der Zustand höchsten Gewichts ist wie bei SU_k-Darstellungen definiert).

3.2.5 Die Gelfand-Zetlin-Basis

Bisher wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C_1 = \sum_{k=1}^n S_{kk} = 0$ gesetzt (siehe 2.2.3). In diesem und im nächsten Abschnitt wird von dieser Konvention abgewichen. Es wird eine irreduzible SU_n-Darstellung betrachtet, die durch das $n-1$-Tupel λ festgelegt ist. In dieser Darstellung setzen wir $C_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k\lambda_k$.
I. M. Gelfand und *M. L. Zetlin* haben ein Schema entworfen, das die Eigenzustände zu den Casimir-Operatoren $C_j^{(k)}$ beschreibt. Ein Basiszustand im Darstellungsraum V_λ wird durch $\frac{n(n+1)}{2}$ Zahlen m_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n; i \leq j)$ beschrieben, die man in das Gelfand-Zetlin-Schema (GZ-Schema)

$$|m\rangle \equiv \left| \begin{matrix} m_{1n} \quad m_{2n} \quad m_{3n} \quad \ldots\ldots m_{nn} \\ m_{1,n-1}\; m_{2,n-1}\; \ldots m_{n-1,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_{12} \;\; m_{22} \\ m_{11} \end{matrix} \right| \tag{3.95}$$

einträgt. Die erste Zeile $m_{1n}, m_{2n}, \ldots, m_{nn}$ eines GZ-Schemas ist für alle Zustände einer irreduziblen SU_n-Darstellung identisch. Sie gibt die Eigenwerte der Operatoren $S_{kk}, k = 1, 2, \ldots, n$ im Zustand $|\mu\rangle$ höchsten Gewichts an

$$S_{kk}|\mu\rangle = m_{kn}|\mu\rangle. \tag{3.96}$$

Das $n-1$-Tupel λ, mit dem eine irreduzible Darstellung charakterisiert wird, erhält man aus den m_{kn} aus den Differenzen

$$\lambda_k = m_{kn} - m_{k+1,n}. \tag{3.97}$$

Zusammen mit dem Wert von $C_1 = \sum_{k=1}^{n} m_{kn}$ ergibt sich die erste Zeile des GZ-Schemas

$$m_{kn} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{n-k} \lambda_l & \text{falls } k > 1 \\ 0 & \text{falls } k = 1. \end{cases} \tag{3.98}$$

Wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben, ist die irreduzible SU_n-Darstellung bezüglich ihrer Untergruppe U_{n-1} reduzibel, man kann sie also als eine Summe von irreduziblen U_{n-1}-Darstellungen ansehen. Für Basisvektoren $|m\rangle$ innerhalb einer vorkommenden U_{n-1}-Darstellung ist die zweite Zeile des GZ-Schemas identisch. Die Werte $m_{1,n-1}, m_{2,n-1}, \ldots, m_{n-1,n-1}$ sind gegeben durch den Zustand höchsten Gewichts $|\mu_{n-1}\rangle$ innerhalb einer U_{n-1}-Darstellung

$$S_{kk}|\mu_{n-1}\rangle = m_{k,n-1}|\mu_{n-1}\rangle \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.99}$$

Die Werte $m_{k,n-1}$ mit $k = 1, \ldots, n-1$ legen die vorkommenden U_{n-1}-Darstellungen eindeutig fest (d.h. jedes höchste Gewicht kommt genau einmal vor). Die erlaubten Werte von $m_{k,n-1}$ sind alle ganzen Zahlen

$$m_{k,n} \geq m_{k,n-1} \geq m_{k+1,n}, \tag{3.100}$$

d.h. $m_{k,n-1}$ liegt zwischen den Werten, die im GZ-Schema eine Zeile darüber liegen. Für die dritte Zeile des GZ-Schemas hält man die Werte der ersten zwei Zeilen fest, d.h. man betrachtet eine U_{n-1}-Darstellung, die jetzt ihrerseits in U_{n-2}-Darstellungen zerfällt. Das setzt sich fort, bis man am unteren Ende des Schemas angelangt ist, d.h. bei den eindimensionalen U_1-Darstellungen, die genau aus einem GZ-Schema $|m\rangle$ mit

$$S_{11}|m\rangle = m_{11}|m\rangle \tag{3.101}$$

bestehen.

In der l-ten Zeile des GZ-Schemas sind die erlaubten (ganzzahligen) Werte von $m_{kl}, k \leq l$ durch die Werte der darüberliegenden Zeile begrenzt

$$m_{k,l-1} \geq m_{kl} \geq m_{k+1,l-1}. \tag{3.102}$$

Da jedes GZ-Schema genau einmal vorkommt, läßt sich damit (im Prinzip) die Dimension einer irreduziblen SU_n-Darstellung abzählen.
Der Zustand höchsten Gewichts $|\mu\rangle$ ist durch das GZ-Schema

$$\left| \begin{array}{c} m_{1n} \quad m_{2n} \quad m_{3n} \quad \ldots\ldots m_{nn} \\ m_{1,n}\ m_{2n}\ \ldots m_{n-1,n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_{1n}\ \ m_{2n} \\ m_{1n} \end{array} \right| \tag{3.103}$$

gegeben.

3.2.6 Die Matrixelemente der Leiteroperatoren

Für zwei GZ-Basiszustände $|m\rangle$ und $|m'\rangle$ lassen sich die Matrixelemente $\langle m'|S_{kl}|m\rangle$ explizit ausrechnen. Dabei reicht es aus, sich auf die Operatoren $S_{kk}, k = 1, 2, \ldots, n$ und $S_{k-1,k}, k = 2, 3, \ldots, n$ zu beschränken. Die Matrixelemente von $S_{k,k-1}$ ergeben sich dann aus

$$\langle m'|S_{k,k-1}|m\rangle = \overline{\langle m|S_{k-1,k}|m'\rangle}. \tag{3.104}$$

Alle restlichen Matrizen lassen sich als (mehrfache) Kommutatoren darstellen, zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} S_{k-2,k} &= [S_{k-2,k-1}, S_{k-1,k}] \\ S_{k-3,k} &= [S_{k-3,k-2}, [S_{k-2,k-1}, S_{k-1,k}]] . \end{aligned} \tag{3.105}$$

Die Matrizen von S_{kk} sind diagonal

$$S_{kk}|m\rangle = (r_k - r_{k-1})\,|m\rangle \tag{3.106}$$

mit

$$r_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0 \\ \sum_{j=1}^{k} m_{jk} & \text{für } k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{3.107}$$

Die Wirkung von $S_{k-1,k}$ ist nicht diagonal

$$S_{k-1,k}|m\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} b^j_{k-1}(m)|m^j_{k-1}\rangle. \tag{3.108}$$

Dabei ist $|m^j_{k-1}\rangle$ das GZ-Schema, das sich aus $|m\rangle$ ergibt, wenn man das Element $m_{j,k-1}$ in der $k-1$-sten Zeile durch $m_{j,k-1}+1$ ersetzt. Dabei können im Prinzip unerlaubte GZ-Schemen entstehen – in diesem Fall verschwindet das Matrixelement $b^j_{k-1}(m)$. Die nichtverschwindenden Matrixelemente lauten

$$\begin{aligned} b^j_{k-1}(m) &= \langle m^j_{k-1}|S_{k-1,k}|m\rangle \\ &= \left[-\frac{\prod_{i=1}^{k}\left(l_{ik}-l_{j,k-1}\right)\prod_{i=1}^{k-2}\left(l_{i,k-2}-l_{j,k-1}-1\right)}{\prod_{i\neq j}\left(l_{i,k-1}-l_{j,k-1}\right)\left(l_{i,k-1}-l_{j,k-1}-1\right)}\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{3.109}$$

mit

$$l_{ik} = m_{ik} - i \tag{3.110}$$

und der Konvention, daß die Produkte in (3.109) gleich eins gesetzt werden, sobald keine Faktoren auftreten.

Um zurück zu der Konvention $C_1 = \sum_{k=1}^n S_{kk} = 0$ zu gelangen, müssen die Diagonaloperatoren gemäß

$$S_{kk} \longmapsto S'_{kk} = S_{kk} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\lambda_j \mathbb{I} \tag{3.111}$$

verschoben werden. Die Striche an S'_{kk} werden im folgenden weggelassen. Durch diese Ersetzung werden die Matrixelemente (3.106) entsprechend verschoben

$$S_{kk}|m\rangle = \left(r_k - r_{k-1} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j\lambda_j\right)|m\rangle. \tag{3.112}$$

Beispiele: SU_2 und SU_3

Die SU_2-Darstellungen werden üblicherweise durch die Quantenzahl j charakterisiert, die das Betragsquadrat des Drehimpulses angibt

$$J^2 = 2C_2 = j\,(j+1)\,\mathbb{I}. \tag{3.113}$$

In Abschnitt 3.2.3 wurde die gleiche irreduzible Darstellung durch den Eigenwert $\lambda_1 = 2j$ des Operators $K_1 = 2J_z$ im Zustand höchsten Gewichtes charakterisiert. Für die Basiszustände einer irreduziblen SU_2-Darstellung ist die Schreibweise $|m;j\rangle$ mit

$$\begin{aligned} J_z|m;j\rangle &= m|m;j\rangle \\ J^2|m;j\rangle &= j(j+1)|m;j\rangle \end{aligned} \tag{3.114}$$

und $m = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$ üblich. Die Zustände $|m;j\rangle$ lassen sich als GZ-Schema

$$|m;j\rangle = \left| \begin{array}{cc} 2j & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{j+m} \end{array} \right| \tag{3.115}$$

schreiben. Die in (3.109) angegebenen Matrixelemente stimmen dann mit den bekannten Werten von $\langle m+1;j|J_+|m;j\rangle$ überein.
Für SU_3 soll die Wirkung aller Operatoren S_{ij} explizit angegeben werden, wie sie aus Gleichung (3.109) folgen. Für die Diagonaloperatoren ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} S_{11}|m\rangle &= \left(m_{11} - \tfrac{\lambda_1+2\lambda_2}{3}\right)|m\rangle \\ S_{22}|m\rangle &= \left(m_{12} + m_{22} - m_{11} - \tfrac{\lambda_1+2\lambda_2}{3}\right)|m\rangle \\ S_{33}|m\rangle &= \left(\tfrac{2\lambda_1+4\lambda_2}{3} - m_{12} - m_{22}\right)|m\rangle. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Die Wirkung der Absteigeoperatoren auf ein GZ-Schema lautet

$$\begin{aligned} S_{12}|m\rangle &= \sqrt{(m_{12}-m_{11})(1+m_{11}-m_{22})} \left| \begin{array}{c} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}\ \ m_{22} \\ m_{11}+1 \end{array} \right| \\[2ex] S_{13}|m\rangle &= \sqrt{\tfrac{(m_{13}-m_{12})(1+m_{12}-m_{23})(2+m_{23}-m_{33})(1+m_{11}-m_{22})}{(1+m_{12}-m_{22})(2+m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}+1\ \ m_{22} \\ m_{11}+1 \end{array} \right| - \\ &\quad \sqrt{\tfrac{(m_{23}-m_{22})(m_{12}-m_{11})(1+m_{13}-m_{22})(1+m_{22}-m_{33})}{(m_{12}-m_{22})(1+m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}\ \ m_{22}+1 \\ m_{11}+1 \end{array} \right| \\[2ex] S_{23}|m\rangle &= \sqrt{\tfrac{(m_{13}-m_{12})(1+m_{12}-m_{23})(2+m_{12}-m_{33})(1+m_{12}-m_{11})}{(1+m_{12}-m_{22})(2+m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}+1\ \ m_{22} \\ m_{11} \end{array} \right| + \\ &\quad \sqrt{\tfrac{(1+m_{13}-m_{22})(m_{23}-m_{22})(1+m_{22}-m_{33})(m_{11}-m_{22})}{(1+m_{12}-m_{22})(m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\ \ m_{23}\ \ m_{33} \\ m_{12}\ \ m_{22}+1 \\ m_{11} \end{array} \right| . \end{aligned} \tag{3.117}$$

Die Matrixelemente der Aufsteigeoperatoren sind durch hermitesche Konjugation der Matrizen der Absteigeoperatoren zu erhalten. Die Wirkung der Aufsteigeoperatoren auf ein GZ-Schema lautet somit

$$
\begin{aligned}
S_{21}|m\rangle &= \sqrt{(1+m_{12}-m_{11})(m_{11}-m_{22})} \left| \begin{array}{c} m_{13}\;\; m_{23}\;\; m_{33} \\ m_{12}\;\; m_{22} \\ m_{11}-1 \end{array} \right| \\[2ex]
S_{31}|m\rangle &= \sqrt{\tfrac{(m_{13}-m_{12})(2+m_{12}-m_{23})(2+m_{23}-m_{33})(m_{11}-m_{22})}{(m_{12}-m_{22})(1+m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\;\; m_{23}\;\; m_{33} \\ m_{12}-1\;\; m_{22} \\ m_{11}-1 \end{array} \right| - \\
&\quad \sqrt{\tfrac{(1+m_{23}-m_{22})(1+m_{12}-m_{11})(2+m_{13}-m_{22})(m_{22}-m_{33})}{(1+m_{12}-m_{22})(2+m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\;\; m_{23}\;\; m_{33} \\ m_{12}\;\; m_{22}-1 \\ m_{11}-1 \end{array} \right| \qquad (3.118) \\[2ex]
S_{32}|m\rangle &= \sqrt{\tfrac{(1+m_{13}-m_{12})(m_{12}-m_{23})(1+m_{12}-m_{33})(m_{12}-m_{11})}{(m_{12}-m_{22})(1+m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\;\; m_{23}\;\; m_{33} \\ m_{12}-1\;\; m_{22} \\ m_{11} \end{array} \right| + \\
&\quad \sqrt{\tfrac{(2+m_{13}-m_{22})(1+m_{23}-m_{22})(m_{22}-m_{33})(1+m_{11}-m_{22})}{(2+m_{12}-m_{22})(1+m_{12}-m_{22})}} \left| \begin{array}{c} m_{13}\;\; m_{23}\;\; m_{33} \\ m_{12}\;\; m_{22}-1 \\ m_{11} \end{array} \right| .
\end{aligned}
$$

Die GZ-Schemen für SU_3 sind Eigenzustände zu den Operatoren

$$
\begin{array}{lll}
Y & = \frac{S_{11}+S_{22}-2S_{33}}{3} & (\text{„Hyperladung “}) \\
T_3 & = \frac{S_{11}-S_{22}}{2} & (\text{„3-Komponente des Isospin“}) \\
T^2 & = T_3(T_3+1)+S_{12}S_{21} & (\text{„Quadrat des Isospin“}).
\end{array}
\qquad (3.119)
$$

mit Eigenwerten

$$
\begin{array}{rcrl}
Y|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle & = & y & |y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle \\
T_3|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle & = & t_3 & |y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle \\
T^2|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle & = & t(t+1) & |y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle,
\end{array}
\qquad (3.120)
$$

wobei die Schreibweise

$$
|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle \equiv \left| \begin{array}{c} \lambda_1+\lambda_2 \qquad \lambda_2 \qquad 0 \\ t+\frac{y}{2}+\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} \qquad -t+\frac{y}{2}+\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} \\ t_3+\frac{y}{2}+\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} \end{array} \right| \qquad (3.121)
$$

eingeführt wurde. Die beiden Casimir-Operatoren C_2 und C_3 haben die Werte

$$\begin{aligned}
C_2|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle &= \tfrac{2}{3}\,(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2+3\lambda_1+3\lambda_2)\,|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle \\
C_3|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle &= \tfrac{1}{9}\,(2\lambda_1^3-2\lambda_2^3+_3\lambda_1^2\lambda_2+18\lambda_1^2+9\lambda_1\lambda_2+ \\
&\quad 36\lambda_1+18\lambda_2)\,|y,t_3,t;\lambda_1,\lambda_2\rangle.
\end{aligned} \tag{3.122}$$

4. Kohärente Zustände für die Lie-Gruppe SU_n

Kohärente Zustände für den harmonischen Oszillator wurden von *E. Schrödinger* entdeckt [14]. Die kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators sind durch Gauß-förmige Wellenfunktionen gegeben, deren Form sich in der Zeit nicht ändert und deren Erwartungswert den klassischen Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators gehorcht. Ihre Bedeutung als klassische Zustände wird durch ihre Eigenschaft unterstrichen, daß sie die Heisenbergsche Unschärfe $\Delta p \Delta q$ minimieren. Die allgemeine Bedeutung und die Eigenschaften kohärenter Zustände wurden zuerst von *R. Glauber* [15,16], *J. R. Klauder* [17,18] und *E. G. G. Sudarshan* [19] erkannt. Die Eigenschaften der kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators sind eng mit der Heisenberg-Weyl-Gruppe verknüpft, deren Generatoren $a, a^\dagger$ und $\mathbb{I}$ die Vertauschungsrelationen $[a, a^\dagger] = \mathbb{I}$ und $[a, \mathbb{I}] = [a^\dagger, \mathbb{I}] = 0$ erfüllen.

Für semiklassische und quantenmechanische Untersuchungen der Dynamik der Observablen a und $a^\dagger$ wurden viele Methoden entwickelt, die auf kohärente Zustände zurückgreifen [20–22]. Dabei zeigt sich immer wieder, daß kohärente Zustände eine Verbindung zwischen der quantenmechanischen Dynamik und der zugehörigen klassischen Dynamik liefern – also das Komplementaritätsprinzip beleuchten. Mithilfe kohärenter Zustände können beliebigen quantenmechanische Zustand als Quasiwahrscheinlichkeitsverteilung im Phasenraum dargestellt werden.

Die klassischen kohärenten Zustände wurden mehrfach verallgemeinert – so auch auf Observable, die andere Vertauschungsrelationen erfüllen als a und $a^\dagger$ [25,29–31]. Die Eigenschaften dieser verallgemeinerten kohärenten Zustände sind eng mit einer Lie-Gruppe G verknüpft, deren Erzeuger die Observablen des Systems bilden.

Im Falle von n-Niveau-Atomen sind die kohärenten Zustände mit der Lie-Gruppe SU_n verknüpft, und die reellen Observablen erfüllen die Vertauschungsrelation ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{su}_n$. Sie sind klassische Zustände, in dem Sinn, daß auch sie die Heisenbergsche Unschärfe minimieren. Sie sind übervollständig und erlauben die Definition eines klassischen Grenzfalles für die Dynamik. Die allgemeinen Eigenschaften dieser (und vieler anderer) kohärenter Zustände sind im Buch von *A. Perelomov* [25] zusammengefaßt (siehe auch [28,29,35–37]). In diesem Kapitel werden explizite Darstellungen, Formeln und Eigenschaften der kohärenten Zustände von SU_n aufgeführt und teilweise hergeleitet werden (für kohärente SU_3-Zustände findet man die Ergebnisse recht ausführlich in [77,88]).

In Abschnitt 4.1 werden kohärente Zustände in irreduziblen SU_n-Darstellungen definiert (siehe Abschnitt 4.1.1). Bei der Parametrisierung kohärenter Zustände durch untere Dreiecksmatrizen muß zwischen nichtentarteten (Abschnitt 4.1.2) und entarteten Darstellungen (Abschnitt 4.1.3) unterschieden werden.

In Abschnitt 4.2 werden die Eigenschaften kohärenter Zustände behandelt. Es werden explizite Formeln für das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände (Abschnitt 4.2.1), für die Wirkung der Leiteroperatoren auf kohärente Zustände (Abschnitt 4.2.2), die Matrixelemente der Leiteroperatoren zwischen kohärenten Zuständen (Abschnitt 4.2.3) und die Auflösung des Einheitsoperators als ein Integral über kohärente Zustände angegeben (Abschnitt 4.2.4). Für die Fälle SU_2 und SU_3 werden diese Eigenschaften in einer Formelsammlung in Abschnitt 4.2.5 zusammengefaßt. In Abschnitt 4.2.6 wird die Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände als eine spezielle SU_n-Bahn im projektiven Raum vorgestellt.

Die kohärenten Zustände bilden den Phasenraum einer klassischen Dynamik, d.h. sie besitzen eine symplektische Struktur, die eng mit der Lie-Gruppe SU_n bzw. mit den Observablen S_{ij} (also der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$) verknüpft ist [25,35–37]. Die quantenmechanische Dynamik läßt sich unter anderem durch die Wigner- oder durch die Husimi-Funktion vollständig durch die Dynamik von Quasiwahrscheinlichkeitsdichten auf diesem Phasenraum beschreiben, was zu vielen Einsichten über quantenmechanische Wellenfunktionen im semiklassischen Grenzfall geführt hat [89–92]. Pfadintegrale auf diesem Phasenraum ermöglichen die Berechnung von Propagatoren zwischen kohärenten Zuständen, wobei die Wirkung eines Pfades durch eine klassische Hamilton-Funktion und die symplektische Struktur der kohärenten Zustände festgelegt ist [38,93–103] (hierauf wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen).

In Abschnitt 4.3 wird die symplektische Struktur auf der Mannigfaltigkeit aller kohärenten Zustände vorgestellt. Zunächst wird jedoch in Abschnitt 4.3.1 in den Zusammenhang zwischen symplektischer Struktur und Poisson-Klammern auf einem klassischen Phasenraum und in Abschnitt 4.3.2 in die symplektische Struktur eines Hilbert-Raumes (und des projektiven Raumes) eingeführt. In Abschnitt 4.3.3 wird die symplektische Struktur auf den kohärenten Zuständen dargestellt und ihre Verträglichkeit mit einer naheliegenden algebraischen Definition von Poisson-Klammern für „klassische“ SU_n-Observable bewiesen. In Abschnitt 4.3.4 werden die Formeln für die symplektische Struktur und die Poisson-Klammern bei SU_2 und SU_3 explizit angegeben. In Abschnitt 4.3.5 folgt die Darstellung eines Verfahrens, um reelle kanonische Koordinaten auf den Phasenräumen der kohärenten Zustände zu berechnen. Für SU_2 und SU_3 wird dieses Verfahren explizit durchgeführt.

4.1 Die Definition kohärenter Zustände

4.1.1 Allgemeine kohärente Zustände für die Lie-Gruppe SU_n

Kohärente Zustände für die Lie-Gruppe SU_n sind eine spezielle übervollständige Basis des Hilbert-Raums $\mathcal{H}_\lambda$ einer irreduziblen SU_n-Darstellung, die durch das $n-1$-Tupel λ charakterisiert wird. Normierte kohärente Zustände haben die Form

$$|g\rangle = \mathcal{D}(g)|\mu\rangle, \tag{4.1}$$

wobei $|\mu\rangle \in \mathcal{H}_\lambda$ der (normierte) Zustand höchsten Gewichts ($\langle\mu|\mu\rangle = 1$) und $\mathcal{D}(g)$ der unitäre Operator ist, der eine SU_n-Matrix g im Hilbert-Raum $\mathcal{H}_\lambda$ darstellt.
Man kann zeigen, daß die kohärenten Zustände eine SU_n-invariante Unschärferelation minimieren, die durch den Wert

$$\Delta C_2 = \left\langle \sum_{k,l=1}^{n} S_{kl} S_{lk} \right\rangle - \sum_{k,l=1}^{n} \langle S_{kl}\rangle\langle S_{lk}\rangle \tag{4.2}$$

charakterisiert ist. Im folgenden soll eine sinnvolle Parametrisierung kohärenter Zustände gegeben werden. Dabei muß man den nichtentarteten Fall, in dem alle Elemente λ_i von λ von null verschieden sind, vom entarteten Fall unterscheiden, bei dem einzelne oder mehrere λ_i verschwinden.

4.1.2 Der nichtentartete Fall

In einer nichtentarteten SU_n-Darstellung sind alle Elemente λ_i von λ von null verschieden. Die kohärenten Zustände sind dann durch untere Dreiecksmatrizen $\gamma \in Z_n^-$ parametrisiert. Man definiert zunächst nichtnormierte kohärente Zustände

$$||\gamma\rangle := \mathcal{D}(\gamma)|\mu\rangle = \mathcal{N}^- \left[\prod_{k>l} \exp\left(\gamma_{kl} S_{kl}\right)\right] |\mu\rangle \tag{4.3}$$

mit der durch (3.31) gegebenen Operatorordnung $\mathcal{N}^-$. Die Zustände $||\gamma\rangle$ sind nicht normiert, weil $\mathcal{D}(\gamma)$ kein unitärer Operator ist. Sie sind analytische Funktionen der Matrixelemente γ_{kl}, was oft techschnisch ausgenutzt werden kann (z.B. bei der Berechnung semiklassischer Propagatoren zwischen kohärenten Zuständen).
Normierte kohärente Zustände wurden in Gleichung (4.1) definiert. Benutzt man die Gauß-Zerlegung zur Parametrisierung der Gruppenelemente $g \in SU_n$ (siehe Abschnitt 3.1.6), d.h. $g(\gamma;\phi) = \gamma\, d_\phi(\gamma;\phi)\, \beta^{-1}(\gamma;\phi)$, ist es leicht zu zeigen, daß die kohärenten Zustände $|g\rangle$ und $||\gamma\rangle$ bis auf einen Phasenfaktor und die Normierung

übereinstimmen

$$\begin{aligned}|g(\gamma;\phi)\rangle &= \mathcal{D}(\gamma)\,\mathcal{D}(d_\phi(\gamma;\phi))\,\mathcal{D}(\beta^{-1}(\gamma;\phi))|\mu\rangle \\ &= \mathcal{D}(\gamma)\,\mathcal{D}(d_\phi(\gamma;\phi))|\mu\rangle \\ &= \mathcal{D}(\gamma)\,\left\{\prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma,\overline{\gamma})^{-\lambda_k/2} e^{-i\phi_k\lambda_k}\right\}|\mu\rangle \\ &= \left\{\prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma,\overline{\gamma})^{-\lambda_k/2} e^{-i\phi_k\lambda_k}\right\}||\gamma\rangle.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Der Übergang von der ersten zur zweiten Zeile benutzt die Eigenschaft $S_{kl}|\mu\rangle = 0$ für $k < l$ des Zustands höchsten Gewichts. Von der zweiten zur dritten Zeile wurde $R_k|\mu\rangle = S_{kk} - S_{k+1,k+1}|\mu\rangle = \lambda_k|\mu\rangle$ benutzt.
Da $|g\rangle$ auf eins normiert ist, ergibt sich als Normquadrat von $||\gamma\rangle$

$$\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma}) \equiv \langle\gamma||\gamma\rangle = \prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma,\overline{\gamma})^{\lambda_k}. \tag{4.5}$$

Die Funktion $\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})$ ist eine erzeugende Funktion für die viele Eigenschaften von kohärenten Zuständen und spielt besonders für deren symplektische Struktur eine große Rolle. Mithilfe des zentralen Umordnungstheorems kann $\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})$ auch direkt aus der Definition (4.3) gewonnen werden.
Da sich $|g(\gamma;\phi = 0)\rangle$ und $|g(\gamma;\phi \neq 0)\rangle$ nur um einen Phasenfaktor unterscheiden, ist es sinnvoll, in der Definition der kohärenten Zustände einen Phasenfaktor festzulegen, indem man

$$|\gamma\rangle = |g(\gamma;0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}}||\gamma\rangle \tag{4.6}$$

setzt. Da sich nicht alle SU_n-Matrizen Gauß-zerlegen lassen, gibt es eine Reihe von kohärenten Zuständen $|g\rangle$, die nicht bis auf einen Phasenfaktor mit einem Zustand $|\gamma\rangle$ übereinstimmen. Solche kohärenten Zustände haben das Maß null bezüglich des Haar-Maßes von SU_n. Man kann alle diese Zustände wieder einfangen, wenn man die Beträge der Matrixelemente γ_{ij} mit festen Verhältnissen $\frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{i'j'}}$ nach unendlich gehen läßt.
Die Untergruppe von SU_n, die von Matrizen der Form $g(\gamma = 0;\phi)$ aufgespannt wird, ändert nur die Phase des Zustands höchsten Gewichts. Sie heißt **Isotropiegruppe** $I_{|\mu\rangle}$ von $|\mu\rangle$ und ist äquivalent zum $n-1$-fachen kartesischen Produkt von U_1

$$I_{|\mu\rangle} \equiv (U_1)^{n-1} = U_1 \times U_1 \times \cdots \times U_1. \tag{4.7}$$

Die Isotropiegruppe ist für alle kohärenten Zustände äquivalent: für $|g\rangle$ ändern alle Matrizen der Form $g\,h\,g^{-1}$ und $h \in I_{|\mu\rangle}$ nur die Phase von $|g\rangle$ – d.h. $I_{|g\rangle} = g\,I_{|\mu\rangle}\,g^{-1}$ ist die Isotropiegruppe von $|g\rangle$.

Als Mannigfaltigkeit ist die Menge aller (verschiedenen) kohärenten Zustände Γ äquivalent zur Restklasse

$$\Gamma \equiv SU_n/(U_1)^{n-1} = \overline{Z_n^-} = \overline{GL_n(\mathbb{C})/B_n^+}, \tag{4.8}$$

wobei mit $\overline{Z_n^-}$ der Abschluß von Z_n^- durch Punkte im Unendlichen ($|\gamma_{ij}| \longrightarrow \infty$) bezeichnet wird. Die Dimension dieser Restklasse ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \Gamma = \dim_{\mathbb{R}} SU_n/(U_1)^{n-1} = \dim_{\mathbb{R}} SU_n - (n-1)\dim_{\mathbb{R}} U_1 = n(n-1). \tag{4.9}$$

4.1.3 Der entartete Fall

Für entartete irreduzible Darstellungen ist es notwendig, zunächst die Isotropiegruppe $I_{|\mu\rangle}$ des Zustands höchsten Gewichts zu bestimmen, denn diese bestimmt die Dimension der Mannigfaltigkeit aller kohärenten Zustände.

Die Isotropiegruppe in einer entarteten Darstellung ist größer als im nichtentarteten Fall. Zunächst soll angenommen werden, daß genau ein Element $\lambda_k = 0$ von λ verschwindet ($\lambda_i > 0$ für $i \neq k$). Die Operatoren $R_k = S_{kk} - S_{k+1,k+1}$, $S_{k,k+1}$ und $S_{k+1,k}$ erzeugen eine SU_2-Untergruppe von SU_n. Der Zustand höchsten Gewichts $|\mu\rangle$ ist dann auch ein Zustand höchsten Gewichts für diese SU_2-Untergruppe ($S_{k,k+1}|\mu\rangle = 0$) und es gilt

$$\begin{aligned} & R_k|\mu\rangle = \lambda_k|\mu\rangle && = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & [S_{k,k+1}, S_{k+1,k}]|\mu\rangle && = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & S_{k,k+1}S_{k+1,k}|\mu\rangle && = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Aus der letzten Zeile folgt aber

$$S_{k+1,k}|\mu\rangle = 0. \tag{4.11}$$

Dies kann man auch direkt aus $R_k|\mu\rangle = 0$ sehen, denn das bedeutet, daß $|\mu\rangle$ das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung der SU_2-Untergruppe mit $j = 0$ ist (also die triviale eindimensionale Darstellung). Es gibt also eine SU_2-Untergruppe, die den Zustand höchsten Gewichts invariant läßt. Die Isotropiegruppe von $|\mu\rangle$ lautet

$$I_{|\mu\rangle} \equiv SU_2 \times (U_1)^{n-2}. \tag{4.12}$$

Im allgemeinen entarteten Fall verschwinden einige λ_i. Die Anzahl und Position der verschwindenden λ_i im $n-1$-Tupel λ bestimmen eindeutig die Isotropiegruppe des Zustand höchsten Gewichts. Ist m ($0 \leq m \leq n-1$) die Anzahl der verschwindenden λ_i, können die Indizes der verschwindenden λ_i zu einem m-Tupel

$$j = (j_1, j_2, \ldots, j_m) \qquad \text{mit } 0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_m < n \tag{4.13}$$

zusammengefaßt werden. Es gilt also

$$\lambda_{j_k} = 0 \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots, m. \tag{4.14}$$

Um die Isotropiegruppe $I^j_{|\mu\rangle}$ des Zustands höchsten Gewichts zu bestimmen, betrachte man zunächst den Fall $m = n - 1$ ($j = (1, 2, \ldots, n-1)$), d.h. alle λ_i sind null. Die irreduzible SU_n-Darstellung ist dann die triviale eindimensionale Darstellung, in der alle Matrizen $g \in SU_n$ durch den Einheitsoperator dargestellt werden. Die Isotropiegruppe ist in diesem einfachen Fall die gesamte Gruppe $I^j_{|\mu\rangle} \equiv SU_n$. Für $m = 0$ ist man im oben beschriebenen nichtentarteten Fall $I_{|\mu\rangle} \equiv (U_1)^{n-1}$, und für $m = 1$ ist $I_{|\mu\rangle} \equiv SU_2 \times (U_1)^{n-2}$ (siehe Gleichung (4.12)). Für $m > 1$ läßt sich die Isotropiegruppe leicht abzählen. Jedes $\lambda_i \neq 0$ trägt eine Untergruppe U_1 bei. Also hat die Isotropiegruppe einen Faktor $(U_1)^{n-1-m}$. Als nächstes muß man die Anzahl der isolierten λ_{j_k} suchen, d.h. $\lambda_{j_k} = 0$ und $\lambda_{j_k \pm 1} \neq 0$. Nach dem oben für $m = 1$ gegebenen Argument trägt jedes isolierte λ_{j_k} einen Faktor SU_2 zur Isotropiegruppe bei. Die nichtisolierten λ_{j_k} lassen sich zu Gruppen der Länge s zusammenfassen, so daß $\lambda_{j_k - 1} \neq 0$, $\lambda_{j_k} = \lambda_{j_k+1} = \cdots = \lambda_{j_k+s-1} = 0$ und $\lambda_{j_k+s} \neq 0$. Jede Gruppe der Länge s trägt einen Faktor SU_{s+1} bei. Damit läßt sich $I^j_{|\mu\rangle}$ vollständig aus den Indizes $j = (j_1, \ldots, j_m)$ bestimmen. Zum Beispiel gilt für $n = 6$

$$\begin{aligned} I^{(1,2,4,5)}_{|\mu\rangle} &= U_1 \times SU_3 \times SU_3 \\ I^{(2,3,4)}_{|\mu\rangle} &= U_1 \times U_1 \times SU_4 \\ I^{(1,3,5)}_{|\mu\rangle} &= U_1 \times U_1 \times SU_2 \times SU_2 \times SU_2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände Γ^j ist topologisch äquivalent zur Restklassenmenge

$$\Gamma^j \equiv SU_n / I^j_{|\mu\rangle} \tag{4.16}$$

und hat die Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} \Gamma^j = \dim_{\mathbb{R}} SU_n - \dim_{\mathbb{R}} I^j_{|\mu\rangle}. \tag{4.17}$$

Sie wird von Untergruppen $Z^-_{n,j} \subset Z^-_n$ der Gruppe der unteren Dreiecksmatrizen parametrisiert, die aus Z^-_n enstehen, indem einige Matrixelemente null gesetzt werden.[1]

Die verschwindenden Matrixelemente können leicht angegeben werden. Für jedes isolierte $\lambda_{j_k} = 0$ setzt man $\gamma_{j_k+1, j_k} = 0$. Für jedes isolierte Paar $\lambda_{j_k} = \lambda_{j_k+1} = 0$ setzt

---

[1] Man nennt diese Gruppen **parabolische Gruppen**.

man $\gamma_{j_k+1,j_k} = \gamma_{j_k+2,j_k} = \gamma_{j_k+2,j_k+1} = 0$. Entsprechend setzt man für eine beliebige isolierte Gruppe der Länge s alle Matrixelemente null, deren Indizes mit jenen der Absteigealgebra der Untergruppe SU_{s+1} zusammenfallen, die den entsprechenden Faktor zur Isotropiegruppe $I^j_{|\mu\rangle}$ liefert.
Am leichtesten läßt sich dieses Prinzip an einigen Beispielen erkennen. Ein paar Beispiele für parabolische Gruppen $Z^-_{n,j}$ sind

$$\begin{aligned}
Z^-_{6,(1,2,4,5)} &= \left\{ \gamma \in Z^-_n : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
Z^-_{6,(2,3,4)} &= \left\{ \gamma \in Z^-_n : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{51} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} & \gamma_{64} & \gamma_{65} & 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad (4.18) \\
Z^-_{6,(1,3,5)} &= \left\{ \gamma \in Z^-_n : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & 1 & 0 \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} & \gamma_{64} & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} .
\end{aligned}$$

Die Gruppeneigenschaften sind leicht nachzurechnen.
Ein kohärenter Zustand in einer entarteten Darstellung λ ist genauso definiert wie im nichtentarteten Fall, nur daß die Matrizen γ auf $Z^-_{n,j}$ eingeschränkt werden. Die Gleichung (4.5) bleibt auch für den entarteten Fall richtig, wenn man die entsprechenden Matrixelemente γ_{ij} null setzt. Die erzeugende Funktion $\mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma})$ hat dann entsprechend weniger Faktoren ($f_k^{\lambda_k} = 1$ für $\lambda_k = 0$) und hängt von weniger Matrixelementen ab. Viele der folgenden Eigenschaften von kohärenten Zuständen sind sowohl für den entarteten wie den nichtentarteten Fall gültig; eine besondere Behandlung verlangt vor allem die Übervollständigkeitsrelation (Auflösung des Einheitsoperators).

Entartete irreduzible SU_n-Darstellungen spielen in der Physik von n-Niveau-Atomen eine wichtige Rolle, da der Grundzustand einer Anzahl von λ_1 n-Niveau-Atomen bezüglich des wechselwirkungsfreien Hamilton-Operators $H = \sum_{k=1}^n \epsilon_k S_{kk}$

mit $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \cdots > \epsilon_n$ den Zustand niedrigsten Gewichts zu einer $\lambda = (\lambda_1; 0; \ldots; 0)$-Darstellung bildet. Alle Zustände dieser Darstellung sind vollständig symmetrisch unter Austausch der Atome.

4.2 Die Eigenschaften kohärenter Zustände

4.2.1 Das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände

Das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände $||\gamma'\rangle$ und $||\gamma\rangle$ läßt sich mit dem zentralen Umordnungstheorem (3.41) direkt berechnen.

$$\langle\gamma'||\gamma\rangle = \mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma'}), \tag{4.19}$$

wobei $\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma'})$ aus $\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})$ durch die Ersetzung $\overline{\gamma}\mapsto\overline{\gamma'}$ entsteht, was einer analytischen Fortsetzung entspricht. Für normierte Zustände ergibt sich entsprechend

$$\langle\gamma'|\gamma\rangle = \frac{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma'})}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma',\overline{\gamma'})\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}}. \tag{4.20}$$

4.2.2 Die Wirkung von SU_n und den Leiteroperatoren S_{ij}

Nach Definition ist für jede Matrix $g\in SU_n$ der Zustand $\mathcal{D}(g)|\gamma\rangle$ bis auf einen Phasenfaktor gleich einem kohärent Zustand $|\gamma''\rangle$. Den Phasenfaktor und den neuen kohärenten Zustand erhält man aus den Gruppenmultiplikationsregeln (3.55). Ist $g(\gamma'';\phi'') = g(\gamma';\phi')g(\gamma;\phi=0)$, dann gilt in nichtentarteten Darstellungen

$$g(\gamma';\phi')|\gamma\rangle = \exp\left(i\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\phi_{k''}\right)|\gamma''\rangle. \tag{4.21}$$

In entarteten Darstellungen wird γ aus der parabolischen Gruppe $Z^-_{n,j}$ gewählt, dann ist γ'' aber im allgemeinen keine Matrix aus $Z^-_{n,j}$. Die Matrix γ'' läßt sich aber einfach zerlegen

$$\gamma'' = \gamma''_j\gamma''_{inv}. \tag{4.22}$$

Hier ist $\gamma''_j\in Z^-_{n,j}$ eindeutig und γ''_{inv} ist eine untere Dreiecksmatrix, die den Zustand höchsten Gewichts invariant läßt $\mathcal{D}(\gamma''_{inv})|\mu\rangle = |\mu\rangle$ (also ohne Phasenfaktor). Die Gleichung (4.21) ist dann entsprechend abzuändern

$$g(\gamma';\phi')|\gamma\rangle = \exp\left(i\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\phi_{k''}\right)|\gamma''_j\rangle. \tag{4.23}$$

Die Leiteroperatoren wirken wie Differentialoperatoren auf kohärente Zustände

$$\begin{aligned} S_{kl}|\gamma\rangle &= D_{kl}(\gamma,\overline{\gamma},\tfrac{\partial}{\partial\gamma})|\gamma\rangle \\ S_{kl}||\gamma\rangle &= d_{kl}(\gamma,\tfrac{\partial}{\partial\gamma})||\gamma\rangle. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Man beachte, daß sich die Reihenfolge der Differentialoperatoren gegenüber den Leiteroperatoren umdreht

$$\begin{aligned} S_{kl}S_{k'l'}|\gamma\rangle &= D_{k'l'}(\gamma,\overline{\gamma},\tfrac{\partial}{\partial\gamma})D_{kl}(\gamma,\overline{\gamma},\tfrac{\partial}{\partial\gamma})|\gamma\rangle \\ S_{kl}S_{k'l'}||\gamma\rangle &= d_{k'l'}(\gamma,\tfrac{\partial}{\partial\gamma})d_{kl}(\gamma,\tfrac{\partial}{\partial\gamma})||\gamma\rangle \end{aligned} \tag{4.25}$$

und daß d_{kl} nicht von $\overline{\gamma}$ abhängt. Die Differentialoperatoren $d_{kl}(\gamma,\frac{\partial}{\partial\gamma})$ lassen sich explizit berechnen

$$d_{kl} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\gamma_{kl}} + \sum_{j=1}^{l-1}\gamma_{lj}\frac{\partial}{\partial\gamma_{kj}} & \text{für } k > l \\ \\ \sum_{j=1}^{k-1}\gamma_{kj}\frac{\partial}{\partial\gamma_{kj}} - \sum_{j=k+1}^{n}\gamma_{jk}\frac{\partial}{\partial\gamma_{jk}} + \\ + \sum_{j=1}^{n-k}\frac{j}{n}\lambda_{n-j} - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{n}\lambda_j & \text{für } k = l \\ \\ \sum_{j=1}^{k-1}\gamma_{k+1,j}\frac{\partial}{\partial\gamma_{kj}} - \\ - \sum_{j=k+2}^{n}\gamma_{jk}\frac{\partial}{\partial\gamma_{j,k+1}} - \\ -\gamma_{k+1,k}^2\frac{\partial}{\partial\gamma_{k+1,k}} + \gamma_{k+1,k}\lambda_k - & \text{für } l = k+1 \\ - \sum_{j=k+2}^{n}\gamma_{k+1,k}\gamma_{j,k}\frac{\partial}{\partial\gamma_{jk}} + \\ + \sum_{j=k+2}^{n}\gamma_{k+1,k}\gamma_{j,k+1}\frac{\partial}{\partial\gamma_{j,k+1}} \\ \\ [d_{k+s,k}, d_{k+1+s,k+s}] & \text{für } l = k+s+1, s \geq 1. \end{cases} \tag{4.26}$$

Der Zusammenhang zwischen den Differentialoperatoren für normierte und für unnormierte kohärente Zustände lautet

$$D_{kl}\,|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}}\left(d_{kl}\,\sqrt{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}\,|\gamma\rangle\right). \tag{4.27}$$

Ganz entsprechend wirken die Leiteroperatoren auch nach links

$$\langle\gamma||S_{kl} = \overline{d_{lk}}\,\langle\gamma|| \equiv d_{lk}(\overline{\gamma},\tfrac{\partial}{\partial\overline{\gamma}})\,\langle\gamma||. \tag{4.28}$$

4.2.3 Matrixelemente der Operatoren S_{ij} in kohärenten Zuständen

Die Matrixelemente der Leiteroperatoren S_{kl} lassen sich leicht mithilfe der erzeugenden Funktion $\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma'})$ und der Differentialoperatoren $d_{kl}(\gamma,\frac{\partial}{\partial\gamma})$ angeben

$$\begin{aligned} \langle\gamma'||S_{kl}||\gamma\rangle &= d_{kl}(\gamma,\tfrac{\partial}{\partial\gamma})\,\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma'}) \\ \langle\gamma'|S_{kl}|\gamma\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma',\overline{\gamma'})\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}}\,d_{kl}(\gamma,\tfrac{\partial}{\partial\gamma})\,\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma'}). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Daraus ergeben sich die Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \langle\gamma||S_{kl}||\gamma\rangle &= d_{kl}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial\gamma})\,\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma}) \\ \langle\gamma|S_{kl}|\gamma\rangle &= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}\, d_{kl}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial\gamma})\,\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma}). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Es ist zu beachten, daß in $\langle\gamma|S_{kl}|\gamma\rangle = \langle\gamma|D_{kl}(\gamma,\overline{\gamma},\frac{\partial}{\partial\gamma})|\gamma\rangle$ die Differentialoperatoren D_{kl} nicht einfach auf die linke Seite von $\langle\gamma|$ geschoben werden dürfen, weil $\langle\gamma|$ sowohl von $\overline{\gamma}$ als auch von γ abhängt. Das Problem tritt in $\langle\gamma||S_{kl}||\gamma\rangle = \langle\gamma||d_{kl}(\gamma,\frac{\partial}{\partial\gamma})||\gamma\rangle$ nicht auf, weil $\langle\gamma||$ nur von $\overline{\gamma}$ abhängt.

4.2.4 Die Vollständigkeit der kohärenten Zustände

Die kohärenten Zustände sind nicht orthogonal. Weil sie ein Kontinuum in einem endlichdimensionalen Hilbert-Raum sind, können sie kein Orthogonalsystem bilden. Sie erlauben jedoch eine Zerlegung des Einheitsoperators, d.h. sie sind vollständig oder besser übervollständig. Jeder Zustand $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_\lambda$ ist eindeutig bestimmt durch seine Projektion $\langle\gamma|\Psi\rangle$ auf kohärente Zustände.
Zunächst soll gezeigt werden, daß der Operator

$$\hat{A} = \int_{SU_n} \boldsymbol{\mu}_{SU_n}(g)\mathcal{D}(g)|\mu\rangle\langle\mu|\mathcal{D}(g^\dagger) \tag{4.31}$$

proportional zum Identitätsoperator $\mathbb{I}$ ist, wobei $g \in SU_n$ die gesamte Gruppe SU_n durchläuft und μ_{SU_n} das invariante Haar-Maß von SU_n ist. [2]
Nach Schurs Lemma [70–74] ist ein Operator $\hat{A}$, der in einem Darstellungsraum $\mathcal{H}_\lambda$ einer irreduziblen SU_n-Darstellung wirkt, genau dann proportional zur Identität, wenn er mit allen Elementen $h \in SU_n$ vertauscht

$$\mathcal{D}(h)\hat{A}\mathcal{D}(h^\dagger) = \hat{A} \qquad \text{für alle } h \in SU_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \hat{A} = c\mathbb{I}. \tag{4.32}$$

Für $\hat{A}$ gilt wegen der Invarianz des Haar-Maßes

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(h)\hat{A}\mathcal{D}(h^\dagger) &= \textstyle\int_{SU_n} \boldsymbol{\mu}_{SU_n}(g)\mathcal{D}(hg)|\mu\rangle\langle\mu|\mathcal{D}((hg)^\dagger) \\ &= \textstyle\int_{SU_n} \boldsymbol{\mu}_{SU_n}(hg)\mathcal{D}(hg)|\mu\rangle\langle\mu|\mathcal{D}((hg)^\dagger) \\ &= \hat{A}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

---

[2] Das Haar-Maß $\boldsymbol{\mu}_{SU_n}$ und der Zustand höchsten Gewichts $|\mu\rangle$ werden hier beide durch das Symbol μ beschrieben, haben aber weiter nichts miteinander zu tun !

Um die Proportionalitätskonstante in $\mathbb{I} = c\hat{A}$ zu bestimmen, verwendet man

$$\operatorname{Spur} \mathbb{I} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda, \tag{4.34}$$

und $\operatorname{Spur} \mathcal{D}(g)|\mu\rangle\langle\mu|\mathcal{D}(g^\dagger) = 1$ ($|\mu\rangle$ ist ein normierter Zustand, daher auch $\mathcal{D}(g)|\mu\rangle$). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & c \textstyle\int \boldsymbol{\mu}_{SUn} && = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda \\ \Longleftrightarrow \quad & c && = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda, \end{aligned} \tag{4.35}$$

weil das Haar-Maß $\boldsymbol{\mu}_{SU_n}$ auf $\int \boldsymbol{\mu}_{SU_n} = 1$ normiert ist.

Der Operator $\hat{A}$ ist bereits eine Auflösung der Identität in kohärente Zustände. Er kann weiter vereinfacht werden, indem man über die Isotropiegruppe $I^j_{|\mu\rangle}$ von μ integriert. Übrig bleibt dann ein Integral über ein (invariantes) Maß auf der Mannigfaltigkeit Γ^j der kohärenten Zustände $|\gamma\rangle$

$$\boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j} = \int_{I^j_{|\mu\rangle}} \boldsymbol{\mu}_{SU_n}. \tag{4.36}$$

Die Auflösung der Identität bekommt dann die Form

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda \int_{\Gamma^j} \boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j} |\gamma\rangle\langle\gamma| \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda \int_{\Gamma^j} \boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j} \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})} ||\gamma\rangle\langle\gamma||. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Für nichtentartete Darstellungen lautet diese Zerlegung explizit

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda}{\tilde{\mathcal{C}}} \int_\Gamma \frac{1}{\mathcal{F}(\gamma,\overline{\gamma})} |\gamma\rangle\langle\gamma| \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma \\ &= \frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda}{\tilde{\mathcal{C}}} \int_\Gamma \frac{1}{\mathcal{F}(\gamma,\overline{\gamma})\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})} ||\gamma\rangle\langle\gamma|| \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma \end{aligned} \tag{4.38}$$

mit der Normierungskonstante

$$\tilde{\mathcal{C}} = \int_\Gamma \frac{1}{\mathcal{F}(\gamma,\overline{\gamma})} \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma = \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\ldots(n-1)!}. \tag{4.39}$$

In entarteten Darstellungen hängt $\boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j}$ und $|\gamma\rangle$ nicht von allen Matrixelementen γ_{ij} ab, sondern nur von jenen aus der parabolischen Gruppe $Z^-_{n,j}$. Man erhält $\boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j}$ aus $\boldsymbol{\mu}_\Gamma$ (also aus dem Maß für den nichtentarteten Fall) durch Integration über alle Matrixelemente γ_{kl}, von denen $|\gamma\rangle$ nicht abhängt.

4.2.5 Kleine Formelsammlung für SU_2 und SU_3

Formelsammlung für SU_2

Die irreduziblen Darstellungen von SU_2 sind durch eine ganze Zahl $\lambda_1 = 2j$ charakterisiert und haben die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda = \lambda_1 + 1 = 2j + 1. \tag{4.40}$$

Es gibt keine entarteten Darstellungen (außer der trivialen Darstellung $\lambda_1 = 0$). Die kohärenten Zustände sind durch untere Dreiecksmatrizen

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_{21} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

und damit durch eine komplex Zahl γ_{21} parametrisiert

$$|\gamma\rangle = \exp\left(\gamma_{21} S_{21}\right) |\mu\rangle. \tag{4.42}$$

Die erzeugende Funktion lautet

$$\langle\gamma'||\gamma\rangle = \mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma}') = f_1(\gamma, \overline{\gamma}')^{\lambda_1} \tag{4.43}$$

mit

$$f_1(\gamma, \overline{\gamma}') = 1 + \overline{\gamma}'_{21}\gamma_{21}. \tag{4.44}$$

Die Vollständigkeitsrelation ist

$$\mathbb{I} = \frac{\lambda_1 + 1}{\pi} \int \frac{1}{f_1^2} |\gamma\rangle\langle\gamma| \,\mathbf{d}^2\gamma_{21}. \tag{4.45}$$

Die Differentialoperatoren d_{kl} sind durch

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\lambda_1}{2} - \gamma_{21}\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \\ d_{12} &= \gamma_{21}\lambda_1 - \gamma_{21}^2\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \\ d_{21} &= \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \\ d_{22} &= -\frac{\lambda_1}{2} + \gamma_{21}\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \end{aligned} \tag{4.46}$$

gegeben. Daraus ergeben sich die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
\langle\gamma|S_{11}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{2f_1}\left(1-|\gamma|^2\right)\\
\langle\gamma|S_{12}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\gamma_{21}\\
\langle\gamma|S_{21}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\overline{\gamma}_{21}\\
\langle\gamma|S_{22}|\gamma\rangle &= -\frac{\lambda_1}{2f_1}\left(1-|\gamma|^2\right)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Formelsammlung für SU_3

Die irreduziblen Darstellungen von SU_3 sind durch zwei ganze Zahlen λ_1 und λ_2 charakterisiert und haben die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda = \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)}{2}. \tag{4.48}$$

Entartete Darstellungen enstehen für $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ oder $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$.
Die kohärenten Zustände sind durch untere Dreiecksmatrizen

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 1 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

parametrisiert. In den entarteten Darstellungen muß $\gamma_{21} = 0$ gesetzt werden falls $\lambda_1 = 0$ und $\gamma_{32} = 0$ falls $\lambda_2 = 0$. Die kohärenten Zustände sind dann

$$\begin{aligned}
|\gamma\rangle &= \exp\left(\gamma_{21}S_{21}\right)\exp\left(\gamma_{31}S_{31}\right)\exp\left(\gamma_{32}S_{32}\right)|\mu\rangle && \text{für } \lambda_1, \lambda_2 \neq 0\\
|\gamma\rangle &= \exp\left(\gamma_{31}S_{31}\right)\exp\left(\gamma_{32}S_{32}\right)|\mu\rangle && \text{für } \lambda_1 = 0\\
|\gamma\rangle &= \exp\left(\gamma_{21}S_{21}\right)\exp\left(\gamma_{31}S_{31}\right)|\mu\rangle && \text{für } \lambda_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Die erzeugende Funktion ist durch

$$\langle\gamma'||\gamma\rangle = \mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma}') = f_1(\gamma, \overline{\gamma}')^{\lambda_1} f_2(\gamma, \overline{\gamma}')^{\lambda_2} \tag{4.51}$$

mit

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma, \overline{\gamma}') &= 1 + \overline{\gamma}'_{21}\gamma_{21} + \overline{\gamma}'_{31}\gamma_{31}\\
f_2(\gamma, \overline{\gamma}') &= 1 + \overline{\gamma}'_{32}\gamma_{32} + \left(\overline{\gamma}'_{31} - \overline{\gamma}'_{32}\overline{\gamma}'_{21}\right)\left(\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21}\right)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

gegeben.
Die Vollständigkeitsrelation lautet im nichtentarteten Fall ($\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$)

$$\mathbb{I} = \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)(\lambda_1+\lambda_2+2)}{\pi^3} \int \frac{1}{f_1^2 f_2^2} |\gamma\rangle\langle\gamma| \, \mathbf{d}^2\gamma_{21} \mathbf{d}^2\gamma_{32} \mathbf{d}^2\gamma_{31} \tag{4.53}$$

und in den entarteten Fällen

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \frac{(\lambda_2+1)(\lambda_2+2)}{\pi^2} \int \frac{1}{\tilde{f}_2^3} |\gamma\rangle\langle\gamma| \, \mathbf{d}^2\gamma_{32} \mathbf{d}^2\gamma_{31} \quad \text{für } \lambda_1 = 0 \\ \mathbb{I} &= \frac{(\lambda_1+1)(\lambda_1+2)}{\pi^2} \int \frac{1}{f_1^3} |\gamma\rangle\langle\gamma| \, \mathbf{d}^2\gamma_{21} \mathbf{d}^2\gamma_{31} \quad \text{für } \lambda_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.54}$$

mit $\tilde{f}_2 = f_2|_{\gamma_{31}=0} = 1 + |\gamma_{32}|^2 + |\gamma_{31}|^2$.
Die Differentialoperatoren d_{kl} lauten

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{2\lambda_1+\lambda_2}{3} - \gamma_{21}\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - \gamma_{31}\frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{12} &= \gamma_{21}\lambda_1 - \gamma_{21}^2\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - (\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21})\frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} - \gamma_{21}\gamma_{31}\frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{13} &= \gamma_{31}\lambda_1 + (\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21})\lambda_2 - \gamma_{21}\gamma_{31}\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \\ &\quad -\gamma_{32}(\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21})\frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} - \gamma_{31}^2\frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{21} &= \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \\ d_{22} &= \frac{\lambda_2-\lambda_1}{3} + \gamma_{21}\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - \gamma_{32}\frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} \\ d_{23} &= \gamma_{32}\lambda_2 + \gamma_{31}\frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - \gamma_{32}^2\frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} \\ d_{31} &= \frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{32} &= \frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} + \gamma_{21}\frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{33} &= -\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} + \gamma_{32}\frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} + \gamma_{31}\frac{\partial}{\partial\gamma_{31}}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Daraus ergeben sich die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
\langle\gamma|S_{11}|\gamma\rangle &= \frac{2\lambda_1+\lambda_2}{3} - \frac{\lambda_1}{f_1}\left(|\gamma_{21}|^2+|\gamma_{31}|^2\right) - \frac{\lambda_2}{f_2}|\gamma_{31}-\gamma_{32}\gamma_{21}|^2 \\
\langle\gamma|S_{12}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\gamma_{21} - \frac{\lambda_2}{f_2}\overline{\gamma}_{32}\left(\gamma_{31}-\gamma_{32}\gamma_{21}\right) \\
\langle\gamma|S_{13}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\gamma_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2}\left(\gamma_{31}-\gamma_{32}\gamma_{21}\right) \\
\langle\gamma|S_{21}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\overline{\gamma}_{21} - \frac{\lambda_2}{f_2}\gamma_{32}\left(\overline{\gamma}_{31}-\overline{\gamma}_{32}\overline{\gamma}_{21}\right) \\
\langle\gamma|S_{22}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_2-\lambda_1}{3} + \frac{\lambda_1}{f_1}|\gamma_{21}|^2 - \frac{\lambda_2}{f_2}|\gamma_{32}|^2 \\
\langle\gamma|S_{23}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\overline{\gamma}_{21}\gamma_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2}\gamma_{32} \\
\langle\gamma|S_{31}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\overline{\gamma}_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2}\left(\overline{\gamma}_{31}-\overline{\gamma}_{32}\overline{\gamma}_{21}\right) \\
\langle\gamma|S_{32}|\gamma\rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1}\gamma_{21}\overline{\gamma}_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2}\overline{\gamma}_{32} \\
\langle\gamma|S_{33}|\gamma\rangle &= -\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} + \frac{\lambda_1}{f_1}|\gamma_{31}|^2 + \frac{\lambda_2}{f_2}\left(|\gamma_{32}|^2+|\gamma_{31}-\gamma_{32}\gamma_{21}|^2\right).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

4.2.6 Kohärente Zustände als SU_n-Bahnen im projektiven Hilbert-Raum

Üblicherweise beschreibt man in der Quantenmechanik einen Zustand des Systems durch einen normierten Vektor $|\Psi\rangle$ im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$. Ändert man die Phase des Zustandsvektors $|\Psi\rangle \mapsto e^{i\alpha}|\Psi\rangle$, dann ist der Unterschied prinzipiell nicht beobachtbar, d.h. $|\Psi\rangle$ und $e^{i\alpha}|\Psi\rangle$ beschreiben den gleichen Zustand.

Man kann den quantenmechanischen Zustand jedoch auch so beschreiben, daß ihm eindeutig ein mathematisches Objekt entspricht. Dazu definiert man **Strahlen** im Hilbert-Raum. Ist $|\Psi\rangle$ ein nichtverschwindender Vektor im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$, dann ist der Strahl $[|\Psi\rangle]$ eine Äquivalenzklasse von Vektoren in $\mathcal{H}$, die durch

$$[|\Psi\rangle] = \left\{|\chi\rangle \in \mathcal{H} : \ |\chi\rangle = c|\Psi\rangle,\ c \in \mathbb{C}-\{0\}\right\} \tag{4.57}$$

definiert ist. Der Raum aller Strahlen im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ heißt **projektiver Raum** $\mathbb{P}\mathcal{H}$. Er kann als Quotientenraum

$$\mathbb{P}\mathcal{H} = (\mathcal{H} - \{0\})/\sim \tag{4.58}$$

bezüglich der Äquivalenzrelation

$$|\Psi\rangle \sim |\chi\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\Psi\rangle = c|\chi\rangle \qquad \text{mit } c \in \mathbb{C} - \{0\} \tag{4.59}$$

aufgefaßt werden. Dabei reduziert sich die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}\mathcal{H} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} - 1. \tag{4.60}$$

Gibt es eine Darstellung $g \mapsto \mathcal{D}(g)$ einer Gruppe G auf $\mathcal{H}$ ($g \in G$ ist ein Gruppenelement und $\mathcal{D}(g)$ ist ein Operator auf dem Hilbert-Raum), induziert

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(g)[|\Psi\rangle] = [\mathcal{D}(g)|\Psi\rangle] \tag{4.61}$$

eine Darstellung $g \mapsto \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(g)$ auf dem projektiven Raum.
Eine **Bahn** bzw. ein **Orbit** $\mathcal{O}_G$ der Gruppe G (oder der Restklasse G/H, wobei H eine Untergruppe von G ist) durch einen Vektor $|\Psi\rangle$ im Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ oder durch einen Strahl $[|\Psi\rangle]$ ist die Gesamtheit aller Elemente, die durch Anwendung der Gruppe erreicht werden können

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_G(|\Psi\rangle) &= \big\{|\chi\rangle \in \mathcal{H} : |\chi\rangle = \mathcal{D}(g)|\Psi\rangle, g \in G\big\} &&\equiv G|\Psi\rangle \subset \mathcal{H} \\
\mathcal{O}_G([|\Psi\rangle]) &= \big\{[|\chi\rangle] \in \mathbb{P}\mathcal{H} : [|\chi\rangle] = \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(g)[|\Psi\rangle], g \in G\big\} &&\equiv G[|\Psi\rangle] \subset \mathbb{P}\mathcal{H}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda$ der Darstellungsraum einer irreduziblen SU_n-Darstellung λ, dann sind die kohärenten Zustände $|g\rangle$ Elemente aus einer SU_n-Bahn durch den Zustand höchsten Gewichts $|g\rangle \in G|\mu\rangle$. Die Mannigfaltigkeit Γ^j der kohärenten Zustände $|\gamma\rangle$ ist gerade die Bahn der Restklasse $SU_n/I^j_{|\mu\rangle}$

$$\Gamma^j = \mathcal{O}_{SU_n/I^j_{|\mu\rangle}}(|\mu\rangle) = SU_n/I^j_{|\mu\rangle}|\mu\rangle. \tag{4.63}$$

Da verschiedene Elemente $g_1, g_2 \in SU_n/I^j_{|\mu\rangle}$, $g_1 \neq g_2$ auf verschiedene kohärente Zustände $\mathcal{D}(g_1)|\mu\rangle = |\gamma_1\rangle \neq |\gamma_2\rangle = \mathcal{D}(g_2)|\mu\rangle$ führen, herrscht sogar Äquivalenz

$$\Gamma^j \equiv SU_n/I^j_{|\mu\rangle} \equiv \overline{Z^-_{n,j}}, \tag{4.64}$$

die bereits genutzt wurde, um kohärente Zustände $|\gamma\rangle$ durch untere Dreiecksmatrizen (bzw. deren parabolische Untergruppen) zu parametrisieren.[3] Die nichtnormierten

---

[3] Man beachte jedoch, daß die Äquivalenz $SU_n/I^j_{|\mu\rangle} \equiv \overline{Z^-_{n,j}}$ rein topologisch ist – als Restklasse bzw. Gruppe verhalten sie sich nicht äquivalent.

kohärenten Zustände $||\gamma\rangle$ bilden ebenfalls eine Bahn $\mathcal{O}_{Z^-_{n,j}}(|\mu\rangle) = Z^-_{n,j}|\mu\rangle$, dessen Abschluß $\overline{Z^-_{n,j}|\mu\rangle}$ äquivalent zu $\mathcal{O}_{SU_n/I^j_{|\mu\rangle}}(|\mu\rangle)$ ist. Da SU_n kompakt ist, sind auch die Bahnen $\mathcal{O}_{SU_n/I^j_{|\mu\rangle}}(|\mu\rangle)$ kompakte Mannigfaltigkeiten im Hilbert-Raum.
Im projektiven Raum $\mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$ verschwindet jeder Unterschied zwischen den Bahnen $SU_n[|\mu\rangle]$, $SU_n/I^j_{|\mu\rangle}[|\mu\rangle]$ und $\overline{Z^-_{n,j}}[|\mu\rangle]$. Um das zu sehen, betrachtet man

$$\mathcal{D}(g(\gamma;\phi))|\mu\rangle = e^{i\alpha}|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}}e^{i\alpha}||\gamma\rangle. \tag{4.65}$$

Die Vektoren $|g\rangle$, $|\gamma\rangle$ und $||\gamma\rangle$ gehören dann alle zum gleichen Strahl in $\mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$, womit die oben behauptete Gleichheit der Bahnen gezeigt ist. Im projektiven Raum bilden die kohärenten Zustände also eine SU_n-Bahn, die topologisch äquivalent zur Restklasse $SU_n/I^j_{|\mu\rangle}$ ist

$$\mathcal{O}_{SU_n}([|\mu\rangle]) = SU_n[|\mu\rangle] \equiv SU_n/I^j_{|\mu\rangle}. \tag{4.66}$$

Im projektiven Raum gibt es weitere SU_n-Bahnen, die nicht durch den Zustand höchsten Gewichts gehen (durch jeden Strahl geht eine SU_n-Bahn). Diese anderen Bahnen liefern keine kohärenten Zustände.[4] Die SU_n-Bahn durch den Zustand höchsten Gewichts unterscheidet sich in seiner mathematischen Struktur eindeutig von allen anderen SU_n-Bahnen im projektiven Raum. Sie ist durch jeweils eine der folgenden Eigenschaften eindeutig charakterisiert:

- $SU_n[|\mu\rangle]$ ist die eindeutige SU_n-Bahn, die gleichzeitig auch eine $SL_n(\mathbb{C})$-Bahn ist
$$SU_n[|\mu\rangle] = SL_n(\mathbb{C})[|\mu\rangle], \tag{4.67}$$
- $SU_n[|\mu\rangle]$ ist die eindeutige abgeschlossene $SL_n(\mathbb{C})$-Bahn.
- $SU_n[|\mu\rangle]$ ist die eindeutige SU_n-Bahn mit sowohl komplexer als auch symplektischer Struktur.

Die komplexe Struktur ist durch die Parametrisierung durch untere Dreiecksmatrizen leicht erkennbar – die komplexe Konjugation besteht einfach im Übergang von einer Matrix $\gamma \in Z^-_n$ zu ihrer komplex konjugierten Matrix $\overline{\gamma}$. Auf die symplektische Struktur wird im nächsten Abschnitt 4.3 näher eingegangen. Sie macht die kohärenten Zustände interessant für semiklassische Betrachtungen und den klassischen Grenzfall.

Es ist leicht zu sehen, daß die Bahnen $\mathcal{O}_{SU_n/I^j_{|\mu\rangle}}(|\mu\rangle) \subset \mathcal{H}_\lambda$ im Hilbert-Raum und $\mathcal{O}_{SU_n}([|\mu\rangle]) \subset \mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$ im projektiven Raum isomorph sind.

---

[4] Nicht in dem hier dargestellten Sinn – manchmal betrachtet man die Bahnen, die nicht durch den Zustand höchsten Gewichts gehen, als verallgemeinerte kohärente Zustände.

4.3 Die symplektische Struktur der kohärenten Zustände

4.3.1 Poisson-Klammern und die symplektische Form

Zunächst soll nur die einfachste Form eines klassischen Phasenraums behandelt werden, die aber in der Physik die wichtigste Rolle spielt [104–107]. Der Phasenraum $\mathcal{M}$ ist dann der $2f$-dimensionale Raum $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2f}$ mit den Koordinaten $x = (x^1, \ldots, x^{2n}) = (q, p) = (q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f) \in \mathbb{R}^{2f}$. Die Koordinaten q sind die kanonischen Orte und die Variablen p sind die kanonischen Impulse des Systems, f ist die Anzahl der Freiheitsgrade. Auf diesem Phasenraum gibt es die Poisson-Klammer

$$\{F(q,p), G(q,p)\} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F(q,p)}{\partial p_k}\frac{\partial G(q,p)}{\partial q_k} - \frac{\partial F(q,p)}{\partial q_k}\frac{\partial G(q,p)}{\partial p_k} \tag{4.68}$$

für Funktionen F, G auf dem Phasenraum, die physikalischen Observablen entsprechen. Es gilt also

$$\{p_k, q_l\} = \delta_{kl} \qquad \{p_k, p_l\} = \{q_k, q_l\} = 0. \tag{4.69}$$

Die Dynamik von Observablen $F(q,p;t)$ wird über die Poisson-Klammer durch die Hamilton-Funktion $H(q,p)$ des Systems bestimmt

$$\frac{d}{dt}F(q,p;t) = \{H(q,p), F(q,p;t)\}\,. \tag{4.70}$$

Die Trajektorien werden damit durch die bekannten Hamiltonschen Gleichungen beschrieben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q_k(t) &= \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_k} \\ \frac{d}{dt}p_k(t) &= -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_k}. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Die Poisson-Klammern (4.68) sind eng verbunden mit der sogenannten **symplektischen 2-Form** [104–107]

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^{f} \mathbf{d}p_k \wedge \mathbf{d}q_k. \tag{4.72}$$

Die symplektische Form $\boldsymbol{\omega}$ enthält alle Information über die Poisson-Klammern. Um dies zu sehen, soll kurz auf das Vektorbündel $T\mathcal{M}$ der Differentialoperatoren erster

Ordnung (sie werden im allgemeinen **Vektorfelder** genannt) und das dazu duale Vektorbündel $T^*\mathcal{M}$ der 1-Formen eingegangen werden.
Der von den Vektorfeldern aufgespannte Raum $T\mathcal{M}$ heißt **Tangentialbündel** von M [86,104–106]. Ein Vektorfeld $\mathbf{X}$ ist eine Abbildung, die jedem Ort $x \in \mathcal{M}$ einen Vektor $\mathbf{X}(x) \in T_x\mathcal{M}$ im **Tangentialraum** am Ort x zuordnet. Der Tangentialraum $T_x\mathcal{M}$ ist ein Vektorraum im üblichen Sinn, während das Tangentialbündel als „Summe" dieser Vektorräume selbst kein Vektorraum ist.
Der von den 1-Formen aufgespannte Raum $T^*\mathcal{M}$ heißt **Kotangentialbündel** von M [86,104–106]. Eine 1-Form $\boldsymbol{\alpha}$ ordnet jedem Ort $x \in \mathcal{M}$ einen Vektor $\boldsymbol{\alpha}(x) \in T_x^*\mathcal{M}$ im **Kotangentialraum** am Ort x zu. Der Kotangentialraum $T_x^*\mathcal{M}$ ist der zu $T_x\mathcal{M}$ duale Vektorraum.
Ein allgemeines Vektorfeld $\mathbf{X}(q,p) = \mathbf{X}(x)$ hat die Form

$$\mathbf{X}(q,p) = \sum_{k=1}^{2f} X^k(x)\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{4.73}$$

mit Funktionen $X^k(x)$, und eine allgemeine 1-Form $\boldsymbol{\alpha}(q,p) = \boldsymbol{\alpha}(x)$ hat die Form

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{2f} \alpha_k(x)\,\mathbf{d}x^k \tag{4.74}$$

mit Funktionen $\alpha_k(x)$. Vektorfelder und 1-Formen sind duale Objekte, d.h. man kann aus ihnen ein Produkt bilden, das eine Funktion ergibt. Für die Basis von 1-Formen $\mathbf{d}x^k$ und die Basis von Vektorfeldern $\frac{\partial}{\partial x^l}$ definiert man das Produkt

$$\left(\mathbf{d}x^k, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \mathbf{d}x^k(\frac{\partial}{\partial x^l}) = \delta^k_l. \tag{4.75}$$

Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) = \sum_{k}^{2f} \alpha_k(x)\,X^k(x). \tag{4.76}$$

Ist $F(x)$ eine Funktion und $\mathbf{X}(x)$ ein Vektorfeld, dann ist $\mathbf{X}(x)F(x)$ eine neue Funktion, die an jedem Ort x die Richtungsableitung von F in Richtung X angibt. Die Definition des Produktes zwischen 1-Formen und Vektorfeldern ermöglicht es, diese Richtungsableitung auch als

$$\mathbf{X}F = \mathbf{d}F(\mathbf{X}) \tag{4.77}$$

zu schreiben. Ähnlich lassen sich 2-Formen mit einem Paar von Vektorfeldern zu einer Funktion verkürzen. Für eine 2-Form $\boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \boldsymbol{\alpha}_2$, die ein äußeres Produkt von 1-Formen ist, und zwei Vektorfelder $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ ist diese Verkürzung durch

$$\boldsymbol{\alpha}_1 \wedge \boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{X}_1)\boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{X}_2) - \boldsymbol{\alpha}_1(\mathbf{X}_2)\boldsymbol{\alpha}_2(\mathbf{X}_1) \tag{4.78}$$

gegeben.
Die Poisson-Klammer (4.68) ordnet jeder Funktion $F(q,p)$ ein Vektorfeld $\mathbf{X}_F$ zu

$$F \longmapsto \mathbf{X}_F := \{F, \cdot\} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}, \tag{4.79}$$

also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{p_k} &= \{p_k, \cdot\} &&= \frac{\partial}{\partial q_k} \\ \mathbf{X}_{q_k} &= \{q_k, \cdot\} &&= -\frac{\partial}{\partial p_k}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Der Zusammenhang zwischen den Poisson-Klammern und der symplektischen Form $\boldsymbol{\omega}$ wird durch die leicht nachprüfbare Gleichung

$$\{F, G\} = -\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G) = -\mathbf{d}F(\mathbf{X}_G) \tag{4.81}$$

hergestellt. Dieser Zusammenhang läßt sich ausnutzen, um umgekehrt die Poisson-Klammern (4.68) ausgehend von der symplektischen Form $\boldsymbol{\omega}$ zu definieren.
Im allgemeinen Fall ist der Phasenraum $\mathcal{M}$ eine $2f$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer symplektischen 2-Form $\boldsymbol{\omega}$, d.h. $\boldsymbol{\omega}$ ist abgeschlossen

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\omega} = 0 \tag{4.82}$$

und nicht entartet [104–107]. Letzteres bedeutet, daß es zu jedem Vektorfeld $\mathbf{X}_1$ ein weiteres Vektorfeld $\mathbf{X}_2$ gibt, so daß die Verkürzung von $\boldsymbol{\omega}$ mit den beiden Vektorfeldern nicht verschwindet

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \neq 0. \tag{4.83}$$

In lokalen Koordinaten $x = (x^1, \ldots, x^{2f})$ hat $\boldsymbol{\omega}$ die Form

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k,l=1}^{f} \frac{1}{2}\omega_{kl}(x)\, \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^l \tag{4.84}$$

mit Koeffizienten $\omega_{kl}(x)$, die eine schiefsymmetrische Matrix

$$\omega_{kl}(x) = -\omega_{lk}(x) \tag{4.85}$$

von Funktionen auf dem Phasenraum bilden.

Nach dem Darbouxschen Theorem [104–107] ist es immer möglich, eine lokale Koordinatentransformation auf Koordinaten $(q,p) = (q(x), p(x))$ durchzuführen, so daß in den neuen Koordinaten die symplektische Form auf die kanonische Form $\boldsymbol{\omega} = \sum_{k=1}^{f} \mathbf{d}p_f \wedge \mathbf{d}q_f$ gebracht wird. Solche Koordinaten werden kanonische Koordinaten genannt. Sie sind meistens (besonders in hochdimensionalen Mannigfaltigkeiten) nur mit hohem Aufwand zu berechnen. Es gibt im allgemeinen auch kein kanonisches Koordinatensystem, das die gesamte Mannigfaltigkeit beschreibt.

Für eine Funktion F auf dem Phasenraum wird das Vektorfeld

$$\mathbf{X}_F = \sum_{k=1}^{2f} X_F^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{4.86}$$

so definiert, daß für jedes beliebige andere Vektorfeld $\mathbf{X}$ die Gleichung

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_F, \mathbf{X}) = \mathbf{d}F(\mathbf{X}) = \mathbf{X}F \tag{4.87}$$

erfüllt ist. Mit $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x^r}$ in (4.87) können die Koeffizienten X_F^s von $\mathbf{X}_F$ bestimmt werden

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\omega}\left(\mathbf{X}_F, \frac{\partial}{\partial x^r}\right) && = \frac{\partial}{\partial x^r} F \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{s=1}^{2f} \omega_{sr} X_F^s && = \frac{\partial}{\partial x^r} F \\ \Leftrightarrow\quad & X_F^r && = \sum_{r=1}^{2f} \omega^{sr} \frac{\partial F}{\partial x^r}. \end{aligned} \tag{4.88}$$

In der letzten Zeile sind die Koeffizienten ω^{sr} Funktionen auf dem Phasenraum, die als Matrix invers zu ω_{sr} sind

$$\sum_{r=1}^{2f} \omega_{sr}\omega^{rt} = \delta_s^t. \tag{4.89}$$

Die Poisson-Klammer zweier Funktionen F, G kann jetzt durch (4.81) definiert werden und ergibt

$$\{F, G\} = \sum_{k,l=1}^{2f} \omega^{kl} \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial G}{\partial x^l}. \tag{4.90}$$

Aus den Eigenschaften der symplektischen Form folgen die üblichen Eigenschaften der Poisson-Klammern. So läßt sich die Jacobi-Identität

$$\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=0 \tag{4.91}$$

auf die Abgeschlossenheit der symplektischen Form $\boldsymbol{\omega}$ zurückführen. Die Nichtentartung der symplektischen Form bedeutet, daß auch die Poisson-Klammer nicht entartet ist. Dabei ist die Entartung von Poisson-Klammern gleichbedeutend mit der Existenz nichttrivialer Casimir-Funktionen $C(x)$. Für eine Casimir-Funktion verschwindet die Poisson-Klammer

$$\{C,F\}=0 \tag{4.92}$$

für jede beliebige Funktion F. Ist die Poisson-Klammer über eine symplektische Form definiert, sind alle Casimir-Funktionen Konstanten im Phasenraum. Entartete Poisson-Klammern können also nicht über eine symplektische Form definiert werden – im allgemeinen kann man dann zu einer Untermannigfaltigkeit gehen, in der alle nichttrivialen Casimir-Funktionen konstant werden – diese Untermannigfaltigkeit besitzt im allgemeinen eine symplektische Struktur.

Hier gibt es eine gewisse Ähnlichkeit zwischen irreduziblen Darstellungen einer Lie-Algebra – im Darstellungsraum einer irreduziblen Darstellung sind alle Casimir-Operatoren proportional zur Identität. Ist die gleiche Lie-Algebra durch Poisson-Klammern auf einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ realisiert und sind alle Casimir-Funktionen auf $\mathcal{M}$ konstant, gibt es im allgemeinen eine symplektische Form, die zu den Poisson-Klammern äquivalent ist.

4.3.2 Die kanonische symplektische Struktur eines Hilbert-Raums

In einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}\equiv\mathbb{C}^m$ ist durch das Skalarprodukt kanonisch auch ein symplektisches Produkt $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{H}}$ gegeben, mit dessen Hilfe sich die Schrödinger-Gleichung formal in Hamiltonsche Gleichungen für ein klassisches System mit m Freiheitsgraden verwandeln läßt [106]. Das symplektische Produkt im Hilbert-Raum lautet

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{H}}(|\phi_1\rangle,|\phi_2\rangle)=-2\hbar\,\mathrm{Im}\langle\phi_1|\phi_2\rangle=\frac{\hbar}{i}\left(\langle\phi_2|\phi_1\rangle-\langle\phi_1|\phi_2\rangle\right). \tag{4.93}$$

Statt $\hbar$ könnte man beliebige andere reelle Konstanten benutzen - die Wahl von $\hbar$ wird bei Betrachtung des klassischen Grenzfalles seine Bedeutung erhalten.

Jeder Hilbert-Raum der Dimension $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H}=m$ ist also gleichzeitig ein linearer symplektischer Raum mit der reellen Dimension $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{H}=2m$. Unitäre Transformationen, wie sie in der Quantenmechanik vom hermiteschen Hamilton-Operator H erzeugt werden, lassen das Skalarprodukt und damit auch die symplektische Form

invariant. Damit wird die Quantenmechanik rein formal zu einem Spezialfall der klassischen Mechanik.
Ist $\{|k\rangle\}$ mit $k = 1, 2 \ldots, m$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, läßt sich ein beliebiger Vektor $|\phi\rangle$ in dieser Basis entwickeln

$$|\phi\rangle = \sum_{k=1}^{m} z_k |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \sum_{k=1}^{m} (q_k + ip_k)\,|k\rangle \qquad z_k \in \mathbb{C};\ q_k, p_k \in \mathbb{R}. \tag{4.94}$$

Damit sind auf $\mathcal{H}$ Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_m)$ und $(q,p) = (q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$ eingeführt. Das Vektorfeld $\mathbf{X}_{|\phi_1\rangle}$, das an jedem Ort $z \equiv (q,p)$ in Richtung $|\phi_1\rangle = \sum_{k=1}^{m} z_{1,k}|k\rangle$ zeigt, hat die Form

$$\mathbf{X}_{|\phi_1\rangle} = \sum_{k=1}^{m} z_{1,k}\frac{\partial}{\partial z_k} + \overline{z}_{1,k}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \sum_{k=1}^{m} q_{1,k}\frac{\partial}{\partial q_k} + p_{1,k}\frac{\partial}{\partial p_k}. \tag{4.95}$$

Die symplektische 2-Form

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\hbar}{i}\sum_{k=1}^{m} \mathbf{d}z_k \wedge \mathbf{d}\overline{z}_k = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{d}p_k \wedge \mathbf{d}q_k \tag{4.96}$$

gibt $\mathcal{H}$ dieselbe symplektische Struktur wie das oben definierte symplektische Produkt, d.h. es gilt

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}_{|\phi_1\rangle}, \mathbf{X}_{|\phi_2\rangle}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{H}}(|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle). \tag{4.97}$$

Bei gegebenem Hamilton-Operator H, läßt sich nun eine Hamilton-Funktion auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ definieren

$$\begin{aligned} h(|\phi\rangle &= \textstyle\sum_{k=1}^{m} z_k|k\rangle) \\ &= \langle\phi|H|\phi\rangle \\ &= \textstyle\sum_{k,l=1}^{m} \langle k|H|l\rangle \overline{z}_k z_l \\ &= \textstyle\sum_{k,l=1}^{m} \frac{1}{2\hbar}\langle k|H|l\rangle (q_k - ip_k)(q_l + ip_l). \end{aligned} \tag{4.98}$$

Die Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator H ist formal äquivalent zu den Hamiltonschen Gleichungen mit der Hamilton-Funktion h

$$i\hbar\dot{|\phi\rangle} = H|\phi\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{q}_k = \{h, q_k\} = \frac{\partial h}{\partial p_k},\ \dot{p}_k = \{h, p_k\} = -\frac{\partial h}{\partial q_k}. \tag{4.99}$$

Die Hamilton-Funktion h beschreibt m gekoppelte harmonische Oszillatoren, was nicht überraschen sollte, weil die Lösung der Schrödinger-Gleichung im wesentlichen

auf der Diagonalisierung einer m-dimensionalen Matrix beruht. Die Äquivalenz ist nur formal und gibt in dieser Form keinen Aufschluß über den klassischen Grenzfall einer Quantendynamik – dazu muß diese symplektische Struktur auf der Untermannigfaltigkeit der kohärenten Zustände betrachtet werden.
Der projektive Raum $\mathbb{P}\mathcal{H} \equiv \mathbb{P}\mathbb{C}^m = \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$ erbt vom Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ eine symplektische Struktur, die es ebenfalls ermöglicht, die Quantendynamik in formale Übereinstimmung zu einer klassischen Dynamik zu bringen (jetzt mit $m-1$ Freiheitsgraden). Aus den Koordinaten z auf $\mathcal{H}$ kann man die Verhältnisse

$$w_k = \frac{z_k}{z_n} \qquad k = 1, \ldots, n \tag{4.100}$$

bilden. Es ist leicht zu sehen, daß die Verhältnisse $w = (w_1, \ldots, w_{n-1}, w_{n=1})$ auf einem Strahl $[|\phi\rangle] \equiv [w] = [w_1 : w_2 : \cdots : w_{n-1} : 1]$ konstant sind. Die Zahlen w_k für $k = 1, \ldots, n-1$ bilden affine Koordinaten auf $\mathbb{P}\mathcal{H}$ (ist $z_n = 0$ muß man ein anderes affines Koordinatensystem wählen). Andersherum erhält man mit

$$|w\rangle = \sum_{k=1}^{m} w_k |k\rangle \tag{4.101}$$

einen Vektor auf dem Strahl $[w] \ni |w\rangle$ mit dem Normquadrat

$$\mathcal{N}(w, \overline{w}) = \langle w|w\rangle = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} |w_k|^2. \tag{4.102}$$

Das Normquadrat $\mathcal{N}(w, \overline{w})$ ist eine erzeugende Funktion für die symplektische Form [105,106]

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}} = \frac{\hbar}{i} \sum_{k,l=1}^{m-1} \frac{\partial^2 \log \mathcal{N}(w, \overline{w})}{\partial w_k \partial w_l} \mathbf{d}w_k \wedge \mathbf{d}\overline{w}_l. \tag{4.103}$$

Für ein m-Niveau-Atom ist jeder Zustand $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^m$ ein kohärenter Zustand $|\phi\rangle = |g\rangle$ mit $g \in SU_m$. Die symplektische Form $\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}}$ gibt dann die symplektische Struktur der kohärenten Zustände $|\gamma\rangle$ an.

4.3.3 Die symplektische Struktur auf kohärenten Zuständen

Ähnlich wie der projektive Raum $\mathbb{P}\mathcal{H}$ seine symplektische Struktur vom Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ erhält, erbt die Mannigfaltigkeit Γ^j der kohärenten SU_n-Zustände vom Darstellungsraum $\mathcal{H}_\lambda$ (bzw. von $\mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$) eine symplektische Struktur [25,35,37,106]. Es wurde bereits betont, daß die kohärenten Zustände gut geeignet sind, um den klassischen Grenzfall zu diskutieren. Es können klassische Observable definiert werden, deren Poisson-Klammern die gleichen Vertauschungsregeln haben wie die entsprechenden quantenmechanischen Größen. Die klassischen Observablen für n-Niveau-Atome sind gerade die Erwartungswerte der Leiteroperatoren in kohärenten Zuständen

$$s_{kl}(\gamma, \overline{\gamma}) = \hbar \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle, \tag{4.104}$$

wobei die Skalierung mit $\hbar$ nur im klassischen Grenzfall gebraucht wird.
Die Observablen s_{kl} sind Funktionen auf dem Raum Γ^j der kohärenten Zustände. Die Poisson-Klammern dieser Funktionen sind durch den Erwartungswert der entsprechenden quantenmechanischen Kommutatoren definiert

$$\{s_{ij}, s_{kl}\} = i\hbar \langle \gamma | [S_{ij}, S_{kl}] | \gamma \rangle = i\delta_{kj}\, s_{il} - i\delta_{il}\, s_{kj}. \tag{4.105}$$

Diese Definition gilt für alle klassischen Observablen, die linear in den Funktionen s_{kl} sind. Diese Definition reicht aus, um die Poisson-Klammer für zwei beliebige Funktionen $F(\gamma, \overline{\gamma})$ und $G(\gamma, \overline{\gamma})$ auf Γ^j zu bestimmen. Für Funktionen, die polinomial von den Observablen s_{ij} abhängen, kann man die Poisson-Klammer über die Leibniz-Regel

$$\{s_{kl}\, s_{k'l'}, s_{ij}\} = s_{kl}\, \{s_{k'l'}, s_{ij}\} + s_{k'l'}\, \{s_{kl}, s_{ij}\} \tag{4.106}$$

bestimmen. Es ist jedoch nichttrivial, ausgehend von (4.105) den Kommutator so einfacher Funktionen wie $F(\gamma, \overline{\gamma}) = \gamma_{kl}$ und $G(\gamma, \overline{\gamma}) = \gamma_{k'l'}$ zu bestimmen.
Die Poisson-Klammern (4.105) auf γ^j sind äquivalent zur symplektischen Struktur, die durch die symplektische Form

$$\boldsymbol{\omega}_{\Gamma^j} = \frac{\hbar}{i} \sum_{k>l,k'>l'} \omega_{kl,k'l'}\, \mathbf{d}\gamma_{kl} \wedge \mathbf{d}\overline{\gamma}_{k'l'} \tag{4.107}$$

mit den Koeffizienten

$$\omega_{kl,k'l'}(\gamma, \overline{\gamma}) = \frac{\partial^2 \log \mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma})}{\partial \gamma_{kl} \partial \overline{\gamma}_{k'l'}} \tag{4.108}$$

gegeben ist. Die Summation über die Indizes (k, l) und (k', l') in (4.107) läuft über alle nichtverschwindenden Einträge der Matrix $\gamma \in Z^-_{n,j} \subset Z^-_n$. Die Funktion $\mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma}) = \langle \gamma || \gamma \rangle$ tauchte bereits als erzeugende Funktion der Erwartungswerte $\langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle$ auf – hier ist sie die erzeugende Funktion der symplektischen Form. Aus der symplektischen Form $\boldsymbol{\omega}_{\Gamma^j}$ erhält man die Poisson-Klammern

$$\{F, G\} = \frac{i}{\hbar} \sum_{k>l,k'>l'} \omega^{kl,k'l'} \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma_{k'l'}} \frac{\partial G}{\partial \overline{\gamma}_{kl}} - \frac{\partial F}{\partial \overline{\gamma}_{kl}} \frac{\partial G}{\partial \gamma_{k'l'}} \right), \tag{4.109}$$

wobei die Koeffizienten $\omega^{kl,k'l'}$ als Matrix invers zu den $\omega_{kl,k'l'}$ sind

$$\sum_{k'>l'} \omega^{kl,k'l'} \omega_{k'l',k'',l''} = \delta^k_{k''} \delta^l_{l''}. \tag{4.110}$$

Um die Äquivalenz von (4.105) mit den Poisson-Klammern (4.109) zu zeigen, soll zunächst der Erwartungswert des Kommutators $[S_{kl}, S_{ij}]$ betrachtet werden

$$\begin{aligned}
\langle\gamma|\,[S_{kl}, S_{ij}]\,|\gamma\rangle &= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})} \langle\gamma||S_{kl}S_{ij} - S_{ij}S_{kl}||\gamma\rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})} \left(d_{lk}(\overline{\gamma}, \tfrac{\partial}{\partial\overline{\gamma}}) - d_{kl}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial\gamma}) \right) \langle\gamma||S_{ij}||\gamma\rangle \qquad (4.111) \\
&= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})} \left(d_{lk}(\overline{\gamma}, \tfrac{\partial}{\partial\overline{\gamma}}) - d_{kl}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial\gamma}) \right) [\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})\langle\gamma|S_{ij}|\gamma\rangle] \,.
\end{aligned}$$

Die Differentialoperatoren d_{lk} kann man zerlegen

$$d_{lk}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial\gamma}) = d^{(0)}_{lk}(\gamma) + \tilde{d}_{lk}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial\gamma}), \tag{4.112}$$

so daß $d^{(const)}_{kl}$ ein reiner Multiplikationsoperator ist und

$$\tilde{d}_{kl} = \sum_{k'>l'} \tilde{d}_{kl,k'l'}(\gamma) \frac{\partial}{\partial\gamma_{k'l'}} \tag{4.113}$$

eine Summe von ersten Ableitungen nach den $\gamma_{k'l'}$ ist. Damit läßt sich (4.111) weiter vereinfachen

$$\begin{aligned}
\langle\gamma|\,[S_{kl}, S_{ij}]\,|\gamma\rangle &= \frac{\langle\gamma|S_{ij}|\gamma\rangle}{\mathcal{K}} \left[\left(\overline{d_{lk}} - d_{kl}\right)\mathcal{K} \right] + \left(\overline{\tilde{d}_{lk}} - \tilde{d}_{kl} \right) \langle\gamma|S_{ij}|\gamma\rangle \\
&= \left(\overline{\tilde{d}_{lk}} - \tilde{d}_{kl} \right) \langle\gamma|S_{ij}|\gamma\rangle.
\end{aligned} \tag{4.114}$$

Der Term $\frac{\langle\gamma|S_{ij}|\gamma\rangle}{\mathcal{K}} \left[\left(\overline{d_{lk}} - d_{kl}\right)\mathcal{K} \right]$ verschwindet wegen $\overline{d_{lk}}\,\mathcal{K} = \langle\gamma||S_{kl}||\gamma\rangle = d_{kl}\,\mathcal{K}$. Aus der ersten Definition der Poisson-Klammern (4.105) kann nun das Vektorfeld, das von s_{kl} erzeugt wird, bestimmt werden

$$\mathbf{X}^{(1)}_{s_{kl}} = \left\{ s_{kl},\ \cdot\ \right\} = i \left(\overline{\tilde{d}_{lk}} - \tilde{d}_{kl} \right). \tag{4.115}$$

Aus der zweiten Definition der Poisson-Klammern kann das Vektorfeld direkt abgelesen werden

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^{(2)}_{s_{kl}} &= \hbar\left\{ \langle\gamma|S_{kl}|\gamma\rangle,\ \cdot\ \right\} \\
&= \frac{1}{i} \sum_{i>j,i'>j'} \omega^{ij,i'j'} \left(\frac{\partial\langle\gamma|S_{kl}|\gamma\rangle}{\partial\overline{\gamma}_{ij}} \frac{\partial}{\partial\gamma_{i'j'}} - \frac{\partial\langle\gamma|S_{kl}|\gamma\rangle}{\partial\gamma_{i'j'}} \frac{\partial}{\partial\overline{\gamma}_{ij}} \right).
\end{aligned} \tag{4.116}$$

Die Äquivalenz der beiden Definitionen der Poisson-Klammer ist bewiesen, wenn für die Vektorfelder

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}^{(1)}_{s_{kl}} && \overset{!}{=} \mathbf{X}^{(2)}_{s_{kl}} \\ \Longleftrightarrow \quad & \mathbf{X}^{(1)}_{s_{kl}} F(\gamma,\overline{\gamma}) && \overset{!}{=} \mathbf{X}^{(2)}_{s_{kl}} F(\gamma,\overline{\gamma}) \qquad \text{für jede Funktion } F(\gamma,\overline{\gamma}) \end{aligned} \tag{4.117}$$

gilt. Es genügt (4.117) für Funktionen $F(\gamma,\overline{\gamma}) = \gamma_{k'l'}$ zu beweisen.[5] Aus der ersten Definition der Poisson-Klammer folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(1)}_{s_{kl}} \gamma_{k'l'} &= i \left(\tilde{d}_{lk}(\overline{\gamma}, \tfrac{\partial}{\partial \overline{\gamma}}) - \tilde{d}_{kl}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial \gamma}) \right) \gamma_{k'l'} \\ &= -i \tilde{d}_{kl}(\gamma, \tfrac{\partial}{\partial \gamma}) \gamma_{k'l'} \\ &= -i \sum_{k''>l''} \tilde{d}_{kl,k''l''}(\gamma) \, \frac{\partial}{\partial \gamma_{k''l''}} \gamma_{k'l'} \\ &= -i \tilde{d}_{kl,k'l'}(\gamma). \end{aligned} \tag{4.118}$$

Die Wirkung von $\mathbf{X}^{(2)}_{s_{kl}}$ auf $\gamma_{k'l'}$ liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{(2)}_{s_{kl}} \gamma_{k'l'} &= -i \sum_{i>j,i'>j'} \omega^{ij,i'j'} \left(\tfrac{\partial \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle}{\partial \overline{\gamma}_{ij}} \tfrac{\partial}{\partial \gamma_{i'j'}} - \tfrac{\partial \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle}{\partial \gamma_{i'j'}} \tfrac{\partial}{\partial \overline{\gamma}_{ij}} \right) \gamma_{k'l'} \\ &= -i \sum_{i>j} \omega^{ij,k'l'} \tfrac{\partial}{\partial \overline{\overline{\gamma}_{ij}}} \left[\tfrac{1}{\mathcal{K}} \left(d^{(0)}_{kl} + \tilde{d}_{kl} \right) \mathcal{K} \right] \\ &= -i \sum_{i>j} \omega^{ij,k'l'} \tilde{d}_{kl} \tfrac{\partial}{\partial \overline{\overline{\gamma}_{ij}}} \log \mathcal{K} \\ &= -i \sum_{i>j} \omega^{ij,k'l'} \sum_{k''>l''} \tilde{d}_{kl,k''l''}(\gamma) \tfrac{\partial^2}{\partial \gamma_{k''l''} \partial \overline{\gamma}_{ij}} \log \mathcal{K} \\ &= -i \sum_{i>j,k''>l''} \omega^{ij,k'l'} \omega_{k''l'',ij} \tilde{d}_{kl,k''l''}(\gamma) \\ &= -i \tilde{d}_{kl,k'l'}(\gamma). \end{aligned} \tag{4.119}$$

Die Wirkung der Vektorfelder $X^{(1)}_{s_{kl}}$ und $X^{(2)}_{s_{kl}}$ auf die Funktion $F(\gamma,\overline{\gamma}) = \gamma_{k'l'}$ stimmt also überein, womit die Äquivalenz der beiden Definitionen der Poisson-Klammer gezeigt ist.

---

[5] Der Beweis für $F = \overline{\gamma}_{k'l'}$ ist äquivalent. Bei allgemeineren Funktionen F, die polinomial in γ_{ij} und $\overline{\gamma}_{ij}$ sind, kann der Beweis von Gleichung (4.117) über die Leibniz-Regel auf die Fälle $F = \gamma_{k'l'}$ und $F = \overline{\gamma}_{k'l'}$ zurückgeführt werden.

4.3.4 Poisson-Klammern in den Fällen SU_2 und SU_3

Poisson-Klammern für SU_2

Die symplektische Struktur auf kohärenten Zuständen der Gruppe SU_2 läßt sich aus (4.107) und (4.108) mit $\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma}) = f_1(\gamma_{21},\overline{\gamma}_{21})^{\lambda_1} = (1+|\gamma_{21}|^2)^{\lambda_1}$ einfach ausrechnen

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial^2 \log\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}{\partial\gamma_{21}\partial\overline{\gamma}_{21}}\mathbf{d}\gamma_{21}\wedge\mathbf{d}\overline{\gamma}_{21} = \frac{\hbar}{i}\frac{\lambda_1}{(1+|\gamma_{21}|^2)^2}\mathbf{d}\gamma_{21}\wedge\mathbf{d}\overline{\gamma}_{21}. \tag{4.120}$$

Die zugehörige Poisson-Klammer lautet

$$\{F,G\} = \frac{i}{\lambda_1\hbar}\left(1+|\gamma_{21}|^2\right)^2\left(\frac{\partial F}{\partial\gamma_{21}}\frac{\partial G}{\partial\overline{\gamma}_{21}}\frac{\partial F}{\partial\overline{\gamma}_{21}}\frac{\partial G}{\partial\gamma_{21}}\right). \tag{4.121}$$

Poisson-Klammern für SU_3

Für SU_3 ist $\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})$ durch (4.51) und (4.52) gegeben. Damit ergeben sich die Matrixelemente $\omega_{kl,k'l'}$ der symplektischen Form (4.107)

$$\begin{aligned}
\omega_{21,21} &= \frac{\lambda_1}{f_1^2}\left(1+|\gamma_{31}|^2\right) + \frac{\lambda_2}{f_2^2}|\gamma_{32}|^2\left(1+|\gamma_{32}|^2\right)\\
\omega_{21,31} &= -\frac{\lambda_1}{f_1^2}\overline{\gamma}_{21}\gamma_{31} - \frac{\lambda_2}{f_2^2}\gamma_{32}\left(1+|\gamma_{32}|^2\right)\\
\omega_{21,32} &= \frac{\lambda_2}{f_2^2}\gamma_{32}\left(\overline{\gamma}_{21}+\gamma_{32}\overline{\gamma}_{31}\right)\\
\omega_{31,21} &= \overline{\omega_{21,31}}\\
\omega_{31,31} &= \frac{\lambda_1}{f_1^2}\left(1+|\gamma_{21}|^2\right) + \frac{\lambda_2}{f_2^2}\left(1+|\gamma_{32}|^2\right)\\
\omega_{31,32} &= -\frac{\lambda_2}{f_2^2}\left(\overline{\gamma}_{21}+\gamma_{32}\overline{\gamma}_{31}\right)\\
\omega_{32,21} &= \overline{\omega_{21,32}}\\
\omega_{32,31} &= \overline{\omega_{31,32}}\\
\omega_{32,32} &= \frac{\lambda_2 f_1}{f_2^2}
\end{aligned} \tag{4.122}$$

und die Matrixelemente $\omega^{kl,k'l'}$ der Poisson-Klammer (4.109)

$$
\begin{aligned}
\omega^{21,21} &= \frac{f_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left((1+|\gamma_{21}|^2)+\frac{\lambda_2 f_1}{\lambda_1 f_2}\right)\\
\omega^{21,31} &= \frac{f_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\overline{\gamma}_{21}\gamma_{31}+\frac{\lambda_2 f_1}{\lambda_1 f_2}\gamma_{32}\right)\\
\omega^{21,32} &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\overline{\gamma}_{21}+\gamma_{32}\overline{\gamma}_{31}\right)\left(\overline{\gamma}_{21}\gamma_{31}-\gamma_{32}\left(1+|\gamma_{21}|^2\right)\right)\\
\omega^{31,21} &= \overline{\omega^{21,31}}\\
\omega^{31,31} &= \frac{f_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left((1+|\gamma_{31}|^2)+\frac{\lambda_2 f_1}{\lambda_1 f_2}|\gamma_{32}|^2\right)\\
\omega^{31,32} &= \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\overline{\gamma}_{21}+\gamma_{32}\overline{\gamma}_{31}\right)\left(1+|\gamma_{31}|^2-\gamma_{21}\gamma_{32}\overline{\gamma}_{31}\right)\\
\omega^{32,21} &= \overline{\omega^{21,32}}\\
\omega^{32,31} &= \overline{\omega^{31,32}}\\
\omega^{32,32} &= \frac{f_2}{\lambda_1+\lambda_2}\left((1+|\gamma_{32}|^2)+\frac{\lambda_1 f_2}{\lambda_2 f_1}\right).
\end{aligned}
\tag{4.123}
$$

Für entartete Darstellungen braucht man lediglich Untermatrizen von $\{\omega_{kl,k'l'}\}$ und $\{\omega^{kl,k'l'}\}$ zu betrachten und muß die entsprechenden Variablen γ_{ij} null setzen.

4.3.5 Kanonische Koordinaten

Kanonische Koordinaten, für die die symplektische Form auf der Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände auf kanonische Weise geschrieben werden kann, sind im allgemeinen nicht leicht zu finden. Zwar ist es nicht schwer, einen vollständigen Satz von klassischen Observablen zu finden, deren Poisson-Klammern untereinander alle verschwinden, aber das Auffinden der kanonisch konjugierten Variablen gestaltet sich schwierig. Für die Fälle SU_2 und SU_3 werden weiter unten explizit kanonische Koordinaten angegeben.

Zunächst soll aber gezeigt werden, daß es komplexe kanonische Koordinaten auf einer analytischen Erweiterung der kohärenten Zustände Γ^j gibt. Die analytische Erweiterung wird so vorgenommen, daß γ und $\overline{\gamma}$ als unabhängige komplexe Variable angesehen werden. Dann können komplexe Variable

$$\xi_{kl}(\gamma,\overline{\gamma}) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \log \mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}{\partial \gamma_{kl}} \qquad \text{für } k > l \tag{4.124}$$

definiert werden. Nach der Variablentransformation

$$\gamma,\overline{\gamma} \longmapsto \gamma,\xi(\gamma,\overline{\gamma}) \tag{4.125}$$

bekommt die symplektische Form das folgende kanonische Aussehen

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k<l\leq n} \mathbf{d}\gamma_{kl} \wedge \mathbf{d}\xi_{kl}. \tag{4.126}$$

Bei dieser symplektischen Form ist jedoch nicht jeder Summand einzeln reell, wenn man $\overline{\gamma}$ wieder als das komplex konjugierte von γ ansieht. Klassische Dynamik läßt sich in diesen Variablen genauso durchführen wie in reellen Variablen auch, nur ist der Phasenraum doppelt so groß und die Anfangsbedingungen können nicht völlig frei gewählt werden, wenn man eine reelle Lösung im ursprünglichen Phasenraum erhalten will.

Die klassischen Observablen $s_{kl} = \frac{1}{\mathcal{K}} d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma})(\mathcal{K}) = d^{(0)}_{kl}(\gamma) + \tilde{d}_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma})(\log\mathcal{K})$ lassen sich recht einfach als Funktion von γ und ξ ausdrücken, weil die Differentialoperatoren $d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma}) = d^{(0)}_{kl}(\gamma) + \tilde{d}_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma})$ nicht von $\overline{\gamma}$ abhängen (analytisch in γ sind). Reelle kanonische Koordinaten kann man aus (4.126) durch eine kanonische Transformation erhalten. In Abschnitt 3.2.4 wurde ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren angegeben, deren Eigenwerte einen Basiszustand in der Gelfand-Zetlin-Basis des Hilbert-Raums einer irreduziblen SU_n-Darstellung eindeutig festlegen. Daraus läßt sich leicht ein vollständiger Satz von Funktionen auf Γ^j ableiten, deren Poisson-Klammern untereinander alle verschwinden. Dazu betrachtet man die Matrix $s = \{s_{kl}\}$ und ihre Untermatrizen $s_{(l)}$ $(l = 1,\ldots,n-1)$, die aus den ersten l Zeilen und Spalten von s besteht. Dann bilden die $\frac{n(n-1)}{2}$ Funktionen

$$I_{kl}(\gamma,\overline{\gamma}) \equiv \left(c^{(k)}_{l-1}\right)^{1/k} = \left(\text{Spur } s^k_{(l-1)}\right)^{1/k} \qquad k = 1,\ldots,l-1,\ l = 2,\ldots,n \tag{4.127}$$

den gewünschten vollständigen Satz von Funktionen, deren Poisson-Klammern untereinander alle verschwinden (in entarteten Darstellungen sind sie nicht alle unabhängig voneinander, hier soll sich aber der Einfachheit wegen auf den nicht entarteten Fall beschränkt werden). Betrachtet man I_{kl} als Funktionen von γ und ξ, $I_{kl} = I_{kl}(\gamma,\xi)$, dann kann man (lokal) nach γ auflösen und eine erzeugende Funktion $S(\xi, I)$ definieren, für die

$$\gamma_{kl} = \gamma_{kl}(\xi, I) = \frac{\partial S(\xi, I)}{\partial \xi_{kl}} \tag{4.128}$$

gilt. Für die symplektische Form gilt

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} &= \sum_{k<l\leq n} \mathbf{d}\gamma_{kl} \wedge \mathbf{d}\xi_{kl} &&= \sum_{k<l\leq n} \mathbf{d}\left(\frac{\partial S}{\partial \xi_{kl}}\mathbf{d}\xi_{kl}\right) \\
&= \sum_{k<l\leq n} \mathbf{d}I_{kl} \wedge \mathbf{d}\frac{\partial S}{\partial I_{kl}} &&= \sum_{k<l\leq n} \mathbf{d}I_{kl} \wedge \mathbf{d}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial S}{\partial I_{kl}}\right).
\end{aligned} \tag{4.129}$$

Die Gleichheit der letzten beiden Zeilen ergibt sich daraus, daß die symplektische Form $\boldsymbol{\omega}$ in den ursprünglichen Koordinaten $\gamma, \overline{\gamma}$ eine reelle Form ist. Damit sind die reellen Funktionen

$$\phi_{kl} = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial S(\xi, I)}{\partial I_{kl}}\right) \tag{4.130}$$

die kanonisch konjugierten Koordinaten zu den Funktionen I_{kl}

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{k<l\leq n} \mathbf{d}I_{kl} \wedge \mathbf{d}\phi_{kl}. \tag{4.131}$$

Die explizite Durchführung dieses Verfahrens soll für die Fälle SU_2 und SU_3 in den folgenden Unterabschnitten behandelt werden.

Reelle kanonische Koordinaten für SU_2

Der Fall SU_2 ist relativ einfach, weil der Phasenraum nur zweidimensional ist. Die kanonische Koordinate I_{21} entspricht der dritten Komponente eines Drehimpulses

$$I_{21} = s_{11} = \frac{s_{11} - s_{22}}{2} \equiv j_z. \tag{4.132}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \hbar\frac{\lambda_1}{2} - i\gamma_{21}\xi_{21} \\
\Longleftrightarrow \quad \gamma_{21} &= i\frac{I_{21} - \frac{\hbar\lambda_1}{2}}{\xi_{21}} = \frac{\partial S}{\partial \xi_{21}}.
\end{aligned} \tag{4.133}$$

Damit ergibt sich die erzeugende Funktion

$$S = i\left(I_{21} - \frac{\hbar\lambda_1}{2}\right)\log\xi_{21} \tag{4.134}$$

und die zu I_{21} konjugierte Koordinate

$$\phi_{21} = \mathrm{Re}\,(i \log \xi_{21}) = \frac{1}{2i} \log \frac{\gamma_{21}}{\overline{\gamma_{21}}}. \tag{4.135}$$

Die klassische Polarisation s_{12} lautet als Funktion der kanonischen Koordinaten

$$s_{12} = \sqrt{\frac{\hbar^2 \lambda_1^2}{4} - I_{21}^2} \exp\,(i\phi_{21}) \qquad s_{21} = \overline{s_{12}}. \tag{4.136}$$

Reelle kanonische Koordinaten für SU_3

In Abschnitt 3.2.6 wurde der vollständige Satz von Operatoren Y, T_3 und T^2 für irreduzible SU_3-Darstellungen vorgestellt. Die entsprechenden klassischen Observablen lauten

$$\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{3}\,(s_{11} + s_{22} - 2s_{33}) &&= \frac{\hbar(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{3} - i\gamma_{31}\xi_{31} - i\gamma_{32}\xi_{32} \\
t_3 &= \tfrac{1}{2}\,(s_{11} - s_{22}) &&= \frac{\hbar\lambda_1}{2} - i\gamma_{21}\xi_{21} - i\tfrac{1}{2}\gamma_{31}\xi_{31} + i\tfrac{1}{2}\gamma_{32}\xi_{32} \\
t &= \sqrt{t_3^2 + s_{12}s_{21}} &&= \sqrt{\tfrac{1}{4}\,(\hbar\lambda_1 - i\gamma_{31}\xi_{31} + i\gamma_{32}\xi_{32}) + \gamma_{31}\xi_{21}\xi_{32}}.
\end{aligned} \tag{4.137}$$

Löst man diese Gleichungen nach γ auf, erhält man

$$\begin{aligned}
\gamma_{21} = {} & \tfrac{1}{\xi_{21}} \left(-\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + it_3 + \sqrt{\left(\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i \left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) \tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \right) \\
\gamma_{31} = {} & -\tfrac{1}{\xi_{31}} \Bigg(-\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + i \left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) + \\
& + \sqrt{\left(\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i \left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) \tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \Bigg) \\
\gamma_{32} = {} & \tfrac{1}{\xi_{32}} \Bigg(-\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - i \left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) - \\
& - \sqrt{\left(\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i \left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) \tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \Bigg).
\end{aligned} \tag{4.138}$$

Mit der erzeugenden Funktion

$$\begin{aligned} S = \; & \tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + it_3\mathrm{log}\xi_{21} - i\left(\tfrac{\hbar(\lambda_2-\lambda_1)}{3} - \tfrac{y}{2}\right)\mathrm{log}\xi_{32} - \\ & -\sqrt{\left(\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right)\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \\ & +i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right)\Bigg(1 - \mathrm{log}\xi_{31} - \\ & \quad -\mathrm{log}\Bigg[i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) - \tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + \\ & \quad +\sqrt{\left(\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right)\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2}\,\Bigg]\Bigg) \\ & -it\mathrm{log}\Bigg[-t^2 - i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right)\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - \\ & \quad -it\sqrt{\left(\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right)\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2}\,\Bigg] \times \\ & \times\left[\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\left(\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) - t\right)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{4.139}$$

ergeben sich die kanonisch konjugierten Koordinaten

$$\begin{aligned} \phi_y &= \tfrac{i}{4}\mathrm{log}\left[\tfrac{\overline{\gamma}_{31}\left(\overline{\gamma}_{32}(1+|\gamma_{21}|^2)-\gamma_{21}\overline{\gamma}_{31}\right)}{\gamma_{31}(\gamma_{32}(1+|\gamma_{21}|^2)-\overline{\gamma}_{21}\overline{\gamma}_{31})}\right] \\ \phi_{t_3} &= \tfrac{i}{2}\mathrm{log}\left[\tfrac{\lambda_1 f_2\overline{\gamma}_{21}-\lambda_2 f_1\gamma_{32}(\overline{\gamma}_{31}-\overline{\gamma}_{32}\overline{\gamma}_{21})}{\lambda_1 f_2\gamma_{21}-\lambda_2 f_1\overline{\gamma}_{32}(\gamma_{31}-\gamma_{32}\gamma_{21})}\right] \\ \phi_t &= \mathrm{Re}\Bigg(i\mathrm{log}\Bigg[-\tfrac{2\xi_{31}t^2}{\xi_{32}\xi_{21}} - i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right) - \\ & \quad -\tfrac{2\xi_{31}t}{\xi_{32}\xi_{21}}\sqrt{\left(\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3} - \tfrac{y}{2}\right)\tfrac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2}\,\Bigg]\Bigg). \end{aligned} \tag{4.140}$$

Die verbliebenen klassischen SU_3-Observablen s_{ij} lassen sich über

$$\begin{aligned} s_{12} &= \exp\left(i\phi_{t_3}\right)\sqrt{t^2-t_3^2} \\ s_{13} &= \exp\left[\tfrac{i}{2}\left(2\phi_y+\phi_{t_3}+\phi_t\right)\right]\sqrt{t+t_3}A+ \\ &\quad +\exp\left[\tfrac{i}{2}\left(2\phi_y+\phi_{t_3}-\phi_t\right)\right]\sqrt{t-t_3}B \\ s_{23} &= \exp\left[\tfrac{i}{2}\left(2\phi_y-\phi_t+\phi_{t_3}\right)\right]\sqrt{t-t_3}A- \\ &\quad -\exp\left[\tfrac{i}{2}\left(2\phi_y-\phi_t-\phi_{t_3}\right)\right]\sqrt{t+t_3}B \end{aligned} \tag{4.141}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2t}\sqrt{\left(\tfrac{\hbar(\lambda_1-\lambda_2)}{3}+t+\tfrac{y}{2}\right)\left(\tfrac{\hbar(\lambda_1+2\lambda_2)}{3}+t+\tfrac{y}{2}\right)\left(\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3}-t-\tfrac{y}{2}\right)} \\ B &= \tfrac{1}{2t}\sqrt{\left(-\tfrac{\hbar(\lambda_1-\lambda_2)}{3}+t-\tfrac{y}{2}\right)\left(\tfrac{\hbar(\lambda_1+2\lambda_2)}{3}-t+\tfrac{y}{2}\right)\left(\tfrac{2\lambda_1+\lambda_2}{3}+t-\tfrac{y}{2}\right)} \end{aligned} \qquad (4.142)$$

durch die kanonischen Variablen ausdrücken.[6]
Der Wertebereich der Wirkungsvariablen lautet

$$\begin{aligned} y &\in \left[-\tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3}, \tfrac{\hbar(\lambda_1-\lambda_2)}{3}\right] \\ t &\in \Bigl[\max\left\{\tfrac{y}{2}-\tfrac{\hbar(\lambda_2-\lambda_1)}{3}, \tfrac{\hbar(\lambda_2-\lambda_1)}{3}-\tfrac{y}{2}\right\}, \\ &\qquad \min\left\{\tfrac{y}{2}+\tfrac{\hbar(\lambda_1+2\lambda_2)}{3}, \tfrac{\hbar(2\lambda_1+\lambda_2)}{3}-\tfrac{y}{2}\right\}\Bigr] \\ t_3 &\in [-t,t]\,. \end{aligned} \qquad (4.143)$$

---

[6] Die kanonischen Koordinaten auf kohärenten Zuständen der Lie-Gruppe SU_3 (bzw. auf koadjungierten Bahnen von SU_3, die mathematisch äquivalente Mannigfaltigkeiten zu den kohärenten Zuständen bilden – siehe Anhang B und [37,106]) sind auch auf andere Weise ausgerechnet worden [34,108].

5. Klassische SU_n-Observablen und der klassische Grenzfall

In diesem Kapitel wird die klassische Dynamik von Observablen s_{ij} („klassische SU_n-Observablen“) dargestellt. Die Poisson-Klammern der klassischen SU_n-Observablen erfüllen die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra $\mathfrak{su}_n$ (bzw. $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$). Eine solche Dynamik entsteht im klassischen Grenzfall für global gekoppelte n-Niveau-Atome. In Abschnitt 5.1 wird sie zunächst ohne Bezugnahme auf den klassischen Grenzfall in ihrem eigenen Recht vorgeführt. Als klassische Phasenräume erweisen sich die Mengen aller spurlosen hermiteschen $n \times n$-Matrizen mit den gleichen Eigenwerten.[1] Als symplektische Mannigfaltigkeiten sind die Phasenräume für die Dynamik von klassischen SU_n-Observablen äquivalent zu den kohärenten Zuständen (siehe Abschnitt 4.3).[2]

In Abschnitt 5.2 wird gezeigt, wie sich eine solche klassische Dynamik bei global gekoppelten n-Niveau-Atomen ergibt, wenn die Dimension des Hilbert-Raums nach unendlich geht [33,109,106]. Der Hilbert-Raum ist durch eine irreduzible Darstellung $\lambda = [\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_{n-1}]$ festgelegt, und die Dimension des Hilbert-Raums ist eine wachsende Funktion der λ_k. Eine Route zum klassischen Grenzfall ist durch eine Folge von irreduziblen Darstellungen gegeben, bei der die Dimension des Hilbert-Raums ins Unendliche wächst. Grundsätzlich gibt es viele Routen, auf denen die Dimension des Hilbert-Raums wachsen kann, und verschiedene Routen führen auf verschiedene Phasenräume. Für eine gegebene irreduzible Darstellung λ gibt es jedoch genau eine kanonische Route zum klassischen Grenzfall. Auf dieser Route sind die Verhältnisse $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$ konstant, und die kohärenten Zustände haben auf der gesamten Route eine äquivalente symplektische Struktur. Für SU_3-Observable ist der klassische Grenzfall ausführlich in [77,110] beschrieben.

---

[1] Solche Räume lassen sich auch als Restklassen der Lie-Gruppe SU_n bezüglich abgeschlossener Untergruppen auffassen.

[2] In der mathematischen Literatur sind diese Phasenräume als Bahnen der koadjungierten Darstellung oder einfach als koadjungierte Bahnen von SU_n bekannt [106,107] – eine kleine mathematische Einführung in koadjungierte Bahnen ist im Anhang B zu finden.

5.1 Die klassische Lie-Algebra der SU_n-Observablen

Die klassische SU_n-Observablen sind n^2 komplexe Größen s_{ij} $(i,j=1,\ldots,n)$ mit

$$s_{ij}=\overline{s}_{ji} \qquad \sum_{k=1}^{n} s_{kk}=0, \tag{5.1}$$

deren Poisson-Klammern durch

$$\{s_{ij},s_{kl}\}=i\delta_{kj}s_{il}-i\delta_{il}s_{kj} \tag{5.2}$$

gegeben sind.[3] Die Observablen s_{ij} bilden eine hermitesche spurlose Matrix

$$s=\{s_{ij}\}\,. \tag{5.3}$$

Sie spannen einen Raum $\mathcal{M}$ der reellen Dimension n^2-1 auf. Die Dynamik dieser Observablen ist mit einer (reellen) Hamilton-Funktion $H=H(s_{ij})$ durch die Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}s_{ij}=\{H,s_{ij}\} \tag{5.4}$$

gegeben.
Es ist leicht nachzuweisen, daß die Poisson-Klammern der **Casimir-Funktionen**

$$c_k(s_{ij})=\text{Spur } s^k \qquad k=1,2,\ldots,n \tag{5.5}$$

mit jeder Hamilton-Funktion $H(s_{ij})$ verschwinden

$$\{H,c_k\}=0. \tag{5.6}$$

Die Casimir-Funktionen sind Konstanten der Bewegung für jede Hamilton-Funktion (wie in der Quantenmechanik von SU_n-Observablen, wo die Casimir-Operatoren Bewegungskonstanten sind und diese Eigenschaft unabhängig davon ist, wie der Hamilton-Operator aus den SU_n-Observablen aufgebaut ist). Der Wert der Casimir-Funktion c_1 wurde bereits festgelegt $c_1=\sum_{k-1}^{n}s_{kk}=0$.[4] Es bleiben also $n-1$ nichttriviale Bewegungskonstanten, und jede Dynamik ist auf Hyperflächen $c_k(s_{ij})=c_k^{(0)}$ $(k=2,\ldots,n)$ mit reellen Konstanten $c_k^{(0)}$ eingeschränkt.
Mit $c\equiv(c_2^{(0)},\ldots,c_n^{(0)})$ bildet

$$\mathcal{M}_c=\left\{s\in\mathcal{M}:\text{Spur } s^2=c_2^{(0)},\ldots,\text{Spur } s^n=c_n^{(0)}\right\}\subset\mathcal{M} \tag{5.7}$$

---

[3] Das sind die Vertauschungsregeln der Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$, die hier wegen der Einschränkungen (5.1) auch als $\mathfrak{su}_n$-Vertauschungsregeln gelten dürfen.

[4] Für Observable s_{ij}, die $c_1=0$ nicht erfüllen, kann zu Observablen $s'_{kl}=s_{kl}-\frac{c_1}{n}$ übergegangen werden, die diese Bedingung erfüllen.

einen Phasenraum für die klassische Dynamik der SU_n-Observablen.[5] Im Phasenraum $\mathcal{M}_c$ schneiden sich die $n-1$ Hyperflächen, die durch $c_k = c_k^{(0)}$ charakterisiert sind. Damit hat der Phasenraum generisch die Dimension $n(n-1)$. Für einige Werte der Casimir-Funktionen können auch Phasenräume niedrigerer Dimension entstehen. Eine alternative Beschreibung des Phasenraums $\mathcal{M}_c$ ist besser geeignet, um die Dimension zu untersuchen. Die Eigenwerte σ_k der Matrix s können zu einem Vektor $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ zusammengefaßt werden, der so geordnet sein soll, daß

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \tag{5.8}$$

gilt. Die Eigenwerte sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polinoms

$$\det(x\mathbb{I} - s) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (x - \sigma_1)(x - \sigma_2) \cdots (x - \sigma_n) \tag{5.9}$$

festgelegt. Dabei lassen sich alle Koeffizienten a_k durch die Spuren $c_k = \mathrm{Spur}\, s^k$ $(k = 1, \ldots, n)$ ausdrücken

$$a_k = a_k(c). \tag{5.10}$$

Alle Koeffizienten a_k und damit auch die Eigenwerte σ sind also auf den Phasenräumen $\mathcal{M}_c$ konstant. Andersherum sind die Casimir-Funktionen eindeutig durch die Eigenwerte gegeben. Der Phasenraum $\mathcal{M}_c$ wird durch alle hermiteschen spurlosen Matrizen mit den gleichen Eigenwerten σ aufgespannt

$$\mathcal{M}_c \equiv \mathcal{M}_\sigma = \big\{ s \in \mathcal{M} : \det(\sigma_k - s) = 0, k = 1, 2, \ldots, n \big\}. \tag{5.11}$$

Mit dieser Beschreibung des Phasenraumes ist es einfach, die Dimension von $\mathcal{M}_\sigma$ abzuzählen. Jede Matrix $s \in \mathcal{M}_\sigma$ läßt sich durch eine Konjugation mit einer Matrix $g \in SU_n$ diagonalisieren

$$s = g\, d_\sigma\, g^\dagger \tag{5.12}$$

mit

$$d_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \sigma_n \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

---

[5] Man könnte diese Phasenräume in Analogie zur Quantenmechanik irreduzibel nennen.

Der Zusammenhang zwischen s und g ist nicht eindeutig. Wenn g die Matrix s diagonalisiert, dann auch die Matrix $g\,h$, falls $h \in SU_n$ die Diagonalmatrix d_σ invariant läßt. Die Matrizen h, die d_σ invariant lassen, bilden eine Untergruppe I_{d_σ} von SU_n

$$I_{d_\sigma} = \big\{h \in SU_n : hd_\sigma h = d_\sigma\big\}, \tag{5.14}$$

die **Isotropiegruppe** von d_σ.

Seien zunächst die Eigenwerte σ nicht entartet $\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_n$. Dann sind die einzigen Matrizen, die d_σ invariant lassen selbst Diagonalmatrizen. Die Untergruppe aller Diagonalmatrizen in SU_n ist äquivalent zum $n-1$-fachen kartesischen Produkt von U_1. Also lautet die Isotropiegruppe

$$I_{d_\sigma} = (U_1)^{n-1}\,. \tag{5.15}$$

Sind zwei Eigenwerte entartet, zum Beispiel $\sigma_1 = \sigma_2$, dann läßt auch jede Matrix der Form

$$h = \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n-2} \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

die Diagonalmatrix d_σ invariant, wobei $\tilde{h}$ eine 2×2-Matrix aus SU_2 und $\mathbb{I}_{n-2}$ eine $(n-2) \times (n-2)$-Einheitsmatrix ist. Damit vergrößert sich die Isotropiegruppe auf

$$I_{d_\sigma} = SU_2 \times (U_1)^{n-2}\,. \tag{5.17}$$

Je mehr Entartung auftritt, desto größer wird die Isotropiegruppe. Die weitere Diskussion der Isotropiegruppen verläuft wie bei der Bestimmung der Isotropiegruppe des Zustands höchsten Gewichts (bzw. eines beliebigen kohärenten Zustands) in einer irreduziblen SU_n-Darstellung λ in Abschnitt 4.1.2.[6]

Damit ist der Phasenraum $\mathcal{M}_\sigma$ topologisch äquivalent zu den Restklassen

$$\mathcal{M}_\sigma \equiv SU_n / I_{d_\sigma} \tag{5.18}$$

mit der Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\sigma = \dim_{\mathbb{R}} SU_n - \dim_{\mathbb{R}} I_{d_\sigma}. \tag{5.19}$$

Einen Punkt auf dem Phasenraum $\mathcal{M}_\sigma$ kann man durch untere Dreiecksmatrizen $\gamma \in Z^-_{n,j}$ parametrisieren (siehe Abschnitt 4.1.2 und 4.1.3), indem man

$$s(\gamma) = g(\gamma, \phi = 0) d_\sigma g(\gamma, \phi = 0)^\dagger \tag{5.20}$$

---

[6] Die ganzen Zahlen λ_k bei den irreduziblen Darstellungen entsprechen dabei hier den Differenzen von Eigenwerten $\sigma_k - \sigma_{k+1}$.

setzt, wobei $g(\gamma,\phi)\in SU_n$ durch (3.48) gegeben ist. Die gesamte Struktur ähnelt sehr den kohärenten Zuständen. Die Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände für eine irreduzible SU_n-Darstellung und der Phasenraum $\mathcal{M}_\sigma$ sind sowohl topologisch als auch symplektisch äquivalent, wenn man $\hbar\lambda_k \equiv \sigma_k - \sigma_{k+1}$ setzt. Die klassischen Observablen $s_{ij}(\gamma)$, die in Gleichung 4.104 für kohärente Zustände definiert wurde, und die Matrixelemente von $s(\gamma)$ sind die gleichen Funktionen von γ und haben die gleichen Poisson-Klammern. Die symplektische Form auf dem Phasenraum $\mathcal{M}_\sigma$ lautet somit

$$\boldsymbol{\omega}_{\Gamma^j} = \frac{1}{i}\sum_{k>l,k'>l'} \omega_{kl,k'l'}\mathbf{d}\gamma_{kl}\wedge\mathbf{d}\gamma_{k'l'} \tag{5.21}$$

mit den Koeffizienten

$$\omega_{kl,k'l'}(\gamma,\overline{\gamma}) = \frac{\partial^2 \log\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma})}{\partial\gamma_{kl}\partial\gamma_{k'l'}} \tag{5.22}$$

und der erzeugenden Funktion

$$\mathcal{K}(\gamma,\overline{\gamma}) = \prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma,\overline{\gamma})^{\sigma_k-\sigma_{k+1}}. \tag{5.23}$$

Da die Casimir-Funktionen c_k konstant auf $\mathcal{M}_\sigma$ sind, erlaubt die Diagonalmatrix d_σ deren einfache Berechnung

$$c_k = \text{Spur } s^k = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j^k. \tag{5.24}$$

5.2 Der klassische Grenzfall für quantenmechanische SU_n-Observable

Die Dynamik der quantenmechanischen Leiteroperatoren S_{kl} ist im Heisenberg-Bild durch die Heisenberg-Gleichung

$$\dot{S}_{kl}(t) = \frac{i}{\hbar}\,[H, S_{kl}(t)] \tag{5.25}$$

gegeben, wobei die zeitabhängigen Leiteroperatoren mit den Anfangsbedingungen

$$S_{kl}(t=0) = S_{kl} \tag{5.26}$$

versehen werden. Die Vertauschungsregeln (2.13) bleiben dann für die zeitabhängigen Leiteroperatoren erhalten. Der hermitesche Hamilton-Operator sei in diesem Abschnitt ein Polinom in den Leiteroperatoren der Form S_{kl}

$$H = \sum_{k_1,k_2=1}^{n} a^{(1)}_{k_1k_2}\hbar S_{k_1k_2} + \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{n} a^{(2)}_{k_1k_2k_3k_4}\hbar^2 S_{k_1k_2}S_{k_3k_4} + \ldots. \tag{5.27}$$

Die Skalierung der einzelnen Terme muß hier so vorgenommen werden, daß $\hbar$ immer in der gleichen Potenz steht wie die Operatoren S_{kl}, damit ein klassischer Grenzfall existiert.[7] Die Koeffizienten $a^{(i)}$ dürfen nicht von $\hbar$ abhängen. Außerdem soll angenommen werden, daß die Operatoren S_{kl} die Generatoren einer irreduziblen SU_n-Darstellung λ bilden.

Die kohärenten Zustände stehen im Mittelpunkt dieser Konstruktion des klassischen Grenzfalles. Die Mannigfaltigkeit Γ^j der kohärenten Zustände bildet mit ihrer symplektischen Struktur den richtigen klassischen Phasenraum für den klassischen Grenzfall. Die Anzahl der Freiheitsgrade f des klassischen Systems muß also die halbe Dimension von Γ^j sein

$$f = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \Gamma^j. \tag{5.28}$$

Der klassischen Grenzfall ist eine Dynamik, die sich formal für

$$\hbar \longrightarrow 0 \tag{5.29}$$

ergibt. Gleichzeitig muß die Niveaudichte ansteigen, d.h. die Dimension des Hilbert-Raums muß nach unendlich gehen. Die Dimension des Hilbert-Raums $\mathcal{H}_\lambda$ einer irreduziblen SU_n-Darstellung λ ist ein Polinom in den ganzen Zahlen λ_k des Grades f,

---

[7] Wenn $\hbar$ in höherer Potenz steht als die S_{kl}, fällt der Term im klassischen Grenzfall weg. Steht $\hbar$ in kleinerer Potenz, divergiert die klassische Hamilton-Funktion.

dessen Wert in allen λ_i wächst. Der natürlichste Weg, die Dimension nach unendlich gehen zu lassen, besteht darin, eine Folge $\lambda^{(k)}$ (mit $k = 1, 2, \dots$) von irreduziblen Darstellungen zu betrachten, so daß

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{(1)} = \lambda_1 \quad \lambda_2^{(1)} = \lambda_2 \quad \dots \\ &\lambda_1^{(k)} = k\lambda_1 \quad \lambda_2^{(k)} = k\lambda_2 \quad \dots . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Auf diese Weise werden alle Quotienten $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$ festgehalten. Außerdem ist die symplektische Struktur der kohärenten Zustände in diesen Darstellungen äquivalent, wenn man

$$\hbar = \frac{1}{\sum_{l=1}^{n-1} \lambda_l^{(k)}} = \frac{1}{k \sum_{l=1}^{n-1} \lambda_l} \sim \frac{1}{k} \tag{5.31}$$

setzt. Damit gilt für die Dimension des Hilbert-Raums

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{\lambda^{(k)}} \sim k^f \sim \frac{1}{\hbar^f}. \tag{5.32}$$

Der Phasenraum, die Poisson-Klammern (die symplektische Struktur) und klassische Observable $s_{kl} = \hbar\langle\gamma|S_{kl}|\gamma\rangle$ wurden bereits im Kapitel 4 über kohärente Zustände ausführlich behandelt.

Um die Dynamik im klassischen Grenzfall zu erhalten, nimmt man den Erwartungswert der Heisenberg-Gleichung in kohärenten Zuständen

$$\langle\gamma|\dot{S}_{ij}(t)|\gamma\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle\gamma|\,[H, S_{ij}(t)]\,|\gamma\rangle. \tag{5.33}$$

Dabei braucht man nicht annehmen, daß sich das System tatsächlich in einem kohärenten Zustand befindet. Alle Größen sind als Funktionen von γ, d.h. als Funktionen auf dem Phasenraum zu betrachten. Die Funktion $s_{ij}(t) = \hbar\,\langle\gamma|S_{ij}(t)|\gamma\rangle$ auf dem Phasenraum enthält alle Information über den Operator $S_{ij}(t)$.

Nachdem man (5.33) auf beiden Seiten mit $\hbar$ multipliziert hat, sind sie im Grenzfall $\hbar \longrightarrow 0$ endlich. Es ergibt sich die klassische Dynamik

$$\dot{s}_{ij}(t) = \left\{H^{kl}, s_{ij}(t)\right\} \tag{5.34}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H^{kl} &= \lim\nolimits_{\hbar\to 0}\langle\gamma|H|\gamma\rangle \\ &= \sum\nolimits_{k_1,k_2=1}^{n} a^{(1)}_{k_1 k_2} s_{k_1 k_2} + \sum\nolimits_{k_1,k_2,k_3,k_4=1}^{n} a^{(2)}_{k_1 k_2 k_3 k_4} s_{k_1 k_2} s_{k_3 k_4} + \dots . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß die erste Zeile von (5.35) tatsächlich gegen die in der zweiten Zeile angegebene Funktion konvergiert. Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned} \hbar^2\langle\gamma S_{k_1k_2}S_{k_3k_4}|\gamma\rangle &= \hbar\tfrac{1}{\mathcal{K}}d_{k_1k_2}\left(\mathcal{K}s_{k_3k_4}\right) = \\ &= s_{k_1k_2}s_{k_3k_4} + \hbar\tilde{d}_{k_1k_2}s_{k_3k_4} \longrightarrow s_{k_1k_2}s_{k_3k_4} \qquad \text{für } \hbar \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Hier ist $\mathcal{K} = \langle\gamma||\gamma\rangle$ die erzeugende Funktion (4.5) und d_{ij} und $\tilde{d}_{ij}$ sind die durch (4.24) und (4.112) gegebenen Differentialoperatoren. Die Erwartungswerte von Leiteroperatoren in kohärenten Zuständen faktorisieren im klassischen Grenzfall. Diese Eigenschaft kann ausgenutzt werden, um zu zeigen, daß die rechte Seite von (5.33) gegen die Poisson-Klammer (5.34) konvergiert. Speziell gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{i}{\hbar}\langle\gamma|[\hbar S_{k_1k_2}\hbar S_{k_3k_4}, \hbar S_{k_5k_6}]|\gamma\rangle \quad &= \quad \tfrac{i}{\hbar}\big(\langle\gamma|\hbar S_{k_1k_2}[\hbar S_{k_3k_4}, \hbar S_{k_5k_6}]|\gamma\rangle + \\ &\qquad + \langle\gamma|[\hbar S_{k_1k_2}, \hbar S_{k_5k_6}]\hbar S_{k_3k_4}|\gamma\rangle\big) \\ &\xrightarrow{\hbar\to 0} \quad s_{k_1k_2}\{s_{k_3k_4}, s_{k_5k_6}\} + \{s_{k_1k_2}, s_{k_5k_6}\}s_{k_3k_4} \\ &= \quad \{s_{k_1k_2}s_{k_3k_4}, s_{k_5k_6}\}\,. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Es besteht keine Schwierigkeit, dies auf höhere Ordnungen zu verallgemeinern. Damit ist die Konvergenz auf die klassische Dynamik (5.34) gezeigt.
Bisher wurden keine expliziten Annahmen über den Zustand des Systems gemacht. Der beschriebene klassische Grenzfall behandelt nur die Operatoren $S_{ij}(t)$ im Heisenberg-Bild. Diese Operatoren werden dazu als Funktionen auf dem Phasenraum dargestellt, die einen wohldefinierten klassischen Grenzfall haben. Um den klassischen Grenzfall abzurunden, müßte man zusätzlich den Zustandsoperator $|\Psi\rangle$ behandeln, indem man ihm eine Verteilungsfunktion auf dem Phasenraum zuordnet – etwa die Husimi-Funktion

$$H(\gamma,\overline{\gamma}) = |\langle\gamma|\Psi\rangle|^2. \tag{5.38}$$

Diese Wahl ist jedoch nicht eindeutig. Außerdem gibt es keine natürliche Vorschrift, wie man bei der Folge von irreduziblen Darstellungen $\{\lambda^{(k)}\}$ in jedem Hilbert-Raum $\mathcal{H}_{\lambda^{(k)}}$ jeweils einen Zustand $|\Psi^{(k)}\rangle$ festlegen könnte. Eine solche Vorschrift ist nur dann natürlich, wenn der Zustand $|\Psi\rangle$ ein kohärenter Zustand $|\gamma_\Psi\rangle$ ist. Dann ist ein Punkt im Phasenraum festgelegt, der in jeder irreduziblen Darstellung einen kohärenten Zustand definiert. Für eine solche Wahl des Zustands ist der betrachtete klassische Grenzfall der Größe s_{kl} äquivalent zu der Betrachtung der Größen

$$\sigma_{kl}(t) = \hbar\langle\Psi|S_{kl}(t)|\Psi\rangle. \tag{5.39}$$

Im allgemeinen werden die Größen σ_{kl} immer dann eine wohldefinierte klassische Grenzdynamik haben, wenn sich die Husimi-Funktion $|\langle\gamma|\Psi\rangle|^2$ für $\hbar \longrightarrow 0$ auf einen Punkt im Phasenraum konzentriert (d.h. zu einer δ-Funktion wird). Ist das nicht der Fall (wie zum Beispiel bei Katzen-Zuständen), dann können die Erwartungswerte $\langle\Psi|\hbar S_{kl}\hbar S_{ij}|\Psi\rangle$ für $\hbar \longrightarrow 0$ nicht faktorisieren $\lim_{\hbar\to 0}\langle\Psi|\hbar S_{kl}\hbar S_{ij}|\Psi\rangle \neq \sigma_{kl}\sigma_{ij}$. Die Dynamik der $\sigma_{kl}(t)$ hat dann keinen wohldefinierten klassischen Grenzfall.

6. Quantenchaos von SU_3-Observablen

In diesem Kapitel werden numerische Resultate vorgestellt, die die Abhängigkeit der Niveaustatistik und der Niveaudynamik eines Hamilton-Operators, der aus den SU_3-Observablen S_{kl} aufgebaut ist, von der irreduziblen Darstellung $\lambda = [\lambda_1; \lambda_2]$ illustrieren. Die klassischen Phasenräume sind in diesem Fall sechsdimensional (drei Freiheitsgrade) für die nichtentarteten Darstellungen und vierdimensional (zwei Freiheitsgrade) für die entarteten Darstellungen ($\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ oder $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$).

Alle in diesem Kapitel untersuchten Hamilton-Operatoren haben neben der Energie eine weitere Erhaltungsgröße. Nimmt man den klassischen Grenzfall für ein Multiplett dieser Erhaltungsgröße, dann verringert sich die Anzahl der Freiheitgrade im klassischen Grenzfall um eins.[1] Für die entarteten Darstellungen ergibt sich damit eine klassische Dynamik mit einem Freiheitsgrad, die immer integrabel ist. Für die nichtentarteten Darstellungen ist Chaos bei zwei Freiheitsgraden jedoch möglich. Die Hamilton-Operatoren in diesem Kapitel sind so gewählt, daß im nichtentarteten Fall ein gemischter Phasenraum ensteht, der bei Energien in der Mitte des klassischen Spektrums überwiegend chaotisch ist.

Die quantenmechanischen Signaturen von Chaos und Integrabilität zeigen sich deutlich in der Niveauabstandsverteilung $P(s)$. Gemäß einer Vermutung von *Bohigas, Giannoni* und *Schmit* [111] werden die Fluktuationen im Spektrum eines Hamilton-Operators, der im klassischen Grenzfall eine chaotische Dynamik erzeugt, durch die Zufallsmatrixtheorie beschrieben. Diese Vermutung ist durch zahlreiche experimentelle und numerische Daten gut bestätigt [39,112–114]. Die in diesem Kapitel betrachteten Dynamiken sind invariant unter einer Zeitumkehrtransformation, so daß mit dem Gaußschen orthogonalen Ensemble (GOE) verglichen werden muß, das lineare Niveauabstoßung in $P(s)$ vorhersagt. Systeme, deren klassischer Grenzfall integrabel ist und mindestens zwei Freiheitsgrade hat, haben generisch eine Poisson-Verteilung für $P(s)$ [115], d.h. es herrscht Niveauhäufung. Klassisch integrable Systeme mit nur einem Freiheitsgrad haben keine generische Niveauabstandsverteilung. Sie zeigen oft ein sehr rigides Spektrum.

---

[1] Bei einer klassischen Dynamik mit f Freiheitsgraden $(q,p) = (q_1, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_f)$ und $k < f$ Konstanten der Bewegung C_i in Involution ($\{H, C_i\} = 0$ und $\{C_i, C_j\} = 0$), existiert eine kanonische Transformation auf neue Koordinaten (Q,P) mit $P_i = C_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Die Hamilton-Funktion $H(P,Q)$ hängt von neuen Q_i mit $i = 1, \ldots, k$ nicht ab, so daß eine klassische Dynamik mit $f-k$ Freiheitsgraden entsteht, wenn alle Konstanten der Bewegung feste Werte $C_i = c_i$ haben.

In Abschnitt 6.1 wird die Niveauabstandsverteilung $P(s)$ und deren Integral $N(s)$ von zwei beispielhaften Hamilton-Operatoren mit Phasenraumportraits in Poincaré-Schnitten durch die Energieschale verglichen. Für entartete Darstellungen zeigt sich erwartungsgemäß Niveauhäufung als Signatur von Integrabilität. Für nichtentartete Darstellungen gibt es einen Übergang von Niveauhäufung zu Niveauabstoßung, der von einem Anwachsen der chaotischen Anteile des Phasenraums der klassischen Dynamik begleitet wird [110].

In Abschnitt 6.2 werden einparametrige Familien von Hamilton-Operatoren der Form $H(\lambda) = H_1 \sin\lambda + H_2 \cos\lambda$ in einem Hilbert-Raum der Dimension N betrachtet. Wenn man λ formal als eine Zeit betrachtet, führt das zu einer Dynamik der Eigenwerte $E_k(\lambda)$ und Eigenvektoren $|k\rangle(\lambda)$, die man durch Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben kann, wie von *P. Pechukas* gezeigt wurde [116]. *T. Yukawa* zeigte, daß sich diese Differentialgleichungen als Hamiltonsche Gleichungen für ein fiktives eindimensionales Gas (das Pechukas-Yukawa-Gas) aus N Teilchen interpretieren lassen [117,118]. Der Eigenwert $E_k(\lambda)$ beschreibt dann den Ort des k-ten Teilchens zur Zeit λ. Die Wechselwirkung der Teilchen wird durch Kopplungskonstanten beschrieben, die selbst dynamische Variable im Phasenraum darstellen.[2] Trotz dieser hochgradig nichtlinearen Wechselwirkung ist die Hamiltonsche Dynamik integrabel, was nicht verwundert, wenn man bedenkt, daß alle dynamischen Größen durch Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix gewonnen werden können.

Laufen zwei eng beieinanderliegende benachbarte Eigenwerte aufeinander zu, dann kommt es für $H(\lambda)$ mit chaotischem klassischen Äquivalent zu einer Abstoßung der Eigenwerte, die eine Kreuzung verhindert. Solche vermiedenen Kreuzungen treten auch bei klassisch integrablen Systemen auf, jedoch ist die Anzahl der deutlich vermiedenen Kreuzungen viel geringer als im chaotischen Fall. Der Status von vermiedenen Kreuzungen im klassisch integrablen Fall wird in Abschnitt 6.2.1 behandelt. Niveaudynamik in diesem Sinn bietet einen Zugang, die bereits oben erwähnte Vermutung von *Bohigas, Giannoni* und *Schmit* [111] plausibel zu machen, gemäß der Fluktuationen im Spektrum eines quantenmechanischen Systems mit chaotischem klassischen Äquivalent durch Zufallsmatrixtheorie beschrieben werden können. In der Tat konnte gezeigt werden, daß die statistische Mechanik des Pechukas-Yukawa-Gases über eine geeignet gewählte Zustandssumme in der Lage ist, alle spektralen Korrelationsfunktionen der Zufallsmatrixtheorie für orthogonale, unitäre oder symplektische Ensembles wiederzugeben [40,120–123]. Klassisch chaotische $H(\lambda)$ zeigen generisch vermiedene Kreuzungen in den Eigenwerten $E_k(\lambda)$ alias Stöße der Gasteilchen des Pechukas-Yukawa-Gases. Nach wenigen Stößen darf man erwarten, einen typischen Gleichgewichtszustand erreicht zu haben.[3] Auf diese Weise kann gezeigt

---

[2] *P. Pechukas* und *T. Yukawa* betrachten einparametrige Familien des Typs $H(\lambda) = H_0 + \lambda V$, die sich in den hier wesentlichen Eigenschaften nicht von den hier betrachteten Familien unterscheiden [40,119].

[3] Integrable einparametrige Familien $H(\lambda)$ entsprechen besonderen Anfangsbedingungen für das

werden, daß ein Ensemble von quantenmechanischen Systemen mit chaotischen klassischen Gegenstücken im Ensemblemittel die von der Zufallsmatrixtheorie vorhergesagten spektralen Fluktuationen besitzt (bis auf Korrekturen der Größenordnung $O(N)$ – mehr darf auch gar nicht erwartet werden). Wegen der bekannten Ergodizität des Pechukas-Yukawa-Gases gilt dies ebenso für eine einparametrige Familie (eine Realisierung des Pechukas-Yukawa-Gases) $H(\lambda)$, wenn man über die „Zeit" λ mittelt. Die mittlere Stoßzeit $\Delta\lambda_S$, also der mittlere Abstand zwischen zwei (im allgemeinen vermiedenen) Kreuzungen eines Eigenwertes $E_{k(\lambda)}$, gibt das Parameterintervall an, auf dem die Mittelung über den Parameter λ mit der Ensemblemittelung gut übereinstimmt.

In Abschnitt 6.2.2 werden Niveaudynamiken numerisch betrachtet, bei denen $H(\lambda)$ aus den Generatoren von SU_3 aufgebaut ist. Das Interesse gilt dem Verhalten der Stoßzeit $\Delta\lambda_S$ im klassischen Grenzfall $\hbar \longrightarrow 0$ (also $N \to \infty$ für $N \times N$-Matrizen). Verhält sich die Stoßzeit wie $\Delta\lambda_S \sim N^{-\nu}$ mit positivem ν, dann ergibt sich eine Möglichkeit, die Universalität der Spektralfluktuationen für ein einziges klassisches System zu zeigen, da in diesem Fall der Parameterbereich von λ, über den gemittelt werden muß, um die universellen Fluktuationen zu finden, im klassischen Limes auf einen Punkt zusammenzieht. Bei endlichem $\hbar$ unterscheiden sich die Systeme, über die gemittelt wurde, dann nur um Beiträge der Größenordnung $\hbar^{f\nu}$ (f ist die Anzahl der Freiheitsgrade). Ein einfaches Argument liefert den Exponenten $\nu = \frac{1}{2}$ – dieses Argument ist jedoch zu schwach, um die Annahme eines universellen Exponenten ν zu rechtfertigen. Tatsächlich weichen die numerisch gewonnenen Exponenten ν von dieser Vorhersage ab, wobei die numerisch gewonnenen Exponenten größer sind als $\frac{1}{2}$ und einen schnelleren Abfall der Stoßzeit im klassischen Grenzfall liefern.

Pechukas-Yukawa-Gas, bei denen dieses Gleichgewicht nicht errreicht wird. Besondere Anfangsbedingungen, die nicht zu einer Äquilibration führen, gibt es auch für ein gewöhnliches Gas aus Kugeln mit festem Radius in einem Kastenbehälter.

6.1 Signaturen von Chaos und Integrabilität

6.1.1 Zwei Beispiele für Dynamiken von SU_3-Observablen

Im folgenden werden beispielhaft zwei Hamilton-Operatoren

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar T_3 + 3\hbar^2 \left(S_{12}^2 + S_{21}^2\right) + 15\hbar^2 \left(S_{13}S_{32} + S_{23}S_{31}\right) \\ H_2 &= \sin(100\,\hbar\,T_3) + \frac{\hbar}{2}\left(S_{12}^2 + S_{21}^2\right) + 100\hbar^2 \left(S_{13}S_{32} + S_{23}S_{31}\right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

untersucht (mit $\hbar = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$). Beide Hamilton-Operatoren vertauschen mit der Hyperladung

$$[H_i, Y] = 0 \qquad i = 1, 2. \tag{6.2}$$

Alle quantenmechanischen Untersuchungen werden daher in einem Multiplett der Hyperladung Y ausgeführt.

Der Hamilton-Operator H_1 ähnelt dem des Lipkin-Modells (2.17). Es ist einer der einfachsten Hamilton-Operatoren, deren Niveauabstandsverteilung eine starke Abhängigkeit von der irreduziblen Darstellung zeigt. Solche Hamilton-Operatoren, die quadratisch von den Leiteroperatoren S_{kl} abhängen, können im Prinzip mit Drei-Niveau-Atomen in einem Resonator verwirklicht werden, wenn die Atome mit einer gegenüber den Atomniveauübergängen verstimmten Mode des elektromagnetischen Feldes gekoppelt sind.

Der andere Hamilton-Operator kann wegen kaum ein physikalisches System beschreiben. Er zeigt jedoch in den irreduziblen Darstellungen, die einen integrablen klassischen Grenzfall haben ($\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_2 = 0$) eine Poisson-Verteilung der Niveauabstände und verdeutlicht daher sehr schön das Eintreten von Niveauabstoßung, sobald der klassische Grenzfall nicht-integrabel wird. Eine Poisson-Verteilung kann im integrablen Fall hier nicht erwartet werden, da sie nur für Systeme mit mindestens zwei Freiheitsgraden generisch ist, während hier (nach Restriktion auf Y-Multipletts) nur ein Freiheitsgrad vorliegt.[4]

Im klassischen Grenzfall geht $\hbar = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$ nach null, während der Parameter

$$q = \hbar\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{6.3}$$

mit

$$0 \leq q \leq 1 \tag{6.4}$$

---

[4] Das Poisson-Verhalten wird für H_2 durch den Sinus erzeugt: Die Funktion $\sin kn$ erzeugt für $n = 1, 2, \ldots$ eine (sehr schlechte) Reihe von zufälligen Zahlen, wenn k kein rationales Vielfaches von π und $k \gg \pi$ ist.

konstant gehalten wird. In den Fällen $q = 0$ und $q = 1$ sind die Darstellungen entartet und führen auf einen vierdimensionalen Phasenraum, während alle anderen Werte von q zu einem sechsdimensionalen Phasenraum führen. Die Dynamik des klassischen Grenzfalles wird durch die Hamilton-Funktionen

$$\begin{aligned} H_1^{kl} &= t_3 + 3\,(s_{12}^2 + s_{21}^2) + 15\,(s_{13}s_{32} + s_{23}s_{31}) \\ H_2^{kl} &= \sin(100\,t_3) + \tfrac{1}{2}\,(s_{12}^2 + s_{21}^2) + 100\,(s_{13}s_{32} + s_{23}s_{31}) \end{aligned} \tag{6.5}$$

beschrieben, die in dieser Form unabhängig davon erscheinen, in welchen irreduziblen Darstellungen der klassische Grenzfall vollzogen wurde. Die klassischen Observablen s_{kl} sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Die Werte der zwei Casimir-Funktionen $c_2 = \sum_{k,l=1}^{3} s_{kl}s_{lk}$ und $c_3 = \sum_{k,l,j=1}^{3} s_{kl}s_{lj}s_{jk}$ sind durch den Parameter q festgelegt.

6.1.2 Quantenchaos in verschiedenen irreduziblen Darstellungen

Für die numerischen Untersuchungen der Niveauabstandsverteilung wurde das Y-Multiplett mit dem Eigenwert $Y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{3}$ im Hilbert-Raum der $[\lambda_1; \lambda_2]$-Darstellung verwendet. Die Dimension dieses Unterraums ist

$$d = (\lambda_1 + 1)\,(\lambda_2 + 1)\,. \tag{6.6}$$

Für H_1 wurden nur die Eigenwerte im Bereich $-2.0 \leq E \leq 0.5$ berücksichtigt, da sich in diesem Teil des Spektrums die quantenmechanischen Signaturen von Chaos am deutlichsten zeigen.[5] Für den zweiten Hamilton-Operator mußte der Energiebereich nicht eingeschränkt werden. Alle Energiespektren wurden zunächst entfaltet, so daß der mittlere Niveauabstand eins beträgt.

Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die Niveauabstandsverteilung $P(s)$ und das Integral

$$N(s) = \int_0^s ds' P(s'). \tag{6.7}$$

Die dünn eingezeichneten Kurven zeigen die Niveauabstandsverteilungen der Zufallsmatrixtheorie (GOE)

$$P^{(GOE)}(s) = \frac{s\pi}{2} \exp\left(-s^2 \frac{\pi}{4}\right) \tag{6.8}$$

und für ein vollkommen unkorreliertes Spektrum (Poisson).

---

[5] Bei den Energieextrema befindet sich je ein elliptischer Fixpunkt, in dessen Umgebung es im allgemeinen noch KAM-Tori gibt. Das Chaos ist also bei den Energieextrema im allgemeinen nicht voll ausgebildet, und die Signaturen im Spektrum sind schwächer.

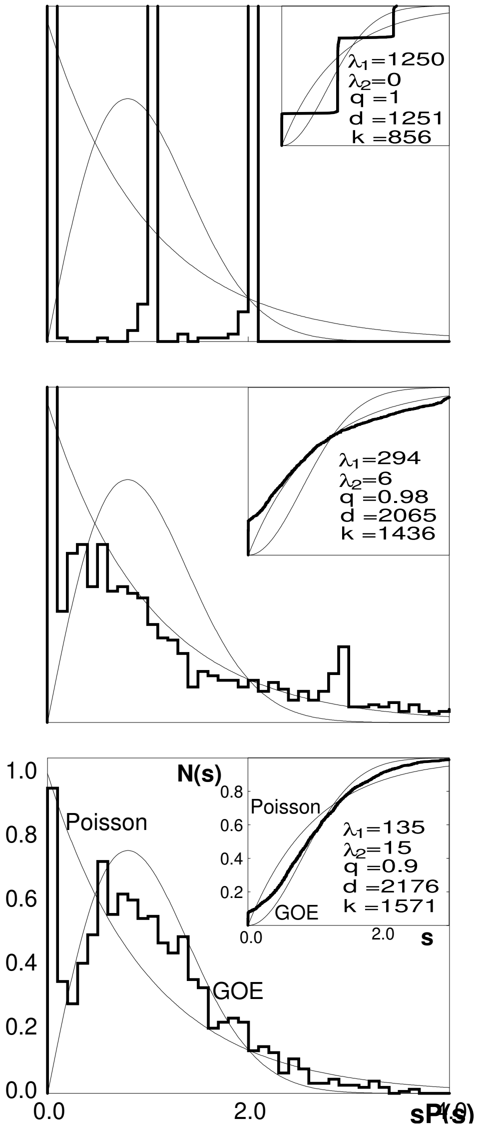

Abb. 6.1: Niveauabstandsverteilung $P(s)$ und deren Integral $N(s)$ für den Hamilton-Operator H_1 in verschiedenen irreduziblen Darstellungen. Die irreduzible Darstellung ist durch die Parameter λ_1 und λ_2 angegeben ($q = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$). Die Dimension der diagonalisierten Matrix ist d, und k Eigenwerte im Bereich $-2.0 \leq E \leq 0.5$ wurden für die Statistik verwendet.

Der Graph in der oberen linken Ecke von Abbildung 6.1 zeigt $P(s)$ und $N(s)$ in einer irreduziblen Darstellung mit $q = 1$. Der klassische Grenzfall für ein Y-Multiplett hat einen Freiheitsgrad und ist integrabel. Eine Poisson-Verteilung kann bei einem Freiheitsgrad nicht erwartet werden. Tatsächlich zeigt $N(s)$ drei Stufen bei den Werten $s = 0, 1, 2$, was steife Niveauabstände verbunden mit einem hohen Entartungsgrad – also Niveauhäufung – anzeigt. In den folgenden Graphen wird der Parameter q verkleinert. Für $q = 0.99, 0.98, 0.95$ werden die scharfen Stufen in $N(s)$ ausgewaschen und die Verteilungen ähneln stärker dem Poissonschen Fall, jedoch mit einer überlebenden großen Stufe für $s = 0$ in $N(s)$. Da in diesen Fällen die klassische Dynamik zwei Freiheitsgrade hat, kann man nicht von vorneherein wissen, ob die Dynamik chaotisch oder integrabel ist. Die Verteilungen legen die Vermutung nahe, daß Nichtintegrabilität nur sehr schwach entwickelt ist. Die Stufe in $N(s)$ bei $s = 0$ wird erheblich kleiner für $q = 0.9$.

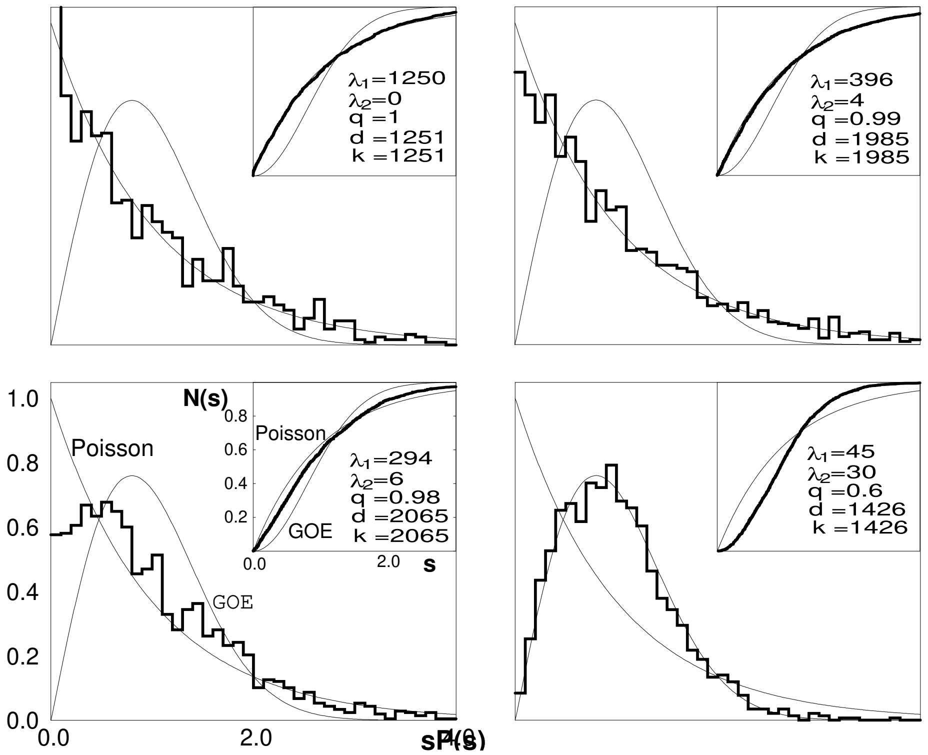

Abb. 6.2: Niveauabstandsverteilung $P(s)$ und deren Integral $N(s)$ für den Hamilton-Operator H_2 in verschiedenen irreduziblen Darstellungen. Die Bezeichnungen sind wie in 6.1. Alle Eigenwerte sind in die Statistik einbezogen.

In diesem Fall sieht die Verteilung für $s > 0$ der Wigner-Verteilung schon sehr ähnlich. Schließlich ist für $q = 0.8$ die Niveauabstoßung vollständig entwickelt.

Die Ergebnisse für den zweiten Hamilton-Operator sind in Abbildung 6.2 zusammengefaßt. Der Übergang von Niveauanziehung zu Niveauabstoßung ist dort deutlicher zu sehen. Für $q = 1$ ist hier eine Poisson-Verteilung zu sehen, die künstlich durch die Sinus-Abhängigkeit des Hamilton-Operators erzeugt wird. Für $q = 0.99$ und $q = 0.98$ ist der Übergang zur Wigner-Verteilung zu sehen, die sich für $q = 0.6$ voll entwickelt hat.

6.1.3 Chaos und Integrabilität des klassischen Grenzfalles

Die Ergebnisse des letzten Abschnitts lassen erwarten, daß der Übergang von Niveauhäufung zu Niveauabstoßung in den verschiedenen irreduziblen Darstellungen von einem Übergang von integrabler zu chaotischer Dynamik in dem entsprechenden klassischen Grenzfall begleitet wird. Dieser Übergang entsteht durch das Auftauchen eines neuen Freiheitsgrades für $q < 1$ (bzw. für $q > 0$ – dieser Fall wird hier numerisch jedoch nicht untersucht). Dieser neue Freiheitsgrad ist jedoch noch stark eingeschränkt, wenn q sehr nahe an eins ist, so daß sich das Chaos noch nicht voll entwickeln kann.

Die klassischen Hamilton-Funktionen lassen sich durch kanonische Wirkungs- und Winkelvariable ausdrücken, wie sie in Abschnitt 4.3.5 eingeführt worden sind. Der Unterschied der verschiedenen klassischen Grenzfälle für $0 \leq q \leq 1$ wird dann deutlich. Durch die versteckte Abhängigkeit der klassischen Observablen s_{kl} untereinander[6] ist dieser Unterschied in (6.5) nicht erkennbar. In den kanonischen Variablen bekommen die Hamilton-Funktionen die Form

$$\begin{aligned} H_1^{kl} = {} & t_3 + 6\,(t^2 - t_3^2)\cos(2\phi_{t_3}) + 30\sqrt{A^2 - B^2}\cos(\phi_{t_3}) + \\ & +60AB\,(t\sin(\phi_{t_3})\sin(\phi_t) - t_3\cos(\phi_{t_3})\cos(\phi_t)) \\ H_2^{kl} = {} & \sin(100\,t_3) + (t^2 - t_3^2)\cos(2\phi_{t_3}) + 200\sqrt{A^2 - B^2}\cos(\phi_{t_3}) + \\ & +400AB\,(t\sin(\phi_{t_3})\sin(\phi_t) - t_3\cos(\phi_{t_3})\cos(\phi_t))\,. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Die Abhängigkeit von q steckt in den Koeffizienten A und B, die in Gleichung (4.142) definiert wurden. Keine der beiden Hamilton-Funktionen hängt von ϕ_y ab, so daß y eine Konstante der Bewegung darstellt. Man kann sich bei fest gewähltem y auf einen Phasenraum zurückziehen, der von t, t_3, ϕ_t und ϕ_{t_3} aufgespannt wird. Die quantenmechanischen Rechnungen des vorherigen Abschnitts wurden in Y-Multipletts mit $Y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{3}$ durchgeführt, was für $\hbar \to 0$ den Wert der klassischen Hyperladung auf

$$y = \frac{2q - 1}{3} \tag{6.10}$$

---

[6] Die beiden Casimir-Funktionen c_2 und c_3 haben feste Werte.

setzt. Die Koeffizienten A und B in den Hamilton-Funktionen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2t}\sqrt{\left(t+q-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-t^2\right)} \\ B &= \frac{1}{2t}\sqrt{\left(t-q+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-t^2\right)}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Der Wertebereich des klassischen Isospin ist

$$\begin{aligned} &q-\tfrac{1}{2} \leq t \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad \tfrac{1}{2} \leq q \leq 1 \\ &\tfrac{1}{2}-q \leq q \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad 0 \leq q \leq \tfrac{1}{2}, \end{aligned} \tag{6.12}$$

und der Wertebereich der klassischen dritten Komponente des Isospin ist

$$-t \leq t_3 \leq t. \tag{6.13}$$

Liegen die Anfangsbedingungen innerhalb dieser Wertebereiche, kann gezeigt werden, daß die gesamte Trajektorie ebenfalls innerhalb dieser Wertebereiche bleibt.
Für $q = 0$ und $q = 1$ schrumpft der Wertebereich von t auf einen Punkt zusammen, $t = \frac{1}{2}$. In diesen Fällen bleibt also nur ein einziger Freiheitsgrad übrig und die Hamilton-Funktionen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} H^{kl}_{1,q=0} &= H^{kl}_{1,q=1} &&= t_3 + 6\left(\frac{1}{4}-t_3\right)\cos(2\phi_{t_3}) \\ H^{kl}_{2,q=0} &= H^{kl}_{2,q=1} &&= \sin(100\,t_3) + \left(\frac{1}{4}-t_3^2\right)\cos(2\phi_{t_3}). \end{aligned} \tag{6.14}$$

Mit nur einem Freiheitsgrad sind die Dynamiken dieser beiden Hamilton-Funktionen integrabel. Verändert man jedoch den Wert des Parameters q, wird der Wertebereich von t ein endliches Intervall.
Das Auftreten von Chaos kann man durch numerisch berechnete Phasenraumportraits in Poincaré-Schnitten veranschaulichen. Die hier betrachteten Systeme haben generisch zwei Freiheitsgrade, damit ist die Energieschale dreidimensional und ein Poincaré-Schnitt durch die Energieschale ist zweidimensional. Die weitere Diskussion beschränkt sich auf die Energieschale $H^{kl}_i(t_3, t, \phi_{t_3}, \phi_t) = E = 0$, die im Zentrum des Wertebereichs der Energien liegt (die Energie ist wegen des kompakten Phasenraums sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt). Der Poincaré-Schnitt wurde durch $\phi_t = 0$ festgelegt und auf die von t_3 und ϕ_{t_3} aufgespannte Ebene projiziert (die Richtung, in der der Poincaré-Schnitt von einer Trajektorie durchstoßen

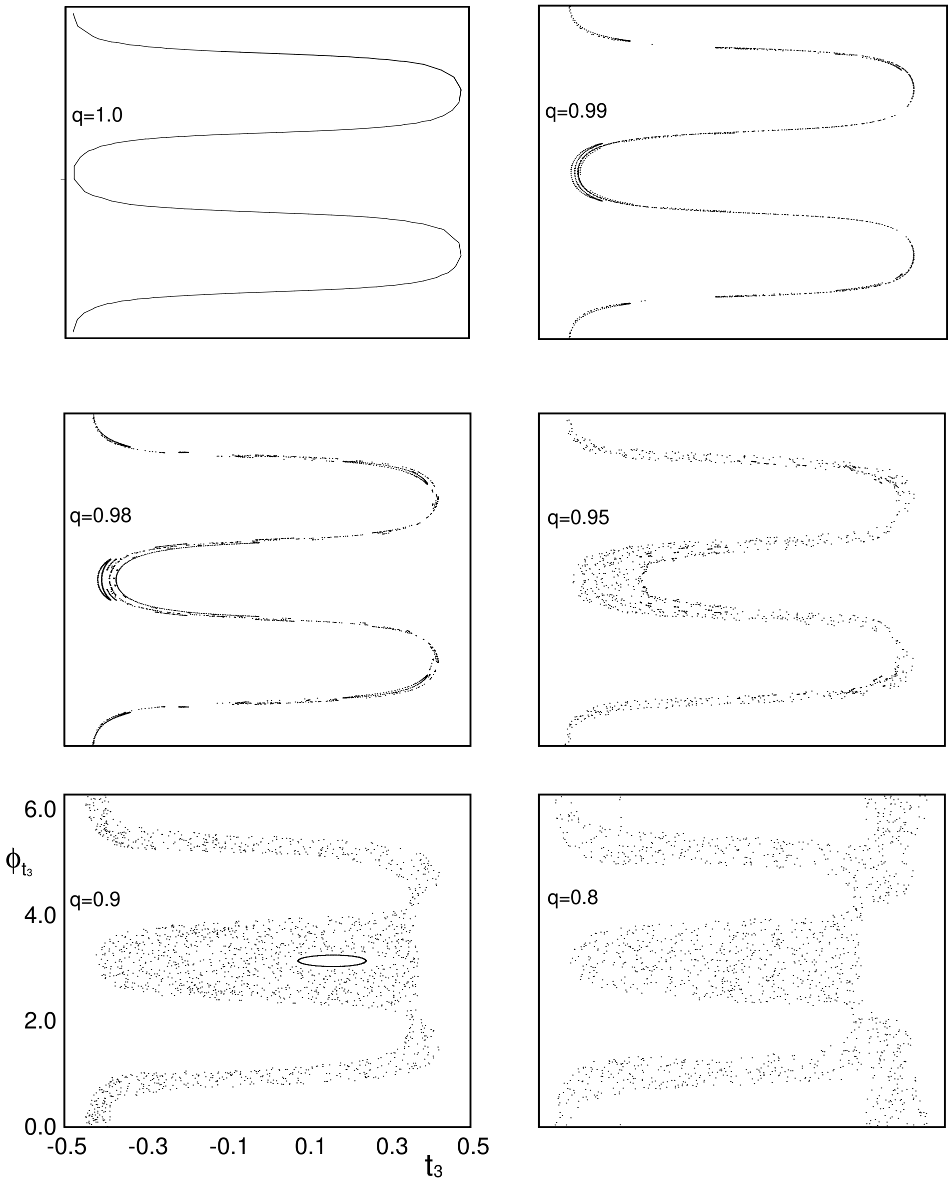

Abb. 6.3: Das Bild in der oberen linken Ecke zeigt die Energieschale $H_1^{kl} = 0$ im zweidimensionalen Phasenraum für $q = 1$. Die anderen Bilder zeigen Phasenraumportraits im Poincaré-Schnitt $\phi_t = 0$ durch die Energieschale $H_1^{kl} = 0$ bei verschiedenen Werten von q.

wird, wurde nicht berücksichtigt). Abbildung 6.3 zeigt den Übergang von der integrablen Dynamik mit einem Freiheitsgrad zur nicht-integrablen Dynamik mit zwei Freiheitsgraden für die Hamilton-Funktion H_1^{kl}. Das erste Bild für $q = 1$ zeigt die Energie-Schale $E = 0$ im vollständigen Phasenraum. In allen weiteren Bildern ist der Phasenraum vierdimensional und es wird die Projektion der Durchstoßpunkte von mehreren Trajektorien durch den Poincaré-Schnitt auf die (t_3, ϕ_{t_3})-Ebene gezeigt. Für Werte des Parameters q nahe bei eins nehmen die Phasenportraits nur einen sehr begrenzten Raum um die Energie-Schale bei $q = 1$ ein. Erst wenn q deutlich kleiner als eins ist, nehmen die Phasenportraits einen größeren Bereich der (t_3, ϕ_{t_3})-Ebene ein, in dem chaotische Dynamik überwiegt (die Phasenportraits zeigen kaum Stabilitätsinseln).

In Abbildung 6.4 wird ein Ausschnitt aus zwei Phasenportraits vergrößert. Das obere Bild für $q = 0.98$ zeigt noch viele Stabilitätsinseln. Der zweite Freiheitsgrad t hat hier nur einen sehr kleinen Wertebereich, der die Dynamik noch zu stark einschränkt, um stark chaotisches Verhalten zu zeigen. Das paßt sehr gut zu den Ergebnissen der quantenmechanischen Untersuchung des zugehörigen Hamilton-Operators. Die Niveauabstandsverteilung für $q = 0.98$ ähnelt noch sehr stark einer Poisson-Verteilung (vergleiche Abbildung 6.1). Im unteren Bild für $q = 0.9$ wird erheblich mehr Raum vom Phasenportrait eingenommen und es sind keine Stabilitätsinseln mehr zu sehen, was wiederum sehr gut zur Niveauabstandsverteilung für $q = 0.9$ paßt, die eher einer Wigner-Verteilung ähnelt (vergleiche Abbildung 6.1).

Abbildung 6.5 zeigt die Energieschale $H_2^{kl} = 0$ im Phasenraum für $q = 1$ und Phasenraumportraits in Poincaré-Schnitten bei einigen Werten des Parameters $q < 1$ für die Hamilton-Funktion H_2^{kl}. Wieder ist die Energie-Schale für $q = 1$ eindimensional. Bei kleineren Werten von q zeigt sich qualitativ das gleiche Verhalten wie bei der Hamilton-Funktion H_1^{kl}. Die Phasenraumportraits verbreitern sich, was das Anwachsen des Volumens der dann dreidimensionalen Energieschale anzeigt. Wieder zeigt sich Chaos, sobald das Volumen der Energieschale ausreichend angewachsen ist - in Übereinstimmung mit den Niveauabstandsverteilungen aus Abbildung 6.2.

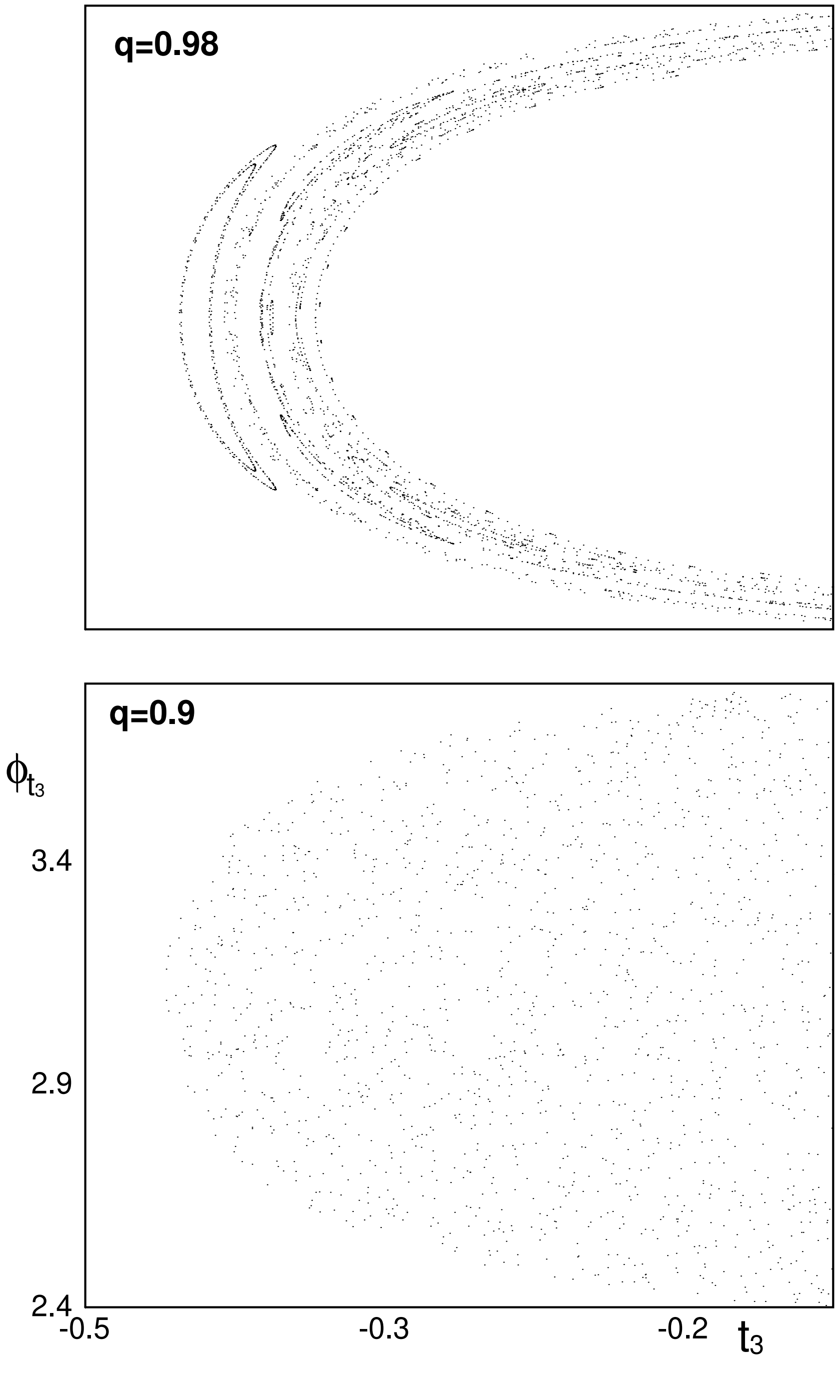

Abb. 6.4: Ausschnittsvergrößerungen von zwei Phasenraumportraits für H_1^{kl} aus der Abbildung 6.3.

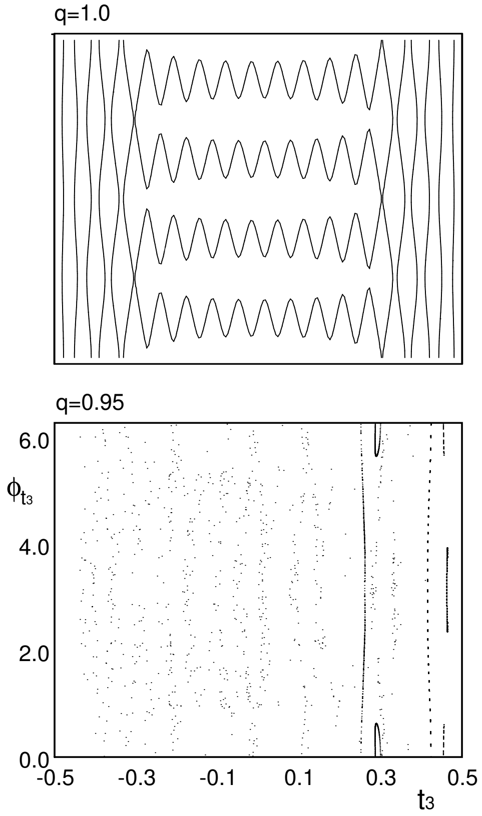

Abb. 6.5: Das Bild in der oberen linken Ecke zeigt die Energieschale $H_2^{kl} = 0$ im zweidimensionalen Phasenraum für $q = 1$. Die anderen Bilder zeigen Phasenraumportraits im Poincaré-Schnitt $\phi_t = 0$ durch die Energieschale $H_2^{kl} = 0$ bei verschiedenen Werten von q.

6.2 Niveaudynamik in verschiedenen irreduziblen Darstellungen

6.2.1 Niveaudynamik für klassisch integrable Systeme mit einem Freiheitsgrad

In diesem Abschnitt wird das Spektrum von einparametrigen Familien von Hamilton-Operatoren $H(\lambda) = H_1 \cos\lambda + H_2 \sin\lambda$ in Abhängigkeit vom Parameter λ betrachtet, deren klassische Gegenstücke für jedes λ zu einer integrablen Dynamik mit f Freiheitsgraden gehört.[7] Es gibt dann mindestens f Konstanten der Bewegung $k_j(\lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, f)$, deren Poisson-Klammern untereinander alle vertauschen $\{k_i, k_j\} = \delta_{ij}$. Es soll angenommen werden, daß den klassischen Erhaltungsgrößen $k_j(\lambda)$ quantenmechanische Operatoren $K_j(\lambda)$ entsprechen, deren Kommutatoren exakt verschwinden. Bei f klassischen Freiheitsgraden liefern die Operatoren $K_j(\lambda)$ dann einen vollständigen Satz vertauschbarer Observabler.

Zunächst soll angenommen werden, daß keine Erhaltungsgröße K_j von der fiktiven Zeit λ abhängt. Die Bewegungskonstanten liefern dann eine Eigenbasis $\{|\kappa\rangle\} = \{|\kappa_1, \kappa_2, \ldots, , \kappa_f\rangle\}$ zu allen Operatoren K_j, d.h. es gilt

$$K_j|\kappa\rangle = \kappa_j|\kappa\rangle \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, f. \tag{6.15}$$

Da die Bewegungskonstanten K_j einen vollständigen Satz vertauschbarer Observabler darstellen, ist $H(\lambda)$ in dieser Basis für alle λ diagonal. Außerdem folgt

$$[H_1, H_2] = 0. \tag{6.16}$$

Die Dynamik der Eigenwerte $E_\kappa(\lambda)$ mit

$$H(\lambda)|\kappa\rangle = E_\kappa(\lambda)|\kappa\rangle \tag{6.17}$$

hat dann die Form

$$E_\kappa(\lambda) = \langle\kappa|H_1|\kappa\rangle \cos\lambda + \langle\kappa|H_2|\kappa\rangle \sin\lambda = E_{1,\kappa} \cos\lambda + E_{2,\kappa} \sin\lambda. \tag{6.18}$$

Die Dynamik zweier Eigenwerte $E_\kappa(\lambda)$ und $E_{\kappa'}(\lambda)$ verläuft vollkommen unabhängig voneinander. Laufen also zwei eng benachbarte Eigenwerte aufeinander zu, dann kommt es generisch zu einer echten Kreuzung.

Ein einfaches und instruktives Beispiel liefert die Familie von Hamilton-Operatoren

$$H^{(0)}(\lambda) = J_z \cos\lambda + \left(\frac{4}{2j+1} J_z^2 - \frac{1}{2} J_z - (j + \frac{1}{2})\right) \sin\lambda. \tag{6.19}$$

---

[7] Wie in der Einleitung dieses Kapitels angedeutet, lassen sich die Eigenwerte von $H(\lambda)$ als die Orte eines fiktiven Gases – des Pechukas-Yukawa-Gases – betrachten, das in der formalen Zeit λ einer Hamiltonschen Dynamik unterliegt.

Diese Familie hängt von den Komponenten eines Drehimpulsvektors $\vec{J}$ ab.[8] Sie hat einen Freiheitsgrad, was ausreicht, um den Sachverhalt zu verdeutlichen. Die von λ unabhängige Erhaltungsgröße ist die z-Komponente des Drehimpulses J_z mit den Eigenwerten $m = -j, -j+1, \ldots, j$. Die Eigenwerte des Hamilton-Operators $H^{(0)}(\lambda)$ lauten somit

$$E_m^{(0)}(\lambda) = m \cos\lambda + \left(\frac{4}{2j+1} m^2 - \frac{1}{2} m - \left(j + \frac{1}{2} \right) \right) \sin\lambda. \tag{6.20}$$

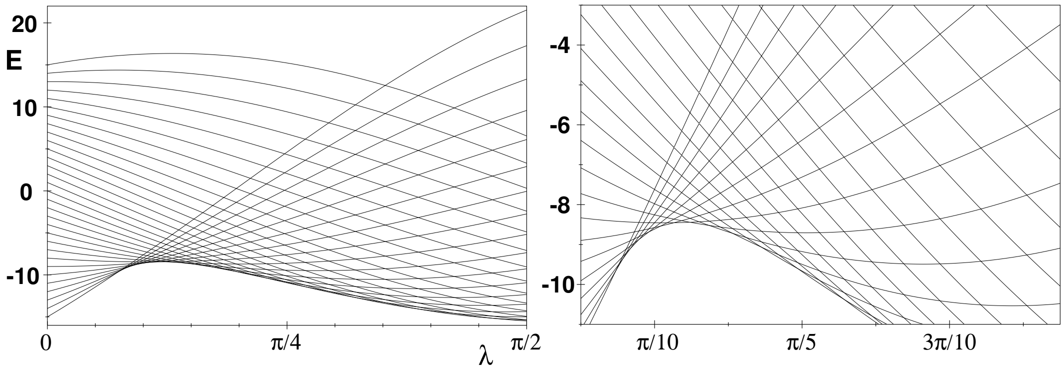

Abb. 6.6: Die Dynamik der Eigenwerte von $H^{(0)}(\lambda)$ mit dem Übergang von $H^{(0)}(\lambda = 0) = J_z$ nach $H^{(0)}(\lambda = \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{2j+1} J_z^2 - \frac{1}{2} J_z - \left(j + \frac{1}{2}\right)$ für $j = 15$ (links). Das rechte Bild ist eine Ausschnittsvergrößerung des linken Bildes.

In Abbildung 6.6 sind alle Eigenwerte für $j = 15$ in ihrer Abhängigkeit von λ abgebildet. Man sieht, daß sich generisch jeder Eigenwert mit jedem anderen Eigenwert kreuzt. Da es $N = 2j+1$ Eigenwerte gibt, ist die Anzahl der Kreuzungen Υ von der Größenordnung

$$\Upsilon \approx \frac{N(N+1)}{2} \sim N^2. \tag{6.21}$$

Zu den Kreuzungen kommt es, weil $H_1(m) = m$ eine monoton steigende Funktion von m ist, während $H_2(m) = \frac{4}{2j+1} m^2 - \frac{1}{2} m - (j + \frac{1}{2})$ als quadratische Funktion nicht monoton ist. Nimmt man m als kontinuierliche Variable, dann hat $E_m(\lambda)$ bei festem λ als Funktion von m ein Minimum bei $m = m_{min}(\lambda) = \frac{2j+1}{16}(1 - 2\cot\lambda)$. Solange $m_{min}(\lambda)$ außerhalb des Intervalls $[-j, j]$ liegt, bilden die Eigenwerte $E_m(\lambda)$

---

[8] In der Sprache der bisherigen Kapitel sind dies SU_2-Observable. Im Falle eines Drehimpulses soll sich jedoch hier und im folgenden an die gängigen Sprech- und Bezeichnungsweisen gehalten werden ($J_z \equiv \frac{S_{11} - S_{22}}{2}$, $J_+ \equiv S_{12}$, $J_- \equiv S_{21}$, $j \equiv \frac{\lambda_1}{2}$).

eine monotone Sequenz mit $E_{m'}(\lambda) > E_m(\lambda)$ bei $m' > m$. Dies gilt für λ unterhalb eines Schwellwertes λ_c, der durch $\cot\lambda_c = \frac{1}{2} + 4\frac{j}{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{9}{2}$ (die letzte Näherung gilt für $j \gg 1$ und ergibt einen Wert $\lambda_c \approx 0.219$). Für $\lambda > \lambda_c$ sind die Eigenwerte $E_m(\lambda)$ nicht mehr monoton in m. Mit wachsendem λ kommt es dann zu Kreuzungen, wobei die sich kreuzenden Eigenwerte zu verschiedenen monotonen Ästen gehören.

Im allgemeinen kann man nicht annehmen, daß die Bewegungskonstanten $K_j(\lambda)$ nicht von λ abhängen. Es ist jedoch sehr schwierig, eine Niveaudynamik für klassisch integrable Systeme mit f Freiheitsgraden zu konstruieren, bei der tatsächlich alle f Konstanten der Bewegung nichttrivial von λ abhängen (der Hamilton-Operator $H(\lambda)$ ist dann eine der Konstanten der Bewegung). Daher soll nur auf den Fall eingegangen werden, daß es genau $f-1$ von λ unabhängige Konstanten der Bewegung K_j gibt und außerdem $[H_1, H_2] \neq 0$ gilt. Der Hamilton-Operator $H(\lambda)$ ist dann die f-te Bewegungskonstante, die das System integrabel macht. In diesem Fall bilden die Bewegungskonstanten K_j keinen vollständigen Satz von Observablen, so daß ein Eigenraum (Multiplett) zu allen $f-1$ Operatoren K_j im allgemeinen eine Dimension größer als eins hat. Der Hamilton-Operator $H(\lambda)$ ist also blockdiagonal für alle λ – jeder Block gehört zu einem Multiplett und die Niveaudynamik verläuft in allen Multipletts unabhängig voneinander.

Laufen zwei eng beieinander liegende Eigenwerte, die zu verschiedenen Multipletts gehören, aufeinander zu, kommt es also generisch zu einer Kreuzung der Eigenwerte wie im vorherigen Beispiel, bei dem alle Bewegungskonstanten unabhängig von λ waren. Innerhalb eines Multipletts gibt es jedoch ein reicheres Verhalten, auf das nun kurz eingegangen werden soll. Durch die Einschränkung auf ein Multiplett verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade des klassischen Systems auf $f = 1$. Das erste instruktive Beispiel liefert $H(\lambda) = J_z\cos\lambda + J_x\sin\lambda$. In diesem Fall läßt sich $H(\lambda)$ in der Form $H(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda)H(0)\mathcal{R}^\dagger$ schreiben, wobei $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}^{\dagger,-1}$ eine von λ abhängige Drehung (um die y-Achse) ist. Die Eigenwerte bleiben somit konstant, weil alle $H(\lambda)$ unitär äquivalent sind.

Interessanter ist der generische Fall, daß es keine von λ abhängige unitäre Transformation gibt, die alle Hamilton-Operatoren $H(\lambda)$ ineinander überführt. Ein instruktives Beispiel liefert

$$H^{(\epsilon)}(\lambda) = (J_z + \epsilon J_x)\cos\lambda + \left(\frac{4}{2j+1}J_z^2 - \frac{1}{2}J_z - \left(j + \frac{1}{2}\right)\right)\sin\lambda, \tag{6.22}$$

der für $\epsilon = 0$ auf (6.19) zurückführt.

In Abbildung 6.7 werden die Eigenwerte von $H(\lambda)$ für $\epsilon = 0.4$ und $j = 15$ gezeigt. Es fällt auf, daß es neben (scheinbaren) Kreuzungen im oberen Bereich des Spektrums und relativ parallel laufenden Eigenwerten im unteren Teil des Spektrums auch deutlich vermiedene Kreuzungen von eng beieinanderliegenden Eigenwerten gibt. Eine nähere Betrachtung zeigt, daß auch die scheinbaren Kreuzungen im oberen Teil des

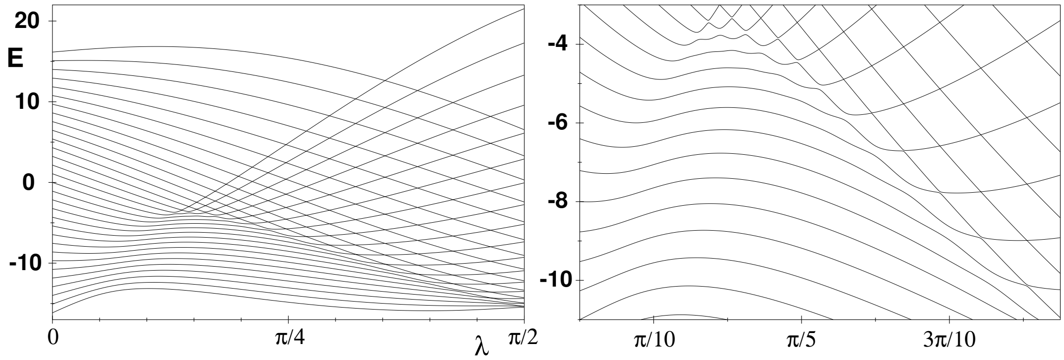

Abb. 6.7: Die Dynamik der Eigenwerte von $H^{(0.4)}(\lambda)$ mit dem Übergang von $H^{(0.4)}(\lambda = 0) = J_z + 0.4 J_x$ nach $H^{(0.4)}(\lambda = \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{2j+1} J_z^2 - \frac{1}{2} J_z - \left(j + \frac{1}{2}\right)$ für $j = 15$ (links). Das rechte Bild ist eine Ausschnittsvergrößerung des linken Bildes.

Spektrums tatsächlich vermiedene Kreuzungen sind, deren Abstand aber zu klein ist, um in diesem Bild aufgelöst zu werden. Ein Verständnis dieser vermiedenen Kreuzungen kann man durch die Betrachtung der semiklassischen EBK[9]-Quantisierung erlangen, die hier nur skizziert wird – eine ausführlichere Darstellung liefert der Übersichts-Artikel von *P. A. Braun* [124]. Die folgende semiklassische Betrachtung der Hamilton-Operatoren $H^{(\epsilon)}(\lambda)$ stammt in weiten Teilen von *P. A. Braun*.
Für die semiklassische Behandlung muß zunächst die entsprechende klassische Dynamik in kanonischen Variablen p, ϕ betrachtet werden. Sie ergibt sich für $\hbar \to 0$ durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{j+\frac{1}{2}} &\approx \frac{J_z}{j} \to p \\ \frac{J_x}{j+\frac{1}{2}} &\approx \frac{J_x}{j} \to \sqrt{1-p^2}\cos\phi \\ \frac{J_y}{j+\frac{1}{2}} &\approx \frac{J_y}{j} \to \sqrt{1-p^2}\sin\phi \end{aligned} \tag{6.23}$$

im (skalierten) Hamilton-Operator

$$\frac{H(\lambda)}{(j+\frac{1}{2})} \to h(p, \phi, \lambda) \tag{6.24}$$

---

[9] EBK ≡ Einstein-Brillouin-Keller

ergibt.[10] Die klassische Hamilton-Funktion lautet dann

$$\begin{aligned} h^{(\epsilon)}(p,\phi,\lambda) &= \Big(p+\epsilon\sqrt{1-p^2}\cos\phi\Big)\ \cos\lambda \ + \ \big(2p^2-\tfrac{1}{2}p-1\big)\ \sin\lambda \\ &\equiv h_1^{(\epsilon)}(p,\phi,\lambda)\ \cos\lambda \ + \ h_2(p,\phi,\lambda)\ \sin\lambda. \end{aligned} \tag{6.25}$$

In Abbildung 6.8 sieht man die Höhenlinien der Hamilton-Funktion $h(p,\phi,\lambda)$ im Phasenraum bei verschiedenen Werten von λ und $\epsilon = 0.4$. Die klassischen Trajektorien laufen entlang dieser Höhenlinien, deren Topologie sich ändert, während λ wächst. Der Phasenraum ist durch die Oberfläche einer Kugel gegeben, die für die Höhenprofile auf ein Rechteck abgebildet wurde. Der (gesamte) obere Rand jedes Graphen in Abbildung 6.8 entspricht dem Nordpol und der untere Rand dem Südpol der Kugel.

Im ersten Bild für $\lambda = 0$ sieht man die Trajektorien für eine Drehung um eine Achse, die nicht durch die Pole (z-Achse) der Kugel verläuft – es gibt zwei elliptische Fixpunkte, alle Bahnen sind geschlossen und können in endlicher Zeit durchlaufen werden. Die Energie ist eine monotone Funktion der Wirkung $I = \oint p d\phi$. Im zweiten Bild für $\lambda = \pi/10$ hat sich an der Topologie der Höhenlinien nichts geändert – die Trajektorien sind gegenüber der reinen Drehung verzerrt, aber es gibt immer noch zwei elliptische Fixpunkte und die Energie ist eine monotone Funktion der Wirkung. Entsprechend sind in der Niveaudynamik in Abbildung 6.7 keine vermiedenen Kreuzungen eng beieinanderliegender Eigenwerte für $\lambda < \pi/10$ zu sehen (die sichtbaren vermiedenen Kreuzungen im unteren Bereich des Spektrums entstehen durch die sich ändernde mittlere Niveaudichte – alle diese vermiedenen Kreuzungen behalten einen Abstand in der Größenordnung des mittleren Niveauabstandes).

Zwischen $\lambda = \pi/10$ und $\lambda = 3\pi/20$ ändert sich die Topologie der Trajektorien. Durch eine Bifurkation sind zwei weitere Fixpunkte entstanden – ein elliptischer und ein hyperbolischer. Die stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Fixpunktes bilden selbst Trajektorien, die sich nicht schließen und nicht in endlicher Zeit durchlaufen werden können– außerdem sind sie so verbunden, daß sich eine instabile Mannigfaltigkeit mit einer stabilen zu einer Trajektorie zusammenschließt. Diese zwei Trajektorien und der hyperbolische Fixpunkt haben die gleiche Energie und man faßt sie zur sogenannten Separatrix zusammen. Alle anderen Trajektorien sind wie bisher geschlossen. Gleichzeitig mit der Entstehung der Separatrix ist ein zweites Energiemaximum im Phasenraum entstanden. Die Wirkung ist nun keine eindeutige Funktion der Trajektorie mehr – vielmehr zerfällt sie in drei Äste: ein Ast für die Trajektorien mit einer Energie, die kleiner ist als auf der Separatrix und zwei Äste oberhalb dieser Energie (jeder Ast gehört zu einem elliptischen Fixpunkt).

---

[10] Dieser klassische Grenzfall ist bis auf eine Skalierungskonstante identisch mit dem in Kapitel 5 besprochenen klassischen Grenzfall für SU_2-Observable. Die kanonischen Variablen $p \equiv I_{21}$ und ϕ wurden in Abschnitt 4.3.5 eingeführt.

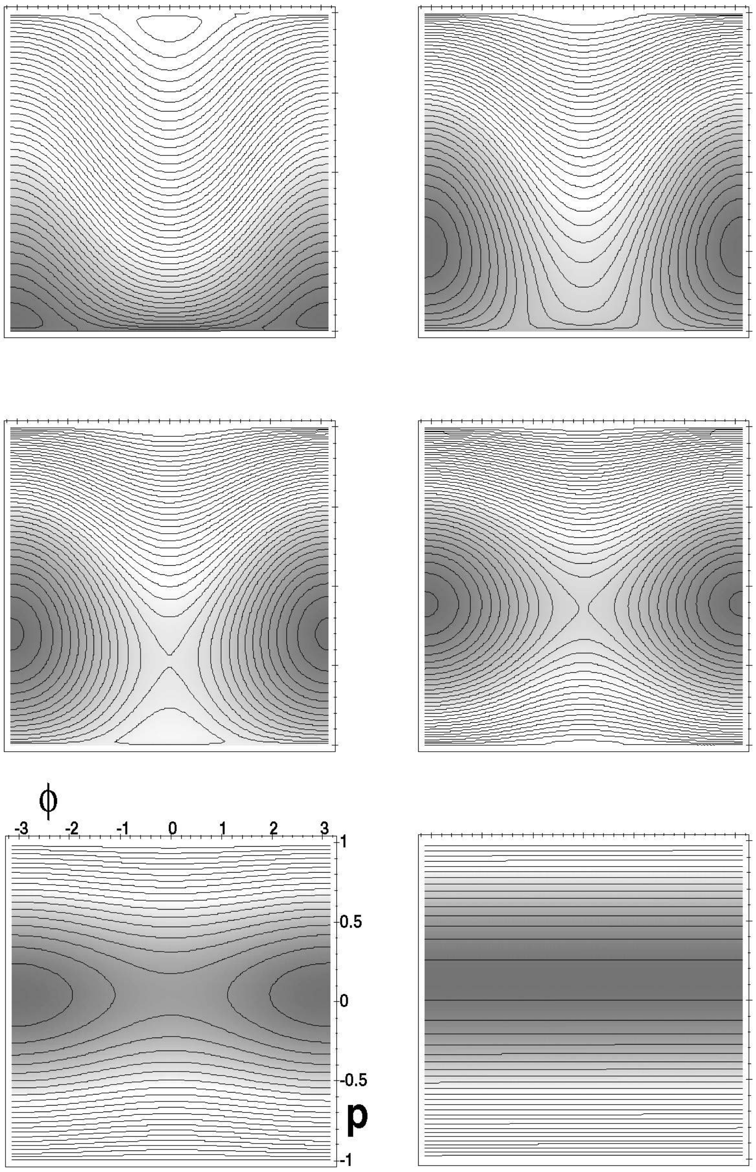

Abb. 6.8: Die Bilder zeigen Höhenprofile der klassischer Hamilton-Funktion $h^{(\epsilon)}(\lambda)$ im Phasenraum mit $\epsilon = 0.4$ für verschiedene Werte von λ (von links oben nach rechts unten durchläuft λ die Werte $0, \pi/10, 3\pi/20, \pi/4, 2\pi/5, \pi/2$). Die hellen Bereiche entsprechen den Maxima der Energie und die dunklen Bereiche den Minima.

Eine naive semiklassische Quantisierung, bei der man $I = \hbar m$ (mit $m = -j, -j + 1, \dots, j$) setzt, ist nicht mehr durchführbar. Die Semiklassik wird erschwert, weil es zu Tunneleffekten zwischen zwei klassisch nicht verbundenen Regionen gleicher Energie kommen kann (die Auswirkungen auf die Semiklassik werden weiter unten skizziert).

In den weiteren Höhenprofilen ändert sich zunächst nichts mehr an der Topologie. Zwei elliptische Fixpunkte nähern sich immer weiter den Polen der Kugeloberfläche. Nur diese beiden Fixpunkte bleiben bei $\lambda = \pi/2$ erhalten – die anderen beiden verschwinden bei diesem Wert durch eine Bifurkation. Für $\lambda = \pi/2$ zeigt sich ein ähnliches Bild wie für $\lambda = 0$ mit dem Unterschied, daß die Energie keine monotone Funktion der Wirkung ist, die nun wieder eindeutig jede Trajektorie charakterisiert.

Für eine Skizze der semiklassischen Quantisierung in der Nähe einer Separatrix dienen einfache Argumente, wie sie für Hamilton-Funktionen der Form $H = T + V$ mit einer kinetischen Energie T und einer potentiellen Energie V üblich sind [124]. Da $|\cos\phi| \leq 1$ gilt, ist es sinnvoll, die Quasipotentiale

$$\begin{aligned} U_+(p,\lambda) &= h^{(0.4)}(p,\phi = 0,\lambda) \\ U_-(p,\lambda) &= h^{(0.4)}(p,\phi = \pi,\lambda) \end{aligned} \tag{6.26}$$

in der von der Energie und p aufgespannten Ebene zu betrachten. In Abbildung 6.9 sind die Quasipotentiale für verschiedene Werte von λ zu sehen. Die Quasipotentiale $U_+(p,\lambda)$ und $U_-(p,\lambda)$ schließen sich bei $p = \pm 1$ zu einer glatten geschlossenen Kurve (außer im Fall $\lambda = \pi/2$, in dem $U_+(p,\lambda) = U_-(p,\lambda)$ gilt). Alle Punkte innerhalb der geschlossenen Kurve gehören zu klassisch erlaubten Zuständen, was den Namen Quasipotential rechtfertigt.

Die Form der eingeschlossenen Fläche ändert sich mit λ. Die oben beschriebene Bifurkation zwischen den Werten $\lambda = \pi/10$ und $\lambda = 3\pi/20$ im Phasenraum wird auch in den Quasipotentialen durch den Übergang von einem Maximum zu zwei Maxima in $U_+(p,\lambda)$ sichtbar. Zwischen den beiden Maxima hat $U_+(p,\lambda)$ ein relatives Minimum – dieser Punkt entspricht der Separatrix im Phasenraum und hat die Energie E_S. Für Energien $E > E_S$ gibt es zwei erlaubte Intervalle für p. In der klassischen Dynamik führt $p(t)$ eine oszillatorische Bewegung in einem erlaubten Intervall aus – die Dynamik in einem erlaubten Intervall hängt nicht von der Existenz oder Form eines weiteren getrennten erlaubten Intervalls ab.

Die klassisch verbotene Region (Barriere) zwischen zwei getrennten erlaubten Intervallen ist quantenmechanisch durchlässig – äquivalent zum Tunneln durch eine Potentialbarriere. Betrachtet man in einer groben Näherung die beiden erlaubten Regionen wie zwei ungekoppelte Systeme, kann man für jede Region einzeln (semiklassische) Eigenwerte der Energie ausrechnen. Das gesamte Spektrum erhält man dann durch Überlagerung von zwei unabhängigen Spektren, so daß es in der Niveaudynamik generisch zu Kreuzungen kommen kann. Durch das Tunneln sind die

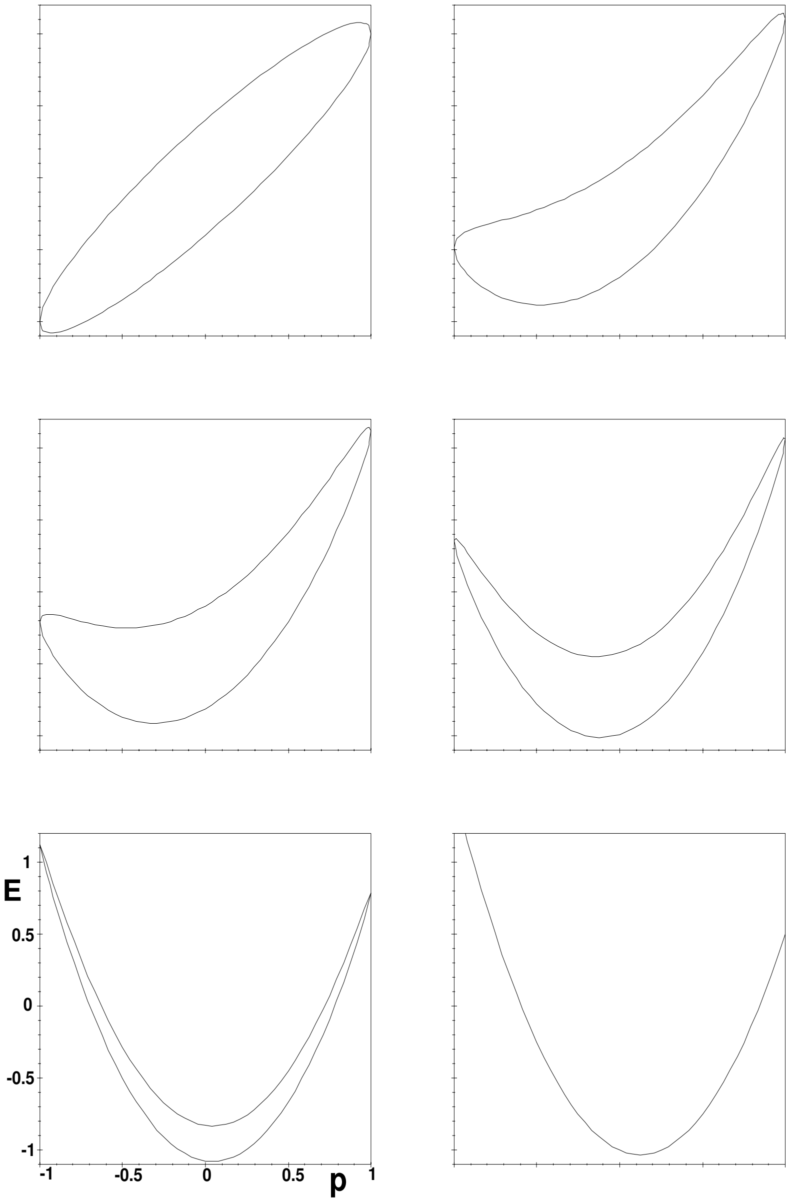

Abb. 6.9: Die Bilder zeigen die Quasipotentiale $U_+(p, \lambda)$ und $U_-(p, \lambda)$ für verschiedene Werte von λ (von links oben nach rechts unten durchläuft λ die Werte $0, \pi/10, 3\pi/20, \pi/4, 2\pi/5, \pi/2$).

beiden als getrennt betrachteten Regionen jedoch gekoppelt, wodurch Entartungen aufgehoben werden, die bei der groben Näherung zunächst auftauchten. Die Energieaufspaltung zwischen zwei zunächst entarteten Niveaus ist proportional zu $\exp\left(-|\int_{\text{Barriere}} d\phi p|/\hbar\right)$ und somit exponentiell unterdrückt für $E > E_s$.
Damit haben sich die scheinbaren Kreuzungen im oberen Teil des Spektrums in Abbildung 6.7 als vermiedene Kreuzungen mit exponentiell kleinen Abständen erwiesen, die für dieses Bild weder optisch noch numerisch aufgelöst sind. Die sichtbaren vermiedenen Kreuzungen haben alle Energien, die sich kaum von der Energie der Separatrix E_s unterscheiden – für solche Energien ist die Kopplung der beiden klassisch getrennten Intervalle am stärksten.
Die stark vermiedenen Kreuzungen treten nur entlang einer Linie in der Abbildung 6.7 auf, die durch die Energie E_S bestimmt ist. Mit wachsender Dimension N des Hilbert-Raums muß daher die Anzahl Υ_{st} der stark vermiedenen Kreuzungen linear in N wachsen, während die Anzahl der schwach vermiedenen und echten Kreuzungen Υ_{sw} quadratisch in N wächst. Damit wächst auch die Gesamtanzahl Υ von vermiedenen und echten Kreuzungen wie N^2 – die vermiedenen Kreuzungen reichen jedoch nicht aus, um zu einem Gleichgewichtszustand des Pechukas-Yukawa-Gases zu führen. Im nächsten Abschnitt wird noch einmal auf den Unterschied zwischen stark vermiedenen Kreuzungen und schwach vermiedenen oder echten Kreuzungen im integrablen und chaotischen Regime eingegangen.

6.2.2 Die Stoßzeit im chaotischen Fall

Die Bedeutung der Stoßzeit $\Delta\lambda_S$ wurde bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel beschrieben (siehe auch [40]). Im klassischen Grenzfall $N \to \infty$ ist zu erwarten, daß sich die Stoßzeit wie

$$\Delta\lambda_S \sim N^{-\nu} \tag{6.27}$$

mit einem positiven Exponenten ν verhält. In diesem Abschnitt soll dieser Exponent für Hamilton-Operatoren, die aus SU_3-Observablen aufgebaut sind und ein chaotisches klassisches Gegenstück haben, numerisch untersucht werden.
Bevor die numerischen Resultate vorgestellt werden, soll eine einfache Abschätzung der Stoßzeit angegeben werden, die von *K. Życzkowski* stammt (siehe auch [40]). Die Änderung eines Eigenwertes („Niveaugeschwindigkeit")

$$p_k = \frac{d}{d\lambda} E_k(\lambda) \tag{6.28}$$

ergibt sich aus der Eigenwertgleichung

$$H(\lambda)|k;\lambda\rangle = (H_1 \cos\lambda + H_2 \sin\lambda)\,|k;\lambda\rangle = E_k(\lambda)|k;\lambda\rangle \tag{6.29}$$

durch Ableitung nach λ und Projektion auf $\langle k;\lambda|$ zu

$$\begin{aligned} p_k(\lambda) &= \langle k;\lambda|\frac{dH(\lambda)}{d\lambda}|k;\lambda\rangle \\ &= -\langle k;\lambda|H_1|k;\lambda\rangle \sin\lambda + \langle k;\lambda|H_2|k;\lambda\rangle \cos\lambda \\ &= -E_k(\lambda)\tan\lambda + \frac{\langle k;\lambda|H_2|k;\lambda\rangle}{\cos^2\lambda}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Die letzte Zeile gibt den Ausdruck an, der im Rahmen der Niveaudynamik als Hamiltonsches System benutzt wird. Für die Abschätzung der Stoßzeit eignet sich die zweite Zeile von (6.30).

Es soll angenommen werden, daß die Matrizen H_1 und H_2 unabhängig gewählte $N \times N$-Matrizen aus einem Gaußschen Ensemble von Zufallsmatrizen (GUE, GOE oder GSE) mit verschwindenden mittleren Matrixelementen[11]

$$\langle\langle H_{1,ij}\rangle\rangle = \langle\langle H_{2,ij}\rangle\rangle = 0 \tag{6.31}$$

und der gleichen Varianz

$$\langle\langle H^2_{1,ij}\rangle\rangle = \langle\langle H^2_{2,ij}\rangle\rangle = \frac{1}{N} \tag{6.32}$$

für alle Matrixelemente sind.[12] Für den Niveauabstand $\Delta_k \equiv E_{k+1} - E_k$ gilt dann im Mittel

$$\Delta \equiv \langle\langle \Delta_k\rangle\rangle \sim \frac{1}{N}. \tag{6.33}$$

Die mittlere Niveaugeschwindigkeit verschwindet dann

$$\langle\langle p\rangle\rangle = \Big\langle\Big\langle -\langle k;\lambda|H_1|k;\lambda\rangle \sin\lambda + \langle k;\lambda|H_2|k;\lambda\rangle \cos\lambda\Big\rangle\Big\rangle = 0 \tag{6.34}$$

---

[11] Die Mittelung über ein Ensemble von Zufallsmatrizen wird hier mit $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$ bezeichnet, da ein Querstrich in dieser Arbeit für komplexe Konjugation verwendet wird. Weiter unten wird dieselbe Schreibweise für das spektrale Mittel benutzt.

[12] Diese Wahl für die mittlere Varianz eines Matrixelementes ist für Zufallsmatrizen gleichbedeutend mit der allgemeineren Forderung $\langle\langle \mathrm{Spur}\, H_i^2\rangle\rangle = N$. Die Forderung $\mathrm{Spur} H^2 \sim N$ ist im klassischen Grenzfall $N \to \infty$ notwendig (unabhängig davon, ob H aus einem Ensemble von Zufallsmatrizen stammt), damit das Spektrum innerhalb eines endlichen Energieintervalls bleibt (wie z.B. beim Wignerschen Halbkreisgesetz [40]), d.h. für den mittleren Niveauabstand gilt dann $\Delta \sim \frac{1}{N}$ im spektralen Mittel. Da diese Forderung durch einen Skalierungsfaktor immer zu erreichen ist, hat diese Forderung keinen Einfluß auf die Niveaudynamik. Sie ist für alle numerisch untersuchten Hamilton-Matrizen in diesem Abschnitt erfüllt.

und für die Varianz gilt

$$\langle\langle p^2\rangle\rangle = \left\langle\left\langle(-\langle k;\lambda|H_1|k;\lambda\rangle\sin\lambda + \langle k;\lambda|H_2|k;\lambda\rangle\cos\lambda)^2\right\rangle\right\rangle \sim \frac{1}{N}. \tag{6.35}$$

Eine typische Niveaugeschwindigkeit ist daher von der Größenordnung

$$p_{typ} \sim \sqrt{\langle\langle p^2\rangle\rangle} \sim N^{-\frac{1}{2}}. \tag{6.36}$$

Mit der einfachen Abschätzung

$$\Delta\lambda_S \sim \frac{\Delta}{p_{typ}} \sim N^{-\frac{1}{2}} \tag{6.37}$$

für die Stoßzeit, erhält man einen Exponenten $\nu = \frac{1}{2}$. Diese Abschätzung ist jedoch zu schwach, um Universalität des Exponenten ν zu begründen, weil sie wesentlich auf dem Gaußschen Charakter der Zufallsmatrizen aufbaut (wie das Wignersche Halbkreisgesetz, das ebenfalls keine Universalität beanspruchen kann [40]).
Bei der numerischen Untersuchung von ν wurden die Hamilton-Operatoren

$$\begin{aligned} H_1 &= 8\hbar T_3 + 8\hbar^2\left(S_{12}^2 + S_{21}^2\right) + 3\hbar^2 S_{12}S_{21} - 8\hbar^2 S_{13}S_{31} + \\ &\qquad +5\hbar^2 S_{23}S_{32} - \hbar^2\left(S_{13}S_{32} + S_{23}S_{31}\right) \\ H_2 &= -7\hbar T_3 - 5\hbar^2\left(S_{12}^2 + S_{21}^2\right) - 3\hbar^2 S_{12}S_{21} + 8\hbar^2 S_{13}S_{31} - \\ &\qquad -5\hbar^2 S_{23}S_{32} + 16\hbar^2\left(S_{13}S_{32} + S_{23}S_{31}\right) \end{aligned} \tag{6.38}$$

mit den SU_3-Observablen $S_{ij}, T_3 = \frac{S_{11}-S_{22}}{2}$ und $\hbar = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$ in der $[\lambda_1;\lambda_2]$-Darstellung von SU_3 benutzt. Diese beiden Hamilton-Operatoren teilen die wesentlichen Eigenschaften der in Abschnitt 6.1 untersuchten Hamilton-Operatoren. Beide vertauschen mit der Hyperladung $Y = \frac{S_{11}+S_{22}-2S_{33}}{3}$

$$[Y, H_1] = [Y, H_1] = 0. \tag{6.39}$$

Sie sind somit integrabel, wenn der klassische Limes in den entarteten Darstellungen $[\lambda_1; 0]$ oder $[0; \lambda_2]$ vollzogen wird. In nichtentarteten Darstellungen $(\lambda_{1,2} \neq 0)$ ist die klassische Dynamik für $\hbar \to 0$ nichtintegrabel. Wie in Abschnitt 6.1 werden die Untersuchungen für ein Multiplett der Hyperladung durchgeführt ($Y = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{3}$ mit der Dimension $N = (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)$).
Zur Bestimmung des Exponenten ν wurden zwei numerische Verfahren benutzt. Das erste Verfahren zählt direkt die Anzahl Υ aller tatsächlichen und vermiedenen Kreuzungen der Eigenwerte von $H(\lambda)$ in einem festen Anteil $\tilde{N} = rN$ $(0 < r \leq 1)$ des Spektrums und einem festen λ-Intervall $\delta\lambda$ – die Auswahl im Spektrum und $\delta\lambda$ müssen so gewählt sein, daß sich universelle Niveauabstoßung zeigt und darf nicht

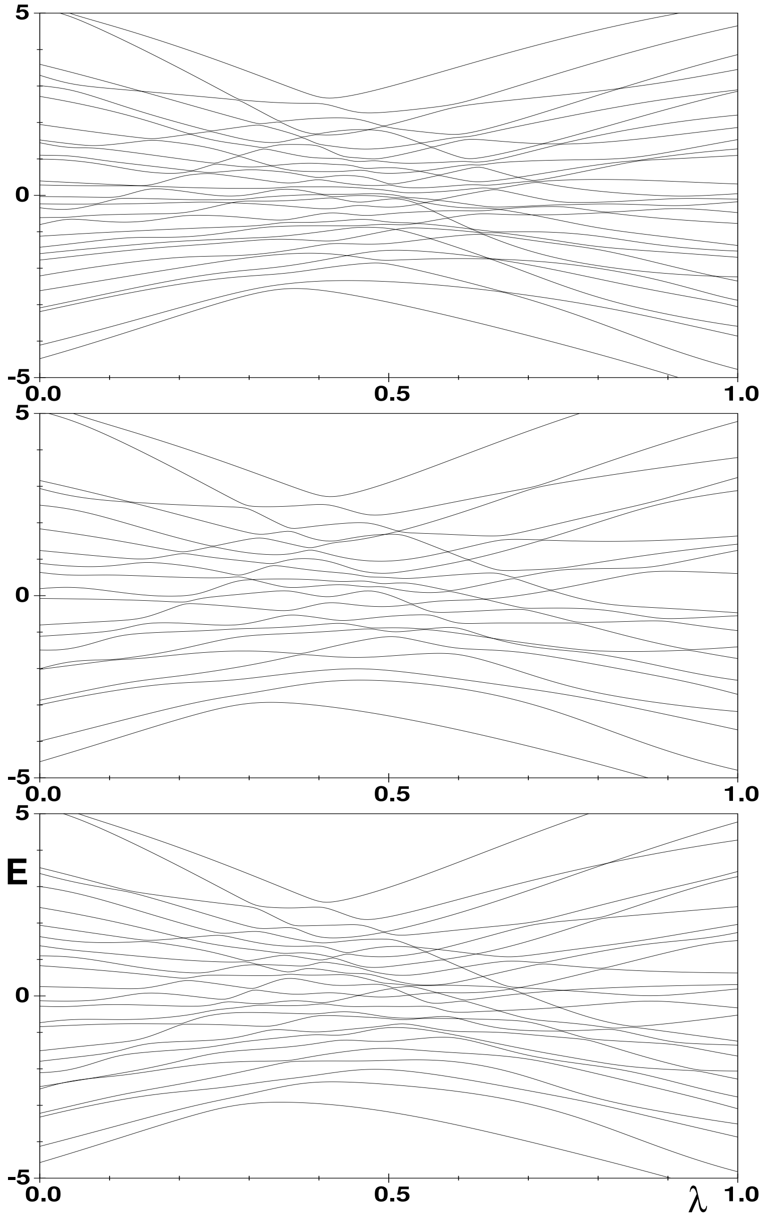

Abb. 6.10: Die drei Bilder zeigen die Niveaudynamik von $H(\lambda)$ in drei irreduziblen SU_3-Darstellungen ($\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $q = 2/3$, $N = 28$ im oberen, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, $q = 4/7$, $N = 20$ im mittleren und $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$, $q = 1/2$, $N = 25$ im unteren Bild.). Es wurde jeweils das Y-Multiplett $Y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{3}$ benutzt.

von N abhängen. Die mittlere Anzahl der Stöße eines einzigen Eigenwertes ist dann $\frac{\Upsilon}{\tilde{N}}$ und die mittlere Stoßzeit ist

$$\Delta\lambda_S = \frac{\delta\lambda\,\tilde{N}}{\Upsilon}. \tag{6.40}$$

Wegen $\Delta\lambda_S \sim \tilde{N}^{-\nu}$ gilt

$$\Upsilon \sim \tilde{N}^{1+\nu}. \tag{6.41}$$

Das zweite numerische Verfahren zur Bestimmung von N geht von der zweiten Zeile in Gleichung (6.30) aus und bildet das spektrale Mittel für die Varianz der Niveaugeschwindigkeiten p_k. Man erhält so die typische Niveaugeschwindigkeit

$$p_{typ} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{N}} \sum_{k=N_0+1}^{N_0+\tilde{N}} p_k^2 - \left(\frac{1}{\tilde{N}} \sum_{k=N_0+1}^{N_0+\tilde{N}} p_k \right)^2}. \tag{6.42}$$

Aus (6.37) erhält man dann

$$p_{typ} \sim \frac{\Delta}{\Delta\lambda_S} \sim \tilde{N}^{\nu-1}. \tag{6.43}$$

Dieses zweite Verfahren ist weniger direkt als das erste und erzeugt Fehler, wenn der mittlere Niveauabstand mit λ variiert, was unvermeidlich in den hier betrachteten Fällen ist. Das Verfahren ist jedoch numerisch nicht so aufwendig wie das Abzählen von Niveaukreuzungen, weil viel weniger Matrizen diagonalisiert werden müssen. Es können also erheblich größere Matrizen betrachtet werden.

Beide Verfahren wurden für drei Werte von $q = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} = 2/3, 4/7, 1/2$ durchgeführt (siehe Abschnitt 6.1). Abbildung 6.10 zeigt die Niveaudynamik für das oben angegebene Y-Multiplett im Hilbert-Raum einer irreduziblen SU_3-Darstellung zu den drei Werten von q. Das Vorherrschen von vermiedenen Kreuzungen ist in der Mitte der Dynamik gut ausgeprägt. Für die Bestimmung des Exponenten ν wurde nur das mittlere Drittel des Spektrums (also ist $\tilde{N} = \frac{1}{3}N$) im Intervall $0.3 \leq \lambda \leq 0.5$ benutzt. Dieser Teil der Niveaudynamik ist in Abbildung 6.11 zusammen mit der Niveauabstandsverteilung $P(s)$ zu sehen. Die Wahl dieses Ausschnitts für die numerischen Untersuchungen ist in der recht guten Übereinstimmung der Niveauabstandsverteilung mit der Vorhersage für das Gaußsche orthogonale Ensemble (GOE, siehe Gleichung (6.8)) begründet. Im zweiten Verfahren, das die mittlere Fluktuation der Niveaugeschwindigkeiten bestimmt, sind jedoch Fehler zu erwarten, weil der mittlere Niveauabstand offensichtlich nicht konstant ist.

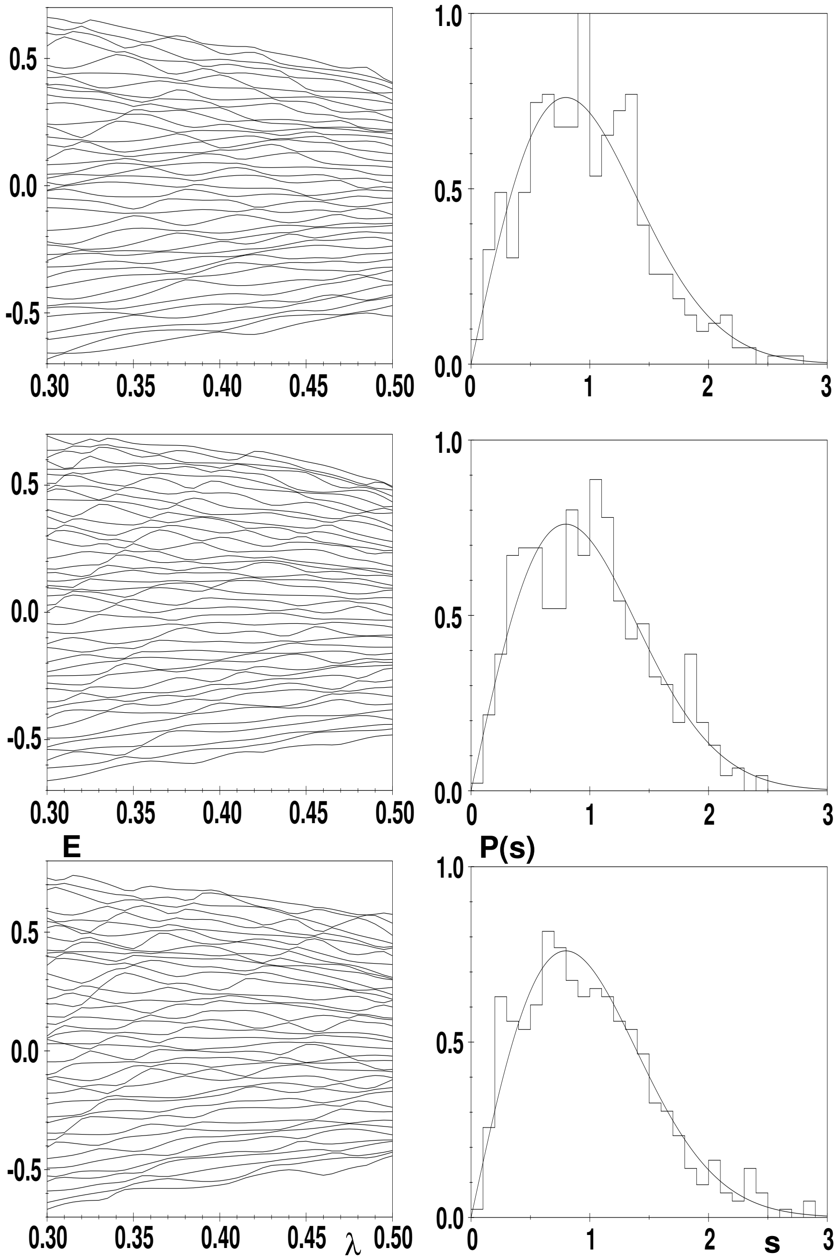

Abb. 6.11: Die Bilder zeigen die Niveaudynamik und die Niveauabstandsverteilung $P(s)$ von $H(\lambda)$ im Intervall $0.3 \leq \lambda \leq 0.5$ für das mittlere Drittel des Spektrums in drei irreduziblen SU_3-Darstellungen ($\lambda_1 = 14$, $\lambda_2 = 7$, $q = 2/3$, $\tilde{N} = 40$ für die oberen beiden Bilder, $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 9, q = 4/7$, $\tilde{N} = 43$ für die mittleren Bilder und $\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 10, q = 1/2, \tilde{N} = 40$ für die unteren beiden Bilder).

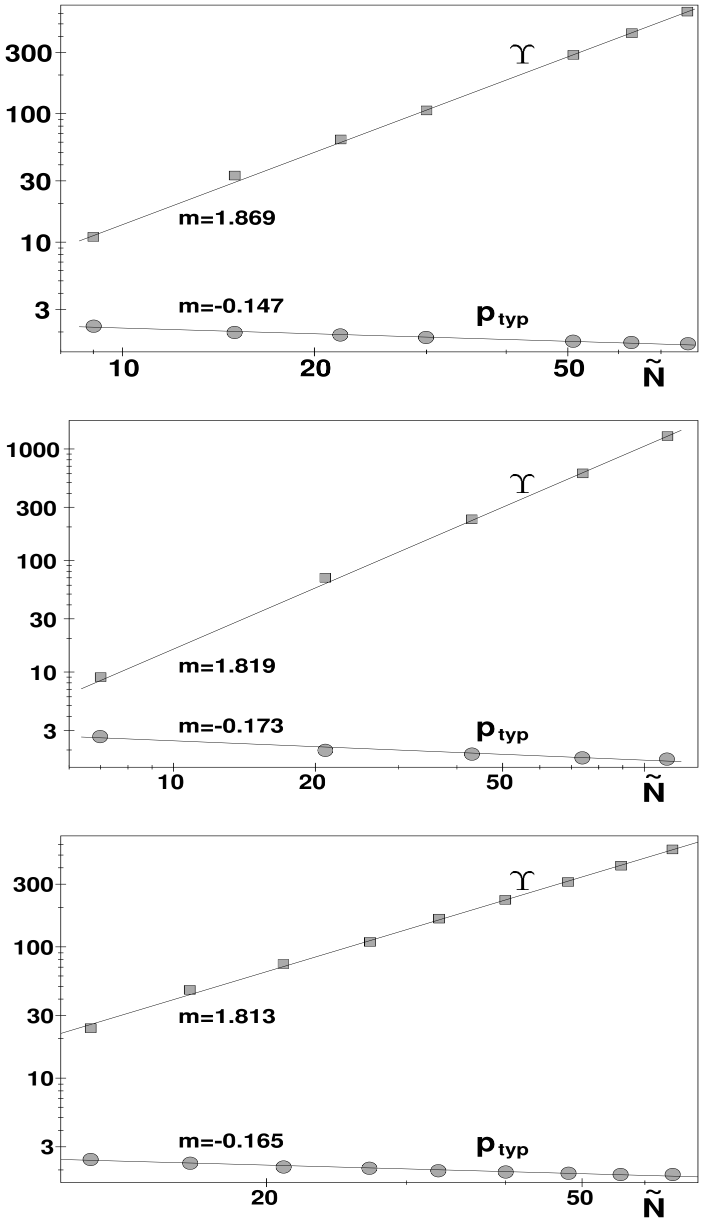

Abb. 6.12: Die Bilder zeigen die Anzahl Υ der echten und vermiedenen Niveaukreuzungen (Quadrate) und typische Geschwindigkeiten p_{typ} (Kreise) in Abhängigkeit von der Anzahlt der Energieniveaus $\tilde{N}$ in doppelt logarithmischer Darstellung (das obere Bild gehört zu $q = 2/3$, das mittlere zu $q = 4/7$ und das untere zu $q = 1/2$). An die numerischen Daten (Quadrate und Kreise) wurden Geraden angelegt, deren Steigungen m im Bild angegeben sind und die den Exponenten ν bestimmen.

In Abbildung 6.12 ist die Anzahl Υ von echten und vermiedenen Kreuzungen[13] sowie die mittlere Fluktuation der Niveaugeschwindigkeiten p_{typ} im oben angegebenen Parameterintervall von λ gegen die Anzahl $\tilde{N}$ der Energieniveaus aufgetragen. Um die Daten vergleichen zu können, wurden für p_{typ} nur diejenigen Datenpunkte eingetragen, für die auch eine numerische Berechnung von Υ durchgeführt wurde. Das Abzählen der vermiedenen Kreuzungen ist numerisch aufwendig, wenn die Dimension der Matrix groß wird. Aus den Steigungen in der doppelt logarithmischen Darstellung ergeben sich aus (6.41) und (6.43) die Exponenten ν, die in folgender Tabelle zusammengestellt sind.

q	ν aus dem Verhalten von Υ	ν aus dem Verhalten von p_{typ}
2/3	0.869	0.853
4/7	0.819	0.827
1/2	0.813	0.825

Die Werte des Exponenten ν unterscheiden sich kaum in den beiden verwendeten Verfahren. Auch die Abhängigkeit vom Parameter q, der die irreduziblen Darstellungen bestimmt, ist nur sehr schwach (man beachte jedoch, daß die Dynamik für $q = 1$ und $q = 0$ integrabel wird – die hier gewählten Werte von q sind jedoch weit entfernt vom integrablen Regime). Die Abweichungen von der Vorhersage $\nu = 0.5$ sind offensichtlich. Diese Vorhersage gründete auf $\langle\langle p_k \rangle\rangle \sim 1/N$, die für unabhängig gewählte Zufallsmatrizen H_1 und H_2 aus einem Gaußschen Ensemble gilt. Die hier benutzten Matrizen erfüllen keines dieser beiden Kriterien – es sind beides sehr dünne Matrizen und die verschwindenden Matrixelemente stimmen bei beiden sehr gut überein.

Das Verfahren, ν über das Verhalten von p_{typ} bei $\tilde{N} \to \infty$ zu bestimmen, läßt sich ohne großen Aufwand auf größere Matrizen ausdehnen. Abbildung 6.13 zeigt das Verhalten von p_{typ} über ein größeres Intervall. Über das volle Intervall gibt es offensichtlich kein Skalierungsverhalten. Der Exponent ν wurde aus den gestrichelten Geraden gewonnen, um das Ergebnis mit der direkten Bestimmung durch die Anzahl der Kreuzungen vergleichen zu können. Für große $\tilde{N}$ wurden neue Geraden angelegt, deren Steigungen $m = -0.052, -0.055, -0.055$ für $q = 2/3, 4/7, 1/2$ sind und einen Exponenten $\nu \approx 0.95$ nahelegen. Für große $\tilde{N}$ kann die indirekte Messung von ν durch die typische Niveaugeschwindigkeit jedoch nicht gut funktionieren, weil die Änderung der mittleren Niveaudichte, die man in Abbildung 6.11 deutlich sieht, Beiträge zur Fluktuation der Niveaugeschwindigkeit liefert, die für große $\tilde{N}$ dominieren.[14]

---

[13] Weiter unten wird gezeigt, daß die echten Kreuzungen gegenüber den deutlich vermiedenen Kreuzungen vernachlässigbar sind, wie es in einem überwiegend chaotischen Regime zu erwarten ist. Numerisch wurde eine Kreuzungen als echt betrachtet, sobald es aufgrund der in der Numerik

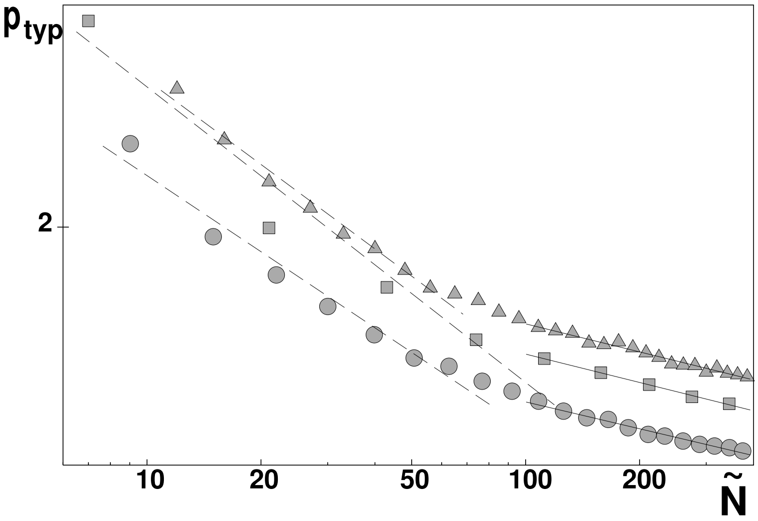

Abb. 6.13: Typische Niveaugeschwindigkeit p_{typ} in Abhängigkeit der Dimension des Hilbert-Raums in doppelt logarithmischer Darstellung (Kreise für $q = 2/3$, Quadrate für $q = 4/7$ und Dreiecke für $q = 1/2$). Die gestrichelten Geraden stimmen mit den Geraden in Abbildung 6.12 überein. Für große $\tilde{N}$ wurden neue Geraden an die Kurven gelegt.

Für $q = 1$ und $q = 0$ wird $H(\lambda)$ (aus Gleichung (6.38)) integrabel. Auf den Unterschied zwischen klassisch integrablen und klassisch chaotischen Niveaudynamiken kann also eingegangen werden, indem man die irreduziblen SU_3-Darstellungen passend wählt. Die Häufigkeit von deutlich vermiedenen Kreuzungen im Gegensatz zu echten oder schwach vermiedenen Kreuzungen steht im Mittelpunkt der folgenden Untersuchung, wobei als Kriterium für eine deutlich vermiedene Kreuzung gilt, daß der Niveauabstand am Punkt der größten Annäherung mindestens ein Prozent des mittleren Niveauabstandes beträgt.

Abbildung 6.14 zeigt die Anzahl Υ_{st} der stark vermiedenen Kreuzungen und die Anzahl aller Kreuzungen Υ in Abhängigkeit von $\tilde{N}$ in doppelt logarithmischer Darstellung. Die Datenpunkte zeigen, daß echte oder schwach vermiedene Kreuzungen hier für den Exponenten ν keine Rolle spielen. Das sieht im integrablen Regime ganz anders aus. In Abbildung 6.15 sind Υ_{st} und Υ in Abhängigkeit der Dimension N des Hilbert-Raums in doppelt logarithmischer Darstellung eingezeichnet.[15] Die stark

---

benutzten Auflösung nicht mehr zu entscheiden ist, ob eine vermiedene Kreuzung vorliegt.

[14] Dies ist leicht zu zeigen, wenn man N Niveaugeschwindigkeiten $p_k = \frac{v}{N}k$ annimmt, wobei $\frac{v}{N}$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich der mittlere Niveauabstand ändert. Man rechnet leicht nach, daß dann $p_{typ}^2 \longrightarrow v^2/12$ gilt.

[15] Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen wird nicht das Multiplett $Y = (\lambda_1 - \lambda_2)/3$ (also $Y =$

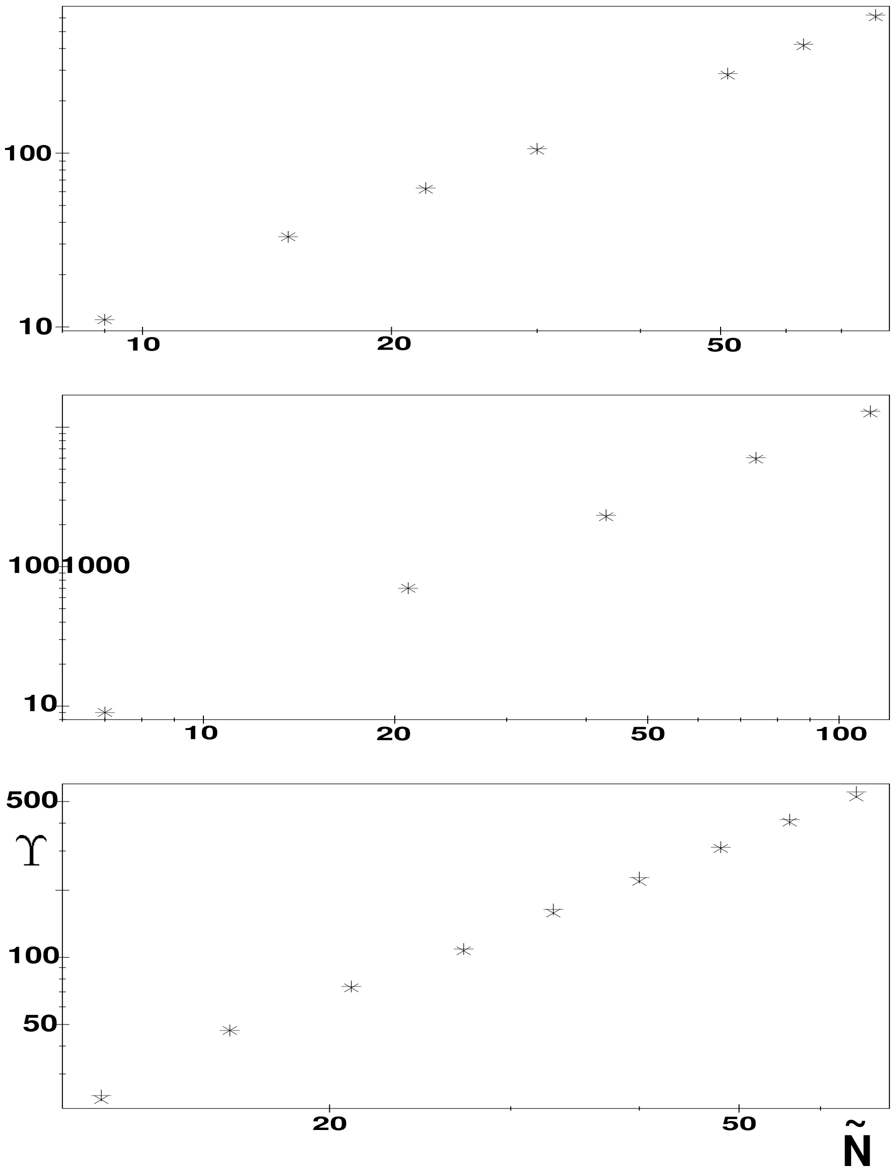

Abb. 6.14: Die Anzahl Υ_{st} der stark vermiedenen Kreuzungen ($\times$) und die Anzahl Υ aller echten plus vermiedenen Kreuzungen ($+$) in Abhängigkeit der Anzahl der Energieniveaus $\tilde{N}$ in doppelt logarithmischer Darstellung im chaotischen Regime ($q = 2/3, 4/7, 1/2$ im oberen, mittleren und unteren Bild).

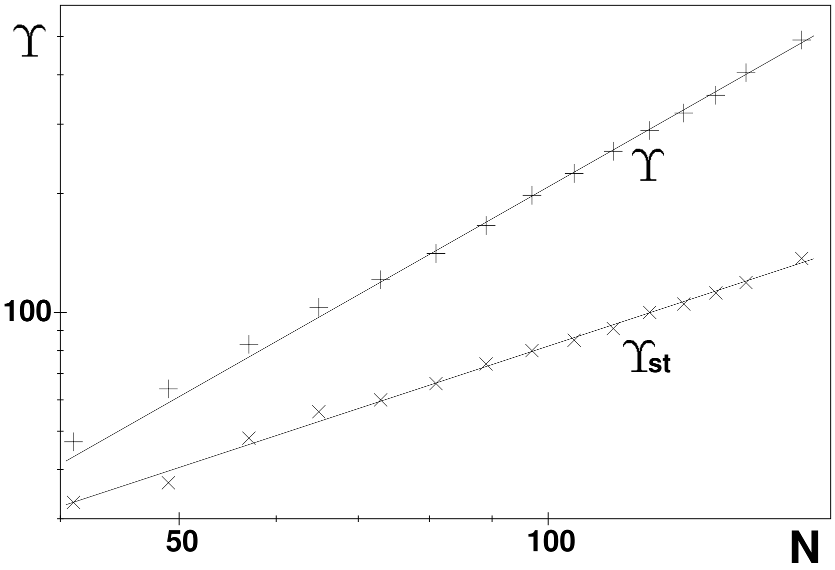

Abb. 6.15: Die Anzahl Υ_{st} der stark vermiedenen Kreuzungen ($\times$) und die Anzahl Υ aller echten plus vermiedenen Kreuzungen ($+$) in Abhängigkeit der Anzahl der Energieniveaus $\tilde{N}$ in doppelt logarithmischer Darstellung im integrable Regime ($q = 1$).

vermiedenen Kreuzungen Υ_{st} haben ein deutlich verschiedenes Skalierungsverhalten gegenüber der Gesamtzahl Υ aller Kreuzungen

$$\Upsilon \sim N^{1.77} \qquad \Upsilon_{st} \sim N^{1.02}. \tag{6.44}$$

Im Gegensatz zum chaotischen Regime herrschen also für große Dimensionen N (kleines $\hbar$) echte und schwach vermiedene Kreuzungen vor. Der Unterschied zwischen schwach vermiedenen oder echten Kreuzungen auf der einen Seite und stark vermiedenen Kreuzungen auf der andere Seite wurde für das integrable Regime in Abschnitt 6.2.1 untersucht. Dort wurden Argumente angegeben, daß die Anzahl der stark vermiedenen Kreuzungen Υ_{st} proportional zu N wachsen sollte. Das stimmt mit dem numerischen Ergebnis sehr gut überein. Es stellt sich jedoch die Frage, warum die Gesamtzahl Υ aller Stöße in diesem Beispiel nur mit dem Exponenten 1.77 wächst und nicht quadratisch, wie es in Abschnitt 6.2.1 vorhergesagt wurde. Man beachte jedoch, daß nur ein fester Anteil des Spektrums schwach vermiedene Kreuzungen zu zeigen braucht, während die restlichen Energieniveaus relativ parallel

---

$\lambda_1/3$ bei $q = 1$) benutzt sondern $Y = 14\lambda_1/15$, was sich nur Realisieren läßt, wenn λ_1 ein Vielfaches von fünf ist. Diese Wahl wurde getroffen, weil sich bei den größten numerisch noch sinnvollen Dimensionen des Hilbert-Raums eine bessere Annäherung an das asymptotische Verhalten zeigt.

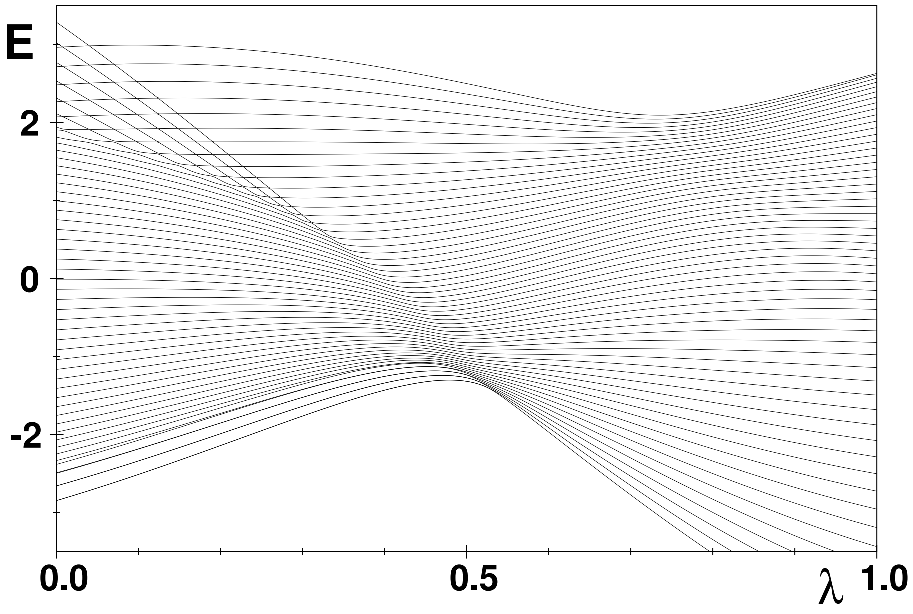

Abb. 6.16: Niveaudynamik von $H(\lambda)$ im integrablen Regime ($q = 1$) in einem Multiplett der Dimension $N = 57$.

verlaufen können und im wesentlichen durch Änderungen des mittleren Niveauabstandes stark vermiedene Kreuzungen zeigen mit Abständen in der Größenordnung des mittleren Niveauabstandes – solche vermiedenen Kreuzungen können nur linear in N wachsen.

In Abbildung 6.16 ist die Niveaudynamik von $H(\lambda)$ im integrablen Fall $q = 1$ abgebildet. Dort sieht man, daß nur etwa ein Viertel des Spektrums (die oberen 13 Niveaus) an schwach vermiedenen Kreuzungen beteiligt ist[16] – in diesem Teil des Spektrums wächst Υ offensichtlich quadratisch und im Rest nur linear. Ist r der Anteil des Spektrums mit $0 \leq r \leq 1$, in dem Υ quadratisch wächst, dann ist die Anzahl der Kreuzungen in diesem Bereich circa $\frac{rN(rN+1)}{2}$ und im übrigen Spektrum circa $(1-r)N$ – insgesamt ergibt sich also

$$\Upsilon \approx \frac{r^2}{2}N^2 + \left(1 - \frac{r}{2}\right)N \approx \frac{1}{32}N^2 + \frac{7}{8}N \qquad \text{für } r = \frac{1}{4}. \tag{6.45}$$

Diese Abschätzung kann in Abbildung 6.15 mit ihrem asymptotischen Verhalten ()also $\Upsilon \sim N^2/32$, gestrichelte Linie) und den numerischen Daten verglichen werden. Obwohl der absolute Wert von Υ für die numerischen Ergebnisse von der

---

[16] Schwach vermiedene Kreuzungen sind im Bild nicht von echten Kreuzungen zu unterscheiden. Größtenteils sind sie auch numerisch nur sehr schwer aufzulösen.

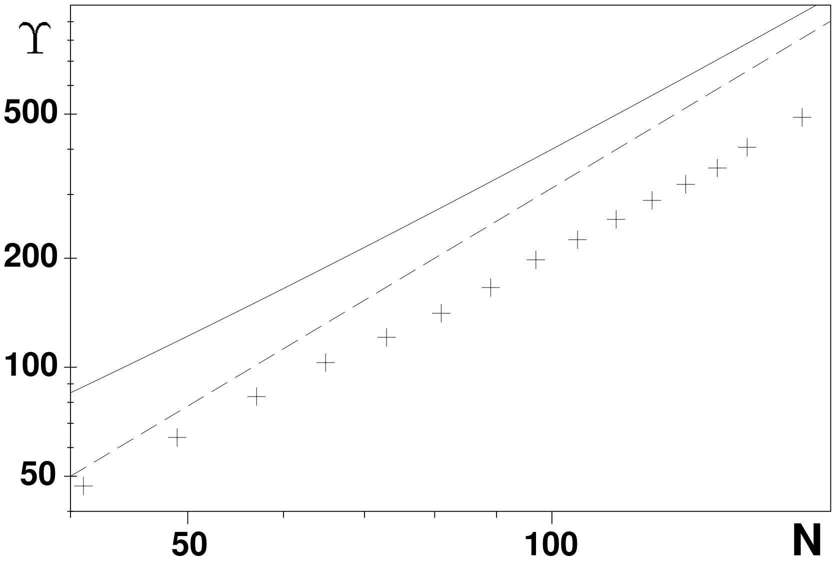

Abb. 6.17: Anzahl Υ aller Kreuzungen im integrablen Regime in doppelt logarithmischer Darstellung. Die durchgezogene Linie zeigt die Abschätzung aus Gleichung (6.45) und die gestrichelte Linie deren asymptotisches Verhalten für große N (also $\Upsilon \sim N^2/32$). Die Datenpunkte sind die numerischen Resultate aus Abbildung 6.15.

Abschätzung (6.45) (gestrichelte Linie) abweicht, sind beide Linien parallel und haben eine deutlich kleinere Steigung als die gestrichelte Linie, die das quadratische Anwachsen für große N zeigt. Das Skalierungsverhalten $\Upsilon \sim N^{1.77}$ im Bereich der numerischen Daten ist also darauf zurückzuführen, daß der asymptotische Bereich noch nicht erreicht ist.

7. Semiklassik autonomer Systeme mit kompaktem Phasenraum

Semiklassische Spurformeln bilden seit langem ein wichtiges Werkzeug, um das quantenmechanische Spektrum eines Hamilton-Operators H zu berechnen, wenn das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ klein gegen alle typischen Wirkungen der von H erzeugten Dynamik ist [2,5,7–10,65–69,125–127]. Das Korrespondenzprinzip verlangt dann, daß das Spektrum im wesentlichen durch Eigenschaften der zugehörigen klassischen Dynamik bestimmt ist. Die semiklassischen Spurformeln geben eine Näherung der quantenmechanischen Niveaudichte [65,66] oder der Spur des Propagators [8,127] an, in der nur noch Eigenschaften periodischer Trajektorien im Phasenraum (periodische Bahnen) eingehen: die Periode τ, die Wirkung S, die (reduzierte) Stabilitätsmatrix M und der sogenannte Morse-Maslov-Index (ein topologischer Phasenfaktor) [128,129].
Üblicherweise erhält man das semiklassische Spektrum mit der Gutzwillersche Spurformel für die Niveaudichte. Die exakte Niveaudichte ist durch eine Summe von δ-Funktionen gegeben, deren Positionen durch die Eigenwerte des Hamilton-Operators bestimmt sind. Die Gutzwillersche Spurformel ist eine semiklassische Näherung der Niveaudichte, die gilt, wenn die Dynamik des klassischen Grenzfalles stark chaotisch (hyperbolisch) ist. Sie enthält eine Summe über alle periodischen Bahnen einer gegebenen Energie.
Grundsätzlich ist die Konvergenz der Gutzwillerschen Spurformel problematisch, da die Anzahl der periodischen Bahnen bei einer chaotischen Dynamik mit der Länge der Periode exponentiell wächst (man spricht von exponentieller Proliferation). Der Beitrag einer periodischen Bahn zur Spurformel fällt dem Betrag nach mit der Länge der Periode zu schwach ab, um die Konvergenz zu sichern. Trotzdem hat die Gutzwillersche Spurformel zu vielen Einsichten geführt, besonders bei Systemen, für die sie exakt ist (z.B. den Sinai-Billard [9,130,131] oder Quantengraphen [132]).
Wie *M. V. Berry* und *J. P. Keating* gezeigt haben, braucht man nicht die (vielleicht divergierende) Summe über alle periodischen Bahnen mit gegebener Energie auszuführen [69], wenn man das Spektrum semiklassisch bestimmen will. Es reicht aus, über alle periodischen Bahnen zu summieren, deren Periode kürzer als die sogenannte Heisenberg-Zeit τ_H ist, die durch den mittleren Niveauabstand definiert ist. Die Summe über alle periodischen Bahnen bis zur Heisenberg-Zeit ist endlich – somit

treten keine Divergenzprobleme auf.
Dennoch enthält diese Summe wegen der exponentiellen Proliferation sehr viele periodische Bahnen. So viele, daß im klassischen Phasenraum Strukturen aufgelöst werden, die weit kleiner sind als eine Planck-Zelle. Da quantenmechanisch beliebig kleine Substrukturen innerhalb einer Planck-Zelle nicht von Bedeutung sein sollten, muß es möglich sein, das Spektrum semiklassisch noch effizienter zu bestimmen. Dabei sollte es möglich sein, die Anzahl der benötigen periodischen Bahnen so stark zu reduzieren, daß nur Strukturen in der Größenordnung von Planck-Zellen im Phasenraum aufgelöst werden. In diesem Kapitel soll eine semiklassische Methode vorgestellt und angewendet werden, die die Berechnung des semiklassischen Spektrums effizienter gestalten kann.
In Abschnitt 7.1 wird die Methode vorgestellt, die von der semiklassischen Spur des Propagators ausgeht. Zunächst wird in Abschnitt 7.1.1 die Gutzwillersche Spurformel für die Niveaudichte beschrieben. Nachdem die Probleme bei der Bestimmung des semiklassischen Spektrums über die Gutzwillersche Spurformel für die Niveaudichte näher dargelegt wurden, wird in Abschnitt 7.1.2 die Spurformel für den Propagator und in Abschnitt 7.1.3 die Methode zur Gewinnung des semiklassischen Spektrums beschrieben.
Die Anwendung dieser Methode auf zwei gekoppelte Drehimpulse[1] folgt in Abschnitt 7.2. Der Hamilton-Operator wird mit seinen Symmetrien in Abschnitt 7.2.1 vorgestellt. Dieser und sehr ähnliche Hamilton-Operatoren für zwei gekoppelte Drehimpulse wurden bereits mehrfach untersucht [133–136]. Es folgt in Abschnitt 7.2.2 eine Beschreibung der klassischen Dynamik mit ihren Fixpunkten und periodischen Bahnen. Die numerische Berechnung des semiklassischen Spektrums befindet sich in Abschnitt 7.2.3. Abschließend wird die Methode zur Bestimmung des semiklassischen Spektrums in Abschnitt 7.2.4 vorläufig aufgrund der Anwendung auf die gekoppelten Drehimpulse bewertet.

---

[1] Ein Drehimpuls ist formal äquivalent zu global gekoppelten Zwei-Niveau-Atomen. Daher erscheint die Untersuchung von zwei gekoppelten Drehimpulsen in dieser Arbeit gerechtfertigt, zumal global gekoppelte n-Niveau-Atome hier nur ein Beispiel für autonome Dynamiken mit kompaktem klassischen Phasenraum darstellen, was auch für gekoppelte Drehimpulse gilt.

7.1 Die semiklassische Spurformel für den Propagator

7.1.1 Die Gutzwillersche Spurformel für die Niveaudichte

Die quantenmechanische Niveaudichte

$$\rho(E) = \sum_i \delta(E - E_i) \tag{7.1}$$

ist eine Summe über δ-Funktionen, deren Positionen durch die Eigenwerte E_i des Hamilton-Operators bestimmt sind. Sie läßt sich als Imaginärteil über die Spur des Laplace-transformierten Propagators darstellen

$$\rho(E) = \mathrm{Spur}\,\delta(E - H) = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Spur}\frac{1}{E + i\epsilon - H}. \tag{7.2}$$

Der Laplace-transformierte Propagator läßt sich als ein Pfadintegral darstellen, daß sich für kleine $\hbar \to 0$ asymptotisch durch die Methode stationärer Phase approximieren läßt. Hier soll auf Einzelheiten der Ableitung nicht weiter eingegangen werden; sie ist in vielen Lehrbüchern über Quantenchaos zu finden [2,7–10,67,68].
In der semiklassischen Näherung ist die Niveaudichte dann als Summe von zwei Termen

$$\rho(E) \approx \bar{\rho}^{sk}(E) + \rho^{sk}_{osz}(E) \tag{7.3}$$

darstellbar. Der erste Term $\bar{\rho}^{sk}(E)$ heißt Weyl-Term und gibt die mittlere Niveaudichte über ein Energieintervall ΔE an, das viele Energieniveaus enthält, aber verglichen mit typischen klassischen Energiedifferenzen klein ist. Diese mittlere Niveaudichte ist semiklassisch durch das Volumen der Energieschale bestimmt

$$\bar{\rho}^{sk}(E) = \int \frac{d^f q d^f p}{h^f} \delta(E - H^{kl}(q,p)), \tag{7.4}$$

wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade der klassischen Dynamik ist und $H^{kl}(q,p)$ die klassische Hamilton-Funktion, die sich aus H im klassischen Grenzfall ergibt. Für eine glatte Hamilton-Funktion ist dann auch die mittlere Niveaudichte eine glatte Funktion der Energie.
Der zweite Term $\rho^{sk}_{osz}(E)$ gibt die Fluktuationen der Niveaudichte um die mittlere Niveaudichte $\bar{\rho}^{kl}$ an. *M. Gutzwiller* hat diesen Anteil durch seine bekannte Spurformel

$$\rho^{sk}_{osz}(E) = \mathrm{Im}\frac{i}{\pi\hbar} \sum_{p.p.B.(E)} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\tau_p}{\sqrt{\left|\det\left(M^r_{p,red} - \mathbb{I}\right)\right|}} \exp\left(i\frac{rS_p}{\hbar} - i\frac{\pi}{2}\mu_{p,r}\right) \tag{7.5}$$

ausgedrückt [65,66]. Die äußere Summe in (7.5) läuft über alle primitiven periodischen Bahnen mit der Energie E. Bei einer primitiven periodischen Bahn wird jeder Punkt auf der Bahn nur ein Mal durchlaufen. Die innere Summe über r läuft dann über alle Wiederholungen einer primitiven periodischen Bahn. In die Amplitude jedes Beitrags zur Spurformel geht die Periode τ_p der primitiven periodischen Bahn und die nichttrivialen Eigenwerte der Stabilitätsmatrix (eine $2f \times 2f$-Matrix)

$$M_p = \frac{\partial(q(\tau_p), p(\tau_p))}{\partial q(0), p(0)} \tag{7.6}$$

ein. Die $2f$ Eigenwerte der Stabilitätsmatrix sind konstant entlang einer periodischen Bahn. Zwei dieser Eigenwerte sind in einer autonomen Hamiltonschen Dynamik immer gleich eins, weil Auslenkungen entlang der Bahn trivialerweise erhalten bleiben. Die reduzierte Stabilitätsmatrix $M_{p,red}$ (eine $(2f-2) \times (2f-2)$-Matrix) enthält nur noch die nichttrivialen Eigenwerte und wird gebildet, indem man nur Auslenkungen innerhalb eines Poincaré-Schnittes betrachtet, der von der periodischen Bahn durchstoßen wird. Bei der r-ten Wiederholung einer primitiven periodischen Bahn ist die reduzierte Stabilitätsmatrix gerade die r-te Potenz $M^r_{p,red}$ der reduzierten Stabilitätsmatrix der primitiven Bahn. Der Phasenfaktor in (7.5) enthält zwei klassische Größen: zum einen die reduzierte Wirkung $S = rS_p$ der r-ten Wiederholung einer primitiven periodischen Bahn, wobei

$$S_p = \oint_{p.p.B.} p dq \tag{7.7}$$

die Wirkung der primitiven Bahn ist, und zum anderen den Morse-Maslov-Index $\mu_{p,r}$, der eine ganze Zahl ist, die aus der Topologie der periodischen Bahn folgt [128,129]. Für instabile Bahnen läßt sich der Morse-Maslov-Index als Windungszahl der instabilen (oder stabilen) Mannigfaltigkeit entlang der Bahn beschreiben.

Die Gutzwillersche Spurformel (7.5) ist semiklassisch nur unter der Voraussetzung gültig, daß alle periodischen Bahnen isoliert sind. Diese Annahme muß für die Gültigkeit der Methode stationärer Phase gemacht werden. Streng genommen bedeutet das, daß die klassische Dynamik keine Stabilitätsinseln haben darf, also stark chaotisch (hyperbolisch) sein muß. Das Zusammenbrechen der Gutzwillerschen Spurformel im gemischten Phasenraum wird im Nenner $\sqrt{\left|\det\left(M^r_{p,red} - \mathbb{I}\right)\right|}$ von (7.5) deutlich, der verschwindet, wenn man sich an einer Bifurkation von periodischen Bahnen befindet[2], so daß der Beitrag der bifurkierenden Bahn divergiert. Durch Variation der Energie ist es im gemischten Phasenraum immer möglich, in die Nähe oder auf Bifurkationen zu kommen. In genügender Entfernung von allen Bifurkationen ist die

---

[2] An einer Bifurkation hat die reduzierte Stabilitätsmatrix mindestens zwei Eigenwerte, die eins sind.

Gutzwillersche Spurformel (7.5) jedoch auch bei gemischtem klassischem Phasenraum gültig. In der Nähe von Bifurkationen läßt sich die Ableitung der Spurformel systematisch behandeln, indem höhere Ordnungen bei der Methode stationärer Phase berücksichtigt [8,47–49,67,68,127,137,138]. Damit sind Bifurkationen heute kein Hindernis mehr bei der Verwendung semiklassischer Spurformeln.

Die Gutzwillersche Spurformel ist jedoch noch mit viel fundamentaleren Problemen behaftet, die auch in Abwesenheit von Bifurkationen zu Sorge Anlaß geben. So ist es im allgemeinen nicht möglich, die Konvergenz der Summe über alle periodischen Bahnen zu zeigen. Solch eine Konvergenz kann von vorneherein nur eine schwache Konvergenz im Sinne von Distributionen sein, da die approximierte Größe bereits eine Summe von δ-Distributionen darstellt. Nur in einigen besonderen Fällen konnte Konvergenz und sogar Exaktheit der Spurformel bewiesen werden. In generischen Fällen kann man nicht von Exaktheit ausgehen und die Konvergenz bleibt fraglich. Ein anderes Problem, das sowohl die Konvergenz noch weiter in Frage stellt, aber auch ganz praktischer Natur ist, ist die sogenannte exponentielle Proliferation von periodischen Bahnen. Die Anzahl $N_{p.B.}$ der periodischen Bahnen mit einer Periode τ wächst exponentiell an $N_{p.B.} \sim \exp\lambda\tau/\tau$, wobei λ ein mittlerer Lyapunov-Exponent ist. Die Beiträge zur Spurformel fallen dem Betrag nach jedoch nicht schnell genug ab, um Konvergenz der Summe auch im schwachen Sinn gewährleisten zu können. Praktisch gestaltet sich allein die numerische Suche der periodischen Bahnen mit wachsender Periode als generisch unmöglich, es sei denn man kennt die periodischen Bahnen aus einer symbolischen Dynamik oder ähnlichem.

Trotz all dieser Probleme hat sich die Gutzwillersche Spurformel in vielen Fällen sehr bewährt, wenn man das semiklassische Spektrum bestimmen will. Dazu ist es auch gar nicht notwendig, alle Beiträge mit beliebig langer Periode auszurechnen, weil man zur Bestimmung des Spektrums nur eine Auflösung der Niveaudichte für die Energie in der Größenordnung des mittleren Niveauabstandes braucht [69]. Das führt dazu (indem man (7.5) über ein entsprechendes Energieintervall mittelt), daß nur Beiträge mit Perioden τ eingehen, die kleiner als die sogenannte Heisenberg-Zeit

$$\tau_H = \frac{h}{\bar{\rho}} \tag{7.8}$$

sind. Die Heisenberg-Zeit gibt gerade die Zeitskala an, die mit der mittleren Niveaudichte $\bar{\rho}$ verknüpft ist. Das Problem der exponentiellen Proliferation ist damit teilweise gelöst, weil nur noch endlich viele Beiträge in der Spurformel verbleiben. Praktisch stellt es aber in generischen chaotischen Systemen immer noch ein nur mit gewaltigem numerischen Aufwand zu lösendes Problem dar, alle periodischen Bahnen zu finden, die kleiner sind als die Heisenberg-Zeit. Dazu beachte man, daß die Heisenberg-Zeit für $\hbar \longrightarrow 0$ mit

$$\tau_H \sim \frac{1}{\hbar^{f-1}} \tag{7.9}$$

divergiert. Da der mittlere Lyapunov-Exponent λ jedoch keine $\hbar$-Abhängigkeit besitzt, gilt im semiklassischen Limes immer

$$\tau_H \lambda \gg 1, \tag{7.10}$$

so daß die Anzahl an periodischen Bahnen $\exp(\lambda\tau_H)/\tau_H$, die numerisch bestimmt werden müssen, immer noch sehr groß ist.

7.1.2 Die Spurformel für den Propagator

Auch für die Spur des zeitabhängigen Propagators

$$u(t) = \text{Spur}\,\exp\left(-i\frac{Ht}{\hbar}\right) = \sum_j \exp\left(-i\frac{E_j t}{\hbar}\right) \tag{7.11}$$

läßt sich eine semiklassische Spurformel ableiten [8,127]. Dies ist entweder auf direktem Weg über die Methode stationärer Phase aus einer Pfadintegraldarstellung des Propagators oder auf indirektem Weg über eine Fourier-Transformation der semiklassischen Spurformel für die Niveaudichte (ebenfalls mit stationärer Phase ausgewertet) möglich. Auf beiden Wegen erhält man das gleiche Resultat

$$u(t) \approx u^{sk}_{FP}(t) + u^{sk}_{PB}(t). \tag{7.12}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite von (7.12) enthält Beiträge, die von Fixpunkten der klassischen Dynamik stammen

$$u^{sk}_{FP}(t) = \sum_{FP} \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right) \prod_{j=1}^{f} \frac{1}{2i\sin\left(\omega_j \frac{t}{2}\right)}. \tag{7.13}$$

Die Summe geht über alle Fixpunkte der klassischen Dynamik. Die Frequenzen ω_j sind durch die reduzierte Stabilitätsmatrix bestimmt, deren Eigenwerte $\exp(\pm i\omega_j t)$ lauten. Der zweite Summand von (7.12) enthält die Beiträge, die von (echten) periodischen Bahnen kommen

$$\begin{aligned} u^{sk}_{PB}(t) = & \sum_{(p.p.B.,r)\,\text{mit}\,r\tau_p = t} \frac{\tau_p}{\sqrt{\left| hr\frac{\partial\tau_p}{\partial E}\det\left(M^r_{p,red} - \mathbb{I}\right)\right|}} \times \\ & \times \exp\left(i\frac{rW_p}{\hbar} - i\frac{\pi}{2}\mu_{p,r} + i\frac{\pi}{4}\text{sgn}\frac{\partial\tau_p}{\partial E}\right). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Dabei geht die Summe über alle periodischen Bahnen der Periode $t = r\tau_p$, wobei τ_p die primitive Periode der Bahn ist und r die Anzahl von Durchläufen. Die Beiträge zur Amplitude sind im wesentlichen mit denen identisch, die in der Spurformel (7.5) für die Niveaudichte stehen - bis auf einen Faktor $\sqrt{|r\frac{\partial\tau_p}{\partial E}|}^{-1}$, der bei der Fourier-Transformation von $\rho^{sk}(E)$ nach $u^{sk}(t)$ entsteht, wenn man diese mittels stationärer Phase auswertet. Entsprechend tritt in der Phase ein zusätzlicher Term $i\frac{\pi}{4}\mathrm{sgn}\frac{\partial\tau_p}{\partial E}$ auf, der ebenfalls bei der Fourier-Transformation entsteht. Statt der reduzierten Wirkung $S = rS_p$ einer periodischen Bahn steht nun die volle Wirkung $W = rW_p$ mit

$$W_p = S_p - E\tau_p = \oint_{p.p.B.} pdq - Hdt \tag{7.15}$$

in der Phase von (7.14).

Ein großer Vorteil der Spurformel für den zeitabhängigen Propagator liegt darin, daß keinerlei Konvergenzprobleme auftauchen, sobald der Phasenraum kompakt ist. In einem kompakten Phasenraum gibt es zu jeder Periode nur endlich viele periodische Bahnen und damit endlich viele Beiträge zur Spurformel.

7.1.3 Bestimmung des Spektrums aus der semiklassischen Spur des Propagators

In diesem Abschnitt soll angenommen werden, daß der klassische Phasenraum der Dynamik kompakt ist. Dann hat der quantenmechanische Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ der Dynamik eine endliche Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{H} = N. \tag{7.16}$$

Die exakte Spur des zeitabhängigen Propagators lautet dann

$$u(t) = \sum_{j=1}^{N} \exp\left(-i\frac{E_j t}{\hbar}\right), \tag{7.17}$$

mit den Eigenwerten E_j des quantenmechanischen Hamilton-Operators. Um aus der semiklassischen Spur

$$u^{sk}(t) = u^{sk}_{FP}(t) + u^{sk}_{PO}(t) \tag{7.18}$$

das Spektrum $\{E_1, E_2, \ldots, E_N\}$ zu bekommen, müssen zunächst alle periodischen Bahnen bis zu einer maximalen Periode τ_{max} gefunden werden. Dies bedeutet wegen der exponentiellen Proliferation der periodischen Bahnen einen großen numerischen Aufwand, wenn τ_{max} zu groß (d.h. $\tau_{max}\lambda \gg 1$) gewählt wird. Im üblichen Verfahren, das Spektrum aus der semiklassischen Spurformel für die Niveaudichte zu bestimmen, muß $\tau_{max} \approx \tau_H$ gewählt werden, um das Spektrum gut aufzulösen. Dann ist aber im allgemeinen $\tau_{max}\lambda \approx \tau_H\lambda \gg 1$, d.h. es muß ein riesiger numerischer Aufwand betrieben werden, um die exponentiell vielen periodischen Bahnen zu finden.

Bei der Bestimmung des Spektrums aus der semiklassischen Spur des zeitabhängigen Propagators besteht jedoch Hoffnung, daß es ausreicht, nur bis zu einer Zeit τ_{max} zu gehen, die deutlich kleiner als die Heisenberg-Zeit ist. Man beachte, daß bereits eine Reduzierung von τ_{max} um einen Faktor $\frac{1}{2}$ die Anzahl der zu findenden periodischen Bahnen drastisch reduziert. Diese Hoffnung kann ma physikalisch oder formal begrunden. Die physikalische Begründung liegt darin, daß eine exponentiell große Anzahl von periodischen Bahnen Strukturen im Phasenraum auflöst, die erheblich kleiner sind als eine Planck-Zelle. Aus Sicht der Quantenmechanik macht aber eine so genaue Auflösung des Phasenraumes keinen Sinn. Bei der formalen Begründung sollte man zunächst das Argument betrachten, das üblicherweise für $\tau_{max} = \tau_H$ gegeben wird. Dieses Argument lautet, daß bei der Fourier-Transformation eines Signals endlicher Länge der Form $f(t) = \sum a_j \exp(i\omega_j t)$ (mit $t \in [0, \tau_{max}]$) die einzelnen Frequenzen ω_j nur dann aufgelöst werden können, wenn die Zeit τ_{max} von der gleichen Größenordnung ist wie $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$, wobei $\Delta\omega$ der mittlere Frequenzabstand ist. Die Spur des zeitabhängigen Propagators ist jedoch ein Signal, bei dem die Amplitude für jede Frequenz gleich eins ist. Diese zusätzliche Information muß sich ausnutzen lassen, um auch für kleinere Zeiten τ_{max} das Spektrum mit genügender Präzision zu behandeln.

Das weitere Verfahren ist einfach: man nimmt das semiklassische Signal $u^{sk}(t)$ und sucht nach den Energiewerten $\tilde{E}_j$ die den Ausdruck

$$\int_0^{\tau_{max}} \left| u^{sk}(t) - \sum_{j=1}^{N} \exp\left(-i\frac{\tilde{E}_j t}{\hbar}\right) \right|^2 \tag{7.19}$$

minimieren. Diese Energiewerte bilden dann die semiklassische Näherung des Spektrums.

Probleme treten bei diesem Verfahren in der Nähe von Bifurkationen auf. Diese müssen entweder durch entsprechende gleichförmige Näherungen behandelt werden oder die entsprechenden Zeitintervalle müssen ausgespart bleiben. Berücksichtigt man bei der Berechnung des Spektrums jedoch nur jene Zeitintervalle, die von allen Bifurkationen genügenden Abstand haben, muß man eventuell zu größeren Zeiten τ_{max} gehen, um ein gutes Spektrum zu erhalten. Außerdem ist nicht in allen Fällen klar, was genügender Abstand von allen Bifurkationen bedeutet.

Die hier beschriebene Strategie zur Bestimmung des Spektrums aus der semiklassischen Spur des Propagators kann auch auf Dynamiken mit einem nichtkompakten klassischen Phasenraum und somit unendlichdimensionalem quantenmechanischen Hilbert-Raum angewendet werden. Der Phasenraum läßt sich im allgemeinen kompaktifizieren, indem man sich auf ein Energie-Intervall $E_{min} \leq E \leq E_{max}$ beschränkt. Das quantenmechanische Spektrum in diesem Energie-Intervall erhält man dann ganz analog durch die Spur des semiklassischen Propagators. *U. Smilansky* und *B. Eckhardt* haben gezeigt, daß in der semiklassischen Spur prinzipiell alle periodischen Bahnen zu einer gegebenen Periode auftreten – also auch die Bahnen, deren Energie nicht in dem vorgegebenen Intervall ist [139]. Alle periodischen Bahnen im gegebenen Energie-Intervall geben einen vollen Beitrag zur Spur wie in Gleichung (7.14). Die periodischen Bahnen außerhalb des Energie-Intervalls sind diffraktive Beiträge, die mit $\frac{1}{\Delta E}$ unterdrückt werden, wobei ΔE der Abstand der Energie der periodischen Bahn zum vorgegebenen Energie-Intervall ist. In Gleichung (7.14) kamen diffraktive Beiträge nicht vor, weil implizit angenommen wurde, daß der Phasenraum eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist (wie die Oberfläche einer Kugel). Immer wenn der kompakte Phasenraum einen Rand hat, müssen prinzipiell diffraktive Beiträge vom Rand gesondert behandelt werden.

7.2 Semiklassische Berechnung des Spektrums zweier gekoppelter Spins

7.2.1 Der Hamilton-Operator für zwei gekoppelte Drehimpulse

Die in Abschnitt 7.1.3 angegebene Strategie zur Berechnung des Spektrums aus periodischen Bahnen soll nun auf eine generische Dynamik mit gemischtem Phasenraum angewendet werden und auf ihre Effektivität hin geprüft werden. Als Beispiel dient die Dynamik von zwei gekoppelten Drehimpulsen $\vec{J}^{(1)}$ und $\vec{J}^{(2)}$ [133–136] mit dem quantenmechanischen Hamilton-Operator

$$H = \hbar J_z^{(1)} + \hbar J_z^{(2)} + 4\hbar^2 J_x^{(1)} J_x^{(2)}. \tag{7.20}$$

Der Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ ist das tensorielle Produkt von zwei Hilbert-Räumen für einen Drehimpuls. Jeder dieser beiden Hilbert-Räume soll mit einer irreduziblen SU_2-Darstellung verbunden sein, die durch die Quantenzahlen $j^{(1)}$ und $j^{(2)}$ charakterisiert ist. Im folgenden gilt immer $j^{(1)} = j^{(2)} = j$. Die Dimension des Hilbert-Raums ist dann

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = (2j+1)^2 . \tag{7.21}$$

Der Hamilton-Operator H ist invariant unter Austausch der beiden Drehimpulse $(1) \leftrightarrow (2)$ und unter einer Drehung beider Drehimpulse um die z-Achse um den Winkel π. Außer diesen beiden Symmetrien hat H noch eine weitere Eigenart. Dreht man den ersten Drehimpulsvektor um die y-Achse um den Winkel π und den zweiten Drehimpulsvektor um die x-Achse um den gleichen Winkel, dann ändert der Hamilton-Operator sein Vorzeichen

$$\exp\left(i(J_y^{(1)} + J_x^{(2)})\pi\right) H \exp\left(-i(J_y^{(1)} + J_x^{(2)})\pi\right) = -H. \tag{7.22}$$

Daraus lassen sich sofort Eigenschaften des quantenmechanischen Spektrums ableiten. So gibt es zu jedem Eigenwert E_k auch den Eigenwert $-E_k$. Bei ungerader Dimension des Hilbert-Raums gibt es einen Eigenwert $E = 0$ im Spektrum. Die Spur des Propagators läßt sich

$$u(t) = \sigma + 2 \sum_{E_k > 0} \cos\left(\frac{E_k t}{\hbar}\right) \tag{7.23}$$

schreiben, wobei σ für gerade Dimension des Hilbert-Raums verschwindet und für ungerade Dimension $\sigma = 1$ gilt.

Für die klassische Dynamik folgt aus (7.22), daß es zu jeder periodischen Bahn mit der Energie E eine weitere periodische Bahn mit gleicher Periode (und gleicher Stabilitätsmatrix) zur Energie $-E$ gibt.

7.2.2 Die klassische Dynamik von zwei gekoppelten Spins

Für den klassischen Grenzfall der Dynamik zweier gekoppelter Drehimpulse wird

$$\hbar = \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \tag{7.24}$$

gesetzt und die Dynamik der Erwartungswerte

$$\begin{aligned} j_x^{(1,2)} &= \hbar\langle J_x^{(1,2)}\rangle \\ j_y^{(1,2)} &= \hbar\langle J_y^{(1,2)}\rangle \\ j_z^{(1,2)} &= \hbar\langle J_z^{(1,2)}\rangle \end{aligned} \tag{7.25}$$

für

$$j \longrightarrow \infty \tag{7.26}$$

betrachtet. Das ist im wesentlichen das gleiche Verfahren, daß in Abschnitt 5.2 explizit durchgeführt wurde und hier daher nicht noch einmal wiederholt wird. Ein kleiner aber für die folgenden semiklassischen Betrachtungen wichtiger Unterschied gegenüber 5.2 liegt in der Wahl von $\hbar^{-1}$, das hier nicht nur so skaliert wurde, daß im klassischen Grenzfall

$$j_x^{(1,2)^2} + j_y^{(1,2)^2} + j_z^{(1,2)^2} = 1 \tag{7.27}$$

gilt, sondern auch einen konstanten Korrekturterm der Größe $\frac{1}{2}$ bekommt. Im klassischen Grenzfall ist ein solcher Korrekturterm ohne Bedeutung – bei semiklassischen Betrachtungen ist er von großer Wichtigkeit, weil er endliche Beiträge zu Phasen geben kann. Die Richtigkeit dieses Korrekturterms ist seit langem bekannt [68].
Die klassische Dynamik wird von der Hamilton-Funktion

$$H^{kl} = j_z^{(1)} + j_z^{(2)} + 4 j_x^{(1)} j_x^{(2)} \tag{7.28}$$

erzeugt. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} j_x^{(1)} &= j_y^{(1)} \\ \tfrac{d}{dt} j_y^{(1)} &= -j_x^{(1)} + 4 j_z^{(1)} j_x^{(2)} \\ \tfrac{d}{dt} j_z^{(1)} &= -4 j_y^{(1)} j_x^{(2)} \end{aligned} \tag{7.29}$$

für den ersten Drehimpulsvektor. Für den zweiten Drehimpulsvektor erhält man die Bewegungsgleichungen, indem man die Indizes (1) und (2) vertauscht. Es ist bekannt, daß diese Dynamik bei mittleren Energien (d.h. hier $E \approx 0$) stark chaotisch ist. In einer Poincaré-Abbildung bei der Energie $E = 0$ sind kaum noch Stabilitätsinseln zu finden [133].

Da der Phasenraum kompakt ist, hat die Hamilton-Funktion ein Maximum und ein Minimum

$$-4.25 \leq H^{kl} \leq 4.25. \tag{7.30}$$

Damit läßt sich die Heisenberg-Zeit für große j durch

$$\tau_H = \frac{2\pi\hbar}{\overline{\Delta E}} \approx \frac{4\pi(2j+1)}{8.5} \approx 1.5\,(2j+1) \tag{7.31}$$

abschätzen. In der Nähe der Energieextrema kann die Dynamik nicht stark chaotisch sein. In jedem Extremum liegt ein elliptischer Fixpunkt und in seiner Umgebung sind intakte KAM-Tori zu erwarten.

Für die Berechnung der semiklassischen Spur des Propagators werden alle Fixpunkte und alle periodischen Bahnen bis zu einer maximalen Periode τ_{max} benötigt. Während die Fixpunkte der Dynamik aus den Bewegungsgleichungen (7.29) analytisch berechnet werden können, müssen die periodischen Bahnen numerisch bestimmt werden.

Die Fixpunkte der Dynamik

Die Dynamik der beiden Drehimpulse hat acht Fixpunkte, die durch Lösung der Gleichungen (7.29) mit $\frac{d}{dt} j^{(1,2)}_{x,y,z} = 0$ bestimmt werden können. Da manche Fixpunkte sich durch die Symmetrien der Dynamik ineinander überführen lassen, kann man sie in drei Gruppen I, II und III einteilen. In der Gruppe I sind zwei Fixpunkte, deren Orte in der folgenden Tabelle zusammengefaßt sind.

	Fixpunkt I_1	FixpunktI_2
$j_x^{(1)}$	0	0
$j_y^{(1)}$	0	0
$j_z^{(1)}$	1	-1
$j_x^{(2)}$	0	0
$j_y^{(2)}$	0	0
$j_z^{(2)}$	-1	1

Beide Fixpunkte haben die Energie $E_I = 0$. Die Eigenwerte der linearisierten Bewegungsgleichungen an diesen Fixpunkten sind

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{-1+4i} \\ \lambda_2 &= \sqrt{-1-4i} \\ \lambda_3 &= -\sqrt{-1+4i} \\ \lambda_4 &= -\sqrt{-1-4i}. \end{aligned} \tag{7.32}$$

Alle Eigenwerte haben einen nichtverschwindenden Realteil. Die Fixpunkte sind also hyperbolisch.

In der Gruppe II sind ebenfalls zwei Fixpunkte.

	Fixpunkt II^+	FixpunktII^-
$j_x^{(1)}$	0	0
$j_y^{(1)}$	0	0
$j_z^{(1)}$	1	-1
$j_x^{(2)}$	0	0
$j_y^{(2)}$	0	0
$j_z^{(2)}$	1	-1

Der Fixpunkt II^+ hat die Energie $E = 2.0$ und der Fixpunkt II^- die Energie $E = -2.0$. Die linearisierten Bewegungsgleichungen der beiden Fixpunkte haben die gleichen Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{3} \\ \lambda_2 &= -\sqrt{3} \\ \lambda_3 &= i\sqrt{5} \\ \lambda_4 &= -i\sqrt{5}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Zwei der Eigenwerte haben einen verschwindenden Realteil. Diese Fixpunkte sind elliptisch. Es gibt also in direkter Nachbarschaft zu diesen Fixpunkten je eine periodische Bahn mit der Periode $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.8099$.

In der letzten Gruppe III befinden sich die restlichen vier Fixpunkte.

	Fixpunkt III_1^+	Fixpunkt III_2^+	Fixpunkt III_1^-	Fixpunkt III_2^-
$j_x^{(1)}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-\frac{\sqrt{15}}{4}$
$j_y^{(1)}$	0	0	0	0
$j_z^{(1)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$j_x^{(2)}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-\frac{\sqrt{15}}{4}$	$-\frac{\sqrt{15}}{4}$	$\frac{\sqrt{15}}{4}$
$j_y^{(2)}$	0	0	0	0
$j_z^{(2)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Die Fixpunkte $III^+_{1,2}$ haben die Energie $E = 4.25$. Sie sitzen also im Maximum der Energie auf dem Phasenraum. Entsprechend sitzen die anderen beiden Fixpunkte $III^-_{1,2}$ im Minimum der Energie bei $E = -4.25$. Die linearisierten Bewegungsgleichungen aller vier Fixpunkte haben die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i\sqrt{17} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{17} \\ \lambda_3 &= i\sqrt{15} \\ \lambda_4 &= -i\sqrt{15}. \end{aligned} \tag{7.34}$$

Alle Eigenwerte sind rein imaginär. Es sind also rein elliptische Fixpunkte.[3] Um jeden dieser Fixpunkte verlaufen in unmittelbarer Nähe zwei periodische Bahnen, deren Perioden $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{17}} \approx 1.5239$ und $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{15}} \approx 1.6223$ sind. Die Periode $\tau = 1.5239$ ist die kürzeste Periode einer periodischen Bahn in dieser Dynamik.

Die periodischen Bahnen der Dynamik

Für das Auffinden der periodischen Bahnen muß auf numerische Methoden zurückgegriffen werden. Hat man für gegebene Periode τ einen Punkt im Phasenraum gefunden, durch den eine Trajektorie läuft, die nach der Zeit τ fast wieder zum Startpunkt zurückführt, gibt es meistens in der Nähe eine periodische Bahn mit der Periode τ. Durch eine erweiterte Newton-Raphson-Methode kann ein Startpunkt auf der periodischen Bahn genau lokalisiert werden. Dazu muß man die Stabilitätsmatrix (7.6) entlang der Trajektorie verfolgen. Details der hier verwendeten Methode sind in [140–143] beschrieben.

Die Schwierigkeit bei der Anwendung dieser Methode liegt darin, daß der Startpunkt bereits hinreichend nah an der gesuchten periodischen Bahn liegt. Daher muß man im allgemeinen den Phasenraum aufwendig nach Trajektorien absuchen, die nah genug an einer periodischen Bahn liegen. Neben den Symmetrien der Dynamik hilft jedoch, daß periodische Bahnen in einparametrigen Scharen auftreten. In unmittelbarer Nachbarschaft einer periodischen Bahn liegt ein eindimensionales Kontinuum von periodischen Bahnen. Entlang dieses Kontinuums ändern sich Periode und Energie der periodischen Bahn stetig. Sobald man eine periodische Bahn kennt, kann man also durch Variation der Periode leicht eine ganze einparametrige Schar von Bahnen finden.

Verfolgt man zusätzlich entlang der einparametrigen Schar die Stabilitätsmatrix (7.6), kann man Bifurkationen von periodischen Bahnen auffinden. Immer wenn

$$\mathrm{Spur} M = 4.0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{Spur} M_{red} = 2.0 \tag{7.35}$$

---

[3] Das folgt auch daraus, daß die Fixpunkte in einem Extremum der Energie liegen.

wird, liegt eine Bifurkation vor. In der unmittelbaren Umgebung der periodischen Bahn kann man dann weitere Scharen periodischer Bahnen finden, die an der Bifurkation mit der ursprünglichen Schar periodischer Bahnen verschmelzen. Auf diese Weise wachsen die Scharen periodischer Bahnen zu baumartigen Familien zusammen.

An einem elliptischen Fixpunkt der Dynamik entsteht durch eine Bifurkation eine Schar von periodischen Bahnen. An der Bifurkation hat die entstehende periodische Bahn eine Periode

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{7.36}$$

wenn $\lambda = \pm i\omega$ rein imaginäre Eigenwerte der linearisierten Dynamik am Fixpunkt sind.

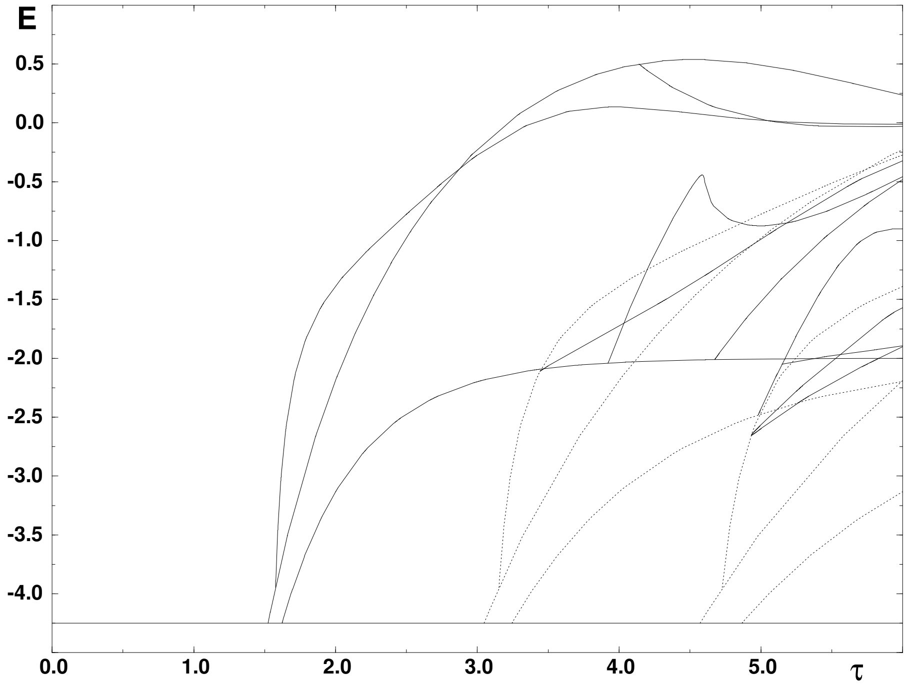

Abb. 7.1: Die Familie F_{III} periodischer Bahnen. Zu jedem Punkt einer eingezeichneten Linie gibt es eine periodische Bahn mit der Periode τ und der Energie E. Scharen primitiver periodischer Bahnen sind mit durchgezogenen Linien dargestellt – mehrfache Durchläufe der gleichen primitiven Bahn mit gestrichelten Linien.

Für die Dynamik der zwei gekoppelten Drehimpulse wurden im wesentlichen zwei baumartige Familien F_{II} und F_{III} von periodischen Bahnen gefunden. Weitere Familien kann man durch die Symmetrien der Dynamik finden. Hier sollen alle periodischen Bahnen, die durch Symmetrien auseinander hervorgehen, als zu einer Familie gehörig betrachtet werden. Beide Familien sind durch Bifurkationen mit Fixpunkten verknüpft; die Familie F_{II} ist mit den Fixpunkten der Gruppe II verbunden und entsprechend F_{III} mit der Gruppe III. Prinzipiell können auch Familien von periodischen Bahnen existieren, die bei der kürzesten Periode der Familie durch eine Tangentenbifurkation entstehen und somit nicht mit einem Fixpunkt verbunden sind. Solche Familien sind numerisch nur durch intensive Suche im Phasenraum ausfindig zu machen. Trotz intensiver Suche konnte aber für die Dynamik der beiden Drehimpulse keine periodische Bahn gefunden werden, die nicht zu den Familien F_{II} oder F_{III} gehört.

In Abbildung 7.1 ist die Familie F_{III} in ein τ-E-Diagramm eingezeichnet. Jeder Punkt auf einer eingetragenen Linie entspricht einer periodischen Bahn der Periode τ und der Energie E. Der Übersicht wegen sind nur die Scharen von periodischen Bahnen eingetragen, die aus den Fixpunkten zur Energie $E = -4.25$ durch (mehrfache) Bifurkationen hervorgehen (der Fixpunkt selbst liefert die Linie $E = -4.25$). Die vollständige Familie erhält man durch Spiegelung an der Achse $E = 0$.

7.2.3 Numerische Berechnung des Spektrums aus den periodischen Bahnen

Um die semiklassische Spur des Propagators zu berechnen, muß zunächst für alle periodischen Bahnen die Wirkung, die Stabilitätsmatrix, die Änderung $\frac{d\tau}{dE}$ der Periode mit der Energie und der Morse-Maslov-Index bestimmt werden. Die Stabilitätsmatrix wird durch das Verfahren bei der Suche der periodischen Bahnen bereits mitgeliefert. Die Ableitung $\frac{d\tau}{dE}$ läßt sich entlang einer Schar von periodischen Bahnen leicht ausrechnen. Bei der Berechnung des Integrals $\oint pdq$ mit kanonischen Koordinaten (p, q) auf dem Phasenraum muß beachtet werden, daß man ein kanonisches Koordinatensystem wählt, in dem sich die periodische Bahn zu einem Punkt zusammenziehen läßt. Es tauchen sonst topologische Zusatzterme auf, die die Phase verfälschen. Die Richtigkeit dieser Feststellung kann man an einer Schar von periodischen Bahnen nachprüfen, die durch Bifurkation mit einem Fixpunkt verbunden ist. An der Bifurkation hat sich die periodische Bahn auf einen Punkt zusammengezogen und das Integral $\oint pdq$ muß dort verschwinden (es wächst dann stetig, wenn man die Periode verlängert). Der Morse-Maslov-Index wurde numerisch mit den Methoden aus [68,128,129,144,145] berechnet.

Die exakte quantenmechanische Berechnung des Spektrums ist für die Dynamik zweier Drehimpulse für nicht zu große Dimension des Hilbert-Raumes unproblematisch. Da hier die Durchführbarkeit einer Methode zu zeigen und ihre Effizienz zu testen ist, wird mehrfach auf die exakte quantenmechanische Lösung zurückgegriffen. Zunächst muß man sich versichern, daß tatsächlich alle periodischen Bahnen bis

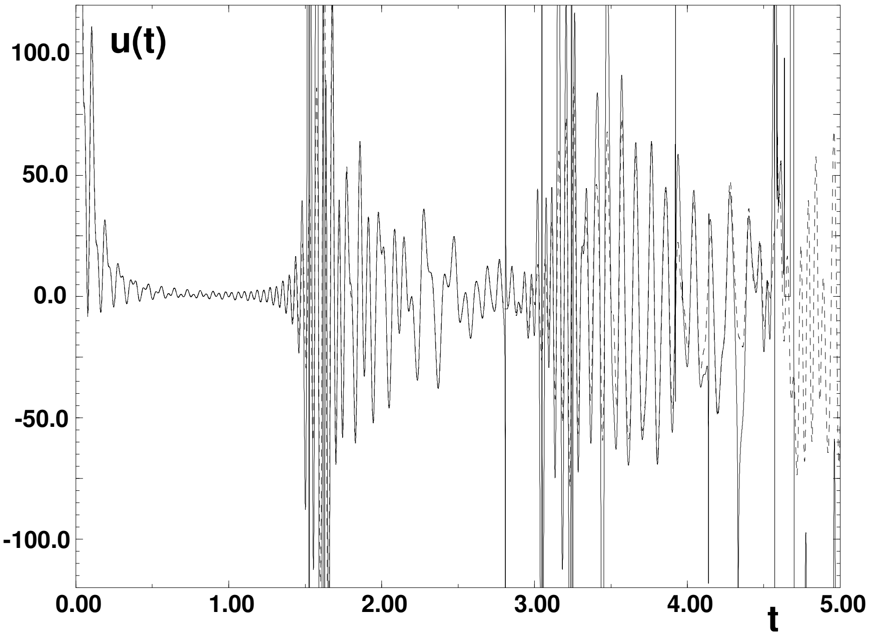

Abb. 7.2: Die exakte quantenmechanische (gestrichelte Linie) und semiklassische (durchgezogene Linie) Spur des Propagators $u(t)$ für $j = 35$. Die Dimension des Hilbert-Raums ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 5041$.

zu einer maximalen τ_{max} gefunden wurden. Da die semiklassische Spur des Propagators eine asymptotische Approximation für $\hbar \longrightarrow 0$ ist, sollte bei großer Quantenzahl j und damit hoher Dimension des Hilbert-Raumes die Übereinstimmung von semiklassischer Spur und exakter Spur besonders gut sein, wenn man in genügender Entfernung von Bifurkationen ist. Fehlen periodische Bahnen, sollte das aus einem Vergleich von semiklassischer und exakter Spur sichtbar werden.

In Abbildung 7.2 sind die exakte quantenmechanische Spur (gestrichelte Linie) und die semiklassische Spur (durchgezogene Linie) des Propagators abgebildet. Bis zur Periode $\tau_{max} = 4.5$ können alle Abweichungen durch Bifurkationen erklärt werden. In genügender Entfernung von Bifurkationen ist für $\tau < \tau_{max}$ die Übereinstimmung sehr gut, wie auch die Ausschnittsvergrößerungen in Abbildung 7.3 zeigen. Für längere Perioden $\tau > \tau_{max}$ können die großen Abweichungen nicht mehr durch Bifurkationen erklärt werden.[4]

Für $j = 35$ und eine Dimension des Hilbert-Raumes von $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 5041$ liegt die Heisenberg-Zeit bei $\tau_H \approx 106$. Selbst wenn sich das hier verwendete Verfahren als

---

[4] Die Abweichungen können durch periodische Bahnen entstehen, die numerisch nicht gefunden wurden – etwa weil sie durch eine Tangentenbifurkation entstanden sind und eine neue Familie von periodischen Bahnen erzeugen.

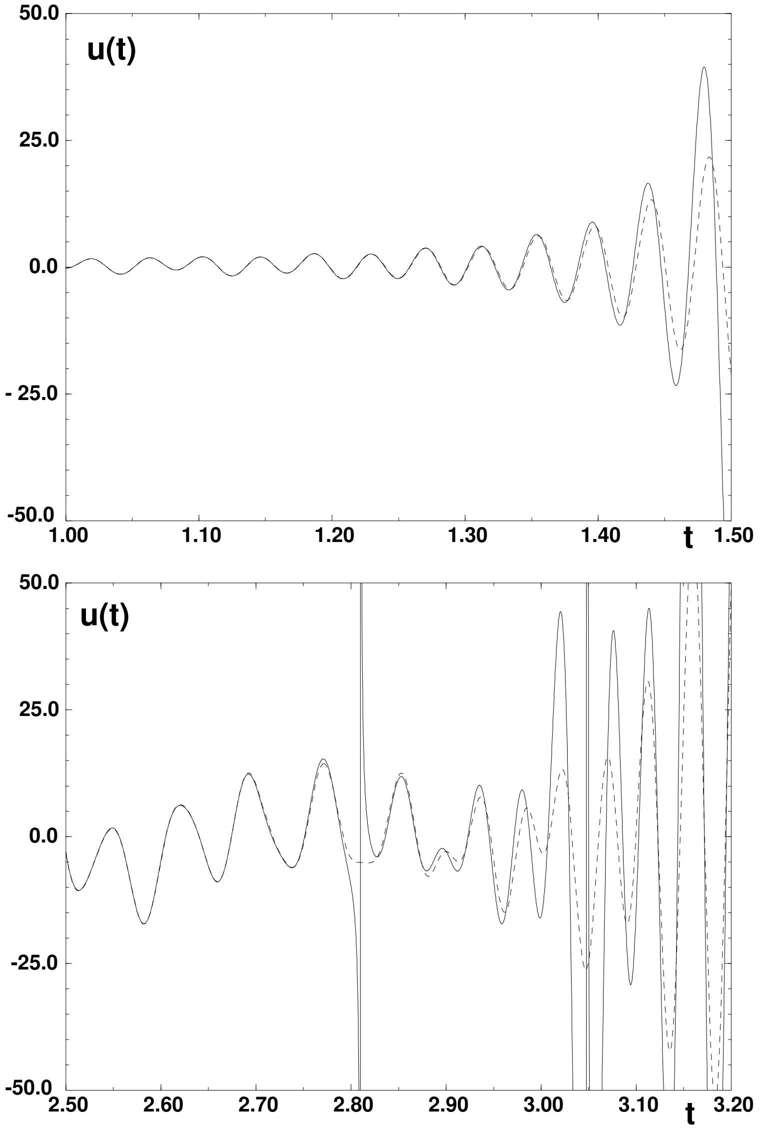

Abb. 7.3: Die exakte quantenmechanische (gestrichelte Linie) und die semiklassische (durchgezogene Linie) Spur des Propagators $u(t)$ für $j = 35$ in zwei kurzen Zeitintervallen. Die obere Abbildung zeigt $u(t)$ in einem Zeitintervall, in dem nur Fixpunkte zur semiklassischen Spur beitragen. Die kürzeste periodische Bahn entsteht durch Bifurkation an einem Fixpunkt zur Zeit $t = 1.5239$. Das untere Bild zeigt $u(t)$ für ein späteres Zeitintervall. Zum Zeitpunkt $t = 2.8099$ entsteht aus den Fixpunkten der Gruppe II eine periodische Bahn durch Bifurkation. In dem Intervall $3.0478 \leq t \leq 3.2446$ gibt es mehrere dicht beieinanderliegende Bifurkationen.

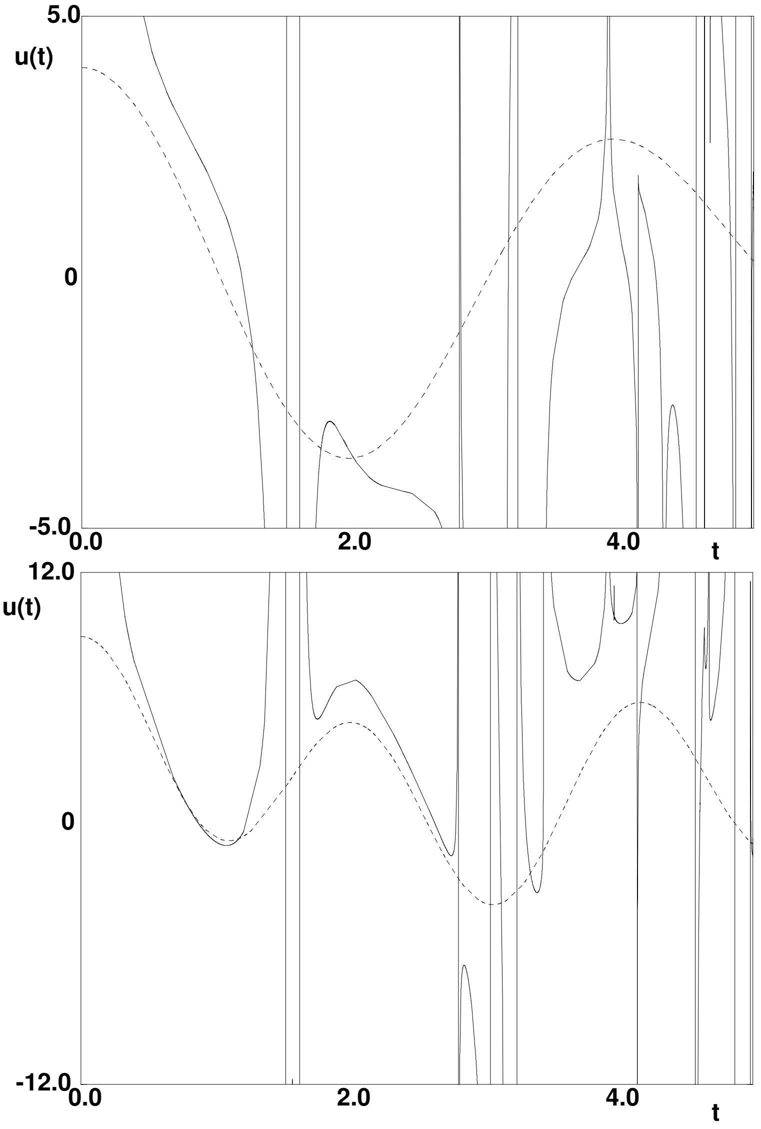

Abb. 7.4: Die exakte quantenmechanische (gestrichelte Linie) und die semiklassische (durchgezogene Linie) Spur des Propagators $u(t)$ für $j = \frac{1}{2}$ (obere Abbildung) und $j = 1$ (untere Abbildung).

so effizient herausstellen sollte, daß man nur periodische Bahnen in die Semiklassik einbeziehen muß, deren Periode ein Zehntel der Heisenberg-Zeit ist, wäre der numerische Aufwand, alle diese periodischen Bahnen zu finden, zu groß und ist nicht sinnvoll durchführbar. Für kleine j hingegen wird die semiklassische Spurformel eine schlechte Näherung. Dies wird in Abbildung 7.4 gezeigt. Dort sind die exakten quantenmechanischen (gestrichelte Linien) und die semiklassischen (durchgezogene Linien) Spuren des Propagators für $j = \frac{1}{2}$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 4$) und für $j = 1$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 9$) gezeigt. Die Bifurkationen der klassischen Dynamik sind durch die steilen Spitzen in der semiklassischen Spur erkennbar. Auch in einigem Abstand von den Bifurkationen zeigen die exakte und die semiklassische Spur jedoch höchstens qualitative Ähnlichkeit. Für ein so kleines j ist es nicht sinnvoll, aus der semiklassischen Spur das Spektrum zu berechnen.

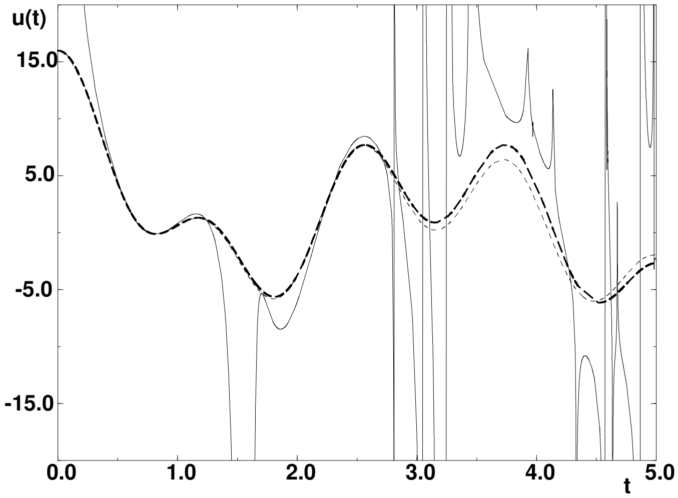

Abb. 7.5: Die exakte quantenmechanische (dünne gestrichelte Linie) und die semiklassische (durchgezogene Linie) Spur des Propagators $u(t)$ für $j = \frac{3}{2}$. Die dicke gestrichelte Linie gibt die Funktion $\tilde{u}(t)$ - die Spur, die sich aus dem semiklassischen Spektrum ergibt.

Für $j = \frac{3}{2}$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 16$) und für $j = 2$ ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 25$) gibt es jedoch Zeitintervalle in genügendem Abstand zu allen Bifurkationen, in denen exakte und semiklassische Spur gut übereinstimmen. Abbildung 7.5 zeigt exakte quantenmechanische Spur des Propagators (dünn gestrichelte Linie), die semiklassische Spur (durchgezogene Linie) und die Funktion

$$\tilde{u}(t) = 2 \sum_{k=1}^{16} \cos\left(2\tilde{E}_k t\right) \tag{7.37}$$

(dick gestrichelte Linie) mit dem gemäß der Strategie aus Abschnitt 7.1.3 gewonnenen semiklassischen Spektrum $\tilde{E}_k$. Für die Berechnung des semiklassischen Spektrums wurden nur die zwei Zeitintervalle $0.5 \leq t \leq 1.05$ und $2.2 \leq t \leq 2.4$ benutzt, in denen semiklassische und exakte Spur gut übereinstimmen. Das exakte und das semiklassische Spektrum sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt.

exaktes Spektrum	semiklassisches Spektrum
0.0992	0.000078
0.3348	0.3348
0.9014	0.9616
0.9473	0.9616
1.0475	0.9619
1.4262	1.4507
2.4991	2.4948
2.5082	2.4949

Der mittlere Niveauabstand im exakten Spektrum beträgt $\overline{\rho} = 0.344$. Der durchschnittliche Fehler im semiklassischen Spektrum liegt bei $\overline{\Delta E} = 0.039$, was 11.4 Prozent des mittleren Abstands entspricht. Das ist für ein semiklassisches Spektrum eine gute Näherung - besonders wenn man bedenkt, daß in einem System mit gemischtem Phasenraum für dieses Ergebnis keine einzige Bifurkation in der Spurformel behandelt wurde. Eine solche Behandlung würde natürlich die semiklassische Spur und damit auch das Spektrum weiter verbessern. In Abbildung 7.5 sieht man jedoch für kurze Zeiten $t < 2.8$ wenig Abweichungen der Funktion $\tilde{u}(t)$ von der exakten Spur. Für größere Zeiten $t > 3$ zeigen sich jedoch leichte Abweichungen. Die Behandlung der Bifurkationen im Zeitintervall $3 < t < 4$ würde es ermöglichen weitere Zeitintervalle in die Berechnung des semiklassischen Spektrums einzubeziehen. Aus der mittleren Niveaudichte ergibt sich die Heisenberg-Zeit $\tau_H \approx 9.13$. Mit den üblichen semiklassischen Verfahren müssen alle periodischen Bahnen bis zur Heisenberg-Zeit in die Berechnung des semiklassischen Spektrums einbezogen werden. Hier war die größte Periode der einbezogenen periodischen Bahnen jedoch nur $\tau = 2.4$ - also grob ein Viertel der Heisenberg-Zeit. Das bedeutet einen erheblichen Effizienzgewinn gegenüber der herkömmlichen Methode, in der die Niveaudichte semiklassisch approximiert wird.

Abbildung 7.6 zeigt exakte Spur, semiklassische Spur und

$$\tilde{u}(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{12} \cos\left(2.5\tilde{E}_k t\right) \tag{7.38}$$

(mit den semiklassischen Energien $\tilde{E}_k$) für $j = 2$ bei einer Dimension des Hilbert-Raums von $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 25$. Hier wurden drei Zeitintervalle $0.3 < t < 1.1$, $1.95 < t <$

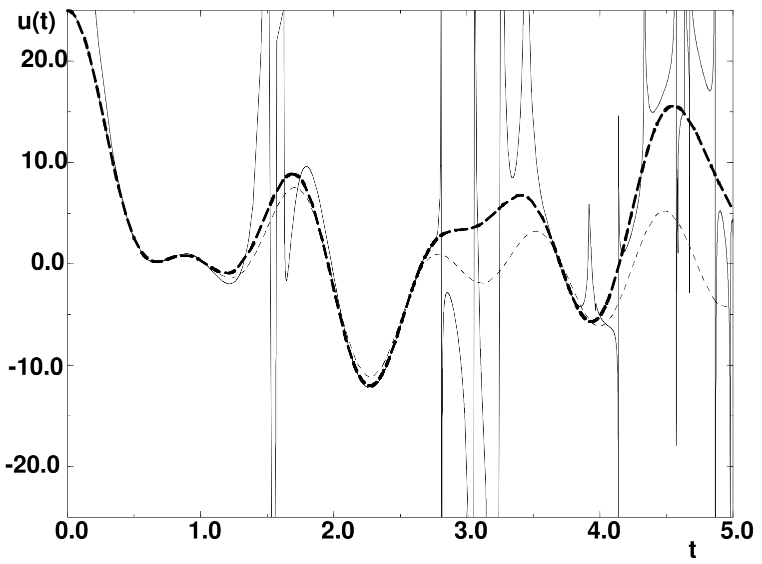

Abb. 7.6: Die exakte quantenmechanische (dünne gestrichelte Linie) und die semiklassische (durchgezogene Linie) Spur des Propagators $u(t)$ für $j = 2$. Die dicke gestrichelte Linie gibt die Funktion $\tilde{u}(t)$ - die Spur, die sich aus dem semiklassischen Spektrum ergibt.

2.65 und $3.6 < t < 3.8$ in die Berechnung des semiklassischen Spektrums einbezogen, das zusammen mit dem exakten Spektrum in der folgenden Tabelle aufgelistet ist.

exaktes Spektrum	semiklassisches Spektrum
0.2194	0.00004
0.3486	0.3347
0.4199	0.5511
0.6750	0.5563
0.6779	0.7030
1.1096	1.1175
1.4686	1.5995
1.4756	1.5995
1.6475	1.5995
1.7672	1.5995
2.8116	2.7698
2.8126	2.8934

Der mittlere Niveauabstand im exakten Spektrum beträgt $\overline{\rho} = 0.24$. Der durchschnittliche Fehler im semiklassischen Spektrum liegt bei $\overline{\Delta E} = 0.093$, was 39 Prozent des mittleren Abstands entspricht. Hier stößt die Methode ohne Behandlung von Bifurkationen also bereits deutlich an ihre Grenzen, was sich auch in der Abbildung 7.6 zeigt. Im Zeitintervall $2.9 < t < 3.5$ sieht man eine starke Abweichung der Funktion $\tilde{u}(t)$ von der exakten Spur. Würde man die Bifurkationen in diesem Intervall in der semiklassischen Spurformel richtig behandeln, könnte man diese großen Abweichungen reduzieren, ohne deswegen zu größeren Zeiten zu gehen. Größere Zeiten $t > 4.0$ machen eine Behandlung von Bifurkationen in der semiklassischen Spur ebenfalls notwendig, versprechen aber auch eine erhebliche Verbesserung des semiklassischen Spektrums.

In diesem Fall ergibt sich eine Heisenberg-Zeit von $\tau_H \approx 10.5$, während die höchste Periode, die für die Berechnung des semiklassischen Spektrums benutzt wurde, bei $\tau = 3.8$ liegt. Bei einem so schlecht approximierten Spektrum erübrigt sich jedoch die Frage nach der Effizienz.

Für noch größeres j ist zu erwarten, daß sich ohne Behandlung von Bifurkationen das semiklassische Spektrum weiter verschlechtert. Eine solche Behandlung ist also unumgänglich.

7.2.4 Vorläufige Beurteilung der Strategie

Die Ergebnisse von Abschnitt 7.2.3 zeigen, daß die Strategie aus Abschnitt 7.1.3 zur semiklassischen Bestimmung des Spektrums grundsätzlich funktioniert, jedoch mit vielen Problemen behaftet ist, die auch den üblichen Methoden anhaftet.

So ist eine bessere Behandlung der Bifurkationen unumgänglich, wenn das semiklassische Spektrum mit hoher Genauigkeit berechnet werden soll. Dies ist ebenfalls notwendig, wenn man höhere Dimensionen des quantenmechanischen Hilbert-Raums zulassen will.[5]

Über die Effizienz der Methode können durch diese Ergebnisse noch kaum haltbare Aussagen gemacht werden. In einem Fall wurde jedoch ein Spektrum semiklassisch mit ausreichender Genauigkeit berechnet, wobei nur periodische Bahnen mit Perioden benutzt wurden, die deutlich kürzer als die Heisenberg-Zeit sind. Dies ist zumindest ein Hinweis darauf, daß es möglich sein kann, das semiklassische Spektrum mit einer erheblich geringeren Anzahl periodischer Bahnen zu berechen als mit den übliche Methoden. Die interessante Frage, wie sich die maximale Zeit τ_{max}, bis zu der alle periodischen Bahnen in die Berechnung des semiklassischen Spektrums einbezogen werden müssen, als Funktion von $\hbar$ für $\hbar \longrightarrow 0$ verhält, kann an der hier

---

[5] Dies erscheint zunächst paradox, da die semiklassische Spurformel für $\hbar \longrightarrow 0$ also $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} \sim \hbar^{-f} \longrightarrow \infty$ asymptotisch richtig wird. Die Dimension wächst jedoch so schnell, daß im allgemeinen immer höhere Zeiten einbezogen werden müssen, was eine sehr aufwendige Suche nach den entsprechenden periodischen Bahnen beinhaltet. Will man den Aufwand für die Suche nach periodischen Bahnen auf ein Minimum reduzieren, wird es daher wichtig, alle Bifurkationen so gut wie möglich zu behandeln, damit die entsprechenden Zeitintervalle in die Berechnung des semiklassischen Spektrums einbezogen werden können.

betrachteten Dynamik nicht beantwortet werden, weil die Suche nach periodischen Bahnen zu aufwendig ist. Für die Beantwortung dieser Frage sollte auf hyperbolische Systeme (keine Bifurkationen) zurückgegriffen werden, für die eine symbolische Dynamik bekannt ist, die das Auffinden der periodischen Bahnen auch zu sehr großen Perioden ermöglicht (z.B. Quanten-Graphen oder der Sinai-Billard). Die Antwort auf diese Frage ist für die Beurteilung der Effizienz der Methode von hoher Wichtigkeit. Die Heisenberg-Zeit wächst mit $\hbar \longrightarrow 0$ wie $\tau_H \sim \hbar^{1-f}$. Wächst die Zeit τ_{max} schwächer als τ_H, dann ist die Effizienz der Methode erwiesen.

Anhang A

Kompakte Lie-Gruppen und deren Lie-Algebren

In diesem Anhang sollen die mathematischen Definitionen von kompakten halbeinfachen Lie-Gruppen und Lie-Algebren zusammengefaßt werden. Außerdem soll in die Darstellungstheorie dieser Gruppen eingeführt werden (eine ausschöpfende Einführung kann hier aber nicht gegeben werden, man findet sie zum Beispiel in [70–74]). Die Darstellungstheorie kompakter halbeinfacher Gruppen macht starken Gebrauch von der sogenannten adjungierten Darstellung, von der auch hier ausgegangen werden soll.

A.1 Lexikon der wichtigsten Definitionen

Dieser Unterabschnitt enthält ein kleines Lexikon der wichtigsten mathematischen Definitionen und Notationen für Lie-Gruppen und Lie-Algebren, die hier nur zur Erinnerung ohne Erklärung wiedergegeben werden sollen.

A.1.1 Lie-Gruppen

Definition. *Eine* **Lie-Gruppe** *ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit G, die außerdem eine Gruppe ist, deren Gruppenmultiplikation*

$$\mu : G \times G \longrightarrow G : (g,h) \mapsto gh \tag{A.1}$$

sowie deren Invertierung ($g \mapsto g^{-1}$) differenzierbare Abbildungen sind.
Die Lie-Gruppe G ist **kompakt***, wenn sie als Mannigfaltigkeit kompakt ist.*

Das Einselement einer Lie-Gruppe wird im folgenden mit e oder 1 bezeichnet (im Falle von Matrixgruppen auch mit $\mathbb{I}$).
Matrixgruppen bilden ein wichtiges Beispiel von Lie-Gruppen. Jeder komplexe n-dimensionale Vektorraum V ist isomorph zu $\mathbb{C}^n$. Die Lie-Gruppe aller komplexen Automorphismen von V (bijektiver $\mathbb{C}$-linearer Abbildungen des Vektorraums V auf sich selbst, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$) ist also isomorph zu der Lie-Gruppe $GL_n(\mathbb{C})$ aller invertierbaren komplexen $n \times n$-Matrizen. Alle Matrixgruppen endlichdimensionaler Matrizen (z.B. $SU_n, U_n, \ldots$) sind Untergruppen von $GL_n(\mathbb{C})$. Im folgenden soll von allen

Mannigfaltigkeiten und Abbildungen angenommen werden, daß sie (hinreichend oft) differenzierbar beziehungsweise glatt sind; auf Differenzierbarkeit wird daher nicht mehr hingewiesen.

A.1.2 Darstellungen von Lie-Gruppen

Definition. *Ist G eine Lie-Gruppe, $V \equiv \mathbb{C}^n$ ein komplexer endlichdimensionaler Vektorraum und D eine Abbildung*

$$D : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \equiv GL_n(\mathbb{C}), \tag{A.2}$$

so daß für alle $g, h \in G$ gilt

$$\rho(gh) = D(g)D(h) \tag{A.3}$$

(das Produkt auf der rechten Seite ist als Produkt von Matrizen zu verstehen,d.h. D ist ein Lie-Gruppen Homomorphismus von G in die Automorphismen von V), dann heißt D eine **(endlich-dimensionale komplexe) Darstellung von** G **in** V *und V heißt* **Darstellungsraum**.
Eine Darstellung heißt **treu**, *wenn sie als Abbildung $G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ injektiv ist.*
Eine Darstellung D ist **reduzibel**, *wenn man sie als eine direkte Summe zweier Darstellungen schreiben kann:*

$$D = D_1 \oplus D_2 \tag{A.4}$$

mit $D_i : G \longrightarrow V_i$ $(i = 1, 2)$ und $V_1 \oplus V_2 = V$, d.h. es gibt eine Basis von V, in der alle Darstellungsmatrizen gleichzeitig eine blockdiagonale Form annehmen.
Eine Darstellung D heißt **irreduzibel**, *wenn sie nicht reduzibel ist.*
Die **triviale Darstellung** *D_{tr} bildet jedes Gruppenelement auf die Identitätsoperation auf V ab.*
Ist V ein Hilbert-Raum, dann heißt die Darstellung **unitär**, *wenn für alle $g \in G$ der Automorphismus $D(g)$ ein unitärer Operator ist.*
Bei Matrixgruppen $(G = GL_n(\mathbb{C}), U_n, SL_n(\mathbb{C}), SU_n, \dots)$ spricht man von der **definierenden Darstellung** *oder* **Standarddarstellung**

$$D_{def} \equiv \mathrm{id} : G \subset GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = GL_n(\mathbb{C}) : g \mapsto g, \tag{A.5}$$

wenn die Matrizen aus $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ in $V = \mathbb{C}^n$ mit der üblichen Matrixmultiplikation auf Vektoren $x \in V$ wirken:

$$D_{def}(g)x = g \cdot x = gx. \tag{A.6}$$

In gleicher Weise können Darstellungen in unendlich-dimensionalen Vektorräumen definiert werden, die hier aber nicht von Interesse sind, weil alle irreduziblen unitären Darstellungen von kompakten Gruppen endlich-dimensional sind (es gilt sogar, daß jede irreduzible Darstellung einer kompakten Gruppe zu einer endlich-dimensionalen unitären Darstellung äquivalent ist).
Ebenso lassen sich reelle Darstellungen (d.h. der Vektorraum V und die darstellenden Matrizen sind reell) definieren. Es sollen im weiteren jedoch alle Vektorräume komplex sein.
Jede kompakte Lie-Gruppe hat eine treue Darstellung. Also ist jede kompakte Lie-Gruppe isomorph zu einer Untergruppe von $GL_n(\mathbb{C})$, und sie kann immer als Matrixgruppe aufgefaßt werden.
Ist $D : G \longrightarrow V$ eine Darstellung von G in V, $x \in V$ ein Vektor und $g \in G$ ein Gruppenelement, so wird im folgenden die Kurzschreibweise

$$g \cdot x := D(g)x \tag{A.7}$$

benutzt. Dies birgt die Gefahr von Verwechslungen, wenn G selbst eine Matrixgruppe ist (g und $D(g)$ sind dann im allgemeinen voneinander verschiedene Matrizen meist unterschiedlicher Dimension), ist aber in der Notation handlicher. Wir benutzen die Kurzschreibweise daher nur dann, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind (zur Unterscheidung wird als Symbol ein Punkt benutzt, der hier *„wirkt auf“* bedeutet) und unser Augenmerk nicht auf der Darstellung D selbst liegt.

A.1.3 Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe

Definition. *Der Tangentialraum* $\mathfrak{g} := T_eG$ *an der Identität einer Lie-Gruppe* G *heißt* **Lie-Algebra** *von* G. *In der Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *ist ein* **Lie-Produkt** $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} : (X, Y) \mapsto [X, Y]$ *definiert, d.h. für* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ *gilt*

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ **(Jacobi-Identität)**.

Da die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ *isomorph zum Vektorraum aller linksinvarianten Vektorfelder auf* G *ist, definiert das Lie-Produkt der Vektorfelder kanonisch das Lie-Produkt auf* $\mathfrak{g}$.

Einer gegebenen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist jedoch nicht eindeutig eine Lie-Gruppe zuzuordnen (nur wenn man von der Lie-Gruppe verlangt, daß sie einfach zusammenhängend ist, ist eine solche Zuordnung eindeutig). Zum Beispiel sind die Lie-Algebren $\mathfrak{su}_2$ und $\mathfrak{so}_3$ der Matrixgruppen SU_2 und SO_3 zueinander äquivalent; die Gruppen SU_2 und SO_3 sind jedoch voneinander verschieden (SU_2 ist einfach zusammenhängend und eine zweifache Überdeckung von SO_3). Der Grund für diese Mehrdeutigkeit liegt

darin, daß für die Definition der Lie-Algebra nur die Umgebung der Identität der Lie-Gruppe G benötigt wird und globale topologische Eigenschaften nicht eingehen können.
Mit jeder Darstellung $D : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \equiv GL_n(\mathbb{C})$ einer Lie-Gruppe G ist auch eindeutig eine Darstellung d der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gegeben, d.h. eine Abbildung

$$d : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \equiv \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \tag{A.8}$$

mit

$$d([X,Y]) = [d(X), d(Y)]\,. \tag{A.9}$$

Wie bei den Lie-Gruppen wird die Kurzschreibweise

$$X \cdot x := d(X)x \qquad \text{für } x \in V \tag{A.10}$$

verwendet. Die genaue Definition von d wird nach der Einführung von einparametrigen Gruppen in G nachgeholt.
Die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ von $GL_n(\mathbb{C})$ ist isomorph zum Vektorraum aller komplexen $n \times n$-Matrizen, in der das Lie-Produkt durch den Matrixkommutator $[A,B] = AB - BA$ gegeben ist. Man spricht bei dieser Isomorphie von der definierenden Darstellung. Im folgenden wird die Lie-Algebra einer Matrixgruppe immer über die definierende Darstellung mit einem Vektorraum von Matrizen identifiziert. Das birgt die Gefahr, daß man Lie-Algebra-Eigenschaften mit anderen algebraischen Eigenschaften von $n \times n$-Matrizen vermischt (d.h. mit den algebraischen Eigenschaften des einfachen Matrixproduktes). Es sind nur die Lie-Algebra Eigenschaften, die dann für alle darstellenden Matrizen einer beliebigen Darstellung d gelten, die Eigenschaften des einfachen Produktes wechseln von Darstellung zu Darstellung.

A.1.4 Einfache und halbeinfache Lie-Gruppen und Algebren

Definition. *Eine Lie-Gruppe G heißt* **abelsch***, wenn für alle $g, h \in G$*

$$gh = hg \tag{A.11}$$

gilt.
Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **abelsch***, wenn für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$*

$$[X,Y] = 0 \tag{A.12}$$

gilt.

Eine Lie-Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn ihre Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ abelsch ist.
Alle irreduziblen Darstellungen einer abelschen Gruppe sind eindimensional.

Definition. *Ist H eine Lie-Untergruppe der Lie-Gruppe G, dann heißt H* **invariante Untergruppe** *von G, wenn für alle $g \in G$ und für alle $h \in H$*

$$ghg^{-1} \in H \subset G \tag{A.13}$$

gilt.
Ist $\mathfrak{h}$ eine Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und gilt für alle $X \in \mathfrak{h}$ und für alle $Y \in \mathfrak{g}$

$$[X, Y] \in \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}, \tag{A.14}$$

dann heißt $\mathfrak{h}$ **invariante Unteralgebra** *von $\mathfrak{g}$.*

Die Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ einer invarianten Untergruppe H von G ist eine invariante Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ von G.

Definition. *Eine Lie-Gruppe G heißt* **einfach**, *wenn sie keine invarianten Untergruppen besitzt; sie heißt* **halbeinfach**, *wenn sie keine abelschen invarianten Untergruppen besitzt.*
Entsprechend heißt eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ **einfach** *beziehungsweise* **halbeinfach**, *wenn sie keine invarianten Unteralgebren beziehungsweise keine invarianten abelschen Unteralgebren besitzt.*

Für die Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen kompakter Gruppen ist es ausreichend, sich auf halbeinfache Gruppen zu beschränken.

A.1.5 Einparametrige Gruppen und die Exponentialfunktion

Definition. *Eine* **einparametrige Gruppe** *der Lie-Gruppe G ist ein Lie-Gruppen Homomorphismus*

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G. \tag{A.15}$$

Es gilt also $\alpha(t) \in G$,

$$\alpha(t)\alpha(s) = \alpha(t+s) \tag{A.16}$$

und somit auch

$$\alpha(0) = e. \tag{A.17}$$

Die Abbildung

$$\alpha \mapsto \dot{\alpha}(0) = \frac{d}{dt}\alpha(t)\bigg|_{t=0} \in T_eG = \mathfrak{g} \tag{A.18}$$

definiert eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller einparametrigen Gruppen in G und der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Definition. *Die einparametrige Gruppe*

$$\alpha^X : \mathbb{R} \longrightarrow G : t \mapsto \alpha^X(t) \tag{A.19}$$

ist eindeutig durch $\dot{\alpha}^X(0) = X$ *bestimmt. Die* **Exponentialfunktion** exp *ist die eindeutige Abbildung*

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G : X \mapsto \exp(X) := \alpha^X(1). \tag{A.20}$$

Es gilt

$$\exp(tX) = \alpha^{tX}(1) = \alpha^X(t) \tag{A.21}$$

und

$$X = \frac{d}{dt}\exp(tX)\bigg|_{t=0}. \tag{A.22}$$

Für Matrixgruppen stimmt diese Definition der Exponentialfunktion mit der üblichen Definition für Matrizen überein. Ist also $X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ eine beliebige $n \times n$-Matrix, dann ist die Matrix

$$\exp(X) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{X^l}{l!} \tag{A.23}$$

eine invertierbare Matrix aus $GL_n(\mathbb{C})$.
Ist $D : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ eine Darstellung der Lie-Gruppe G, dann ist die Abbildung $d : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ mit

$$d(X) := \frac{d}{dt} D\left(\exp(tX)\right)\bigg|_{t=0} \tag{A.24}$$

eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

A.1.6 Gruppenwirkungen auf Mannigfaltigkeiten

Definition. *Ist M eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit, G eine Lie-Gruppe und ν_l eine Abbildung*

$$\nu_l : G \times M \longrightarrow M : (g, x) \mapsto \nu_l(g, x) \equiv g \cdot x \tag{A.25}$$

mit

- $\nu_l(g, \nu(h, x)) \equiv g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \equiv \nu_l(gh, x)$ **linke Invarianz** *und*

- $\nu_l(e, x) \equiv e \cdot x = x$,

dann heißt die Abbildung ν_l *eine* **linke G-Wirkung auf** M*, und* M *heißt* **linke G-Mannigfaltigkeit**.
Entsprechend wird eine **rechte G-Wirkung** ν_r *als eine Abbildung*

$$\nu_r : M \times G \longrightarrow M : (x, g) \mapsto \nu_r(x, g) \equiv x \cdot g \tag{A.26}$$

mit **rechter Invarianz** $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ *definiert.*
Für ein gegebenes $g \in G$ *heißen die Abbildungen*

$$l_g : M \to M : x \mapsto l_g(x) := g \cdot x \tag{A.27}$$

und

$$r_g : M \to M : x \mapsto r_g(x) := x \cdot g \tag{A.28}$$

linke und rechte Translation *mit* g.

Jede rechte Wirkung ν_r definiert kanonisch eine linke Wirkung über die Formel

$$\nu_l(g, x) \equiv g \cdot x := x \cdot g^{-1} \equiv \nu_r(x, g^{-1}). \tag{A.29}$$

Eine Darstellung ρ der Lie-Gruppe G in einem Vektorraum führt zu einer Linkswirkung

$$\nu_l(g, x) \equiv g \cdot x := \rho(g) \circ x. \tag{A.30}$$

Definition. *Ist* G *eine Lie-Gruppe,* M *eine* G*-Mannigfaltigkeit und findet man zu zwei beliebigen Punkten* $x, y \in M$ *immer ein Gruppenelement* $g \in G$ *mit* $g \cdot x = y$*, dann heißt die Wirkung* **transitiv**.
Eine Untermenge $A \subset M$ *heißt* **invariant**, *wenn die Wirkung für jedes* $g \in G$ *auf einen Punkt* $a \in A$ *auf einen Punkt* $g \cdot a \in A$ *in der Untermenge* A *führt. Ein invarianter Punkt heißt* **Fixpunkt**.
Für $x \in M$ *heißt die Untergruppe*

$$I_x := \{g \in G | g \cdot x = x\} \tag{A.31}$$

die **Isotropiegruppe** *des Punktes* x*, und die invariante Untermannigfaltigkeit*

$$\mathcal{O}_G(x) := G \cdot x \equiv \{g \cdot x | g \in G\} \subset M \tag{A.32}$$

heißt **Orbit** *oder* **Bahn** *durch* x*. Jede Bahn bildet eine Äquivalenzklasse zur Äquivalenzrelation* $x \sim y :\Longleftrightarrow x = g \cdot y$ *für ein* $g \in G$*. Der Quotientenraum* M/G *heißt* **Bahnenraum**.

Eine G-Mannigfaltigkeit M ist genau dann transitiv, wenn sie aus einer einzigen G-Bahn besteht.
Liegen zwei Punkte $x, y \in M$ auf derselben G-Bahn $x, y \in \mathcal{O}_G \subset M$ mit $y = g \cdot x$, und ist h eine Element der Isotropiegruppe des Punktes x, d.h. $h \in I_x \subset G$, dann ist $ghg^{-1} \cdot y = y$ und damit $ghg^{-1} \in I_y$ in der Isotropiegruppe des Punktes y. Für zwei Punkte auf einer G-Bahn gilt also $g\, I_x\, g^{-1} = I_y \Rightarrow I_x \equiv I_y$. Die Isotropiegruppe ist also konstant auf einer Bahn, und man spricht von der Isotropiegruppe der Bahn $\mathcal{O}_G$

$$I_{\mathcal{O}_G} := I_x \qquad \text{für ein } x \in \mathcal{O}_G. \tag{A.33}$$

Die Bahnen der koadjungierten Darstellung einer kompakten und halbeinfachen Lie-Gruppe G (z.B. $G = SU_n$) sind zu den klassischen Phasenräumen aus Kapitel 5 äquivalent. Sie besitzen kanonisch eine symplektische Struktur, die in Anhang B erklärt wird. Die Bahnen der koadjungierten Darstellung spielen in der Quantenmechanik eine Rolle in der Theorie kohärenter Zustände (siehe Kapitel 4).

A.1.7 Nebenklassen und homogene Räume

Definition. *Ist H eine (geschlossene) Untergruppe der Lie-Gruppe G, dann heißen die rechten H-Bahnen $g \cdot H$ durch $g \in G$* **rechte Nebenklassen***. Der Bahnenraum G/H heißt* **homogener Raum***.*

Entsprechend lassen sich linke Nebenklassen durch linke H-Bahnen definieren.
Ist M eine linke G-Mannigfaltigkeit zur Lie-Gruppe G, $\mathcal{O}_G(x) = G \cdot x$ eine linke G-Bahn durch $x \in M$, und ist die Isotropiegruppe der Bahn $I := I_{\mathcal{O}_G(x)} = I_x$ abgeschlossen, dann ist die Bahn $G \cdot x$ isomorph zum homogenen Raum G/I. Also läßt sich die Untersuchung von G-Bahnen auf beliebigen G-Mannigfaltigkeiten auf die Untersuchung der homogenen Räume zurückführen. Speziell sind die klassischen Phasenräume, die durch Bahnen der koadjungierten Darstellung gegeben sind, und der Raum aller kohärenten Zustände einer kompakten Lie-Gruppe G homogene Räume.

A.2 Die adjungierte und koadjungierte Darstellung

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer Lie-Gruppe G bildet einen Vektorraum, auf dem kanonisch eine Darstellung definiert ist. Diese sogenannte adjungierte Darstellung ist von zentraler Bedeutung in der Theorie irreduzibler Darstellungen kompakter Gruppen.

Definition. *Für eine Lie-Gruppe G heißt die Abbildung (linke Wirkung)*

$$c : G \times G \longrightarrow G : (g, h) \mapsto c_g(h) := c(g, h) = ghg^{-1} \tag{A.34}$$

Konjugation*, und die Abbildung $c_g : G \longrightarrow G$ heißt Konjugation um $\in G$.*

Jedes $X \in \mathfrak{g}$ erzeugt die einparametrige Gruppe $\alpha^X : \mathbb{R} \to G : t \mapsto \alpha^X(t) = \exp(tX)$. Es ist leicht zu sehen, daß für $g \in G$ auch $c_g \circ \alpha^X : \mathbb{R} \longrightarrow G : t \mapsto g \exp(tX)\, g^{-1}$ eine einparametrige Gruppe ist. Es gibt also ein $Y \in \mathfrak{g}$ mit $\exp(tY) = g\exp(tX)\, g^{-1}$. Man erhält Y durch Ableitung

$$Y = \frac{d}{dt}\left(g \exp(tX)\, g^{-1}\right)\bigg|_{t=0} . \tag{A.35}$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Zuordnung $X \mapsto Y$ linear ist.

Definition. *Die* **adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe** G

$$\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) : g \mapsto \mathrm{Ad}_g \tag{A.36}$$

ist durch

$$\mathrm{Ad}_g X := \frac{d}{dt}\left(g \exp(tX)\, g^{-1}\right)\bigg|_{t=0} \tag{A.37}$$

oder äquivalent durch

$$\exp(t\mathrm{Ad}_g X) = g \exp(tX)\, g^{-1} \tag{A.38}$$

erklärt.

Für Matrixgruppen vereinfacht sich (A.36) zu $\mathrm{Ad}_g X = gXg^{-1}$. Man beachte die Schreibweise Ad_g (statt etwa $\mathrm{Ad}(g)$) für den g zugeordneten Automorphismus (bei der durchaus zulässigen Schreibweise $\mathrm{Ad}_g X = g \cdot X$ beachte man, daß auf der echten Seite *keine Matrizenmultiplikation* steht).
Setzt man in $\mathrm{Ad}_g X$ für g eine einparametrige Gruppe $g = \exp(tY)$, dann gilt

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ad}_{\exp(tY)}X\bigg|_{t=0} = \frac{d^2}{dt\,ds}\exp(tY)\exp(sX)\exp(-tY)\bigg|_{t=0,s=0} = [Y, X] . \tag{A.39}$$

Das letzte Gleichheitszeichen in (A.39) ist offensichtlich für Matrixgruppen, gilt aber auch allgemeiner, wenn man $X, Y \in \mathfrak{g}$ als Vektorfelder (lineare Differentialoperatoren) auf G auffaßt.

Definition. *Die* **adjungierte Darstellung der Lie-Algebra** $\mathfrak{g}$

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}) : Y \mapsto \mathrm{ad}_Y \tag{A.40}$$

ist durch

$$\mathrm{ad}_Y(X) := [Y, X] \tag{A.41}$$

gegeben.

Darstellungen wurden bisher komplex aufgefaßt – also in komplexen Vektorräumen. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ einer kompakten Gruppe ist jedoch ein reeller Vektorraum. Durch Komplexifizierung dieses Vektorraums erhält man in natürlicher Weise die adjungierte Darstellung der **komplexifizierten Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$** und der **komplexifizierten Lie-Gruppe $G^{\mathbb{C}}$**.

Als Beispiel betrachte man die kompakte Lie-Gruppe SU_2 und ihre Lie-Algebra $\mathfrak{su}_2$, die Menge aller spurlosen antihermiteschen 2×2-Matrizen. Jede Matrix $X \in \mathfrak{su}_2$ kann als Linearkombination

$$X = i \left[a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \tag{A.42}$$

mit reellen Koeffizienten $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ geschrieben werden. Die Komplexifizierung von ${\mathfrak{su}_2}^{\mathbb{C}}$ erhält man, wenn man in (A.42) auch allgemeine komplexe Linearkombinationen zuläßt. Die Matrizen der Komplexifizierung bleiben dann spurlos, sie sind jedoch nicht mehr antihermitesch. Die Lie-Algebra der komplexen spurlosen 2×2-Matrizen ist $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ und wir haben

$${\mathfrak{su}_2}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}). \tag{A.43}$$

Man erhält also die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ durch Komplexifizierung der adjungierten Darstellung von $\mathfrak{su}_2$. In gleicher Weise kann man durch Komplexifizierung aus jeder $\mathfrak{su}_2$-Darstellung eine $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Darstellung gewinnen. Das überträgt sich durch Exponierung auf die Darstellungen der Lie-Gruppen. Aus jeder SU_2-Darstellung gewinnt man durch Komplexifizierung eine $SL_2(\mathbb{C})$-Darstellung. In diesem Sinn ist $SL_2(\mathbb{C}) = {SU_2}^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von SU_2.

Für Lie-Algebren unitärer Gruppen gilt

$$\begin{aligned} {\mathfrak{su}_n}^{\mathbb{C}} &= \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), && \text{(A.44)} \\ {\mathfrak{u}_n}^{\mathbb{C}} &= \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}); && \text{(A.45)} \end{aligned}$$

entsprechende Identitäten gelten auch für die unitären Lie-Gruppen selbst.

Definition. *Ist V ein (endlich-dimensionaler) komplexer Vektorraum, dann heißt eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$* **lineares Funktional** *auf V. Die linearen Funktionale bilden selbst einen Vektorraum, der* **dualer Vektorraum** *genannt wird und mit V^* bezeichnet wird. Für $f \in V^*$ und $x \in V$ wird die Klammerschreibweise*

$$(f, x) := f(x) \in \mathbb{C} \tag{A.46}$$

benutzt.

Bilden die Vektoren x_i für $i = 1, 2, \ldots, n$ eine Basis von V, dann heißen die Funktionale f_i **duale Basis**, *wenn sie eine Basis von V^* bilden und*

$$(f_i, x_j) = \delta_{ij} \qquad \textit{für } i, j = 1, 2, \ldots, n \tag{A.47}$$

gilt.
Ist $D : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ *eine Darstellung der Lie-Gruppe* G*, dann ist die* **duale Darstellung** $D^* : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V^*)$ *durch*

$$(g \cdot f, x) := \left(f, g^{-1} \cdot x\right) \; g \in G \tag{A.48}$$

eindeutig definiert.

Ist die Basis $\{f_i\}$ duale zur Basis $\{x_i\}$ von V, dann schreiben wir

$$g \cdot x_i \equiv D(g)x_i = \sum_{j=1}^{n} D(g)_{ij} x_j \tag{A.49}$$

und

$$g \cdot f_i \equiv D^*(g)f_i = \sum_{j=1}^{n} D^*(g)_{ij} f_j. \tag{A.50}$$

Es gilt

$$D^*(g) = D(g)^{-1\,T}, \tag{A.51}$$

d.h. die Matrizen der dualen Darstellung erhält man durch Transposition der inversen Matrizen der Darstellung D. Für eine Darstellung d der Lie-Algebra, muß die duale Darstellung d^* aus Konsistenzgründen durch

$$(X \cdot f, x) := (f, -X \cdot x) \tag{A.52}$$

definiert werden. Da der Vektorraum V als endlichdimensional angenommen wurde, ist er isomorph zu seinem dualen Raum. Entsprechend sind die Darstellungen äquivalent. Trotzdem soll hier im Fall des zu einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ dualen Vektorraumes $\mathfrak{g}^*$ der Unterschied zwischen den Räumen und den Darstellungen explizit beibehalten werden.

Definition. *Die* **koadjungierte Darstellung** Ad^* (ad^*) *einer Lie-Gruppe* G *(einer Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$*) ist die zu* Ad *(*ad*) duale Darstellung.*

Die koadjungierte Darstellung auf $\mathfrak{g}^*$ erzeugt eine symplektische Struktur auf den **koadjungierten Bahnen** (G-Bahnen der koadjungierten Darstellung in $\mathfrak{g}^*$, siehe Anhang B). In anderen Worten: die koadjungierten Bahnen haben die Struktur von klassischen Phasenräumen.

A.3 Wurzeln und Gewichte

In der Darstellungstheorie kompakter halbeinfacher Lie-Gruppen ist es sehr instruktiv, die adjungierte Darstellung ad der Lie-Algebra zu untersuchen. Für den Rest dieses Kapitels soll angenommen werden, daß G eine kompakte, halbeinfache, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe und $\mathfrak{g}$ die dazu gehörende Lie-Algebra ist.

Definition. *Eine Mannigfaltigkeit M heißt* **zusammenhängend***, wenn sich zwei beliebige Punkte $x, y \in M$ immer durch eine stetige Kurve $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ verbinden lassen.*
Ist eine Mannigfaltigkeit M nicht zusammenhängend, dann nennt man alle Punkte y, die sich durch eine Kurve $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ mit einem gegebenen Punkt $x \in M$ verbinden lassen, die **Zusammenhangskomponente** *von x.*

Bei einer Lie-Gruppe G bildet die Zusammenhangskomponente G_e des Einselements e eine invariante Untergruppe. Ein Beispiel liefert O_3, die Lie-Gruppe aller reellen orthogonalen 3×3-Matrizen. O_3 besitzt zwei Zusammenhangskomponenten, in der einen ist die Determinante positiv ($\det = 1$) und in der anderen negativ ($\det = -1$). Es führt kein stetiger Weg von Matrizen mit $\det = 1$ zu Matrizen mit $\det = -1$. Die Zusammenhangskomponente des Einselements ist SO_3, also die Komponente mit $\det = 1$.

Definition. *Eine Mannigfaltigkeit M heißt einfach zusammenhängend, wenn man jede geschlossene stetige Bahn $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ stetig zu einem Punkt deformieren kann.*

Ein einfaches Beispiel für eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist die Oberfläche einer Kugel S^2 im $\mathbb{R}^3$ (oder auch der $\mathbb{R}^n$); der Kreis S^1 und der zweidimensionale Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ besitzen jedoch geschlossene Bahnen, die sich nicht zu einem Punkt deformieren lassen.
Einfacher Zusammenhang der Lie-Gruppe G ist keine erhebliche Einschränkung, denn zu jeder nicht einfach zusammenhängenden Gruppe gibt es eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe (man nennt sie **universelle Überdeckung**) mit der gleichen Lie-Algebra. Ein Beispiel sind die Lie-Gruppen SO_3 und SU_2, nur letztere ist einfach zusammenhängend. Hier lassen sich im strengen Sinn nur die irreduziblen Darstellungen von SU_2 mit ganzzahligem j als SO_3-Darstellungen verstehen, für $j = 1/2, 3/2, \ldots$ tauchen bei Drehungen um 2π um eine beliebige Achse Phasenfaktoren $e^{i\pi} = -1$ auf, die diese Darstellungen zu einer sogenannten **projektiven Darstellung** von SO_3 machen (d.h. Darstellung bis auf einen Phasenfaktor).
Im allgemeinen tauchen solche Phasenfaktoren immer auf, wenn man aus einer Darstellung einer einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe eine Darstellung einer nicht

einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe mit gleicher Lie-Algebra gewinnen will. In der Quantenmechanik sind solche Phasenfaktoren erlaubt, so daß hier im allgemeinen die projektiven Darstellungen einer Lie-Gruppe G beziehungsweise die Darstellungen ihrer universellen Überdeckung gesucht werden.
Die Elemente $X \in \mathfrak{g}$ kommen in zwei verschiedenen Bedeutungen vor: zum einen sind sie Vektoren im Vektorraum $\mathfrak{g}$, zum anderen wirken sie als Matrizen ad_X auf dem Vektorraum $\mathfrak{g}$. Daher sollte die (durchaus korrekte) Schreibweise $X \cdot Y = [X, Y]$ für $\mathrm{ad}_X Y$ vermieden werden. Auf $\mathfrak{g}$ ist kanonisch eine negativ definite Bilinearform gegeben.

Definition. *Die* **Killing-Form** $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C}$ *auf einer Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *ist gegeben durch*

$$K(X, Y) := \mathrm{Spur}\,(ad_X ad_Y)\,. \tag{A.53}$$

Dann ist

$$\langle X|Y\rangle := \mathrm{Spur}\,\Big((ad_X)^\dagger\, ad_Y\Big) \tag{A.54}$$

ein Skalarprodukt, das die Komplexifizierung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ zu einem Hilbert-Raum macht. Es wird nun eine Basis von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ eingeführt, in der die adjungierte Darstellung ad besonders einfach ist. Das Prinzip ist einfach: Man sucht eine maximale Anzahl von Matrizen ad_X, die miteinander vertauschen und sucht dann eine Basis, in der diese Matrizen diagonal werden.

Definition. *Die Komplexifizierung* $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{\mathbb{R}}$ *einer maximalen abelschen Unteralgebra* $\mathfrak{c}^{\mathbb{R}}$ *der Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *heißt* **Cartan-Algebra** *(*$\mathfrak{c}^{\mathbb{R}}$ *heißt* **reelle Cartan-Algebra***). Die Dimension* $k = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{c} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{c}^{\mathbb{R}}$ *der Cartan-Algebra heißt* **Rang** *der Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *(und der Lie-Gruppe* G*).*

Hier bedeutet maximal, daß jede Vergrößerung der Unteralgebra zu nichtverschwindenden Lie-Klammern führt. Die Cartan-Algebra ist nicht eindeutig gegeben - jedes Element $X \in \mathfrak{g}$ kann durch eine passende Ergänzung mit weiteren Elementen der Lie-Algebra zu einer reellen Cartan-Algebra ausgebaut werden. All diese Cartan-Algebren sind aber äquivalent, d.h. sie können durch die adjungierte Wirkung Ad der Lie-Gruppe G ineinander überführt werden. Man kann zeigen, daß die adjungierte Darstellung mit dem oben gegebenen Skalarprodukt eine unitäre Darstellung ist. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und damit auch die reelle Cartan-Algebra $\mathfrak{c}^{\mathbb{R}}$ wird also durch antihermitesche Matrizen dargestellt. Eine gegebene (komplexe) Cartan-Algebra besitzt eine Orthonormalbasis

$$\mathcal{B}_{\mathfrak{c}} = \{H_j\} \text{ mit } j = 1, \ldots, k, \tag{A.55}$$

wobei k die Dimension der Cartan-Algebra ist. Die Matrizen ad_{H_j} haben dann rein imaginäre Eigenwerte und es gibt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}^\mathbb{C}}$ der komplexifizierten Lie-Algebra $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$, in der die Matrizen ad_{H_j} (und damit die ganze Cartan-Algebra) diagonal werden. Dabei kann die Basis $\{H_j\}$ der Cartan-Algebra als Untermenge von $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}^\mathbb{C}}$ gewählt werden (wegen $[H_l, H_m] = 0$ sind alle H_m Eigenvektoren zu allen ad_{H_l} mit verschwindendem Eigenwert).

Definition. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache kompakte Lie-Algebra,* $\mathfrak{c}$ *eine Cartan-Algebra und* $\mathcal{B}_\mathfrak{c} = \{H_j\}$ *(*$j = 1, \ldots, k$*) die oben eingeführte Orthonormalbasis (A.55) von* $\mathfrak{c}$*. Für jede irreduzible Darstellung* $d : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ *von* $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ *gibt es eine Orthonormalbasis* $\mathcal{B}_V$ *im Darstellungsraum* V*, in der alle Darstellungsmatrizen* $d(H_j)$ *diagonal werden. Diese Orthonormalbasis soll hier als* **Cartan-Basis** *bezeichnet werden. Für jeden Basisvektor* $x \in \mathcal{B}_V$ *gilt*

$$d(H_j)x = i\nu_j x \quad \text{mit } \nu_j \in \mathbb{R}. \tag{A.56}$$

Das k*-Tupel*

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k) \tag{A.57}$$

heißt **Gewicht** *oder* **Gewichtsvektor** *von* x.
Die Gewichte der adjungierten Darstellung ad heißen **Wurzeln**.

Zu jeder nichtverschwindenden Wurzel α gehört genau ein $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\mathbb{C}$, d.h. es gibt für nichtverschwindende Wurzeln keine Entartung (das ist ein Grund, der die adjungierte Darstellung so interessant macht). Außerdem ist zu jeder Wurzel α auch $-\alpha$ eine Wurzel.

Definition. *Eine nichtverschwindende Wurzel* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *heißt* **positive (negative) Wurzel***, wenn ihr erstes nichtverschwindendes Element positiv (negativ) ist, d.h.*

$$\alpha = (0, \ldots, 0, \alpha_j, \ldots, \alpha_k) \text{ mit } \alpha_j > 0 \ (\alpha_j < 0). \tag{A.58}$$

Diese Positivitätseigenschaft scheint etwas willkürlich, da sie von der Anordnung der H_j abhängt. Tatsächlich hängen aber alle weiteren Folgerungen nicht von der Anordnung ab.

Definition. *Die Basisvektoren* E_α *mit positivem (negativem)* α *heißen* **Aufsteigeoperatoren (Absteigeoperatoren)** *und spannen eine Unteralgebra* $\mathfrak{z}^+$ *(*$\mathfrak{z}^-$*)von* $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ *auf.*

Damit ist $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ in drei orthogonale Unteralgebren zerlegt

$$\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{z}^- \oplus \mathfrak{z}^+. \tag{A.59}$$

Man nennt dies die **Cartan-Zerlegung** der Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Für die Dimensionen dieser Unteralgebren gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{c} + \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}^{-} + \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}^{+} \tag{A.60}$$

und

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}^{+} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{z}^{-}. \tag{A.61}$$

Diese Unterteilung in drei Unteralgebren entspricht der Aufteilung in Diagonal-, Aufsteige-, und Absteigeoperatoren für $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ in Abschnitt 2.1.3, wenn man sich auf spurlose Operatoren (d.h. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$) beschränkt. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{su}_n{}^{\mathbb{C}}$ und ihre adjungierte Darstellung werden in Abschnitt 3.1 genauer behandelt (dort wird das Programm, das hier formal beschrieben wird, in einfacherer Form explizit durchgeführt).

In einer beliebigen Darstellung $d : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ wird die Bedeutung der Aufsteige- und Absteigeoperatoren deutlich. Dazu betrachten wir einen Vektor $x_\nu \in \mathcal{B}_V$, der Eigenvektor zur Cartan-Algebra mit dem Gewicht $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ ist, und eine nichtverschwindende Wurzel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Für jedes $H_j \in \mathcal{B}_{\mathfrak{d}}$ gilt dann

$$d(H_j)d(E_\alpha)x_\nu = [d([H_j, E_\alpha]) + d(E_\alpha)d(H_j)]\, x_\nu = (\alpha_j + \nu_j)\, d(E_\alpha)x_\nu. \tag{A.62}$$

Wenn $d(E_\alpha)x_\nu$ nicht verschwindet, ist (bis auf einen Phasenfaktor) auch $d(E_\alpha)x_\nu$ ein Eigenvektor der Cartan-Algebra mit dem Gewicht $\alpha + \nu$. Außerdem läßt sich die Differenz zweier Gewichte $\nu^{(1)}$ und $\nu^{(2)}$ immer (im allgemeinen auf viele verschiedene Arten) durch Linearkombinationen der Wurzeln mit positiven ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken

$$\nu^{(2)} - \nu^{(1)} = n_1 \alpha^{(1)} + n_2 \alpha^{(2)} + \dots \tag{A.63}$$

Zu den zwei Gewichten $\nu^{(1)}$ und $\nu^{(2)}$ findet man also Eigenvektoren $x_{\nu^{(1)}}$ und $x_{\nu^{(2)}}$ mit

$$x_{\nu^{(2)}} = d(E_{\alpha^{(j_1)}})d(E_{\alpha^{(j_2)}}) \dots d(E_{\alpha^{(j_p)}})x_{\nu^{(1)}}. \tag{A.64}$$

Bei gegebenem Eigenvektor $x_{\nu^{(1)}}$ und Gewicht $\nu^{(2)}$ ist weder der Vektor $x_{\nu^{(2)}}$ noch der Weg $d(E_{\alpha^{j_1}})d(E_{\alpha^{j_2}}) \dots d(E_{\alpha^{j_p}})$ eindeutig gegeben. Bei q-facher Entartung von ν_2 lassen sich jedoch auch q linear unabhängige Wege finden. Von jedem Eigenvektor mit Gewicht ν lassen sich also *alle* anderen Gewichte erreichen.

Auch die Differenz zweier Wurzeln $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(2)}$ läßt sich durch Linearkombination aller Wurzeln mit positiven ganzzahligen Koeffizienten ausdrücken. Die Summe zweier Wurzeln ist im allgemeinen keine Wurzel.

Die endliche Dimension von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und die dargestellten Eigenschaften der Wurzeln beschränken die möglichen Wurzelsysteme sehr stark.

Definition. *Eine* **einfache Wurzel** α *ist eine positive Wurzel, die sich nicht als Summe zweier positiver Wurzeln darstellen läßt.*

Die einfachen Wurzeln sind linear unabhängig und ihre Anzahl entspricht dem Rang der Lie-Algebra, jede Wurzel läßt sich eindeutig als ganzzahlige Linearkombination der einfachen Wurzeln schreiben. Tatsächlich läßt sich allein aus der Kenntnis der einfachen Wurzeln die gesamte Struktur der Lie-Algebra gewinnen. Eine Klassifizierung aller möglichen Wurzelsysteme (und damit aller kompakten halbeinfachen Lie-Algebren) wurde von *E. B. Dynkin* durchgeführt. Dazu untersuchte er die Bedingungen, unter denen sich Basisvektoren in $\mathbb{R}^k$ als einfache Wurzeln einer Lie-Algebra begreifen lassen (dies führt auf die bekannten Dynkin-Diagramme).
Abschließend sollen die Eigenschaften der Generatoren H_j und E_α zusammengefaßt werden:

- $H_1, \ldots, H_k, E_{\alpha^{(1)}}, \ldots, E_{\alpha^{(l)}}, E_{-\alpha^{(1)}}, \ldots, E_{-\alpha^{(l)}}$ bilden eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ mit $\dim_\mathbb{C} \mathfrak{g}^\mathbb{C} = k + 2l$,

- $(ad_{H_1})^\dagger = -ad_{H_1}$ und $(ad_{E_\alpha})^\dagger = ad_{E_{-\alpha}}$,

- alle H_j haben verschwindende Lie-Klammern $[H_s, H_t] = 0$,

- für alle H_s und alle E_α gilt

$$[H_s, E_{\alpha^{(t)}}] = i\alpha_s^{(t)} E_{\alpha^{(t)}} \tag{A.65}$$

  mit den Wurzeln $\alpha^{(t)} = (\alpha_1^{(t)}, \ldots, \alpha_l^{(t)}) \in \mathbb{R}^l$,

- für jedes $E_{\alpha^{(j)}}$ gilt

$$[E_{\alpha^{(j)}}, E_{-\alpha^{(j)}}] = \sum_{s=1}^{k} \alpha_s^{(t)} H_s, \tag{A.66}$$

- für zwei Wurzeln α und β gilt

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} 0 & \text{falls } \alpha + \beta \text{ keine Wurzel ist,} \\ N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} & \text{falls } \alpha + \beta \text{ eine Wurzel ist,} \end{cases} \tag{A.67}$$

  wobei sich der Wert von $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ aus den übrigen Relationen berechnen läßt.

A.4 Darstellungstheorie kompakter halbeinfacher Gruppen

Aus der endlichen Dimension des Darstellungsraumes V einer irreduziblen Darstellung $D : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ ergibt sich, daß jeder Vektor $x \in V$ von einer Potenz von E_α vernichtet wird (mit α einer nichtverschwindenden Wurzel)

$$[d(E_\alpha)]^s x = 0. \tag{A.68}$$

Diese einfache Tatsache läßt sich zur Charakterisierung von irreduziblen Darstellungen benutzen.

Definition. *Sei $D : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V)$ eine irreduzible Darstellung der Lie-Gruppe G, $\mathfrak{c}$ eine Cartan-Algebra mit der durch (A.55) gegebenen Basis $\mathcal{B}_\mathfrak{c} = \{H_1, \ldots, H_k\}$ und $\mathfrak{z}^+ \subset \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ die Lie-Algebra der Aufsteigeoperatoren. In V gibt es einen (bis auf einen Phasenfaktor) eindeutigen Einheitsvektor $x_\mu \in V$, der von $\mathfrak{z}^+$ vernichtet wird*

$$\mathfrak{z}^+ x_\mu = 0. \tag{A.69}$$

Damit gilt

$$d(E_\alpha) x_\mu = 0 \tag{A.70}$$

für alle positiven Wurzeln α. Der Vektor x_μ ist ein Eigenvektor der Cartan-Algebra mit Gewicht $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$

$$H_j x_\mu = i \mu_j x_\mu. \tag{A.71}$$

Das Gewicht μ heißt **höchstes Gewicht** *der Darstellung und der Vektor x_μ* **Vektor höchsten Gewichts** *(ist V der Hilbert-Raum eines quantenmechanischen Systems auch* **Zustand höchsten Gewichts***).*
Das höchste Gewicht μ charakterisiert eindeutig die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe G, wir schreiben daher $D_\mu : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_\mu)$.

Aus dem Vektor höchsten Gewichts lassen sich durch mehrfache Anwendung von Absteigeoperatoren $E_{-\alpha}$ mit einfachen Wurzeln α alle anderen Eigenvektoren der Cartan-Algebra und die Matrizen $d(E_{-\alpha})$ konstruieren (die explizite Durchführung dieser Konstruktion kann hier nicht dargestellt werden, im Abschnitt 3.2.5 wird das Ergebnis dieser Konstruktion für $G = SU_n$ zusammengefaßt).
Im folgenden sei k der Rang von $\mathfrak{g}$ und $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(k)}$ die einfachen Wurzeln. Ist x_μ der Vektor höchsten Gewichts einer irreduziblen Darstellung $D_\mu : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(V_\mu)$, dann gibt es ein k-Tupel $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ ganzer Zahlen $\lambda_j \in \mathbb{N}$ mit

$$[d(E_{-\alpha^{(j)}})]^{\lambda_j + 1} = 0 \qquad \text{aber} \qquad [d(E_{-\alpha^{(j)}})]^{\lambda_j} \neq 0. \tag{A.72}$$

Also ist $\nu = \mu - p\alpha^{(j)}$ für $p = 0, 1, \ldots, \lambda_j$ ein Gewicht der Darstellung D_μ, aber $\mu - (\lambda_j + 1)\alpha^{(j)}$ ist kein Gewicht. Man kann zeigen, daß sich das k-Tupel λ ebensogut zur eindeutigen Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen von G eignet wie das höchste Gewicht μ

$$D_\lambda :\equiv D_\mu, \qquad V_\lambda :\equiv V_\mu. \tag{A.73}$$

Die triviale eindimensionale Darstellung ergibt sich, wenn alle λ_j verschwinden.

Definition. *Die k irreduziblen Darstellungen, die zu $\lambda^{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$ mit*

$$\begin{array}{lcl} \lambda^{(1)} & = & [1, 0, 0, \ldots, 0] \\ \lambda^{(2)} & = & [0, 1, 0, \ldots, 0] \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^{(k)} & = & [0, 0, \ldots, 0, 1] \end{array} \tag{A.74}$$

gehören, heißen **Fundamentaldarstellungen** $D_j \equiv D_{\lambda^{(j)}}$.
Die höchsten Gewichte $\mu^{(j)}$ der Fundamentaldarstellungen D_j heißen **Fundamentalgewichte**.

Die Fundamentalgewichte lassen sich aus den einfachen Wurzeln über das Gleichungssystem

$$\frac{2\mu^{(s)} \cdot \alpha^{(j)}}{\alpha^{(j)} \cdot \alpha^{(j)}} = \delta_{sj} \tag{A.75}$$

bestimmen (hier ist $\mu \cdot \alpha = \sum_{n=1}^{k} \mu_n \alpha_n$). Eine beliebige irreduzible Darstellung mit $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_k]$ hat das höchste Gewicht

$$\mu_\lambda := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mu^{(j)}, \tag{A.76}$$

womit der eindeutige Zusammenhang zwischen höchstem Gewicht μ und dem ganzzahligen k-Tupel λ dargestellt ist.

Anhang B

Die symplektische Struktur der koadjungierten Bahnen

Für eine halbeinfache kompakte Gruppe G ist der Dualraum $\mathfrak{g}^*$ ihrer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ kanonisch mit Poisson-Klammern ausgestattet, die nun kurz vorgestellt werden [106,107].

Jedes Element X der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ definiert ein lineares Funktional f_X auf $\mathfrak{g}^*$

$$f_X : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathbb{R} : \xi \mapsto f_X(\xi) := \xi(X) = (\xi, X). \tag{B.1}$$

Für diesen Satz von Funktionen definiert man die Poisson-Klammern

$$\{f_X, f_Y\} = f_{[X,Y]}, \tag{B.2}$$

die man über die Leibniz-Regel auf beliebige glatte Funktionen auf $\mathfrak{g}^*$ ausweiten kann. Aus den Eigenschaften der Lie-Klammer $[X, Y]$ folgen dann die üblichen Eigenschaften einer Poisson-Klammer.

Die Lie-Gruppe G wirkt auf eine Funktion $f : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ über die koadjungierte Darstellung

$$g \cdot f(\xi) = f(\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}}\xi). \tag{B.3}$$

Die eingeführten Poisson-Klammern sind invariant unter dieser Wirkung

$$g \cdot \{f_1, f_2\} = \{g \cdot f_1, g \cdot f_2\}\,. \tag{B.4}$$

Für $G = SU_n$ ist $\mathfrak{su}_n^*$ mit diesen Poisson-Klammern äquivalent zu dem in Abschnitt 5.1 eingeführten Raum aller hermiteschen spurlosen $n \times n$-Matrizen und den Poisson-Klammern für die klassischen Observablen s_{kl} (die klassischen Observablen s_{kl} sind komplexifizierte Versionen der linearen Funktionale f_X). Dort hat sich die Poisson-Klammer als entartet herausgestellt, weil nichttriviale (d.h. nichtkonstante) Casimir-Funktionen existieren. Man kann zeigen, daß die Bahnen der Lie-Gruppe G auf $\mathfrak{g}^*$

$$\mathcal{O}_G(\xi) = G \cdot \xi = \left\{\chi \in \mathfrak{g}^* : \chi = \mathrm{Ad}^*_g\xi \text{ für ein } g \in G\right\} \subset \mathfrak{g}^* \tag{B.5}$$

symplektische Mannigfaltigkeiten (also nichtentartete Phasenräume) sind: Sie bilden die Untermannigfaltigkeiten von $\mathfrak{g}^*$, auf denen alle Casimir-Funktionen konstant sind. Für $G = SU_n$ wurde in Abschnitt 5.1 gezeigt, daß diese Bahnen der koadjungierten Darstellung (kurz koadjungierte Bahnen) zu dem Raum aller hermiteschen spurlosen $n \times n$-Matrizen mit den gleichen Eigenwerten äquivalent sind.

Literaturverzeichnis

[1] N. Bohr, Z. Phys. **13**, 117 (1923).

[2] M. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, New York, 1990).

[3] M. V. Berry und K. E. Mount, Rep. Prog. Phys. **35**, 315 (1972).

[4] I. C. Percival, Adv. Chem. Phys. **36**, 1 (1977).

[5] M. Tabor, Physica **6D**, 195 (1983).

[6] R. G. Littlejohn, Phys. Rep. **138**, 193 (1986).

[7] R. G. Littlejohn, J. Math. Phys. **31**, 2952 (1990).

[8] P. Gaspard, Prog. Theor. Phys. Suppl. **116**, 59 (1994).

[9] U. Smilansky, in *Les Houches, Session LXI, 1994, Mesoscopic Quantum Systems*, herausgegeben von E. A. G. Montambaux, J.-L. Pichard und J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1995).

[10] U. Smilansky, in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, herausgegeben von I. V. Lerner, J. P. Keating und D. E. Khmelnitskii (Plenum Publishers, New York, 1999).

[11] A. Einstein, Verh. Dt. Phys. Ges. **19**, 82 (1917).

[12] L. Brillouin, J. Phys. Radium **7**, 353 (1926).

[13] J. B. Keller, Ann. Phys. **4**, 180 (1958).

[14] E. Schrödinger, Naturwiss. **14**, 664 (1926).

[15] R. J. Glauber, Phys. Rev. **130**, 2529 (1963).

[16] R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).

[17] J. R. Klauder, J. Math. Phys. **4**, 1055 (1963).

[18] J. R. Klauder, J. Math. Phys. **4**, 1058 (1963).

[19] E. G. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. **10**, 277 (1963).

[20] D. F. Walls und G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer, Berlin, 94).

[21] C. W. Gardiner, *Quantum Noise* (Springer, Berlin, 1991).

[22] *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, herausgegeben von J. R. Klauder und B.-S. Skagerstam (World Scientific, Singapore, 1985).

[23] H.-W. Lee, Phys. Rep. **259**, 147 (1995).

[24] C. Brif und A. Mann, J. Phys. A:Math. Gen. **31**, L9 (1998).

[25] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (Springer, Berlin, 1986).

[26] J. M. Radcliffe, J. Phys. A:Math. Gen. **4**, 313 (1971).

[27] F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore und H. Thomas, Phys. Rev. A **6**, 2211 (1972).

[28] R. Gilmore, Ann. Phys. **74**, 391 (1972).

[29] A. M. Perelomov, Commun. Math. Phys. **26**, 222 (1972).

[30] E. Onofri, J. Math. Phys. **16**, 1087 (1975).

[31] F. A. Berezin, Commun. Math. Phys. **40**, 153 (1975).

[32] R. Delbourgo, J. Phys. A:Math. Gen. **10**, 1837 (1977).

[33] L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. **54**, 407 (1982).

[34] A. Bulgac und D. Kusnezov, Ann. Phys. **199**, 187 (1990).

[35] W.-M. Zhang, D. H. Feng und R. Gilmore, Rev. Mod. Phys. **62**, 867 (1990).

[36] W.-M. Zhang und D. H. Feng, Phys. Rep. **252**, 1 (1995).

[37] W. Lisiecki, Rep. Math. Phys. **35**, 327 (1995).

[38] K. Funahashi, T. Kashiwa, S. Sakoda und K. Fuji, J. Math. Phys. **36**, 3232 (1995).

[39] H. Frahm und H. J. Mikeska, Z. Phys. B **65**, 249 (1986).

[40] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*, 2.Aufl. (Springer, Berlin, in Vorbereitung).

[41] F. Haake, M. Kuś und R. Scharf, Z. Phys. B **65**, 381 (1987).

[42] F. Haake, in *Les Houches, Session LXIII, 1995, Quantum Fluctuations*, herausgegeben von S. Reynaud, E. Giacobino und J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1997).

[43] M. Kuś, F. Haake und D. Delande, Phys. Rev. Lett. **71**, 2167 (1993).

[44] M. Kuś, F. Haake und B. Eckhardt, Z. Phys. B **92**, 221 (1993).

[45] P. Gerwinski, F. Haake, H. Wiedemann, M. Kuś und K. Życzkowski, Phys. Rev. Lett. **74**, 1562 (1995).

[46] P. Braun, P. Gerwinski, F. Haake und H. Schomerus, Z. Phys. B **100**, 115 (1996).

[47] H. Schomerus und F. Haake, Phys. Rev. Lett. **79**, 1022 (1997).

[48] H. Schomerus und M. Sieber, J. Phys. A:Math. Gen. **30**, 4537 (1997).

[49] H. Schomerus, Dissertation, Universität Essen, 1997.

[50] W.-M. Zhang, J.-M. Yuan, D. H. Feng, Q. Pan und J. Tjon, Phys. Rev. A **42**, 3646 (1990).

[51] W.-M. Zhang, D. H. Feng, J.-M. Yuan und S.-J. Wang, Phys. Rev. A **40**, 438 (1989).

[52] W.-M. Zhang, D. H. Feng und J.-M. Yuan, Phys. Rev. A **42**, 7125 (1990).

[53] W.-M. Zhang und D. H. Feng, Phys. Rev. C **43**, 1127 (1991).

[54] D. C. Meredith, S. E. Koonin und M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. A **37**, 3499 (1988).

[55] P. Leboeuf und M. Saraceno, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 1745 (1990).

[56] P. Leboeuf und M. Saraceno, Phys. Rev. A **41**, 4614 (1990).

[57] H. Sazdjian, Y. S. Stanev und I. T. Todorov, J. Math. Phys. **36**, 2030 (1995).

[58] F. Haake, M. I. Kolobov, C. Seeger, C. Fabre, E. Giacobino und S. Reynaud, Phys. Rev. A **54**, 1625 (1996).

[59] C. Seeger, M. I. Kolobov, M. Kuś und F. Haake, Phys. Rev. A **54**, 4440 (1996).

[60] S.-O. Hahn, P. Oh und M.-H. Kim, J. Korean Phys. Soc. **29**, 409 (1996).

[61] J. S. Prakash, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 6059 (1996).

[62] M. O. Terra, M. C. Nemes, C. da Providência und J. da Providência, Ann. Phys. **262**, 1 (1998).

[63] W. Wang, F. M. Izrailev und G. Casati, Phys. Rev. E **57**, 323 (1998).

[64] D. J. Rowe und B. C. Sanders, J. Math. Phys. **40**, 3604 (1999).

[65] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **11**, 1791 (1970).

[66] M. C. Gutzwiller, J. Math. Phys. **12**, 343 (1971).

[67] A. M. O. de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988).

[68] M. Brack und R. K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1997).

[69] M. V. Berry und J. P. Keating, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 4839 (1990).

[70] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Addison-Wesley, Redwood City, 1982).

[71] A. Barut und R. Rączka, *Theory of Group Representations and Applications*, 2 Aufl. (World Scientific, Singapore, 1986).

[72] T. Bröcker und T. tom Dieck, *Representations of Compact Lie Groups* (Springer, New York, 1985).

[73] H. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 2 Aufl. (Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1977).

[74] J. J. Duistermaat und J. A. C. Kolk, *Lie Groups* (Springer, Berlin, 2000).

[75] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Quantenmechanik*, Nr. III in *Lehrbuch der theoretischen Physik*, 6 Aufl. (Akademie-Verlag, Berlin, 1979).

[76] A. Messiah, *Quantenmechanik*, 3 Aufl. (de Gruyter, Berlin, 1990), Band 2.

[77] S. Gnutzmann und M. Kuś, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 9871 (1998).

[78] K. Raghunathan, M. Seetharaman und S. S. Vasan, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L1089 (1989).

[79] K. Raghunathan, M. Seetharaman, S. S. Vasan und J. M. Agnes, J. Phys. A: Math. Gen. **25**, 1527 (1992).

[80] Arvind, K. S. Mallesh und N. Mukunda, J. Phys. A:Math. Gen. **30**, 2417 (1997).

[81] G. Khanna, S. Mukhopadhyay, R. Simon und N. Mukunda, Ann. Phys. **253**, 55 (1997).

[82] S. Weigert, J. Phys. A:Math. Gen. **30**, 8739 (1997).

[83] M. Byrd und E. C. G. Sudarshan, J. Phys. A:Math. Gen. **31**, 9255 (1998).

[84] L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. **4**, 436 (1963).

[85] G. E. Baird und L. C. Biedenharn, J. Math. Phys. **4**, 1449 (1963).

[86] H. Flanders, *Differential Geometry* (Academic, New York, 1963).

[87] L. K. Hua, *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains* (Science Press, Peking, 1958).

[88] C. Chang-qi und F. Haake, Phys. Rev. A **51**, 4203 (1995).

[89] M. V. Berry, Phil. Trans. R. Soc. **287**, 237 (1977).

[90] M. V. Berry und N. L. Balazs, J. Phys. A:Math. Gen. **12**, 625 (1979).

[91] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **423**, 219 (1989).

[92] L. Kaplan und E. J. Heller, in *Supersymmetry and Trace Formulae: Chaos and Disorder*, herausgegeben von I. V. Lerner, J. P. Keating und D. E. Khmelnitskii (Plenum Publishers, New York, 1999).

[93] J. R. Klauder, Phys. Rev. D **19**, 2349 (1979).

[94] J. R. Klauder, Phys. Rev. Lett. **56**, 897 (1986).

[95] H. Kuratsuji und Y. Mizobuchi, J. Math. Phys. **22**, 757 (1981).

[96] Y. Weissman, J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 2693 (1983).

[97] T. L. M. II, J. Math. Phys. **31**, 2935 (1990).

[98] M. Karasev und M. Kozlov, J. Math. Phys. **34**, 4986 (1993).

[99] E. A. Kochetov, J. Math. Phys. **36**, 1666 (1995).

[100] E. A. Kochetov, J. Math. Phys. **36**, 4667 (1995).

[101] E. A. Kochetov, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 4473 (1998).

[102] E. Ercolessi, G. Morandi, F. Napoli und P. Pieri, J. Math. Phys. **37**, 535 (1996).

[103] D. C. Cabra, A. Dobry, A. Greco und G. L. Rossini, J. Phys. A: Math. Gen. **30**, 2699 (1997).

[104] R. Abraham und J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2 Aufl. (Benjamin/Cummings, Reading, 1978).

[105] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2 Aufl. (Springer, New York, 1989).

[106] J. E. Marsden und T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, 2 Aufl. (Springer, New York, 1999).

[107] A. T. Fomenko und V. V. Trofimov, *Integrable Systems on Lie Algebras and Symmetric Spaces* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1987).

[108] K. Johnson, Ann. Phys. **192**, 104 (1989).

[109] B. Simon, Commun. Math. Phys. **71**, 247 (1980).

[110] S. Gnutzmann, F. Haake und M. Kuś, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 143 (2000).

[111] O. Bohigas, M. J. Giannoni und C. Schmit, Phys. Rev. Lett **52**, 1 (1984).

[112] G. Casati, B. V. Chirikov und I. Guarneri, Phys. Rev. Lett. **54**, 1350 (1985).

[113] D. Delande und J. C. Gay, Phys. Rev. Lett. **57**, 2006 (1986).

[114] T. Guhr, A. Müller-Groeling und H. A. Weidenmüller, Phys. Rep. **299**, 189 (1998).

[115] M. V. Berry und M. Tabor, Proc. R. Soc. Lond. A **356**, 375 (1977).

[116] P. Pechukas, Phys. Rev. Lett. **51**, 943 (1983).

[117] T. Yukawa, Phys. Rev. Lett. **54**, 1883 (1985).

[118] T. Yukawa, Phys. Lett. A **116**, 227 (1986).

[119] F. Haake und G. Lenz, Europhys. Lett. **13**, 577 (1990).

[120] B. Dietz, Dissertation, Universität Essen, 1991.

[121] B. Dietz und F. Haake, Europhys. Lett. **9**, 1 (1989).

[122] B. Dietz, Z. Phys. B **96**, 271 (1994).

[123] M. Kuś, F. Haake, D. Zaitsev und A. Huckleberry, J. Phys. A:Math. Gen. **30**, 8635 (1997).

[124] P. A. Braun, Rev. Mod. Phys. **65**, 115 (1993).

[125] E. B. Bogomolny, Nonliearity **5**, 805 (1992).

[126] B. Eckhardt, in *Proceedings of the International School of Physics ≪Enrico Fermi≫, Course CXIX, Varenna 1991*, herausgegeben von G. Casati, I. Guarneri und U. Smilansky (North-Holland, Amsterdam, 1993), S. 1–50.

[127] P. Gaspard und D. Alonso, Phys. Rev. A **47**, R3468 (1993).

[128] S. C. Creagh, J. M. Robbins und R. G. Littlejohn, Phys. Rev. A **42**, 1907 (1990).

[129] J. M. Robbins, Nonlinearity **4**, 343 (1991).

[130] M. V. Berry, Ann. Phys. **131**, 163 (1981).

[131] H. Primack und U. Smilansky, Phys. Rev. Lett. **74**, 4831 (1995).

[132] T. Kottos und U. Smilansky, Ann. Phys. **274**, 76 (1999).

[133] W.-M. Zhang, C. C. Martens, D. H. Feng und J.-M. Yuan, Phys. Rev. Lett. **61**, 2167 (1988).

[134] M. Feingold und A. Peres, Physica **9D**, 433 (1983).

[135] M. Feingold, N. Moiseyev und A. Peres, Phys. Rev. A **30**, 509 (1984).

[136] M. Feingold und A. Peres, Phys. Rev. A **31**, 2472 (1985).

[137] M. Sieber, J. Phys. A:Math. Gen. **29**, 4715 (1996).

[138] M. Sieber, J. Phys. A;Math. Gen. **30**, 4563 (1997).

[139] B. Eckhardt und U. Smilansky, nicht veröffentlicht.

[140] M. Baranger und K. T. R. Davies, Ann. Phys. **177**, 330 (1987).

[141] M. Baranger, K. T. R. Davies und J. H. Mahoney, Ann. Phys. **186**, 95 (1988).

[142] M. A. M. de Aguiar, C. P. Malta, M. Baranger und K. T. R. Davies, Ann. Phys. **180**, 167 (1987).

[143] M. A. M. de Aguiar und M. Baranger, Ann. Phys. **186**, 355 (1988).

[144] B. Eckhardt und D. Wintgen, J. Phys. A:Math. Gen. **24**, 4335 (1991).

[145] R. G. Littlejohn und J. M. Robbins, Phys. Rev. A **36**, 2953 (1987).

Danksagungen

Mein besonderer Dank gilt Fritz Haake und Marek Kuś. Fritz Haake danke ich für die Betreuung meiner Promotion, für das angenehme Arbeitsklima, für das er in seiner Arbeitsgruppe immer sorgt, und für die große Freiheit, die er mir bei dieser Arbeit ließ. Marek Kuś hat mich über weite Teile dieser Arbeit mitbetreut und in die Theorie der kohärenten Zustände für kompakte Gruppen eingeführt.

Herrn Prof. Robert Graham danke ich für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Bei meinen Eltern möchte ich mich für die ständige Unterstützung in den letzten Jahren bedanken.

Vielen möchte ich meinen Dank für Anregungen, Erklärungen und Kritik zu meiner Arbeit aussprechen, besonders Stefan Halverscheid und Alan Huckleberry, die mich in mathematischen Fragen stark unterstützt haben. Karol Życzkowski hat einige Anstöße geliefert, die mich davon überzeugt haben, mich diesem Thema zu widmen, und er hat meine Arbeit aktiv mit vielen Anregungen verfolgt.

Bei Daniel Braun, Jens Eggers, Martin Fliesser, Andreas Hamm, Christopher Manderfeld, Gerd Koboldt, Robert Paternoga, Jürgen Reidl, Henning Schomerus, Jens-Uwe Sedler, Walter Strunz, Jürgen Vollmer, Joachim Weber, Christian Wiele und allen wissenschaftlichen Mitarbeitern in der theoretischen Physik an der Universität Essen möchte ich mich für das freundliche Klima unter Kollegen, viele gemeinsame Stunden in der Brücke und im KKC, die Diskussionen über Physik und anderes und die vielen GO-Spiele bedanken.

Schließlich möchte ich mich herzlich bei Anna Kindhäuser bedanken, die mir bei der Korrektur der Arbeit geholfen hat.

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name: Sven Gnutzmann
geboren: 6. September 1970 in Ulm

Ausbildung

1977–1981	Victoria-Grundschule in Kronberg im Taunus
1981–1990	Altkönigschule Kronberg im Taunus Abschluß: Abitur
1990–1991	Zivildienst im Kreiskrankenhaus Bad Soden
1991–1993	Studium der Physik an der Johann Wolfgang von Goethe Universität Frankfurt am Main
1993	Vordiplom in Physik
1993–1996	Fortsetzung des Studiums an der Universität Gesamthochschule Essen
1996	Hauptdiplom in Physik
seit 1996	wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Physik der Universität GH Essen