

# Klassischer Grenzfall, Semiklassik und Quantenchaos bei kollektiv gekoppelten $n$ -Niveau-Atomen

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)  
vorgelegt am Fachbereich Physik der  
Universität Gesamthochschule Essen

von

Sven Gnutzmann  
geboren in Ulm am 6. September 1970

Essen, Juni 2000

Referent: Prof. Dr. Fritz Haake  
Korreferent: Prof. Dr. Robert Graham  
Disputation: Essen, den 23. Juni 2000

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis . . . . .	iii
<b>1. Einleitung . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2. Die Quantenmechanik kollektiv wechselwirkender <math>n</math>-Niveau-Atome . . . . .</b>	<b>7</b>
2.1 Quantenmechanische Beschreibung eines $n$ -Niveau-Atoms . . . . .	8
2.1.1 Der Hilbert-Raum eines Atoms . . . . .	8
2.1.2 Leiteroperatoren: die Observablen eines $n$ -Niveau-Atoms . . . . .	8
2.1.3 Unterteilung in Diagonal-, Aufsteige- und Absteigeoperatoren . . . . .	10
2.2 Eine Anzahl $N$ von $n$ -Niveau-Atomen mit kollektiver Wechselwirkung . . . . .	11
2.2.1 Der Hilbert-Raum für $N$ Atome . . . . .	11
2.2.2 Kollektive Leiteroperatoren . . . . .	11
2.2.3 Kollektive Wechselwirkung . . . . .	12
<b>3. Die Matrixgruppen <math>GL_n(\mathbb{C})</math> und <math>SU_n</math> und ihre Darstellungen . . . . .</b>	<b>17</b>
3.1 Die Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und ihre Untergruppen . . . . .	19
3.1.1 Die Definition der Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und einiger Untergruppen . . . . .	19
3.1.2 Die Gauß-Zerlegung von $GL_n(\mathbb{C})$ . . . . .	22
3.1.3 Gruppenmultiplikation und Invertierung in $Z_n^+$ und $Z_n^-$ . . . . .	24
3.1.4 Das zentrale Umordnungstheorem für $GL_n(\mathbb{C})$ . . . . .	28
3.1.5 Gruppenmultiplikation und Invertierung für $GL_n(\mathbb{C})$ . . . . .	30
3.1.6 Gruppenmultiplikation und Invertierung für $SU_n$ . . . . .	32
3.1.7 Invariante 1-Formen und das invariante Maß für $GL_n(\mathbb{C})$ und $SU_n$ . . . . .	34
3.2 Die irreduziblen $SU_n$ -Darstellungen . . . . .	37
3.2.1 Die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . . . . .	37
3.2.2 Die Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ und die Wurzeln der adjungierten Darstellung . . . . .	37
3.2.3 Die Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen von $SU_n$ durch ihr höchstes Gewicht . . . . .	40
3.2.4 Ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren . . . . .	41

3.2.5	Die Gelfand-Zetlin-Basis . . . . .	42
3.2.6	Die Matrixelemente der Leiteroperatoren . . . . .	44
<b>4.</b>	<b>Kohärente Zustände für die Lie-Gruppe <math>SU_n</math></b> . . . . .	<b>49</b>
4.1	Die Definition kohärenter Zustände . . . . .	51
4.1.1	Allgemeine kohärente Zustände für die Lie-Gruppe $SU_n$ . . . . .	51
4.1.2	Der nichtentartete Fall . . . . .	51
4.1.3	Der entartete Fall . . . . .	53
4.2	Die Eigenschaften kohärenter Zustände . . . . .	57
4.2.1	Das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände . . . . .	57
4.2.2	Die Wirkung von $SU_n$ und den Leiteroperatoren $S_{ij}$ . . . . .	57
4.2.3	Matrixelemente der Operatoren $S_{ij}$ in kohärenten Zuständen . . . . .	58
4.2.4	Die Vollständigkeit der kohärenten Zustände . . . . .	59
4.2.5	Kleine Formelsammlung für $SU_2$ und $SU_3$ . . . . .	61
4.2.6	Kohärente Zustände als $SU_n$ -Bahnen im projektiven Hilbert-Raum . . . . .	64
4.3	Die symplektische Struktur der kohärenten Zustände . . . . .	67
4.3.1	Poisson-Klammern und die symplektische Form . . . . .	67
4.3.2	Die kanonische symplektische Struktur eines Hilbert-Raums . . . . .	71
4.3.3	Die symplektische Struktur auf kohärenten Zuständen . . . . .	73
4.3.4	Poisson-Klammern in den Fällen $SU_2$ und $SU_3$ . . . . .	77
4.3.5	Kanonische Koordinaten . . . . .	78
<b>5.</b>	<b>Klassische <math>SU_n</math>-Observablen und der klassische Grenzfall</b> . . . . .	<b>85</b>
5.1	Die klassische Lie-Algebra der $SU_n$ -Observablen . . . . .	86
5.2	Der klassische Grenzfall für quantenmechanische $SU_n$ -Observable . . . . .	90
<b>6.</b>	<b>Quantenchaos von <math>SU_3</math>-Observablen</b> . . . . .	<b>95</b>
6.1	Signaturen von Chaos und Integrabilität . . . . .	98
6.1.1	Zwei Beispiele für Dynamiken von $SU_3$ -Observablen . . . . .	98
6.1.2	Quantenchaos in verschiedenen irreduziblen Darstellungen . . . . .	99
6.1.3	Chaos und Integrabilität des klassischen Grenzfalles . . . . .	102
6.2	Niveaudynamik in verschiedenen irreduziblen Darstellungen . . . . .	108
6.2.1	Niveaudynamik für klassisch integrable Systeme mit einem Freiheitsgrad . . . . .	108
6.2.2	Die Stoßzeit im chaotischen Fall . . . . .	116
<b>7.</b>	<b>Semiklassik autonomer Systeme mit kompaktem Phasenraum</b> . . . . .	<b>131</b>
7.1	Die semiklassische Spurformel für den Propagator . . . . .	133
7.1.1	Die Gutzwillersche Spurformel für die Niveaudichte . . . . .	133
7.1.2	Die Spurformel für den Propagator . . . . .	136

---

7.1.3	Bestimmung des Spektrums aus der semiklassischen Spur des Propagators . . . . .	137
7.2	Semiklassische Berechnung des Spektrums zweier gekoppelter Spins . . . . .	140
7.2.1	Der Hamilton-Operator für zwei gekoppelte Drehimpulse . . . . .	140
7.2.2	Die klassische Dynamik von zwei gekoppelten Spins . . . . .	141
7.2.3	Numerische Berechnung des Spektrums aus den periodischen Bahnen . . . . .	146
7.2.4	Vorläufige Beurteilung der Strategie . . . . .	153
<b>A.</b>	<b>Kompakte Lie-Gruppen und deren Lie-Algebren . . . . .</b>	<b>155</b>
A.1	Lexikon der wichtigsten Definitionen . . . . .	155
A.1.1	Lie-Gruppen . . . . .	155
A.1.2	Darstellungen von Lie-Gruppen . . . . .	156
A.1.3	Die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe . . . . .	157
A.1.4	Einfache und halbeinfache Lie-Gruppen und Algebren . . . . .	158
A.1.5	Einparametrische Gruppen und die Exponentialfunktion . . . . .	159
A.1.6	Gruppenwirkungen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	160
A.1.7	Nebenklassen und homogene Räume . . . . .	162
A.2	Die adjungierte und koadjungierte Darstellung . . . . .	162
A.3	Wurzeln und Gewichte . . . . .	166
A.4	Darstellungstheorie kompakter halbeinfacher Gruppen . . . . .	171
<b>B.</b>	<b>Die symplektische Struktur der koadjungierten Bahnen . . . . .</b>	<b>173</b>
	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>175</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schema eines $n$ -Niveau-Atoms . . . . .	9
3.1	Schema der Operatorordnung $\mathcal{N}^\pm$ . . . . .	26
6.1	Niveaubstandsverteilung für $H_1$ . . . . .	100
6.2	Niveaubstandsverteilung für $H_2$ . . . . .	101
6.3	Phasenraumportraits für $H_1^{kl}$ . . . . .	104
6.4	Ausschnittsvergrößerungen der Phasenraumportraits für $H_1^{kl}$ . . . . .	106
6.5	Phasenraumportraits für $H_2^{kl}$ . . . . .	107
6.6	Dynamik der Eigenwerte von $H^{(0)}(\lambda)$ . . . . .	109
6.7	Dynamik der Eigenwerte von $H^{(0.4)}(\lambda)$ . . . . .	111
6.8	Höhenprofil der klassischer Hamilton-Funktion $h^{(\epsilon)}(\lambda)$ mit $\epsilon = 0.4$ . . . . .	113
6.9	Die Quasipotential $U_+(p, \lambda)$ und $U_-(p, \lambda)$ . . . . .	115
6.10	Niveaudynamik von $H(\lambda)$ in drei irreduziblen Darstellungen . . . . .	119
6.11	Niveaudynamik und Niveaubstandsverteilung von $H(\lambda)$ in drei irreduziblen Darstellungen . . . . .	121
6.12	Anzahl $\Upsilon$ der echten und vermiedenen Niveaureuzungen und typische Niveaugeschwindigkeiten $p_{typ}$ . . . . .	122
6.13	Typische Niveaugeschwindigkeit $p_{typ}$ . . . . .	124
6.14	Anzahl $\Upsilon_{st}$ der stark vermiedenen Kreuzungen im chaotischen Regime . . . . .	125
6.15	Anzahl $\Upsilon_{st}$ der stark vermiedenen Kreuzungen im integrablen Regime . . . . .	126
6.16	Niveaudynamik von $H(\lambda)$ im integrablen Regime . . . . .	127
6.17	Anzahl $\Upsilon$ aller Kreuzungen im integrablen Regime . . . . .	128
7.1	Die Familie $F_{III}$ periodischer Bahnen im $E - \tau$ -Diagramm . . . . .	145
7.2	Die exakte und semiklassische Spur des Propagators für $j = 35$ . . . . .	147
7.3	Zwei Zeitintervalle der Spur des Propagators für $j = 35$ . . . . .	148
7.4	Spur des Propagators für $j = \frac{1}{2}$ und $j = 1$ . . . . .	149
7.5	Spur des Propagators für $j = \frac{3}{2}$ . . . . .	150
7.6	Spur des Propagators für $j = 2$ . . . . .	152





# 1. Einleitung

Noch bevor die Quantenmechanik als Theorie vollständig ausgearbeitet wurde, stellte *Niels Bohr* 1923 das Korrespondenzprinzip auf [1], das einen Zusammenhang zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik herstellt. Das Korrespondenzprinzip besagt, daß die Quantenmechanik in die klassische Mechanik übergeht, wenn die typischen Wirkungen der Dynamik sehr groß gegen das Plancksche Wirkungsquantum  $\hbar$  sind (also im allgemeinen für große Quantenzahlen). Das Korrespondenzprinzip hat zusammen mit der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung den Weg zur endgültigen Formulierung der Quantenmechanik gewiesen und bildet heute das Fundament der semiklassischen Methoden.

Semiklassische Methoden kommen immer dann zur Anwendung, wenn  $\hbar$  klein gegen alle typischen Wirkungen der Dynamik ist [2–10]. Den semiklassischen Methoden ist gemeinsam, daß man sich die Information über die quantenmechanische Dynamik (etwa den Propagator) aus der Kenntnis der Dynamik des klassischen Gegenstücks holt. So hat etwa die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung, die später durch *A. Einstein*, *L. Brillouin* und *J. B. Keller* sauber formuliert wurde (EBK-Quantisierung) [11–13], als semiklassische Methode noch heute viele Anwendungen.

Der enge Zusammenhang zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik tritt auch im Rahmen der kanonischen Quantisierung auf. Die kanonische Quantisierung ist ein Programm, um aus den (als bekannt vorausgesetzten) Poisson-Klammern der klassischen Observablen die entsprechenden Vertauschungsregeln der quantisierten Observablen (hermitescher Operatoren) zu gewinnen. Dabei ist im wesentlichen die Ersetzung  $\{\cdot, \cdot\} \longrightarrow \frac{i}{\hbar}[\cdot, \cdot]$  durchzuführen. Gleichzeitig werden die klassischen Observablen durch hermitesche Operatoren ersetzt. In dieser Allgemeinheit ist das Programm nicht immer durchführbar, so daß man sich auf eine minimale Algebra von Observablen beschränken muß. In dieser Arbeit wird nicht auf die Schwierigkeiten im Programm der kanonischen Quantisierung eingegangen. Wichtig für diese Untersuchung ist die Übereinstimmung einiger algebraischer Eigenschaften von klassischen und quantenmechanischen Observablen. Bei besonders einfachen Hamilton-Operatoren (bzw. Hamilton-Funktionen) führt die algebraische Ähnlichkeit dazu, daß sich die Lösung der dynamischen Gleichungen der klassischen Dynamik direkt auf die quantenmechanische Dynamik übertragen läßt.

Die übereinstimmende algebraische Struktur klassischer und quantenmechanischer Observabler sowie das Korrespondenzprinzip spielen in der Theorie der kohären-

ten Zustände eine große Rolle. Kohärente Zustände wurden das erste Mal von *E. Schrödinger* für den harmonischen Oszillator entdeckt [14]. Er suchte quantenmechanische Zustände, deren Dynamik der klassischen Dynamik eines harmonischen Oszillators ähnelt. Tatsächlich fand er Wellenfunktionen mit minimaler Heisenberg-Unschärfe, die unter der Dynamik ihre Form erhalten und deren Orts- und Impulserwartungswerte den klassischen Bewegungsgleichungen gehorchen. Solche Zustände mit sehr klassischen Eigenschaften sind seit *R. Glauber* [15,16], *J. R. Klauder* [17,18] und *E. G. G. Sudarshan* [19] als kohärente Zustände bekannt und sind auf andere Systeme verallgemeinert worden. Kohärente Zustände bilden seitdem (häufig wegen ihrer algebraischen Eigenschaften) ein wichtiges Hilfsmittel sowohl in streng quantenmechanischen Anwendungen – besonders in der Quantenoptik [20,21] – als auch zur Begründung von semiklassischen Methoden [22]. Kohärente Zustände ermöglichen es, einen beliebigen quantenmechanischen Zustand als Funktion auf dem Phasenraum zu betrachten [20–24]. Damit kann der vom Korrespondenzprinzip geforderte Übergang zur klassischen Dynamik im Phasenraum untersucht werden [22]. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Quantenmechanik und dem klassischen Grenzfall von  $n$ -Niveau-Atomen mit kollektiver Kopplung. Der klassische Grenzfall wird erreicht, wenn die Anzahl der Atome gegen unendlich geht. Die makroskopischen Observablen von kollektiv wechselwirkenden  $n$ -Niveau-Atomen sind die Besetzungszahlen der Niveaus und die Kohärenzen, die durch Operatoren beschrieben werden, die jeweils ein Niveau in ein anderes überführen. Diese makroskopischen Observablen haben die gleichen Vertauschungsrelationen wie die Erzeuger der Lie-Gruppe  $SU_n$  und werden in dieser Arbeit als  $SU_n$ -Observable bezeichnet. Die Lie-Gruppe  $SU_n$  spielt eine große Rolle sowohl für die quantenmechanische Dynamik als auch für den klassischen Grenzfall. Die Einführung in die bekannte quantenmechanische Beschreibung von  $n$ -Niveau-Atomen, der zugehörigen makroskopischen Observablen und der Hilbert-Räume befindet sich in Kapitel 2. Die Hilbert-Räume lassen sich immer so wählen (ausreduzieren), daß sie mit irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe  $SU_n$  verbunden sind.

Für  $n$ -Niveau-Atome lassen sich kohärente Zustände definieren, die eng mit der Lie-Gruppe  $SU_n$  verknüpft sind. Die generelle Struktur der kohärenten Zustände und des klassischen Grenzfall es sind seit längerem bekannt [25–38]. In dieser Arbeit gilt es zunächst, die Eigenschaften der kohärenten Zustände explizit anzugeben, wozu einige Entflechtungs- und Umordnungstheoreme bewiesen werden müssen, die in Kapitel 3 enthalten sind. Dort werden auch andere Eigenschaften der Lie-Gruppen  $SU_n$  und  $GL_n(\mathbb{C})$  (Gauß-Zerlegung, Gruppenmultiplikation, invariante Maße, irreduzible Darstellungen) zusammengefaßt dargestellt bzw. teilweise hergeleitet. Diese etwas technischen Ausführungen bekommen ihre Anwendung in Kapitel 4, dem Kapitel über kohärente Zustände der Lie-Gruppe  $SU_n$ . Die wichtigsten Eigenschaften kohärenter Zustände (Skalarprodukt, Auflösung des Einheitsoperators bzw. Vollständigkeit, Matrixelemente der makroskopischen Observablen, etc.) sind dort ex-

plizit angegeben, so daß die Kapitel 3 und 4 zusammen eine Formelsammlung für den Umgang mit kohärenten Zuständen der Lie-Gruppe  $SU_n$  bilden. Außerdem wird in Kapitel 4 die bekannte symplektische Struktur auf den kohärenten Zuständen dargestellt [35–37].

In Kapitel 5 folgt die Darstellung der klassischen makroskopischen Observablen für  $n$ -Niveau-Atome. Diese werden in Abschnitt 5.1 mit ihren Poisson-Klammern und den Phasenräumen, in denen sich ihre Dynamik abspielt, vorgestellt. Der klassische Grenzfall, der den Übergang von der quantenmechanischen zur klassischen Dynamik von  $n$ -Niveau-Atomen beschreibt, wird in Abschnitt 5.2 explizit durchgeführt.

Global gekoppelte  $n$ -Niveau-Atome haben einen kompakten klassischen Phasenraum und daher quantenmechanisch einen Hilbert-Raum mit endlicher Dimension. Damit eignen sich diese Systeme sehr gut für Untersuchungen von quantenmechanischen Signaturen von Chaos und Integrabilität.<sup>1</sup> Der Fall  $n = 2$  ist in dieser Hinsicht bereits sehr gut untersucht worden [39–50]. Der klassische Phasenraum ist in diesem Fall zweidimensional (die Oberfläche einer Kugel), so daß chaotische Dynamik nur dann möglich ist, wenn das System periodisch getrieben wird.<sup>2</sup> Will man Chaos in einer autonomen Dynamik von  $n$ -Niveau-Atomen finden, muß man den Fall  $n \geq 3$  betrachten. Diese Systeme besitzen in ihrer Struktur zusätzlichen Reichtum gegenüber  $n = 2$ . Auf quantenmechanischer Seite gibt es eine große Anzahl sehr verschiedener irreduzibler Darstellungen, die durch  $n - 1$  ganzzahlige Parameter  $\lambda = [\lambda_1; \dots; \lambda_{n-1}]$  charakterisiert werden (im Falle  $n = 2$  gibt es nur einen Parameter  $\lambda_1 = 2j$ , mit der üblichen Drehimpulsquantenzahl  $j$ ). Die Dimension des Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  steigt monoton in jedem  $\lambda_k$ . Also gibt es sehr viele Möglichkeiten, den klassischen Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0 \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} \rightarrow \infty$  durchzuführen. Tatsächlich führen die verschiedenen Routen zum klassischen Grenzfall in verschiedene Phasenräume, die sich sogar in ihrer Dimension unterscheiden können (dies wird in den Kapiteln 4 und 5 dargestellt). Für jede gegebene irreduzible  $SU_n$ -Darstellung gibt es jedoch eine eindeutige kanonische Route zum klassischen Grenzfall.

Für  $n = 3$  ist die Dimension des klassischen Phasenraums entweder vier oder sechs. Die Dynamik von  $SU_3$ -Observablen mit einem vierdimensionalen klassischen Grenzfall ist im Zusammenhang von Semiklassik und Quantenchaos in den letzten Jahren häufig untersucht worden [35,36,51–64]. Bei den verschiedenen Routen zum klassischen Grenzfall und den sich daraus ergebenden verschiedenen Dimensionen des klassischen Phasenraums stellt sich die Frage, ob es möglich ist, einen Hamilton-Operator zu konstruieren, der neben der Energie noch genau eine weitere Bewegungskonstante hat, so daß die klassische Dynamik im vierdimensionalen Phasenraum integrabel ist, jedoch nichtintegrabel wird, wenn der klassische Grenzfall in einem sechsdimensio-

<sup>1</sup> Bei Hilbert-Räumen mit unendlicher Dimension muß der Hilbert-Raum für numerische Rechnungen immer abgeschnitten werden, was die Ergebnisse stark verfälschen kann.

<sup>2</sup> Die Vertauschungsrelationen der makroskopischen Observablen sind in diesem Fall äquivalent zu denen eines Drehimpulses. Daher werden diese Systeme als (geklickte) Kreisel bezeichnet.

nalen Phasenraum vollzogen wird. Auf quantenmechanischer Seite sollten sich dann die Signaturen von Chaos und Integrabilität etwa in der Niveauabstandsverteilung  $P(s)$  für ein und denselben Hamilton-Operator (als Funktion der makroskopischen  $SU_3$ -Observablen) von einer irreduziblen  $SU_3$ -Darstellung zur anderen ändern. Einige Beispiele für solche Hamilton-Operatoren werden in Kapitel 6 näher untersucht. In Abschnitt 6.1 wird die Niveauabstandsverteilung  $P(s)$  in verschiedenen irreduziblen Darstellungen mit Phasenraumportraits der klassischen Dynamik verglichen. Auf die Niveaudynamik für einparametrische Familien von Hamilton-Operatoren  $H(\lambda)$  wird in Abschnitt 6.2 eingegangen. Es wird eine ausführliche Diskussion des Status von deutlich vermiedenen und von echten oder schwach vermiedenen Kreuzungen im chaotischen und integrablen Regime durchgeführt.

Im abschließenden Kapitel 7 wird eine semiklassische Methode zur Bestimmung des Spektrums untersucht. Üblicherweise bestimmt man das Spektrum semiklassisch über die von *M. C. Gutzwiller* entdeckte Spurformel [2,65–68] für die Niveaudichte. In die Gutzwillersche Spurformel geht eine Summe über alle periodischen Bahnen einer gegebenen Energie ein. Für jede periodische Bahn bestimmt die Stabilitätsmatrix, die Länge der Periode, die Wirkung und die Energie der periodischen Bahn den Beitrag zur Spurformel. Die Summe über alle periodischen Bahnen birgt jedoch erhebliche Schwierigkeiten. In einer chaotischen Dynamik<sup>3</sup> wächst die Anzahl der periodischen Bahnen exponentiell mit der Länge der Periode – man spricht von exponentieller Proliferation. Damit ist einerseits die Konvergenz in Frage gestellt, andererseits ist es numerisch ein meist nicht lösbares Problem, alle periodischen Bahnen zu finden. Es ist bekannt, daß man nicht alle periodischen Bahnen braucht, um das Spektrum aufzulösen, sondern nur alle periodischen Bahnen, deren Periode kürzer ist als die sogenannte Heisenberg-Zeit  $\tau_H$  [69]. Die Heisenberg-Zeit ist durch die mittlere Niveaudichte  $\rho$  bestimmt. Damit gehen nur endlich viele periodische Bahnen in die semiklassische Spurformel ein. Im allgemeinen bleibt es jedoch auch dann äußerst aufwendig (wenn nicht unmöglich), alle notwendigen periodischen Bahnen numerisch zu finden.<sup>4</sup> Eine effizientere Methode für die semiklassische Bestimmung des Spektrums könnte darin bestehen, das Spektrum eines autonomen Systems aus der semiklassischen Spur des zeitabhängigen Propagators  $u(t) = \sum_k \exp(-i\frac{E_k t}{\hbar})$  zu bestimmen. Für den Propagator läßt sich ebenfalls eine semiklassische Spurformel angeben, die ihn durch eine Summe über periodische Bahnen ausdrückt. In einem autonomen System mit einem kompakten klassischen Phasenraum enthält die Spur des Propagators immer endlich viele periodische Bahnen (es gehen alle periodischen Bahnen mit der Periode  $t$  ein). Im Prinzip braucht man in einem  $N$ -dimensionalen Hilbert-Raum die Spur des Propagators  $u(t)$  nur an  $\frac{N}{2}$  Fußpunkten  $t_k$  bestimmen,

<sup>3</sup> Die Gutzwillersche Spurformel gilt bei mehr als zwei klassischen Freiheitsgraden nur in stark chaotischen (hyperbolischen) Systemen.

<sup>4</sup> Außer man kennt eine symbolische Dynamik wie für die Bäcker-Abbildung oder den Sinai-Billard.

um alle Informationen über das Spektrum zu besitzen. Es stellt sich die Frage, wie groß die Zeiten  $t_k$  tatsächlich gewählt werden müssen, um eine gute semiklassische Näherung des Spektrums zu erhalten. Die berechnete Hoffnung ist, daß man deutlich unterhalb der Heisenberg-Zeit bleiben kann, so daß sich gegenüber den üblichen Verfahren für autonome Systeme ein erheblicher Effizienzvorteil ergäbe. Diese Hoffnung nährt sich aus der beliebig hohen Auflösung von Phasenraumstrukturen, die für  $\hbar \approx 0$  (aber endlich) entsteht, wenn man alle periodischen Bahnen bis zur Heisenberg-Zeit betrachtet. D.h. es werden Substrukturen einer Planck-Zelle beliebig gut aufgelöst, was quantenmechanisch keinen Sinn macht. Benutzt man jedoch nur periodische Bahnen mit erheblich kürzerer Periode, kann man hoffen, das Spektrum immer noch hinreichend genau zu bestimmen, ohne beliebig kleine Substrukturen einer Planck-Zelle aufzulösen. In Kapitel 7 wird eine Methode zur semiklassischen Bestimmung des Spektrums vorgestellt, die auf der Spur des Propagators beruht und versucht, mit möglichst kurzen periodischen Bahnen auszukommen. Als Beispielsystem dienen zwei gekoppelte Drehimpulsvektoren. Dies ist neben den Drei-Niveau-Atomen das einfachste System mit klassisch kompaktem Phasenraum, das bei autonomer Dynamik Chaos zuläßt. In dieser Arbeit konnte nur die Durchführbarkeit der semiklassischen Methode gezeigt werden. Die Untersuchung der Effizienz verlangt nach anderen Systemen, für die es einfacher ist, die periodischen Bahnen aufzufinden.

Es sind zwei mathematische Anhänge angefügt. Anhang A faßt den mathematischen Hintergrund über kompakte Lie-Gruppen, deren Lie-Algebren und deren irreduzible Darstellungen zusammen. Anhang B stellt die symplektische Struktur auf den Bahnen der koadjungierten Darstellung vor. Die Phasenräume, die sich im klassischen Grenzfall der Dynamik von  $n$ -Niveau-Atomen ergeben, werden mathematisch durch koadjungierte Bahnen beschrieben.



## 2. Die Quantenmechanik kollektiv wechselwirkender $n$ -Niveau-Atome

In diesem Kapitel soll die quantenmechanische Beschreibung einer Anzahl  $N$  von  $n$ -Niveau-Atomen mit kollektiver Kopplung zusammengefaßt und für die weitere Untersuchung bereitgestellt werden.

Zunächst wird in Abschnitt 2.1 ein einziges  $n$ -Niveau-Atom mit seinem Hilbert-Raum und seinen Observablen und deren Vertauschungsregeln beschrieben.

In Abschnitt 2.2 werden die Observablen und die Hilbert-Räume einer Anzahl  $N$  von  $n$ -Niveau-Atomen dargestellt. Den Observablen entsprechen Operatoren, die Leiteroperatoren bzw.  $SU_n$ -Observable genannt werden. Die kollektiven (makroskopischen) Observablen sind die Besetzungszahlen der Atomniveaus und Kohärenzen (bzw. Polarisierungen). Letztere werden durch Operatoren beschrieben, die jeweils ein Atomniveau in ein anderes überführen. Die kollektiven Observablen gehorchen den gleichen Vertauschungsregeln wie die Observablen eines Atoms. Der Hilbert-Raum der Atome ist das  $N$ -fache Tensorprodukt des Hilbert-Raums eines Atoms. Dieser Hilbert-Raum zerfällt in irreduzible unitäre Darstellungen der Lie-Gruppe  $SU_n$ . Jede irreduzible  $SU_n$ -Darstellung ist durch die Werte von  $n - 1$  Casimir-Operatoren festgelegt, die in Abschnitt 2.2.3 eingeführt werden.

Von besonderer physikalischer Bedeutung sind Atome, bei denen nur eine kleine Anzahl von Niveaus  $n = 2, 3, \dots$  in die Dynamik eingehen. Die Fälle  $n = 2$  und  $n = 3$  werden ausführlich behandelt.<sup>1</sup>

In dieser Untersuchung bilden kollektiv wechselwirkende  $n$ -Niveau-Atome ein physikalisches Beispiel für ein quantenmechanisches System mit einem Hilbert-Raum endlicher Dimension und einem kompakten Phasenraum im klassischen Grenzfall. Der mathematische Grund dieser Eigenschaften liegt in der Kompaktheit der Lie-Gruppe  $SU_n$ , deren Generatoren quantenmechanische Observable sind. Die Konstruktionen in den folgenden Kapiteln (kohärente Zustände, Konstruktion des klassischen Grenzfalls) sind nicht auf die Lie-Gruppen  $SU_n$  beschränkt. Verallgemeinerungen auf andere kompakte Lie-Gruppen sind möglich, werden aber nicht explizit durchgeführt. Der mathematische Anhang A enthält eine Einführung in kompakte Lie-Gruppen und deren irreduzible Darstellungen.

---

<sup>1</sup> Der Fall  $n = 2$  ist äquivalent zur Behandlung eines Drehimpulses.

## 2.1 Quantenmechanische Beschreibung eines $n$ -Niveau-Atoms

### 2.1.1 Der Hilbert-Raum eines Atoms

Der Hilbert-Raum für die inneren Quantenzustände eines einzigen  $n$ -Niveau-Atoms wird von  $n$  orthonormalen Vektoren („Niveaus“) aufgespannt, die im folgenden mit  $|i\rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  bezeichnet werden. Der Anteil des Hilbert-Raums, der die translatorischen Freiheitsgrade eines Atoms beschreibt, ist für diese Untersuchung von geringem Interesse und wird daher nicht behandelt. Die Atomniveaus  $|i\rangle$  entsprechen der Standardbasis des Hilbert-Raums  $\mathbb{C}^n$

$$|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad |n\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Die unitären nichttrivialen Basistransformationen eines  $n$ -Niveau-Atoms sind Gruppenelemente der Lie-Gruppe  $SU_n$  der speziellen unitären  $n \times n$ -Matrizen (bzw.  $U_n$ , wenn triviale globale Phasenänderungen einbezogen werden). Die Lie-Gruppe  $SU_n$  und deren Lie-Algebra  $\mathfrak{su}_n$  werden im folgenden auch für viele kollektiv wechselwirkende Atome eine große Rolle spielen. Die Lie-Algebra  $\mathfrak{su}_n$  ist eine Unteralgebra von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  (der Lie-Algebra aller komplexen  $n \times n$ -Matrizen)

$$\mathfrak{su}_n := \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A^\dagger = -A, \text{Spur}A = 0\}, \quad (2.2)$$

d.h. sie wird durch die antihermiteschen spurlosen  $n \times n$ -Matrizen aufgespannt.<sup>2</sup>

### 2.1.2 Leiteroperatoren: die Observablen eines $n$ -Niveau-Atoms

Übergänge zwischen den Basiszuständen werden durch die **Leiteroperatoren**

$$\tau_{ij} = |i\rangle\langle j| \quad (2.3)$$

beschrieben. Der Leiter- oder Übergangsoperator  $\tau_{ij}$  läßt den Zustand  $|j\rangle$  in den Zustand  $|i\rangle$  übergehen und vernichtet alle übrigen Zustände (siehe Abbildung 2.1). Den  $\tau_{ij}$  entsprechen physikalische Observable: für  $i = j$  die Besetzungszahl des  $i$ -ten Niveaus und für  $i \neq j$  die komplexen Polarisierungen oder Kohärenzen.<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Die Elemente  $A \in \mathfrak{su}_n$  werden im folgenden meist in der Form  $A = -iQ$  (mit hermiteschem



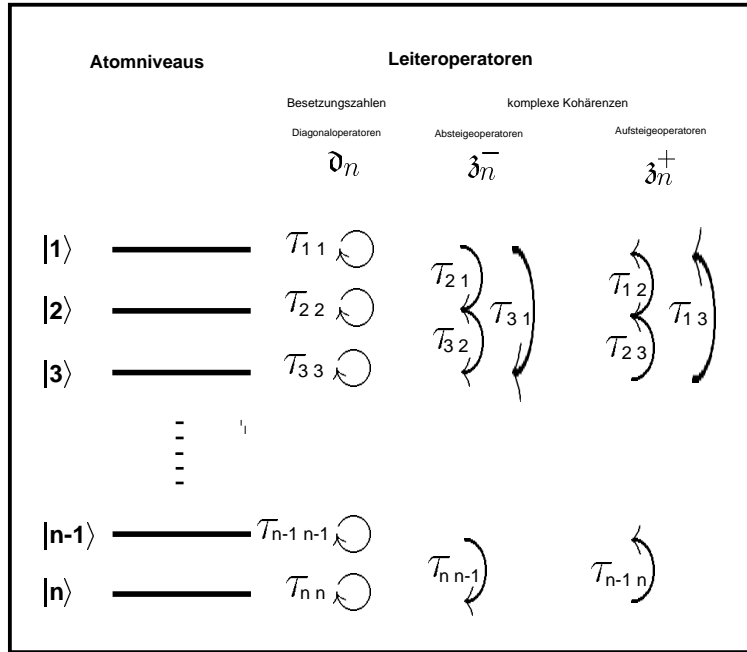


Abb. 2.1: Schema eines  $n$ -Niveau-Atoms und der Wirkung der Operatoren  $\tau_{ij}$ .

Den Operatoren  $\tau_{ij}$  entsprechen Matrizen (die im folgenden ebenfalls mit  $\tau_{ij}$  bezeichnet werden). Die Matrixelemente von  $\tau_{ij}$  verschwinden fast alle – bis auf ein einziges in der  $i$ -ten Reihe und  $j$ -sten Spalte, wo eine Eins steht

$$\tau_{11} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (2.4)$$

Es ergeben sich die Vertauschungsregeln

$$[\tau_{ij}, \tau_{kl}] = \delta_{kj} \tau_{il} - \delta_{il} \tau_{kj}. \quad (2.5)$$

Die Matrizen  $\tau_{ij}$  sind eine Orthonormalbasis des Hilbert-Raums der komplexen  $n \times n$ -Matrizen (mit dem Skalarprodukt  $\langle A|B \rangle = \text{Spur} A^\dagger B = \sum_{i,j=1}^n \overline{A_{ij}} B_{ij}$ ).<sup>4</sup> Mit den

<sup>3</sup>  $Q$ ) geschrieben, weil dann  $Q$  einer physikalischen Observablen entspricht.

Außerdem werden die Elemente einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  (und ihre Darstellungen in Hilbert-Räumen) im folgenden als Generatoren der zugehörigen Lie-Gruppe  $G$  bezeichnet.

<sup>4</sup> Die Operatoren  $\tau_{ij} = \tau_{ji}^\dagger$  sind nicht hermitesch – es ist jedoch einfach hermitesche Operatoren einzuführen, die reellen physikalischen Observablen entsprechen.

<sup>4</sup> In dieser Arbeit bedeutet  $\bar{z}$  das komplex konjugierte von  $z$ .

Vertauschungsregeln (2.5) bilden sie die (definierende Darstellung der) Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ .

Zusätzlich zu den Eigenschaften, die aus den Vertauschungsregeln (2.5) folgen, kann jedes Produkt der Operatoren  $\tau_{ij}$  in eine Linearkombination der  $\tau_{ij}$  entwickelt werden, indem man

$$\tau_{ij}\tau_{kl} = |i\rangle\langle j|k\rangle\langle l| = \delta_{kj}\tau_{il} \quad (2.6)$$

benutzt. Im Heisenberg-Bild werden die Observablen zeitabhängig und durch Matrizen  $\tau_{ij}(t)$  mit  $\tau_{ij}(t=0) = \tau_{ij}$  dargestellt. Die Heisenberg-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\tau_{ij}(t) = \frac{i}{\hbar}[H, \tau_{ij}(t)] \quad (2.7)$$

sind für jeden Hamilton-Operator  $H = H(\tau_{ij})$  linear in den Matrizen  $\tau_{ij}(t)$  und damit (zumindest für nicht zu große  $n$ ) leicht zu integrieren.

### 2.1.3 Unterteilung in Diagonal-, Aufsteige- und Absteigeoperatoren

Die Observablen  $\tau_{ij}$  können in drei Mengen aufgeteilt werden, die jeweils eine geschlossene Unteralgebra aufspannen, d.h. der Kommutator zweier Observabler aus der gleichen Unteralgebra gehört auch selbst zu dieser Unteralgebra.

Eine solche Unteralgebra wird durch die **Besetzungszahloperatoren** bzw. **Diagonalmatrizen**  $\tau_{ii}$  aufgespannt, die alle untereinander vertauschen. Diese sogenannte **Cartan-Algebra** (siehe Anhang A und Abschnitt 3.2.2) wird im folgenden mit  $\mathfrak{d}_n$  bezeichnet. Die beiden anderen Unteralgebren werden durch die **Absteigeoperatoren**  $\tau_{ij}$  mit  $i > j$  und durch die **Aufsteigeoperatoren**  $\tau_{ij}$  mit  $i < j$  aufgespannt. Sie werden in dieser Arbeit mit  $\mathfrak{z}_n^-$  und  $\mathfrak{z}_n^+$  bezeichnet. In  $\mathfrak{z}_n^-$  haben alle Matrizen nur unterhalb der Diagonalen nichtverschwindende Beiträge, und die Matrizen aus  $\mathfrak{z}_n^+$  haben nur oberhalb der Diagonalen nichtverschwindende Beiträge

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_n &:= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\} \\ \mathfrak{z}_n^- &:= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A_{ij} = 0 \text{ für } i \leq j\} \\ \mathfrak{z}_n^+ &:= \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A_{ij} = 0 \text{ für } i \geq j\}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Es gilt

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{d}_n \oplus \mathfrak{z}_n^- \oplus \mathfrak{z}_n^+. \quad (2.9)$$

Die Wirkung der Operatoren  $\tau_{ij}$  sowie die Aufteilung in Diagonal-, Aufsteige- und Absteigeoperatoren ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

## 2.2 Eine Anzahl $N$ von $n$ -Niveau-Atomen mit kollektiver Wechselwirkung

### 2.2.1 Der Hilbert-Raum für $N$ Atome

Der Hilbert-Raum der inneren Zustände von  $N$  identischen jedoch unterscheidbaren Atomen ist durch das  $N$ -fache Tensorprodukt des Hilbert-Raums  $\mathcal{H}$  eines einzelnen Atoms gegeben

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n}_{N\text{Faktoren}}. \quad (2.10)$$

Dabei wird angenommen, daß die Atome räumlich gut getrennt sind, d.h. der Abstand zwischen den Atomen ist größer als die de-Broglie-Wellenlänge und die Atome sind effektiv unterscheidbar. Bei höheren räumlichen Dichten müßte der Fermionen- oder Bosonencharakter der Atome berücksichtigt werden, der nur Zustände in  $\mathcal{H}$  zuläßt, die vollständig symmetrisch (Bosonen) oder vollständig antisymmetrisch (Fermionen) unter Vertauschung der einzelnen Atome sind.

### 2.2.2 Kollektive Leiteroperatoren

Die makroskopischen Besetzungszahlen und Kohärenzen werden durch die Operatoren

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^N \tau_{ij}^k \quad (2.11)$$

beschrieben, wobei  $\tau_{ij}^k$  durch das Tensorprodukt

$$\tau_{ij}^k = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbb{I} \otimes \tau_{ij} \otimes \mathbb{I} \otimes \cdots \otimes \mathbb{I}}_{k\text{-ter Faktor}} \quad (2.12)$$

gegeben ist, d.h.  $\tau_{ij}^k$  wirkt wie  $\tau_{ij}$  auf das  $k$ -te Atom und als Identität auf alle anderen. Diese kollektiven Leiteroperatoren erfüllen die gleichen Vertauschungsregeln wie die Matrizen  $\tau_{ij}$

$$[S_{ij}, S_{kl}] = \delta_{kj} S_{il} - \delta_{il} S_{kj}. \quad (2.13)$$

Die Operatoren  $S_{ij}$  spannen mit ihren komplexen Linearkombinationen eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  auf (siehe Anhang A) und werden im folgenden  $SU_n$ -Observable genannt. Alle Eigenschaften der  $\tau_{ij}$ , die sich nur aus den Vertauschungsregeln ergeben, gelten auch für die kollektiven Leiteroperatoren  $S_{ij}$ . Die Produktregel (2.6) gilt jedoch nur für die  $\tau_{ij}$  – ein Produkt  $S_{st}S_{kl}$  läßt sich im allgemeinen

nicht als Linearkombination aller  $S_{ij}$  schreiben. Die Summe aller Besetzungszahlen ergibt die Anzahl der Atome

$$\sum_{k=1}^N S_{kk} = N\mathbb{I}. \quad (2.14)$$

Bei einer großen Anzahl von gleichberechtigten Atomen ist der Zustand und die Dynamik eines bestimmten Atoms selten von Interesse. Die physikalisch interessante und relevante Information steckt meistens in den kollektiven Observablen  $S_{ij}$ . Das gilt besonders für kollektive Wechselwirkungen, die jetzt beschrieben werden.

### 2.2.3 Kollektive Wechselwirkung

Zwischen  $n$ -Niveau-Atomen herrscht **kollektive Wechselwirkung**, wenn sich der Hamilton-Operator der  $N$  Atome alleine durch die kollektiven Leiteroperatoren  $S_{ij}$  darstellen läßt

$$H = H(S_{ij}) \Leftrightarrow \text{kollektive Wechselwirkung}. \quad (2.15)$$

Besonders interessant sind Hamilton-Operatoren, die nichtlinear in den  $S_{ij}$  sind. Dann sind auch die Heisenberg-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} S_{ij}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, S_{ij}(t)] \quad (2.16)$$

nichtlinear. Ein gut untersuchtes Beispiel eines solchen Hamilton-Operators ist das Lipkin-Modell (mit  $n = 3$ )

$$H_{\text{Lipkin}} = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i S_{ii} + k \sum_{i,j=1;i \neq j}^3 S_{ij}^2. \quad (2.17)$$

Der Hamilton-Operator  $H_{\text{Lipkin}}$  beschreibt ein Atomkernschalenmodell und ist in letzter Zeit häufig im Zusammenhang von Quantenchaos und Semiklassik untersucht worden [54–56,62,63]. Ähnliche Wechselwirkungen sind für  $n$ -Niveau-Atome denkbar, die mit einer Mode des elektromagnetischen Feldes eines Resonators gekoppelt sind. Ist die Frequenz der Mode gegenüber einem Atomübergang stark verstimmt, kann die Mode adiabatisch eliminiert werden. Es entsteht eine effektive Atomdynamik mit einem effektiven Hamilton-Operator, der quadratisch in den Leiteroperatoren  $S_{ij}$  ist. Auch die adiabatische Elimination weiterer Atomniveaus führt zu effektiven quadratischen Hamilton-Operatoren.

Weil der Hamilton-Operator hermitesch ist, kann er nur von hermiteschen Linearkombinationen der  $S_{ij}$  abhängen. Der Hamilton-Operator ist also (i.a. nichtlinear)

aus den Generatoren der Lie-Gruppe  $U_n$  aufgebaut. Die Leiteroperatoren  $S_{ij}$  sind im Hilbert-Raum der  $N$  Atome bei geeigneter Wahl der Basis gleichzeitig in eine blockdiagonale Form zu bringen. Jeder Block gehört zu einer irreduziblen Darstellung der Lie-Gruppe  $SU_n$ . Der Hamilton-Operator hat die gleiche blockdiagonale Form, und die Dynamik läuft in allen Blöcken unabhängig voneinander ab (weiter unten in diesem Abschnitt wird der Zerfall in irreduzible Darstellungen für  $n = 2$  beschrieben – es sei auf die Literatur über Darstellungstheorie von Lie-Gruppen [70–74], auf Standardlehrbücher der Quantenmechanik [75,76] und auf Anhang A verwiesen). Ab jetzt wird immer vorausgesetzt, daß die Dynamik vollständig reduziert wurde, so daß nur ein Block vorhanden ist, der genau zu einer irreduziblen Darstellung gehört.

Ersetzt man die Leiteroperatoren

$$S_{ij} \longrightarrow S'_{ij} = S_{ij} - \delta_{ij}\mathbb{I}, \quad (2.18)$$

so gilt

$$\sum_{k=1}^n S'_{kk} = 0. \quad (2.19)$$

Die Vertauschungsregeln (2.13) bleiben für die gestrichenen Leiteroperatoren erhalten. Also hängt  $H = H(S'_{ij})$  nur von Generatoren der Lie-Gruppe  $SU_n$  ab. Ab jetzt wird der Strich bei  $S'_{ij}$  wieder weggelassen, und (2.19) gilt im folgenden immer. Die  $n$ -Niveau-Atome werden in dieser Arbeit als physikalisches Beispiel verwendet, in dem eine Dynamik von  $SU_n$ -Observablen realisiert wird. Die folgenden Konstruktionen kohärenter Zustände und des klassischen Grenzfalls sind aber für alle physikalischen Systeme relevant, bei denen der Hamilton-Operator aus den Generatoren der Lie-Gruppe  $SU_n$  ( $U_n$ ) aufgebaut ist (wie zum Beispiel der Hamilton-Operator des Lipkin-Modells (2.17)).

### Die Fälle $SU_2$ und $SU_3$

Der Fall  $SU_2$  führt auf die bekannte quantenmechanische Behandlung des Drehimpulses. Die Operatoren

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \\ J_+ &= S_{12} = J_1 + iJ_2 \\ J_- &= S_{21} = J_1 - iJ_2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

erfüllen die Vertauschungsregeln der Komponenten eines Drehimpulsvektors  $\vec{J}$ . Der Hilbert-Raum von  $N$  Zwei-Niveau-Atomen entspricht dann dem Hilbert-Raum von

$N$  Teilchen mit Spin  $1/2$ . Wenn jetzt – wie angenommen – der Hamilton-Operator nur von den Komponenten des Drehimpulses abhängt  $H = H(J_1, J_2, J_3)$ , vertauscht er mit dem Betragsquadrat des Drehimpulses

$$[H(J_1, J_2, J_3), J^2] = 0. \quad (2.21)$$

Damit ist der Betrag des Drehimpulses eine Konstante der Bewegung und ohne genauere Kenntnis von  $H$  kann in eine Basis übergegangen werden, in der  $H$  und die Komponenten  $J_i$  gleichzeitig blockdiagonal sind. In jedem Block hat dann das Betragsquadrat des Drehimpulses den Wert

$$J^2 = j(j+1), \quad (2.22)$$

wobei die Größe eines Blockes  $(2j+1) \times (2j+1)$  ist. Die Quantenzahl  $j$  charakterisiert die verschiedenen irreduziblen Darstellungen von  $SU_2$ .

Für  $SU_3$  benutzt man in der Teilchenphysik gerne folgende spurlose Kombinationen der Diagonaloperatoren  $S_{ii}$  zur Charakterisierung von Elementarteilchen

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2}(S_{11} - S_{22}) \\ Y &= \frac{1}{3}(S_{11} + S_{22} - 2S_{33}). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Man nennt  $T_3$  die dritte Komponente des Isospin und  $Y$  die Hyperladung eines Teilchens. Obwohl kein direkter Zusammenhang zur Elementarteilchentheorie besteht, sollen beide Namen in folgenden Verwendung finden. Die beiden Operatoren

$$\begin{aligned} C_2 &= \sum_{i,j=1}^3 S_{ij} S_{ji} \\ C_3 &= \sum_{i,j,k=1}^3 S_{ij} S_{jk} S_{ki}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

vertauschen beide mit jedem Hamilton-Operator  $H = H(S_{ij})$ . Genau wie im Fall der quantenmechanischen Drehgruppe  $SU_2$  zerfällt der Hilbert-Raum in Blöcke. In jedem Block sind  $C_2$  und  $C_3$  konstant. Sie entsprechen irreduziblen Darstellungen von  $SU_3$ , und die Werte von  $C_2$  und  $C_3$  charakterisieren diese Darstellungen eindeutig. Operatoren wie  $C_2$  und  $C_3$  findet man für alle Lie-Gruppen  $SU_n$ . Sie heißen Casimir-Operatoren und werden nun kurz vorgestellt.

### Casimir-Operatoren

Ein Operator der aus den Generatoren einer Lie-Gruppe (hier  $SU_n$  oder  $U_n$ ) aufgebaut ist und mit *allen* Generatoren dieser Gruppe vertauscht, heißt **Casimir-Operator**. Casimir-Operatoren spielen eine besondere Rolle, weil sie Konstanten

der Bewegung für *jede* Quantendynamik sind, deren Hamilton-Operator selbst aus den gleichen Generatoren aufgebaut ist. In jeder irreduziblen Darstellung der Lie-Gruppe müssen sie daher einen festen Wert haben. Andersherum bestimmen die Werte aller unabhängigen Casimir-Operatoren eindeutig die irreduzible Darstellung. Für  $U_n$  gibt es  $n$  unabhängige Casimir-Operatoren  $C_k$ . Um sie anzugeben, wird die Matrix  $\mathcal{S}$  benutzt, deren Matrixelemente die Operatoren  $S_{ij}$  sind

$$\mathcal{S} = \{S_{ij}\}. \quad (2.25)$$

Die Casimir-Operatoren erhält man durch Spuren von Potenzen von  $\mathcal{S}$

$$C_k = \text{Spur } \mathcal{S}^k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.26)$$

Über den ersten Casimir-Operator konnte ohne Beschränkung der Allgemeinheit verfügt werden (2.19)

$$C_1 = \sum_{k=1}^n S_{kk} = 0. \quad (2.27)$$

Es verbleiben die  $n - 1$  Casimir-Operatoren  $C_2, C_3, \dots, C_n$  für  $SU_n$ . Im Falle  $SU_2$  ist der Casimir-Operator  $C_2$  proportional zum Betragsquadrat des Drehimpulses

$$C_2 = \frac{1}{2}J^2 - \frac{1}{4}C_1^2 = \frac{1}{2}J^2 \quad \text{für } SU_2. \quad (2.28)$$





### 3. Die Matrixgruppen $GL_n(\mathbb{C})$ und $SU_n$ und ihre Darstellungen

Die Bedeutung der Lie-Gruppen  $U_n$  und  $SU_n$  für  $n$ -Niveau-Atome mit kollektiver Wechselwirkung wurde in Kapitel 2 beschrieben: Die makroskopischen Observablen erfüllen die Vertauschungsregeln der Generatoren von  $U_n$  bzw.  $SU_n$  (d.h. die Operatoren dieser Observablen bilden eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{u}_n$  bzw.  $\mathfrak{su}_n$ ), und der Hilbert-Raum von  $N$  identischen  $n$ -Niveau-Atomen zerfällt in orthogonale Unterräume, die zu irreduziblen Darstellungen von  $SU_n$  gehören, so daß der Hamilton-Operator blockdiagonal in diesen Unterräumen wird.

Da der Hilbert-Raum ein komplexer Vektorraum ist, können komplexe Observable betrachtet werden, die sich aus komplexen Linearkombinationen der reellen Observablen ergeben (tatsächlich sind die Kohärenzen bereits komplexe Observable). Aus der Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{u}_n$  erhält man so eine Darstellung der komplexifizierten Lie-Algebra  $\mathfrak{u}_n^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Außerdem ist es häufig hilfreich, die Lie-Gruppen  $U_n$  und  $SU_n$  als Untergruppen von  $GL_n(\mathbb{C})$  und  $SL_n(\mathbb{C})$  zu betrachten. Die Lie-Gruppen  $GL_n(\mathbb{C})$  und  $SL_n(\mathbb{C})$  sind als Komplexifizierungen der kompakten Lie-Gruppen  $U_n$  und  $SU_n$  anzusehen.

In diesem Kapitel sollen Eigenschaften der Lie-Gruppe  $GL_n(\mathbb{C})$  und einiger ihrer Untergruppen zusammengefaßt und teilweise hergeleitet werden, die für die Definition und Eigenschaften kohärenter Zustände der Lie-Gruppe  $SU_n$ , für die Konstruktion der symplektischen Struktur auf kohärenten Zuständen und für die Durchführung des klassischen Grenzfalles benötigt werden (siehe Kapitel 4 und 5). Viele dieser Eigenschaften finden sich in Lehrbüchern, wobei das Buch von *A. Barut* und *R. Rączka* [71] besondere Erwähnung verdient.

Der Abschnitt 3.1 stellt die Matrixgruppe  $GL_n(\mathbb{C})$  und einige ihrer Untergruppen dar, die in Abschnitt 3.1.1 definiert werden. Zur Parametrisierung von  $GL_n(\mathbb{C})$  wird die Gauß-Zerlegung verwendet (Abschnitt 3.1.2). Nach der Vorstellung der Gruppenmultiplikation und Invertierung der Untergruppe aller oberen bzw. unteren Dreiecksmatrizen  $Z_n^{\pm}$  und einem daraus folgenden sehr allgemeinen Entflechtungstheorem in Abschnitt 3.1.3, wird in Abschnitt 3.1.4 das zentrale Umordnungstheorem für  $GL_n(\mathbb{C})$  hergeleitet, das eines der zentralen Ergebnisse dieses Kapitels darstellt. Mithilfe des zentralen Umordnungstheorems lassen sich die Gruppenmultiplikation und Invertierung für Gauß-zerlegte Matrizen aus den Lie-Gruppen  $GL_n(\mathbb{C})$  und  $SU_n$

in den Abschnitten 3.1.5 und 3.1.6 angeben. Invariante Formen und Maße werden für Gauß-zerlegte Matrizen aus  $GL_n(\mathbb{C})$  und  $SU_n$  in Abschnitt 3.1.7 hergeleitet. Viele der hier beschriebenen Resultate sind für den speziellen Fall  $n = 3$  in [77] enthalten. Umordnungs- und Entflechtungstheoreme und weitere algebraische oder geometrische Eigenschaften der Lie-Gruppen  $SU_n$  und ihrer Darstellungen (z.B. geometrische Phasen) sind in den letzten Jahren immer wieder von Interesse gewesen (oft speziell für  $SU_2$  oder  $SU_3$ ) [61,64,78–83].

Der Abschnitt 3.2 ist eine Zusammenfassung von Lehrbuchmaterial über die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe  $SU_n$  [70–74,84,85]. Ein grobes Verständnis dieser Darstellungen ist für den Umgang mit kohärenten  $SU_n$ -Zuständen unerlässlich. Man kann den Abschnitt 3.2 als eine explizite Anwendung der in Anhang beschriebenen allgemeinen Darstellungstheorie kompakter halbeinfacher Lie-Gruppen betrachten.

In Abschnitt 3.2.1 wird die in der Darstellungstheorie wichtige adjungierte Darstellung von  $SU_n$  vorgestellt. Es folgt in Abschnitt 3.2.2 die Beschreibung der Cartan-Zerlegung von  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  und die Berechnung der Wurzeln (d.h. der Gewichte der adjungierten Darstellung). In Abschnitt 3.2.3 werden die irreduziblen Darstellungen der Lie-Gruppe  $SU_n$  nach ihrem höchsten Gewicht klassifiziert. In Abschnitt 3.2.4 wird ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren für irreduzible  $SU_n$ -Darstellungen eingeführt. Schließlich wird in den Abschnitten 3.2.5 und 3.2.6 die explizite Konstruktion der irreduziblen  $SU_n$ -Darstellungen gegeben, wie sie von *I. M. Gelfand* und *M. L. Zetlin* durchgeführt wurde [71]. D.h. es wird eine Basis  $\{|m\rangle\}$  des Darstellungsraumes angegeben (Abschnitt 3.2.5), in dem die Matrixelemente  $\langle m'|S_{ij}|m\rangle$  explizit bekannt sind (Abschnitt 3.2.6). Damit lassen sich über die Exponentialfunktion und die Entflechtungs- und Umordnungstheoreme die Matrixelemente von endlichen Drehungen aus  $SU_n$  und auch aus  $GL_n(\mathbb{C})$  (zumindest im Prinzip) explizit ausrechnen. Die Fälle  $SU_2$  und  $SU_3$  werden ausführlich behandelt.

### 3.1 Die Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und ihre Untergruppen

#### 3.1.1 Die Definition der Matrixgruppe $GL_n(\mathbb{C})$ und einiger Untergruppen

Per Definition ist  $GL_n(\mathbb{C})$  die Lie-Gruppe aller invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen  $g$  mit komplexen Einträgen. Sie ist eine offene Untermenge von  $\mathbb{C}^{n^2}$ , die durch die Invertierbarkeitsbedingung

$$\det g \neq 0 \quad (3.1)$$

definiert ist. Damit ist  $GL_n(\mathbb{C})$  nicht kompakt und hat die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} GL_n(\mathbb{C}) = n^2. \quad (3.2)$$

$GL_n(\mathbb{C})$  hat eine invariante abelsche Untergruppe, die durch Matrizen der Form  $z\mathbb{I}$  mit  $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$  gegeben ist ( $\mathbb{I}$  ist die Einheitsmatrix). Lie-Gruppen ohne eine invariante abelsche Untergruppe nennt man **halbeinfach**,  $GL_n(\mathbb{C})$  ist nicht halbeinfach.

Es gibt viele interessante Untergruppen von  $GL_n(\mathbb{C})$  – die wichtigsten bei der Betrachtung von kollektiv wechselwirkenden  $n$ -Niveau-Atomen sind  $U_n$  und  $SU_n$ . Die Untergruppen, die für die weitere Untersuchung von Interesse sind, sollen kurz vorgestellt werden:

- $SL_n(\mathbb{C})$ , die Lie-Gruppe aller  $n \times n$ -Matrizen  $g$  mit komplexen Einträgen und

$$\det g = 1. \quad (3.3)$$

Damit ist  $SL_n(\mathbb{C})$  eine abgeschlossene Untermenge von  $\mathbb{C}^{n^2}$  mit Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} SL_n(\mathbb{C}) = n^2 - 1, \quad (3.4)$$

die jedoch nicht beschränkt und daher auch nicht kompakt ist.  $SL_n(\mathbb{C})$  ist halbeinfach.

- $U_n$ , die Lie-Gruppe aller unitären komplexen  $n \times n$ -Matrizen  $u$ , also

$$u^\dagger u = uu^\dagger = \mathbb{I}. \quad (3.5)$$

$U_n$  ist eine kompakte Untermenge von  $\mathbb{C}^{n^2}$  mit (reeller) Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} U_n = n^2. \quad (3.6)$$

$U_n$  ist nicht halbeinfach. Für  $u \in U_n$  gilt

$$\det u = \exp(i\phi) \quad (3.7)$$

mit  $\phi \in [0, 2\pi)$ . Die Komplexifizierung von  $U_n$  ergibt wieder  $GL_n(\mathbb{C}) = U_n^{\mathbb{C}}$ .

- $SU_n$ , die kompakte halbeinfache Lie-Gruppe der speziellen unitären  $n \times n$ -Matrizen, die sich durch Einschränkung von  $U_n$  auf Matrizen  $u$  mit  $\det u = 1$  ergibt. Es gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} SU_n = n^2 - 1 \quad (3.8)$$

und die Komplexifizierung führt zurück auf  $SL_n(\mathbb{C}) = SU_n^{\mathbb{C}}$ .

- $D_n$ , die Lie-Gruppe aller diagonalen  $n \times n$ -Matrizen mit Diagonalelementen aus  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  und Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} D_n = n. \quad (3.9)$$

- $C_n \equiv SD_n \subset D_n$ , die Lie-Gruppe der Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} C_n = n - 1 \quad (3.10)$$

aller diagonalen  $n \times n$ -Matrizen  $c$  mit  $\det c = 1$ .

- $B_n^+$  und  $B_n^-$ , die Lie-Gruppen der oberen und unteren Dreiecksmatrizen mit nichtverschwindender Determinante, d.h. alle Diagonalelemente sind nichtverschwindende komplexe Zahlen.  $B_n^+$  und  $B_n^-$  werden auch **Borel-Gruppen** genannt und haben die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} B_n^+ = \dim_{\mathbb{C}} B_n^- = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (3.11)$$

Eine Matrix  $b^+ \in B_n^+$  hat die Form

$$\begin{pmatrix} b_{11}^+ & b_{12}^+ & b_{13}^+ & \cdot & \cdot & b_{1n}^+ \\ 0 & b_{22}^+ & b_{23}^+ & \cdot & \cdot & b_{2n}^+ \\ 0 & 0 & b_{33}^+ & \cdot & \cdot & b_{3n}^+ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn}^+ \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

- $SB_n^+$  und  $SB_n^-$ , die Lie-Gruppen der speziellen oberen und unteren Dreiecksmatrizen, die sich durch Einschränkung von  $B_n^+$  und  $B_n^-$  auf Matrizen  $b$  mit  $\det b = 1$  ergeben.
- $Z_n^+$  und  $Z_n^-$ , die Lie-Gruppen der oberen und unteren Dreiecksmatrizen, bei denen alle Diagonalelemente eins sind.  $Z_n^+$  und  $Z_n^-$  haben die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} Z_n^+ = \dim_{\mathbb{C}} Z_n^- = \frac{n(n-1)}{2} \quad (3.13)$$



### 3.1.2 Die Gauß-Zerlegung von $GL_n(\mathbb{C})$

Fast jede Matrix  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  läßt sich eindeutig als Produkt

$$g = z^{(-)} d z^{(+)} \quad (3.16)$$

dreier Matrizen mit  $z^{(-)} \in Z_n^-$ ,  $d \in D_n$  und  $z^{(+)} \in Z_n^+$  schreiben. Diese Zerlegung heißt **Gauß-Zerlegung** von  $GL_n(\mathbb{C})$ , und  $g$  heißt **Gauß-zerlegbar**, wenn die Zerlegung möglich ist. Gauß-zerlegbare Matrizen bilden eine offene und dichte Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{C})$ , d.h. jede Matrix aus  $GL_n(\mathbb{C})$  ist beliebig nah an einer Matrix, die Gauß-zerlegbar ist

$$GL_n(\mathbb{C}) = \overline{Z_n^- D_n Z_n^+}. \quad (3.17)$$

Dabei ist  $\overline{Z_n^- D_n Z_n^+}$  der Abschluß von  $Z_n^- D_n Z_n^+$ . Tatsächlich läßt sich *jede* Matrix  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  nach Konjugation mit einer Weyl-Reflexion  $p \in P_n$  als Produkt

$$p g p^{-1} = z^{(-)} d z^{(+)} \quad (3.18)$$

schreiben.

Gauß-Zerlegungen vom Typ (3.18) liefern nützliche Parametrisierungen (Karten) von  $GL_n(\mathbb{C})$  durch die  $n^2$  unabhängigen Matrixelemente von  $z^{(+)}, d$  und  $z^{(-)}$ . Die Gauß-Zerlegung überträgt sich auf alle Untergruppen von  $GL_n(\mathbb{C})$ , wobei die Matrixelemente von  $z^{(\pm)}$  und  $d$  im allgemeinen nicht unabhängig bleiben (für  $SL_n(\mathbb{C})$  muß zum Beispiel  $d$  aus  $C_n$  gewählt werden).

Für  $SU_n$  ist es sinnvoll, die  $\frac{n(n-1)}{2}$  komplexen Matrixelemente von  $z^{(-)}$  und die  $n-1$  Phasen der Diagonalmatrix  $d$  als unabhängige Koordinaten zu betrachten (das sind genau  $n^2 - 1$  unabhängige reelle Parameter, siehe Abschnitt 3.1.6).

Ist  $g = \{g_{ij}\} \in GL_n(\mathbb{C})$  eine Matrix mit der Gauß-Zerlegung ist  $g = z^{(-)} d z^{(+)}$ , dann lassen sich die Matrixelemente von  $z^{(\pm)}$  und  $d$  als Funktion der Matrixelemente von  $g$  angeben. Dazu ist es nützlich, eine Reihe von Unterdeterminanten  $\Delta_{kl}(g)$  zu definieren. Für  $k = l$  ist  $\Delta_{kk}(g)$  definiert als die Determinante der  $k \times k$ -Matrix der ersten  $k$  Spalten der ersten  $k$  Reihen von  $g$

$$\Delta_{kk}(g) = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{kk} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Für  $k > l$  ist  $\Delta_{kl}(g)$  die Determinante der  $l \times l$ -Matrix, die sich aus den ersten  $l$  Spalten und aus den ersten  $l - 1$  Reihen und der  $k$ -ten Reihe von  $g$  ergibt

$$\Delta_{kl}(g) \underset{k>l}{=} \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1l} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{l-1,1} & g_{l-1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{l-1,l} \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{kl} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Entsprechend ist  $\Delta_{kl}(g)$  für  $k < l$  die Determinante der  $k \times k$ -Matrix aus den ersten  $k$  Reihen und den  $k - 1$  ersten Spalten sowie der  $l$ -ten Spalte von  $g$

$$\Delta_{kl}(g) \underset{k<l}{=} \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdot & \cdot & g_{1,k-1} & g_{1l} \\ g_{21} & g_{22} & \cdot & \cdot & g_{2,k-1} & g_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdot & \cdot & g_{k,k-1} & g_{kl} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Zusätzlich wird  $\Delta_{00}(g) = \Delta_{0l} = \Delta_{k0} = 1$  und  $\Delta_{1j}(g) = g_{1j}$ ,  $\Delta_{j1}(g) = g_{j1}$  gesetzt. Die Matrixelemente von  $z^\pm$  und  $d$  mit  $z^{(-)} d z^{(+)} = g$  sind durch Quotienten der Unterdeterminanten  $\Delta_{ij}(g)$  gegeben

$$\begin{aligned} d_{kk} &= \frac{\Delta_{kk}(g)}{\Delta_{k-1,k-1}(g)} \\ z_{kl}^{(+)} &\underset{k \leq l}{=} \frac{\Delta_{kl}(g)}{\Delta_{kk}(g)} \\ z_{kl}^{(-)} &\underset{k \geq l}{=} \frac{\Delta_{kl}(g)}{\Delta_{ll}(g)}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Diese Formeln sind leicht nachgewiesen, wenn  $g$  bereits eine Diagonal- oder Dreiecksmatrix ist (der Beweis für allgemeine  $g$  wird im Buch von A. Barut und R. Rączka als Übungsaufgabe gestellt [71]).

Für  $n = 3$  lautet die Gauß-Zerlegung explizit

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{g_{31}}{g_{11}} & \frac{g_{11}g_{32} - g_{12}g_{31}}{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}} & 1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}}{g_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det g}{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{g_{12}}{g_{11}} & \frac{g_{13}}{g_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{g_{11}g_{23} - g_{13}g_{21}}{g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Die Formeln (3.22) werden in Abschnitt 3.1.4 zur Gewinnung des zentralen Umordnungstheorems für  $GL_n(\mathbb{C})$  benutzt.

### 3.1.3 Gruppenmultiplikation und Invertierung in $Z_n^+$ und $Z_n^-$

Bei der Gauß-Zerlegung einer Matrix  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  kommen obere und untere Dreiecksmatrizen aus  $Z_n^\pm$  vor. Diese Matrizen bilden jeweils eine Untergruppe, die in diesem Abschnitt näher betrachtet werden soll. Untere Dreiecksmatrizen werden später in Kapitel 4 zur Parametrisierung von kohärenten Zuständen benutzt.

Besteht zwischen drei oberen (unteren) Dreiecksmatrizen  $x^{(\pm)}, y^{(\pm)}, z^{(\pm)} \in Z_n^\pm$  die Beziehung  $z^{(\pm)} = y^{(\pm)} x^{(\pm)}$ , lauten die Matrixelemente von  $z^{(\pm)}$

$$z_{ij}^{(+)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ \sum_{k=i}^j y_{ik}^{(+)} x_{kj}^{(+)} & \text{falls } i < j, \end{cases} \quad (3.24)$$

$$z_{ij}^{(-)} = \begin{cases} \sum_{k=j}^i y_{ik}^{(-)} x_{kj}^{(-)} & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i < j. \end{cases}$$

Damit sind die Gruppenmultiplikationsregeln von  $Z_n^\pm$  vollständig beschrieben. Das Inverse  $[x^{(\pm)}]^{-1}$  von  $x^{(\pm)} \in Z_n^\pm$  erhält man aus (3.24), indem man  $y^{(\pm)} = [x^{(\pm)}]^{-1}$  und  $z^{(\pm)} = \mathbb{I}$  setzt. Löst man diese Gleichungen auf, erhält man

$$[x^{(+)}]_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ -x_{ij}^{(+)} + \sum_{i < k_1 < j} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1j}^{(+)} - \\ \quad - \sum_{i < k_1 < k_2 < j} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1k_2}^{(+)} x_{k_2j}^{(+)} + \dots & \text{falls } i < j, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$[x^{(-)}]_{ij}^{-1} = \begin{cases} -x_{ij}^{(+)} + \sum_{j < k_1 < i} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1j}^{(+)} - \\ \quad - \sum_{i < k_1 < k_2 < j} x_{ik_1}^{(+)} x_{k_1k_2}^{(+)} x_{k_2j}^{(+)} + \dots & \text{falls } i > j, \\ 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i < j. \end{cases}$$



Für  $n = 4$  ist das explizit für obere Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 0 & 1 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 1 & x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_{12} & -x_{13} + x_{12}x_{23} & -x_{14} + x_{12}x_{24} + x_{13}x_{34} - x_{12}x_{23}x_{34} \\ 0 & 1 & -x_{23} & -x_{24} + x_{23}x_{34} \\ 0 & 0 & 1 & -x_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Die in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Lie-Algebren der Auf- und Absteigeoperatoren  $\mathfrak{z}_n^+$  und  $\mathfrak{z}_n^-$  sind aus den Generatoren die Lie-Gruppen  $Z_n^+$  und  $Z_n^-$  aufgebaut. Entsprechend ist die Matrix  $\exp(\sum_{i < j} a_{ij} \tau_{ij}) \in Z_n^-$  eine untere Dreiecksmatrix

$$\begin{aligned} Z_n^+ \ni \exp\left(\sum_{i > j} a_{ij} \tau_{ij}\right) &= \mathbb{I} + \sum_{i > j} a_{ij} \tau_{ij} + \frac{1}{2!} \sum_{i > k_1 > j} a_{ik_1} a_{k_1 j} \tau_{ij} + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i > k_1 > k_2 > j} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 j} \tau_{ij} + \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} Z_n^- \ni \exp\left(\sum_{i < j} a_{ij} \tau_{ij}\right) &= \mathbb{I} + \sum_{i < j} a_{ij} \tau_{ij} + \frac{1}{2!} \sum_{i < k_1 < j} a_{ik_1} a_{k_1 j} \tau_{ij} + \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{i < k_1 < k_2 < j} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} a_{k_2 j} \tau_{ij} + \dots, \end{aligned}$$

oder explizit für obere Dreiecksmatrizen und  $n = 4$

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \quad (3.28)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} + \frac{1}{2}a_{12}a_{23} & a_{14} + \frac{1}{2}(a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34}) + \frac{1}{6}a_{12}a_{23}a_{34} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} + \frac{1}{2}a_{23}a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $\tau_{ij}^2 = 0$  gilt speziell

$$\exp(x \tau_{ij}) = \mathbb{I} + x \tau_{ij}. \quad (3.29)$$

Eine Matrix  $z^{(\pm)} \in Z_n^\pm$  läßt sich immer als Produkt von Matrizen der Form (3.29) schreiben

$$z^{(\pm)} = \mathcal{N}^\pm \left( \prod_{i \leq j} \exp \left( z_{ij}^{(\pm)} \tau_{ij} \right) \right). \quad (3.30)$$

Der Operator  $\mathcal{N}^\pm$  ordnet die Reihenfolge in der die Matrizen  $\tau_{ij}$  multipliziert werden, wobei folgende Produktordnung gilt

$$\mathcal{N}^+ (\tau_{ij} \tau_{kl}) = \begin{cases} \tau_{ij} \tau_{kl} & \text{falls } l < j \text{ oder } l = j, k < i \\ \tau_{kl} \tau_{ij} & \text{falls } l > j \text{ oder } l = j, k > i \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\mathcal{N}^- (\tau_{ij} \tau_{kl}) = \begin{cases} \tau_{ij} \tau_{kl} & \text{falls } k > i \text{ oder } k = i, l > j \\ \tau_{kl} \tau_{ij} & \text{falls } k < i \text{ oder } k = i, l < j \end{cases}$$

Denkt man sich die Matrizen  $\tau_{ij}$  selbst als Matrixelemente einer  $n \times n$ -Matrix  $\mathcal{T}$ ,

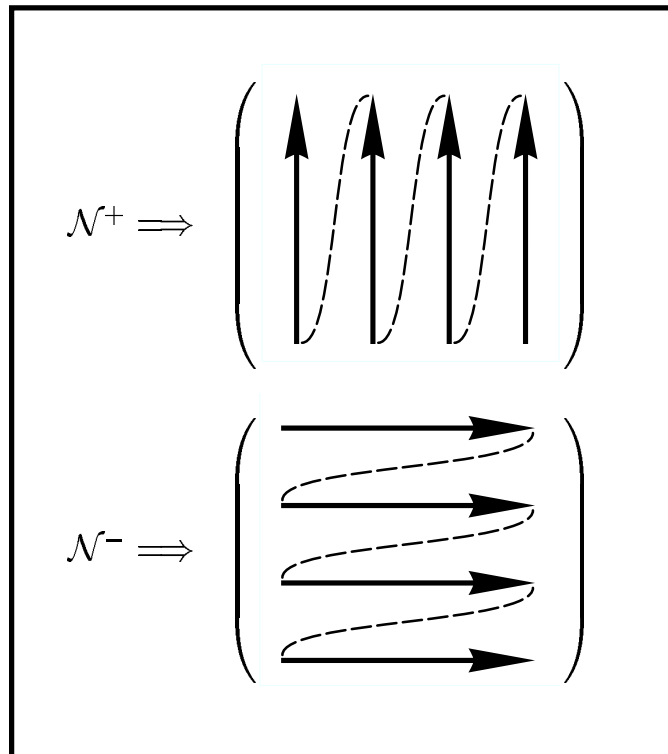


Abb. 3.1: Schema der Operatorproduktordnungen  $\mathcal{N}^\pm$ .

beginnt die durch  $\mathcal{N}^\pm$  gegebene Operatorordnung in der letzten Spalte der letzten Zeile und folgt dem Schema aus Abbildung 3.1. Eine Matrix  $\tau_{ij}$  steht links von  $\tau_{kl}$ , wenn sie näher am Ende des Pfeils ist. Die Ordnung innerhalb einer Spalte für  $\mathcal{N}^+$  (innerhalb einer Zeile für  $\mathcal{N}^-$ ) hat nur für die Diagonalelemente  $\tau_{ii}$  eine Bedeutung, weil alle anderen  $\tau_{ij}$  in einer Spalte (Zeile) miteinander vertauschen (in (3.30) kommen nur  $\tau_{ij}$  oberhalb beziehungsweise unterhalb der Diagonalen vor, so daß die Produktentwicklung (3.30) auch für entsprechend abgeänderte Operatorordnungen gilt). Die Operatorordnungen  $\mathcal{N}^\pm$  gelten ganz entsprechend auch für kollektive Leiteroperatoren  $S_{ij}$ .

Aus der Gruppenmultiplikation (3.24), der Produktentwicklung (3.30) und den Gleichungen (3.28) und (3.29) folgt ein allgemeines Entflechtungstheorem für die Leiteroperatoren  $S_{ij}$ , die die gleichen Vertauschungsregeln befolgen wie die Matrizen  $\tau_{ij}$  (siehe (2.5) und (2.13)). Dieses Entflechtungstheorem läßt sich in den Formeln

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{i<j} a_{ij} S_{ij}\right) &= \mathcal{N}^+ \left(\prod_{i<j} \exp\left(x_{ij}^{(+)} S_{ij}\right)\right) \\ \exp\left(\sum_{i>j} a_{ij} S_{ij}\right) &= \mathcal{N}^- \left(\prod_{i>j} \exp\left(x_{ij}^{(-)} S_{ij}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

zusammenfassen. Die Koeffizienten  $x_{ij}^{(\pm)}$  auf der rechten Seite sind Funktionen der Koeffizienten  $a_{ij}$  auf der linken Seite von (3.32). Aus (3.27) lassen sich diese Funktionen direkt ablesen

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(+)} &= \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i = j + 1 \\ a_{ij} + a_{i,i-1} a_{i-1,j} & \text{falls } i = j + 2 \\ a_{ij} + a_{i,i-1} a_{i-1,j} + a_{i,i-2} a_{i-2,j} + \\ \quad + a_{i,i-1} a_{i-1,i-2} a_{i-2,j} & \text{falls } i = j + 3 \\ \dots & \dots \end{cases} \\ x_{ij}^{(-)} &= \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } i = j - 1 \\ a_{ij} + a_{i,i+1} a_{i+1,j} & \text{falls } i = j - 2 \\ a_{ij} + a_{i,i+1} a_{i+1,j} + a_{i,i+2} a_{i+2,j} + \\ \quad + a_{i,i+1} a_{i+1,i+2} a_{i+2,j} & \text{falls } i = j - 3 \\ \dots & \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ein einfaches Beispiel für dieses Entflechtungstheorem liefert

$$\begin{aligned} \exp(a_{21} S_{21} + a_{31} S_{31} + a_{32} S_{32}) &= \\ = \exp(a_{32} S_{32}) \exp((a_{31} + a_{32} a_{21}) S_{31}) \exp(a_{21} S_{21}). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Das Entflechtungstheorem (3.32) läßt sich auch direkt aus den Kommutatorregeln der Operatoren  $S_{ij}$  gewinnen (für nicht zu großes  $n$  ist das kein sehr großer Aufwand).

Hier wurde das Entflechtungstheorem (3.32) zunächst in der definierenden Darstellung der Lie-Gruppen  $Z_n^\pm$  gewonnen. Da die Leiteroperatoren  $S_{ij}$  mit  $i < j$  ( $i > j$ ) in ihrem Hilbert-Raum eine Darstellung von  $Z_n^+$  ( $Z_n^-$ ) erzeugen (über die Exponentialfunktion), gilt es dann allgemein. Diese Vorgehensweise wird uns auch zum zentralen Umordnungstheorem für  $GL_n(\mathbb{C})$  führen (siehe Abschnitt 3.1.4).

Aus der Produktentwicklung (3.30) folgt, daß eine Matrix  $z^{(\pm)} \in Z_n^\pm$  im Hilbert-Raum der  $S_{ij}$  durch den Operator

$$\begin{aligned} z^{(+)} &\longmapsto \mathcal{D}(z^{(+)}) = \mathcal{N}^+ \left( \prod_{i < j} \exp \left( z_{ij}^{(+)} S_{ij} \right) \right) \\ z^{(-)} &\longmapsto \mathcal{D}(z^{(-)}) = \mathcal{N}^- \left( \prod_{i > j} \exp \left( z_{ij}^{(-)} S_{ij} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

dargestellt wird. Diese Darstellungen von oberen und unteren Dreiecksmatrizen im Hilbert-Raum einer irreduziblen Darstellung der Lie-Gruppe  $SU_n$  können zur Definition kohärenter Zustände benutzt werden (siehe Kapitel 4).

### 3.1.4 Das zentrale Umordnungstheorem für $GL_n(\mathbb{C})$

Bei der Berechnung des Skalarprodukts zweier kohärenter Zustände der Lie-Gruppe  $SU_n$ , muß man ein Operatorprodukt der Form

$$\mathcal{N}^+ \left[ \prod_{k < l} \exp \left( x_{kl}^{(+)} S_{kl} \right) \right] \mathcal{N}^- \left[ \prod_{k' > l'} \exp \left( x_{k'l'}^{(-)} S_{k'l'} \right) \right], \quad (3.36)$$

in dem alle Aufsteigeoperatoren  $S_{kl}$  mit  $k < l$  links von den Absteigeoperatoren  $S_{kl}$  mit  $k > l$  stehen, so umordnen, daß alle Aufsteigeoperatoren rechts von den Absteigeoperatoren stehen. Die allgemeine Lösung dieses Problems liefert das **zentrale Umordnungstheorem**, das in diesem Abschnitt hergeleitet wird.

Zur Herleitung des Theorems werden zunächst obere und untere Dreiecksmatrizen als Elemente der Matrixgruppe  $GL_n(\mathbb{C})$  betrachtet. Kann man für diese Matrizen ein Umordnungstheorem beweisen, bei dem nur Produkte von Matrizen aus  $GL_n(\mathbb{C})$  auftauchen, dann gilt dieses Umordnungstheorem auch für alle Darstellungen von  $GL_n(\mathbb{C})$ .

Sind  $x^{(+)} \in Z_n^+$  und  $x^{(-)} \in Z_n^-$  eine obere und eine untere Dreiecksmatrix, dann ist ihr Produkt  $g = x^{(+)} x^{(-)}$  im allgemeinen Gauß-zerlegbar

$$g = x^{(+)} x^{(-)} = z^{(-)} d z^{(+)} \quad (3.37)$$

mit  $z^{(\pm)} \in Z_n^\pm$  und  $d \in D_n$ . Die Matrixelemente von  $z^{(\pm)}$  und  $d_n$  sind Funktionen

$$\begin{aligned} z_{kl}^{(\pm)} &= \zeta_{kl}^{(\pm)}(x^{(+)}, x^{(-)}) \\ d_{kk} &= \delta_k(x^{(+)}, x^{(-)}) \end{aligned} \quad (3.38)$$

der Matrixelemente von  $x^{(\pm)}$ , die sich aus (3.22) und

$$g_{ij} = \sum_{k \geq \max(i,j)} x_{ik}^{(+)} x_{kj}^{(-)} \quad (3.39)$$

ergeben.

Diese Gauß-Zerlegung, die in der definierenden Darstellung von  $GL_n(\mathbb{C})$  durchgeführt wurde, ist in allen Darstellungen von  $GL_n(\mathbb{C})$  gültig. In dem Hilbert-Raum, in dem die Operatoren  $S_{ij}$  definiert sind (also in allen Darstellungsräumen irreduzibler Darstellungen von  $SU_n$ ), werden obere und untere Dreiecksmatrizen durch (3.35) dargestellt. Eine Diagonalmatrix  $d \in D_n$  wird durch

$$d \mapsto \mathcal{D}(d) = \exp \left( \sum_{j=1}^n \log(d_{jj}) S_{jj} \right) \quad (3.40)$$

dargestellt. Benutzt man (3.35) und (3.40) um alle Matrizen in (3.37) durch Operatoren im Hilbert-Raum der  $S_{ij}$  darzustellen, erhält man das zentrale Umordnungstheorem für  $GL_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^+ \left[ \prod_{k < l} \exp \left( x_{kl}^{(+)} S_{kl} \right) \right] \mathcal{N}^- \left[ \prod_{k' > l'} \exp \left( x_{k'l'}^{(-)} S_{k'l'} \right) \right] = \\ \mathcal{N}^- \left[ \prod_{k > l} \exp \left( \zeta_{kl}^{(-)}(x^{(+)}, x^{(-)}) S_{kl} \right) \right] \times \\ \exp \left( \sum_{j=1}^n \log \left( \delta_j(x^{(+)}, x^{(-)}) \right) S_{jj} \right) \times \\ \mathcal{N}^+ \left[ \prod_{k' < l'} \exp \left( \zeta_{k'l'}^{(+)}(x^{(+)}, x^{(-)}) S_{k'l'} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Auf der linken Seite von (3.41) steht das Operatorprodukt, von dem ausgegangen wurde und bei dem alle Aufsteigeoperatoren links von den Absteigeoperatoren stehen. Auf der rechten Seite von (3.41) ist die Operatorordnung so verändert, daß nun die Aufsteigeoperatoren immer rechts der Absteigeoperatoren stehen (dafür müssen zusätzliche Diagonaloperatoren eingefügt werden).

Für  $n = 3$  lauten die Funktionen  $\zeta_{ij}^{(\pm)}$  und  $\delta_i$  explizit

$$\begin{aligned}
\zeta_{21}^{(-)} &= \frac{x_{21}^{(-)} + x_{23}^{(+)} x_{31}^{(-)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \\
\zeta_{31}^{(-)} &= \frac{x_{31}^{(-)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \\
\zeta_{32}^{(-)} &= \frac{x_{32}^{(-)} + x_{31}^{(-)} x_{12}^{(+)} x_{32}^{(-)} - x_{31}^{(-)} x_{12}^{(+)}}{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)} \\
\delta_1 &= 1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)} \\
\delta_2 &= \frac{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \\
\delta_3 &= \frac{1}{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)} \\
\zeta_{23}^{(+)} &= \frac{x_{23}^{(+)} + x_{13}^{(+)} x_{21}^{(-)} x_{23}^{(+)} - x_{13}^{(+)} x_{21}^{(-)}}{1 + x_{23}^{(+)} x_{32}^{(-)} + \left(x_{13}^{(+)} - x_{12}^{(+)} x_{23}^{(+)}\right) \left(x_{31}^{(-)} - x_{21}^{(-)} x_{32}^{(-)}\right)} \\
\zeta_{13}^{(+)} &= \frac{x_{13}^{(+)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}} \\
\zeta_{12}^{(+)} &= \frac{x_{12}^{(+)} + x_{32}^{(-)} x_{13}^{(+)}}{1 + x_{12}^{(+)} x_{21}^{(-)} + x_{13}^{(+)} x_{31}^{(-)}},
\end{aligned} \tag{3.42}$$

wobei die Anordnung der Gleichungen den Operatorordnungen  $\mathcal{N}^\pm$  entspricht.

Das zentrale Umordnungstheorem in der Form (3.37) ermöglicht es, die Gruppenmultiplikation von  $GL_n(\mathbb{C})$  explizit zu berechnen (in der Parametrisierung, die durch die Gauß-Zerlegung gegeben ist – in der Parametrisierung durch die Matrixelemente  $g_{ij}$  von  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  ist die Gruppenmultiplikation einfach).

### 3.1.5 Gruppenmultiplikation und Invertierung für $GL_n(\mathbb{C})$

Unter Verwendung von (3.37) und (3.24) läßt sich die Gruppenmultiplikationsgleichung für  $GL_n(\mathbb{C})$  explizit angeben. Sind  $g'' = z''^{(-)} d'' z''^{(+)}$ ,  $g' = z'^{(-)} d' z'^{+}$  und

$g = z^{(-)} d z^{(+)}$  drei Gauß-zerlegte Matrizen in  $GL_n(\mathbb{C})$  mit

$$g'' = g' g, \quad (3.43)$$

dann lauten die Matrixelemente von  $z''^{(\pm)}$  und  $d''$

$$z''_{kl}^{(-)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k < l \\ 1 & \text{falls } k = l \\ \sum_{j=l}^k z'_{kj}^{(-)} \zeta_{jl}^{(-)}(z^{(+)}, z'^{(-)}) \frac{d'_j}{d'_l} & \text{falls } k > l \end{cases}$$

$$d''_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ d'_{kk} \delta_k(z^{(+)}, z'^{(-)}) d_{kk} & \text{falls } k = l \end{cases} \quad (3.44)$$

$$z''_{kl}^{(+)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } k > l \\ 1 & \text{falls } k = l \\ \sum_{j=k}^l z'_{kj}^{(+)} \zeta_{jl}^{(+)}(z^{(+)}, z'^{(-)}) \frac{d_l}{d_j} & \text{falls } k < l. \end{cases}$$

Die Gruppenmultiplikation (3.24) in  $Z_n^{\pm}$  und die Zerlegung (3.37) sind Spezialfälle von (3.44).

Entsprechend lassen sich für eine Matrix  $g = z^{(-)} d z^{(+)} \in GL_n(\mathbb{C})$  die Matrixelemente der inversen Matrix  $\tilde{g} \equiv g^{-1} = \tilde{z}^{(-)} \tilde{d} \tilde{z}^{(+)} = z^{(+)-1} d^{-1} z^{(-)-1}$  angeben

$$\tilde{d}_{kk} = \frac{\Delta_{kk}(z^{(+)-1} d^{-1} z^{(-)-1})}{\Delta_{k-1, k-1}(z^{(+)-1} d^{-1} z^{(-)-1})}$$

$$\tilde{z}_{kl}^{(+)} \stackrel{k \leq l}{=} \frac{\Delta_{kl}(z^{(+)-1} d^{-1} z^{(-)-1})}{\Delta_{kk}(z^{(+)-1} d^{-1} z^{(-)-1})} \quad (3.45)$$

$$\tilde{z}_{kl}^{(-)} \stackrel{k \geq l}{=} \frac{\Delta_{kl}(z^{(+)-1} d^{-1} z^{(-)-1})}{\Delta_{ll}(z^{(+)-1} d^{-1} z^{(-)-1})},$$

wobei die Funktionen  $\Delta_{kl}$  durch (3.19), (3.20) und (3.21) gegeben sind. Die Invertierung (3.25) von Dreiecksmatrizen ist ein Spezialfall von (3.45).

Im Hilbert-Raum der Operatoren  $S_{ij}$  können wir die Darstellung  $\mathcal{D}(g)$  der Matrix  $g = z^{(-)} d z^{(+)}$  unter Verwendung von (3.35) und (3.40) explizit angeben

$$g \mapsto \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(z^{(-)}) \mathcal{D}(d) \mathcal{D}(z^{(+)}). \quad (3.46)$$

Die Gruppenmultiplikation (3.44) gilt dann auch in diesen Darstellungen

$$\mathcal{D}(g'') = \mathcal{D}(g') \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(g' g). \quad (3.47)$$

### 3.1.6 Gruppenmultiplikation und Invertierung für $SU_n$

Die Lie-Gruppe  $SU_n$  der speziellen unitären Matrizen ist eine Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{C})$ , die durch ihre Determinante  $\det g = 1$  und Unitarität  $g^\dagger = g^{-1}$  bestimmt ist. Damit hat sie  $n^2 - 1$  reelle Parameter. Eine Gauß-zerlegbare Matrix  $g \in SU_n$  hat die Form

$$\begin{aligned}
g(\gamma, \phi) &= \gamma d_\phi \beta^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \gamma_{21} & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \gamma_{n3} & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{f_1}} e^{-i\phi_1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} e^{-i(\phi_2 - \phi_1)} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{f_2}{f_3}} e^{-i(\phi_3 - \phi_2)} & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \sqrt{f_{n-1}} e^{i\phi_{n-1}} \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & -\beta_{12} & -\beta_{13} + \beta_{12}\beta_{23} & \cdot & \cdot & -\beta_{1n} + \sum_{1 < k < n} \beta_{1k}\beta_{kn} - \dots \\ 0 & 1 & -\beta_{23} & \cdot & \cdot & -\beta_{2n} + \sum_{2 < k < n} \beta_{2k}\beta_{kn} - \dots \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & -\beta_{3n} + \sum_{3 < k < n} \beta_{3k}\beta_{kn} - \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Hier ist  $\gamma \in Z_n^-$  eine untere Dreiecksmatrix und  $\beta \in Z_n^+$  eine obere Dreiecksmatrix, deren Inverses  $\beta^{-1}$  (gegeben durch (3.25)) in (3.48) eingeht.

Die Bedingung  $\det g = 1$  ist in dieser Form offensichtlich erfüllt. Eine sinnvolle Wahl der freien Parameter liefern die  $\frac{n(n-1)}{2}$  komplexen Einträge der unteren Dreiecksmatrix  $\gamma \in Z_n^-$  und die  $n - 1$  (reellen) Phasen  $\phi_i$  der Diagonalmatrix  $d_\phi$  (die Phasen werden im folgenden zum Vektor  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1})$  zusammengefaßt). Eine Matrix  $g \in SU_n$  ist durch  $\gamma$  und  $\phi$  eindeutig festgelegt  $g = g(\gamma, \phi)$ . Umgekehrt ist fast



jede Matrix  $g \in SU_n$  Gauß-zerlegbar (bis auf eine Menge vom Maß null) und läßt sich somit als  $g(\gamma, \phi)$  schreiben.

Die reellen Funktionen  $f_i = f_i(\gamma, \phi)$  und die Einträge der oberen Dreiecksmatrix  $\beta = \beta(\gamma, \phi) \in Z_n^+$  sind nichttriviale Funktionen von  $\gamma$  und  $\phi$ , die sich durch die Unitaritätsbedingung ergeben. Tatsächlich lassen sich die Gleichungen  $g^\dagger g = gg^\dagger = \mathbb{I}$  mit etwas Geschick nach den  $f_i$  und  $\beta_{kl}$  auflösen. Dazu formt man die Unitaritätsbedingung zunächst um

$$\begin{aligned}
& g^\dagger g &&= \mathbb{I} \\
\iff & \beta^{-1\dagger} d_\phi^\dagger \gamma^\dagger \gamma d_\phi \beta^{-1} &&= \mathbb{I} \\
\iff & \gamma^\dagger \gamma &&= d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger \beta d_\phi^{-1} \\
\iff & \zeta \delta \zeta^\dagger &&= (d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger d_\phi^\dagger) (d_\phi^{-1\dagger} d_\phi^{-1}) (d_\phi \beta d_\phi^{-1}).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Beim Übergang von der vorletzten auf die letzte Zeile, wurde auf der linken Seite das zentrale Umordnungstheorem  $\gamma^\dagger \gamma = \zeta \delta \zeta^\dagger$  mit  $\gamma, \zeta \in Z_n^-$ ,  $\gamma^\dagger, \zeta^\dagger \in Z_n^+$  und  $\delta \in D_n$  angewandt (siehe (3.37) und (3.38)). Die Matrixelemente von  $\zeta$  und  $\delta$  sind also Funktionen der Matrixelemente von  $\gamma$  (und den dazu komplex konjugierten Matrixelementen). Auf der rechten Seite der letzten Zeile ist  $d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger d_\phi^\dagger \in Z_n^-$  eine untere Dreiecksmatrix,  $d_\phi \beta d_\phi^{-1} \in Z_n^+$  eine obere Dreiecksmatrix und  $d_\phi^{-1\dagger} d_\phi^{-1} \in D_n$  eine Diagonalmatrix. In der letzten Zeile steht also auf beiden Seiten die Gauß-Zerlegung einer Matrix. Deren Eindeutigkeit erlaubt es, die Matrizen einzeln gleichzusetzen

$$\begin{aligned}
\zeta &= d_\phi^{-1\dagger} \beta^\dagger d_\phi^\dagger \iff d_\phi^\dagger \zeta d_\phi^{\dagger-1} = \beta^\dagger \\
\zeta^\dagger &= d_\phi \beta d_\phi^{-1} \iff d_\phi^{-1} \zeta^\dagger d_\phi = \beta \\
\delta &= d_\phi^{-1\dagger} d_\phi^{-1} \iff \delta^{-1} = d_\phi d_\phi^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

In der dritten Zeile von (3.50) fallen auf der rechten Seite bei den Einträgen der Diagonalmatrix  $d_\phi d_\phi^\dagger$  alle Phasen  $\phi_i$  weg und man kann direkt nach den Funktionen  $f_i$  auflösen

$$f_i(\gamma, \bar{\gamma}) = \Delta_{ii}(\gamma^\dagger \gamma) \tag{3.51}$$

mit den durch (3.19) gegebenen Funktionen  $\Delta_{ii}$ . Es ist sinnvoll, die Funktionen  $f_i = f_i(\gamma, \bar{\gamma})$  als Funktionen von  $\gamma$  und dessen komplex konjugierten  $\bar{\gamma}$  zu betrachten. Das ermöglicht es, die Funktionen  $f_i$  analytisch fortzusetzen, indem man  $\gamma$  und  $\bar{\gamma} \equiv \gamma'$  als unabhängige komplexe Variable betrachtet. Die Gleichung (3.51) ist auch für  $i = n$  gültig

$$f_n(\gamma, \bar{\gamma}) = \Delta_{nn}(\gamma^\dagger \gamma) = \det \gamma^\dagger \gamma = 1. \tag{3.52}$$

Die erste und zweite Zeile von (3.50) enthalten dieselbe Information (die Gleichungen sind hermitesch konjugiert); aus der zweiten Zeile lassen sich direkt die nichttrivialen

Matrizelemente  $\beta_{ij}$  ( $i < j$ ) ablesen

$$\beta_{ij}(\gamma, \phi) \stackrel{i < j}{=} \Delta_{ij}(\gamma^\dagger \gamma) \sqrt{\frac{f_{j-1}}{f_i f_{i-1} f_j}} \exp[i(\phi_i - \phi_{i-1} - \phi_j + \phi_{j-1})] \quad (3.53)$$

mit den in (3.21) gegebenen Funktionen  $\Delta_{ij}$ . Für die Gültigkeit dieser Gleichung muß man formal  $f_0 = 1$  und  $\phi_0 = \phi_n = 0$  setzen.

Sind  $g''(\gamma'', \phi'')$ ,  $g'(\gamma', \phi')$ ,  $g(\gamma, \phi)$  drei Matrizen aus  $SU_n$  mit

$$g''(\gamma'', \phi'') = g'(\gamma', \phi') g(\gamma, \phi), \quad (3.54)$$

dann ergeben sich die Funktionen

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \gamma''(\gamma', \phi'; \gamma, \phi) \\ \phi'' &= \phi''(\gamma', \phi'; \gamma, \phi) \end{aligned} \quad (3.55)$$

aus den Gruppenmultiplikationsgleichungen (3.44). Durch die Unitarität gilt für die Inversion einer  $SU_n$ -Matrix

$$[g(\gamma, \phi)]^{-1} = [g(\gamma, \phi)]^\dagger = g(\beta^{-1\dagger}, -\phi). \quad (3.56)$$

Im Hilbert-Raum der Leiteroperatoren  $S_{ij}$  ist eine Darstellung von  $g(\gamma, \phi) \in SU_n$  durch

$$g(\gamma, \phi) \longmapsto \mathcal{D}(g(\gamma, \phi)) = \mathcal{D}(\gamma) \mathcal{D}(d_\phi) \mathcal{D}(\beta^{-1}) \quad (3.57)$$

mit  $\mathcal{D}(g'g) = \mathcal{D}(g') \mathcal{D}(g)$  gegeben.

### 3.1.7 Invariante 1-Formen und das invariante Maß für $GL_n(\mathbb{C})$ und $SU_n$

Für eine Matrixgruppe  $G \subset GL_n(\mathbb{C})$  kann man eine Matrix von 1-Formen

$$\mathbf{\Omega} = g^{-1} \mathbf{d}g \quad (3.58)$$

mit  $g \in G$  definieren [86].<sup>1</sup> Für  $GL_n(\mathbb{C})$  erhält man so  $n^2$  linear unabhängige komplexe invariante 1-Formen. Betrachtet man Real- und Imaginärteil getrennt, erhält man  $2n^2$  reelle invariante 1-Formen – entsprechend der reellen Dimension von  $GL_n(\mathbb{C})$ . Bildet man äußere Produkte der invarianten 1-Formen, erhält man eine Basis aller linksinvarianten Formen des (reellen) Grades  $1, 2, \dots, 2n^2$ . Das invariante Maß (das Haar-Maß) von  $GL_n(\mathbb{C})$  läßt sich durch das äußere Produkt aller unabhängigen invarianten 1-Formen bilden. Entsprechendes gilt für die Untergruppen von  $GL_n(\mathbb{C})$

<sup>1</sup> Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Matrizelemente von  $\mathbf{\Omega}$  linksinvariante 1-Formen sind. Unter der Abbildung  $g \mapsto hg$  gilt  $g^{-1} \mathbf{d}g \mapsto (hg)^{-1} \mathbf{d}(hg) = g^{-1} h^{-1} h \mathbf{d}g = g^{-1} \mathbf{d}g$ .

– dann sind zwar nicht mehr alle Matrixelemente von  $\Omega$  linear unabhängig, aber  $\Omega$  enthält immer eine Basis linear unabhängiger 1-Formen.

Für  $GL_n(\mathbb{C})$  kann man das Haar-Maß  $\mu_{GL_n(\mathbb{C})}$  direkt angeben (und leicht nachprüfen)

$$\mu_{GL_n(\mathbb{C})} = \mathcal{C} \frac{1}{|\det g|^{2n}} \mathbf{d}^{2n^2} g. \quad (3.59)$$

Hier ist  $\mathcal{C} \neq 0$  eine beliebige reelle Konstante,  $g = \{g_{ij}\} \in GL_n(\mathbb{C})$  und

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{2n^2} g &= \mathbf{d}\operatorname{Re} g_{11} \wedge \mathbf{d}\operatorname{Im} g_{11} \wedge \mathbf{d}\operatorname{Re} g_{12} \wedge \mathbf{d}\operatorname{Im} g_{12} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\operatorname{Re} g_{nn} \wedge \mathbf{d}\operatorname{Im} g_{nn} \\ &= \frac{1}{-2i} \mathbf{d}g_{11} \wedge \mathbf{d}\overline{g_{11}} \wedge \frac{1}{-2i} \mathbf{d}g_{12} \wedge \mathbf{d}\overline{g_{12}} \wedge \cdots \wedge \frac{1}{-2i} \mathbf{d}g_{nn} \wedge \mathbf{d}\overline{g_{nn}}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die mit der Gauß-Zerlegung  $g = z^{(-)} dz^{(+)}$  verbundene Jacobimatrix  $\frac{\partial(g_{ij})}{\partial(z_{ij}^{(-)}; d_{ii}; z_{ij}^{(+)})}$  läßt sich mit der Hilfe der Eigenschaften von Differentialformen leicht berechnen. Das Haar-Maß von  $GL_n(\mathbb{C})$  in der Gaußzerlegung hat die Form

$$\mu_{GL_n(\mathbb{C})} = \mathcal{C} \prod_{j=1}^n |d_j|^{2n-4j} \mathbf{d}^{2n} d \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(-)} \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(+)} \quad (3.61)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{2n} d &= \mathbf{d}^2 d_{11} \wedge \mathbf{d}^2 d_{22} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2 d_{nn} \\ \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(-)} &= \mathbf{d}^2 z_{21}^{(-)} \wedge \mathbf{d}^2 z_{32}^{(-)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2 z_{n1}^{(-)} \\ \mathbf{d}^{n(n-1)} z^{(+)} &= \mathbf{d}^2 z_{12}^{(+)} \wedge \mathbf{d}^2 z_{23}^{(+)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2 z_{1n}^{(+)} \end{aligned} \quad (3.62)$$

und  $\mathbf{d}^2 z = \mathbf{d}\operatorname{Re} z \wedge \mathbf{d}\operatorname{Im} z$ .

Aus dieser Form des Haar-Maßes für  $GL_n(\mathbb{C})$  läßt sich durch Integration das Haar-Maß von  $SU_n$  bestimmen. In Abschnitt 3.1.6 wurde die Parametrisierung von  $SU_n$ -Matrizen  $g = \gamma d_\phi \beta^{-1}$  durch untere Dreiecksmatrizen  $\gamma$  und  $n-1$  Phasen  $\phi$  von  $d_\phi$  eingeführt (siehe Gleichungen (3.48), (3.51) und (3.53)). In diesen Parametern hat das Haar-Maß von  $SU_n$  die Form

$$\mu_{SU_n} = \mathcal{F}(\gamma, \phi) \mathbf{d}^{n-1} \phi \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)} \gamma \quad (3.63)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{n-1} \phi &= \mathbf{d}\phi_1 \wedge \mathbf{d}\phi_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\phi_{n-1} \\ \mathbf{d}^{n(n-1)} \gamma &= \mathbf{d}^2 \gamma_{21} \wedge \mathbf{d}^2 \gamma_{32} \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}^2 \gamma_{n1}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Funktion  $\mathcal{F}(\gamma, \phi)$  erhält man aus der Integration über die  $2n^2$ -dimensionale  $\delta$ -Funktion

$$\begin{aligned} & \delta^{2n^2}(z^{(-)} d z^{(+)} - \gamma d_\phi \beta^{-1}) = \\ & = \delta^{2n^2-1}(g(\gamma, \phi)^\dagger g(\gamma, \phi) - \mathbb{I}) \delta(\det g - 1) = \\ & = \delta^{n(n-1)}(z^{(-)} - \gamma) \delta^{2n}(d - d_\phi) \delta^{n(n-1)}(z^{(+)} - \beta^{-1}) \end{aligned} \quad (3.65)$$

(mit  $\delta^2(z) = \delta(z)\delta(\bar{z})$ ) aus dem Haar-Maß von  $GL_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} F(\gamma, \phi) & = \mathcal{C} \int_{GL_n(\mathbb{C})} \delta^{2n^2}(z^{(-)} d z^{(+)} - \gamma d_\phi \beta^{-1}) \boldsymbol{\mu}_{GL_n(\mathbb{C})} \\ & = \mathcal{C} \prod_{j=1}^{n-1} f_j(\gamma, \bar{\gamma})^{-2}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Funktionen  $f_j$  sind in Gleichung (3.51) gegeben. Die Integration von der ersten auf die zweite Zeile von (3.66) ist am einfachsten, wenn man zunächst über die Diagonalmatrix  $d$  integriert. Der verbleibende Integrand ist dann nur noch von  $\gamma$  abhängig, so daß die weiteren Integrationen keinen zusätzlichen Faktor mehr liefern. Es ist bei der kompakten Gruppe  $SU_n$  sinnvoll, das Haar-Maß zu normieren

$$\int_{SU_n} \boldsymbol{\mu}_{SU_n} = 1. \quad (3.67)$$

Dazu muß

$$\mathcal{C}^{-1} = \int_{SU_n} \mathcal{F}(\gamma, \bar{\gamma}) \mathbf{d}^{n-1} \phi \wedge \mathbf{d}^{n(n-1)} \gamma = (2\pi)^{n-1} \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2! \dots (n-1)!} \quad (3.68)$$

gesetzt werden [87].

## 3.2 Die irreduziblen $SU_n$ -Darstellungen

### 3.2.1 Die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Die Matrizen  $\tau_{ij}$  bilden eine vollständige Basis des Vektorraums  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  (der Lie-Algebra aller komplexen  $n \times n$  Matrizen). Mit dem Skalarprodukt

$$\langle A|B \rangle = \text{Spur } A^\dagger B \quad (3.69)$$

wird  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  ein Hilbert-Raum, und die Matrizen  $\{\tau_{ij}\}$  werden zu einer Orthonormalbasis.<sup>2</sup> Um den Vektorcharakter der Matrizen hervorzuheben, wird im folgenden die Schreibweise  $|\tau_{ij}\rangle \equiv \tau_{ij}$  benutzt.

In  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  kann man die Operatoren  $S_{ij}^{\text{ad}}$  durch

$$S_{ij}^{\text{ad}}|\tau_{kl}\rangle = |[\tau_{ij}, \tau_{kl}]\rangle \quad (3.70)$$

definieren. Man rechnet leicht nach, daß die Operatoren  $S_{ij}^{\text{ad}}$  die gleichen Vertauschungsregeln erfüllen wie die Matrizen  $\tau_{ij}$ . Sie spannen eine Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  auf, wobei  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  gleichzeitig der Darstellungsraum (d.h. der Vektorraum) ist, auf dem die Darstellung wirkt. Man nennt diese Darstellung die **adjungierte Darstellung** von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Es läßt sich zeigen, daß es eine irreduzible Darstellung ist [70–72], d.h. alle Operatoren, die mit allen  $S_{ij}^{\text{ad}}$  vertauschen sind proportional zum Identitätsoperator (Schurs Lemma). Das hermitesch konjugierte eines Operators  $S_{ij}^{\text{ad}}$  ist gegeben durch

$$S_{ij}^{\text{ad}\dagger} = S_{ji}^{\text{ad}}. \quad (3.71)$$

Jede irreduzible  $SU_n$ -Darstellung induziert eine Darstellung der Matrizen  $\tau_{ij}$  durch Operatoren  $S_{ij}$ , so daß (3.71) gilt. Die adjungierte Darstellung ist von großer Bedeutung für die Darstellungstheorie. Hier sollen nur die Eigenschaften und Begriffe vorgestellt werden, auf die im Laufe der Untersuchung immer wieder zurückgegriffen wird.

### 3.2.2 Die Cartan-Zerlegung von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ und die Wurzeln der adjungierten Darstellung

Im Abschnitt 2.1.2 wurde im Prinzip die Cartan-Zerlegung von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  eingeführt, d.h. die Zerlegung von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  in die Lie-Algebren  $\mathfrak{d}_n$  der Besetzungszahloperatoren,  $\mathfrak{z}_n^-$  der Absteigeoperatoren und  $\mathfrak{z}_n^+$  der Aufsteigeoperatoren. Die von ihnen erzeugten Lie-Gruppen  $D_n, Z_n^+$  und  $Z_n^-$  wurden in diesem Kapitel ausführlich im Zusammenhang mit der Gauß-Zerlegung einer Matrix  $g \in GL_n(\mathbb{C})$  behandelt. Auf algebraischer

<sup>2</sup> Dieses Skalarprodukt ist im wesentlichen äquivalent zur Killing-Form, siehe Anhang A.

Ebene führt diese Zerlegung zu neuen Einsichten, die hier kurz zusammengefaßt werden sollen.

Die Algebra  $\mathfrak{d}_n$  der Diagonalmatrizen heißt auch **Cartan-Algebra** von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ . Sie ist die größte abelsche Untereralgebra von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  (d.h. die größte Untereralgebra, so daß alle ihre Elemente untereinander vertauschen). In der adjungierten Darstellung wird die Cartan-Algebra durch die hermiteschen Operatoren  $S_{ii}^{\text{ad}}$  aufgespannt. Da die  $S_{ii}^{\text{ad}}$  untereinander vertauschen, gibt es eine Vektorraumbasis von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , so daß alle  $S_{ii}^{\text{ad}}$  gleichzeitig diagonal werden. Eine einfache Rechnung zeigt, daß diese Basis bereits durch die Basis  $\{|\tau_{ij}\rangle\}$  gegeben ist

$$S_{ii}^{\text{ad}}|\tau_{kl}\rangle = (\delta_{ik} - \delta_{il})|\tau_{kl}\rangle. \quad (3.72)$$

Da der Operator  $N^{\text{ad}} = \sum_{i=1}^n S_{ii}^{\text{ad}}$  mit allen Operatoren  $S_{kl}^{\text{ad}}$  vertauscht, ist es sinnvoll, den Vektorraum  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  auf spurlose Kombinationen der  $|\tau_{ij}\rangle$  zu beschränken. Der verbleibende Vektorraum ist dann  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  (also die Lie-Algebra aller spurlosen komplexen  $n \times n$ -Matrizen).

Im folgenden werden zwei Basen  $\mathcal{B}_\rho = \{|\tau_{ij}\rangle (i \neq j); |\rho_k\rangle (k = 1, 2, \dots, n-1)$  und  $\mathcal{B}_\kappa = \{|\tau_{ij}\rangle (i \neq j); |\kappa_k\rangle (k = 1, 2, \dots, n-1)$  mit

$$\begin{aligned} |\rho_k\rangle &= |\tau_{k,k}\rangle - |\tau_{k+1,k+1}\rangle & k = 1, 2, \dots, n-1 \\ |\kappa_k\rangle &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left( \sum_{l=1}^k |\tau_{ll}\rangle - k|\tau_{kk}\rangle \right) & k = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (3.73)$$

benutzt. Die Basis  $\mathcal{B}_\kappa$  ist eine Orthonormalbasis (im Gegensatz zu  $\mathcal{B}_\rho$  – die Vektoren  $|\rho_k\rangle$  sind weder normiert noch orthogonal) und hat daher im folgenden die größere Bedeutung für die Darstellungstheorie. Physikalisch würde man bei der Beschreibung von  $n$ -Niveau-Atomen vielleicht der Basis  $\mathcal{B}_\rho$  den Vorzug geben, weil die Matrizen  $|\rho_k\rangle$  die Inversion von zwei Atomniveaus beschreiben. Zwischen den Matrizen  $|\rho_k\rangle$  und  $|\kappa_l\rangle$  besteht der Zusammenhang

$$|\rho_k\rangle = \sqrt{\frac{k+1}{k}}|\kappa_k\rangle - \sqrt{\frac{k-1}{k}}|\kappa_{k-1}\rangle. \quad (3.74)$$

Schränkt man die Cartan-Algebra  $\mathfrak{d}_n$  von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  entsprechend ein, erhält man die Cartan-Algebra  $\mathfrak{c}_n$  von  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ . Die Operatoren  $S_{ij}$ , die in einem beliebigen Darstellungsraum einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung wirken, lassen sich entsprechend auf eine (irreduzible) Darstellung der Lie-Algebra  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  einschränken

$$\begin{aligned} R_k &= S_{kk} - S_{k+1,k+1} \\ K_k &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left( \sum_{l=1}^k S_{ll} - kS_{kk} \right) \\ R_k &= \sqrt{\frac{k+1}{k}}K_k - \sqrt{\frac{k-1}{k}}K_{k-1}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Da die Operatoren  $K_k$  alle untereinander vertauschen und hermitesch sind, gibt es in jedem Darstellungsraum  $V$  (mit einem Hilbert-Raum  $V$ ) eine Basis, in der sie alle gleichzeitig diagonal werden. Ist  $|x\rangle$  ein Vektor aus dieser Basis, gilt also

$$K_k|x\rangle = \nu_k(x)|x\rangle \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.76)$$

mit reellen Eigenwerten  $\nu_k$ . Die Eigenwerte lassen sich zu Vektoren

$$\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x), \dots, \nu_{n-1}(x)) \quad (3.77)$$

zusammenfassen, die man die **Gewichte** der Darstellung nennt. Entsprechend bezeichnet man die Eigenvektoren zur Cartan-Algebra als **Gewichtsvektoren**. Im allgemeinen sind die Gewichte jedoch entartet, d.h. es gibt mehr als einen Gewichtsvektor mit dem gleichen Gewicht  $\nu$ .

Von besonderer Bedeutung sind die Gewichte  $\alpha$  der adjungierten Darstellung (die adjungierte Darstellung ist irreduzibel). Hier bilden die Basis  $\mathcal{B}_\kappa$  eine Basis von Gewichtsvektoren. Für die Diagonalmatrizen  $|\kappa_k\rangle$  verschwinden die Gewichte identisch

$$\alpha(\kappa_k) = (0, 0, \dots, 0). \quad (3.78)$$

Die nichtverschwindenden Gewichte der adjungierten Darstellung heißen **Wurzeln** von  $\mathfrak{su}_n$  (bzw.  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ). Die Wurzeln  $\alpha(\tau_{ij})$  für  $i < j$  heißen **positive Wurzeln** und entsprechend für  $i > j$  **negative Wurzeln**. Die positiven Wurzeln gehören zu Matrizen  $|\tau_{ij}\rangle$  aus der Lie-Algebra der Aufsteigeoperatoren  $\mathfrak{z}_n^+$ . Die Positivität einer Wurzel  $\alpha(\tau_{ij})$  kann man ihr direkt ansehen: ihr letztes nichtverschwindendes Element ist positiv.

Eine positive Wurzel  $\alpha$  heißt **einfach**, wenn sie sich nicht als Summe  $\alpha_1 + \alpha_2$  anderer positiver Wurzeln darstellen läßt. Es gibt  $n-1$  einfache Wurzeln

$$\alpha^{(k)} = (\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_{n-1}^{(k)}) \equiv \alpha(\tau_{k,k+1}), \quad (3.79)$$

die zu den Matrizen  $|\tau_{k,k+1}\rangle$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) gehören, und deren Elemente durch

$$\alpha_{(k),l}^{(K)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } l < k-1 \\ -\sqrt{\frac{k-1}{k}} & \text{falls } l = k-1 \\ \sqrt{\frac{k+1}{k}} & \text{falls } l = k \\ 0 & \text{falls } l > k \end{cases} \quad (3.80)$$

gegeben sind. Alle anderen positiven Gewichte ergeben sich aus

$$\alpha(\tau_{k,k+l+1}) = \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \alpha^{(k)} \quad (3.81)$$

und die negativen Gewichte aus

$$\alpha(\tau_{kl}) = -\alpha(\tau_{lk}). \quad (3.82)$$

### 3.2.3 Die Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen von $SU_n$ durch ihr höchstes Gewicht

In jedem Darstellungsraum  $V$  einer irreduziblen Darstellung von  $SU_n$  gibt es einen Gewichtsvektor **höchsten Gewichts**  $|\mu\rangle$  mit  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1})$ , der durch

$$\mathfrak{J}_n^+ |\mu\rangle = 0 \iff S_{ij} |\mu\rangle = 0 \quad \text{für alle } i < j \quad (3.83)$$

bis auf einen Faktor  $a \in \mathbb{C}$  eindeutig definiert ist. Das höchste Gewicht legt eine irreduzible Darstellung von  $SU_n$  eindeutig fest. Alle anderen Gewichte der Darstellung lassen sich durch die Anwendung von Absteigeoperatoren und Vertauschungsregeln bestimmen. Auch die Entartung von Gewichten läßt sich auf diese Weise bestimmen. Nicht jedes  $n - 1$ -Tupel von reellen Zahlen ist das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung von  $SU_n$ . Die erlaubten höchsten Gewichte liegen auf einem  $n - 1$ -dimensionalen Gitter, daß von den sogenannten **Fundamentalgewichten**  $\mu^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}, \dots, \mu_{n-1}^{(k)})$  ( $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ) aufgespannt wird. Die Fundamentalgewichte sind durch die einfachen Wurzeln eindeutig bestimmt

$$\frac{2\mu^{(k)} \cdot \alpha^{(l)}}{\alpha^{(l)} \cdot \alpha^{(l)}} = \delta_{kl} \quad (3.84)$$

(mit  $\mu \cdot \alpha = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \alpha_j$  als Skalarprodukt). Die Lösung dieser Gleichungen gibt

$$\mu_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i < k \\ \frac{k}{\sqrt{i(i+1)}} & \text{falls } i \geq k. \end{cases} \quad (3.85)$$

Die  $n - 1$  irreduziblen Darstellungen von  $SU_n$  mit den Fundamentalgewichten  $\mu^{(k)}$  als höchsten Gewichten nennt man **Fundamentaldarstellungen**. Der Vektor höchsten Gewichts ist ein Eigenvektor zu den Diagonaloperatoren  $R_i$ . In den Fundamentaldarstellungen sind die zugehörigen Eigenwerte besonders einfach

$$R_k |\mu^{(l)}\rangle = \delta_{kl} |\mu^{(l)}\rangle. \quad (3.86)$$

Eine beliebige irreduzible Darstellung läßt sich nun eindeutig durch ein  $n - 1$ -Tupel  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}]$  von ganzen Zahlen  $\lambda_i \geq 0$  charakterisieren. Das höchste Gewicht der durch  $\lambda$  gegebenen Darstellung lautet

$$\mu^{(\lambda)} = \lambda_1 \mu^{(1)} + \lambda_2 \mu^{(2)} + \dots + \lambda_{n-1} \mu^{(n-1)} \quad (3.87)$$

und die Eigenwerte der Diagonaloperatoren  $R_k$  im Vektor höchsten Gewichts lauten gerade

$$R_k |\mu^{(\lambda)}\rangle = \lambda_k |\mu^{(\lambda)}\rangle. \quad (3.88)$$



Eine irreduzible  $SU_n$ -Darstellung heißt **entartet**, wenn mindestens eines der  $\lambda_i$  verschwindet, entsprechend heißt sie **nichtentartet**, wenn alle  $\lambda_i$  größer als null sind.

Aus (3.88) ergibt sich zusammen mit der Konvention  $C_1 = \sum_{k=1}^n S_{kk} = 0$

$$S_{kk}|\mu\rangle = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{j}{n} \lambda_{n-j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} \lambda_j. \quad (3.89)$$

### 3.2.4 Ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren

In Abschnitt 2.2.3 wurden die Casimir-Operatoren  $C_k = \text{Spur } \mathcal{S}^k$  eingeführt ( $\mathcal{S}$  ist die Matrix, die aus den Operatoren  $S_{ij}$  gebildet wird). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll auch hier  $C_1 = \sum_{l=1}^n S_{ll} = 0$  gelten (siehe Gleichungen (2.19) und (2.27)). Die Casimir-Operatoren vertauschen mit allen Operatoren  $S_{ij}$ , daher müssen sie nach Schurs Lemma in jeder irreduziblen Darstellung proportional zur Identität sein, wobei der Faktor eine Funktion des  $n - 1$ -Tupels  $\lambda$  ist

$$C_k = \hat{c}_k(\lambda)\mathbb{I}. \quad (3.90)$$

Die  $C_k$  haben für  $SU_n$  eine ähnliche Bedeutung wie das Betragsquadrat des Drehimpulses für die quantenmechanische Drehgruppe  $SU_2$  (siehe Abschnitt 2.2.3). Es sind Konstanten der Bewegung für jeden Hamilton-Operator für  $n$ -Niveau-Atome mit kollektiver Kopplung. Als Observable messen sie, zu welcher irreduziblen Darstellung ein Zustand gehört – aus der Kenntnis aller Werte der Casimir-Operatoren  $C_k$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ) läßt sich das höchste Gewicht der Darstellung ermitteln.

In einer  $SU_n$ -Darstellung  $\lambda$  sind die Gewichte  $\nu$  im allgemeinen entartet (eine Ausnahme bilden die Fundamentaldarstellungen). Um einen Basiszustand eindeutig durch Quantenzahlen festzulegen, braucht man also zusätzlich zu den Operatoren  $K_l$  aus der Cartan-Algebra weitere Operatoren, die mit der Cartan-Algebra vertauschen und deren Quantenzahlen den Zustand eindeutig festlegen können. Diese weiteren Operatoren können nicht linear in  $S_{ij}$  sein, weil die Cartan-Algebra bereits die größte abelsche Algebra aus solchen Linearkombinationen ist. Um eine sinnvolle Wahl für solche Operatoren zu finden, betrachtet man eine Kette von Unteralgebren von  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \supset \mathfrak{gl}_{n-1}(\mathbb{C}) \supset \dots \supset \mathfrak{gl}_1(\mathbb{C}). \quad (3.91)$$

Dabei wird  $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) durch die Operatoren  $S_{ij}$  mit  $i, j \leq k$  aufgespannt. Es gilt

$$[K_l, \mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})] = 0 \quad \text{für } l \geq k. \quad (3.92)$$

Daraus ergibt sich eine Kette von Untergruppen

$$SU_n \supset U_{n-1} \supset U_{n-2} \cdots \supset U_1, \quad (3.93)$$

wenn man in  $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{C})$  nur antihermitesche Kombinationen zuläßt und die Exponentialfunktion anwendet. Eine irreduzible  $SU_n$ -Darstellung wird im allgemeinen reduzibel, wenn man die Untergruppe  $U_{n-1} \subset SU_n$  betrachtet, d.h man kann sie bezüglich  $U_{n-1}$  in irreduzible Darstellungen zerlegen. Dieser Prozeß setzt sich fort, bis man bei irreduziblen Darstellungen von  $U_1$  ankommt, die alle eindimensional sind. Man kann zeigen, daß diese Kette von Untergruppen mit ihren irreduziblen Darstellungen einen Gewichtsvektor einer  $SU_n$ -Darstellung eindeutig festlegen.

Ein vollständiger Satz von vertauschbaren Operatoren enthält  $\frac{n(n-1)}{2}$  Operatoren, deren Quantenzahlen einen Zustand eindeutig festlegen. Das entspricht der Anzahl von klassischen Freiheitsgraden, die eine Dynamik von klassischen  $SU_n$ -Observablen generisch hat (siehe Kapitel 5). Ein solcher Satz ist durch die Casimir-Operatoren der Untergruppen  $U_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ )

$$C_j^{(k)} \equiv \text{Spur } \mathcal{S}_{(k)}^j \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.94)$$

gegeben, wobei die Matrix  $\mathcal{S}_{(k)}$  durch Abschneiden nach der  $k$ -ten Zeile und Spalte aus  $\mathcal{S}$  entsteht. Man beachte, daß  $C_1^{(k)}$  im allgemeinen nicht verschwindet, also eine nichttriviale Quantenzahl liefert. Die Anzahl der Casimir-Operatoren  $C_j^{(k)}$  ergibt gerade die notwendige Anzahl von  $\frac{n(n-1)}{2}$  Operatoren. Außerdem vertauschen sie durch Konstruktion.

Die Casimir-Operatoren  $C_j^{(k)}$  für  $k = 1, 2, \dots, n-1$  legen auch das höchste Gewicht der  $U_k$ -Darstellung fest, zu der ein Zustand gehört (das höchste Gewicht einer  $U_k$ -Darstellung ist durch die  $k$  Eigenwerte von  $S_{ll}$ ,  $l = 1, 2, \dots, k$  im Zustand höchsten Gewichts definiert; der Zustand höchsten Gewichts ist wie bei  $SU_k$ -Darstellungen definiert).

### 3.2.5 Die Gelfand-Zetlin-Basis

Bisher wurde ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $C_1 = \sum_{k=1}^n S_{kk} = 0$  gesetzt (siehe 2.2.3). In diesem und im nächsten Abschnitt wird von dieser Konvention abgewichen. Es wird eine irreduzible  $SU_n$ -Darstellung betrachtet, die durch das  $n-1$ -Tupel  $\lambda$  festgelegt ist. In dieser Darstellung setzen wir  $C_1 = \sum_{k=1}^{n-1} k\lambda_k$ .

*I. M. Gelfand* und *M. L. Zetlin* haben ein Schema entworfen, das die Eigenzustände zu den Casimir-Operatoren  $C_j^{(k)}$  beschreibt. Ein Basiszustand im Darstellungsraum  $V_\lambda$  wird durch  $\frac{n(n+1)}{2}$  Zahlen  $m_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, n; i \leq j$ ) beschrieben, die man in das Gelfand-Zetlin-Schema (GZ-Schema)

$$|m\rangle \equiv \begin{vmatrix} m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \dots & m_{nn} \\ m_{1,n-1} & m_{2,n-1} & \dots & m_{n-1,n-1} & \\ & \dots & \dots & & \\ & & m_{12} & m_{22} & \\ & & & m_{11} & \end{vmatrix} \quad (3.95)$$

einträgt. Die erste Zeile  $m_{1n}, m_{2n}, \dots, m_{nn}$  eines GZ-Schemas ist für alle Zustände einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung identisch. Sie gibt die Eigenwerte der Operatoren  $S_{kk}, k = 1, 2, \dots, n$  im Zustand  $|\mu\rangle$  höchsten Gewichts an

$$S_{kk}|\mu\rangle = m_{kn}|\mu\rangle. \quad (3.96)$$

Das  $n - 1$ -Tupel  $\lambda$ , mit dem eine irreduzible Darstellung charakterisiert wird, erhält man aus den  $m_{kn}$  aus den Differenzen

$$\lambda_k = m_{kn} - m_{k+1,n}. \quad (3.97)$$

Zusammen mit dem Wert von  $C_1 = \sum_{k=1}^n m_{kn}$  ergibt sich die erste Zeile des GZ-Schemas

$$m_{kn} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{n-k} \lambda_l & \text{falls } k > 1 \\ 0 & \text{falls } k = 1. \end{cases} \quad (3.98)$$

Wie in Abschnitt 3.2.4 beschrieben, ist die irreduzible  $SU_n$ -Darstellung bezüglich ihrer Untergruppe  $U_{n-1}$  reduzibel, man kann sie also als eine Summe von irreduziblen  $U_{n-1}$ -Darstellungen ansehen. Für Basisvektoren  $|m\rangle$  innerhalb einer vorkommenden  $U_{n-1}$ -Darstellung ist die zweite Zeile des GZ-Schemas identisch. Die Werte  $m_{1,n-1}, m_{2,n-1}, \dots, m_{n-1,n-1}$  sind gegeben durch den Zustand höchsten Gewichts  $|\mu_{n-1}\rangle$  innerhalb einer  $U_{n-1}$ -Darstellung

$$S_{kk}|\mu_{n-1}\rangle = m_{k,n-1}|\mu_{n-1}\rangle \quad k = 1, 2, \dots, n - 1. \quad (3.99)$$

Die Werte  $m_{k,n-1}$  mit  $k = 1, \dots, n - 1$  legen die vorkommenden  $U_{n-1}$ -Darstellungen eindeutig fest (d.h. jedes höchste Gewicht kommt genau einmal vor). Die erlaubten Werte von  $m_{k,n-1}$  sind alle ganzen Zahlen

$$m_{k,n} \geq m_{k,n-1} \geq m_{k+1,n}, \quad (3.100)$$

d.h.  $m_{k,n-1}$  liegt zwischen den Werten, die im GZ-Schema eine Zeile darüber liegen. Für die dritte Zeile des GZ-Schemas hält man die Werte der ersten zwei Zeilen fest, d.h. man betrachtet eine  $U_{n-1}$ -Darstellung, die jetzt ihrerseits in  $U_{n-2}$ -Darstellungen zerfällt. Das setzt sich fort, bis man am unteren Ende des Schemas angelangt ist, d.h. bei den eindimensionalen  $U_1$ -Darstellungen, die genau aus einem GZ-Schema  $|m\rangle$  mit

$$S_{11}|m\rangle = m_{11}|m\rangle \quad (3.101)$$

bestehen.

In der  $l$ -ten Zeile des GZ-Schemas sind die erlaubten (ganzzahligen) Werte von  $m_{kl}, k \leq l$  durch die Werte der darüberliegenden Zeile begrenzt

$$m_{k,l-1} \geq m_{kl} \geq m_{k+1,l-1}. \quad (3.102)$$

Da jedes GZ-Schema genau einmal vorkommt, läßt sich damit (im Prinzip) die Dimension einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung abzählen.

Der Zustand höchsten Gewichts  $|\mu\rangle$  ist durch das GZ-Schema

$$\left| \begin{array}{cccccccc} m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \dots & \dots & \dots & m_{nn} \\ & m_{1,n} & m_{2n} & \dots & m_{n-1,n} & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & m_{1n} & m_{2n} & & \\ & & & & m_{1n} & & \end{array} \right| \quad (3.103)$$

gegeben.

### 3.2.6 Die Matrixelemente der Leiteroperatoren

Für zwei GZ-Basiszustände  $|m\rangle$  und  $|m'\rangle$  lassen sich die Matrixelemente  $\langle m'|S_{kl}|m\rangle$  explizit ausrechnen. Dabei reicht es aus, sich auf die Operatoren  $S_{kk}, k = 1, 2, \dots, n$  und  $S_{k-1,k}, k = 2, 3, \dots, n$  zu beschränken. Die Matrixelemente von  $S_{k,k-1}$  ergeben sich dann aus

$$\langle m'|S_{k,k-1}|m\rangle = \overline{\langle m|S_{k-1,k}|m'\rangle}. \quad (3.104)$$

Alle restlichen Matrizen lassen sich als (mehrfache) Kommutatoren darstellen, zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} S_{k-2,k} &= [S_{k-2,k-1}, S_{k-1,k}] \\ S_{k-3,k} &= [S_{k-3,k-2}, [S_{k-2,k-1}, S_{k-1,k}]]. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Die Matrizen von  $S_{kk}$  sind diagonal

$$S_{kk}|m\rangle = (r_k - r_{k-1})|m\rangle \quad (3.106)$$

mit

$$r_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0 \\ \sum_{j=1}^k m_{jk} & \text{für } k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3.107)$$

Die Wirkung von  $S_{k-1,k}$  ist nicht diagonal

$$S_{k-1,k}|m\rangle = \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-1}^j(m) |m_{k-1}^j\rangle. \quad (3.108)$$

Dabei ist  $|m_{k-1}^{\hat{j}}\rangle$  das GZ-Schema, das sich aus  $|m\rangle$  ergibt, wenn man das Element  $m_{j,k-1}$  in der  $k-1$ -sten Zeile durch  $m_{j,k-1} + 1$  ersetzt. Dabei können im Prinzip unerlaubte GZ-Schemen entstehen – in diesem Fall verschwindet das Matrixelement  $b_{k-1}^j(m)$ . Die nichtverschwindenden Matrixelemente lauten

$$\begin{aligned} b_{k-1}^j(m) &= \langle m_{k-1}^j | S_{k-1,k} | m \rangle \\ &= \left[ \frac{\prod_{i=1}^k (l_{ik} - l_{j,k-1}) \prod_{i=1}^{k-2} (l_{i,k-2} - l_{j,k-1} - 1)}{\prod_{i \neq j} (l_{i,k-1} - l_{j,k-1}) (l_{i,k-1} - l_{j,k-1} - 1)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.109)$$

mit

$$l_{ik} = m_{ik} - i \quad (3.110)$$

und der Konvention, daß die Produkte in (3.109) gleich eins gesetzt werden, sobald keine Faktoren auftreten.

Um zurück zu der Konvention  $C_1 = \sum_{k=1}^n S_{kk} = 0$  zu gelangen, müssen die Diagonaloperatoren gemäß

$$S_{kk} \mapsto S'_{kk} = S_{kk} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \lambda_j \mathbb{I} \quad (3.111)$$

verschoben werden. Die Striche an  $S'_{kk}$  werden im folgenden weggelassen. Durch diese Ersetzung werden die Matrixelemente (3.106) entsprechend verschoben

$$S_{kk} | m \rangle = \left( r_k - r_{k-1} - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \lambda_j \right) | m \rangle. \quad (3.112)$$

### Beispiele: $SU_2$ und $SU_3$

Die  $SU_2$ -Darstellungen werden üblicherweise durch die Quantenzahl  $j$  charakterisiert, die das Betragsquadrat des Drehimpulses angibt

$$J^2 = 2C_2 = j(j+1) \mathbb{I}. \quad (3.113)$$

In Abschnitt 3.2.3 wurde die gleiche irreduzible Darstellung durch den Eigenwert  $\lambda_1 = 2j$  des Operators  $K_1 = 2J_z$  im Zustand höchsten Gewichtes charakterisiert. Für die Basiszustände einer irreduziblen  $SU_2$ -Darstellung ist die Schreibweise  $|m; j\rangle$  mit

$$\begin{aligned} J_z | m; j \rangle &= m | m; j \rangle \\ J^2 | m; j \rangle &= j(j+1) | m; j \rangle \end{aligned} \quad (3.114)$$

und  $m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$  üblich. Die Zustände  $|m; j\rangle$  lassen sich als GZ-Schema

$$|m; j\rangle = \left| \begin{array}{cc} 2j & 0 \\ j + m & \end{array} \right| \quad (3.115)$$

schreiben. Die in (3.109) angegebenen Matrixelemente stimmen dann mit den bekannten Werten von  $\langle m + 1; j | J_+ | m; j \rangle$  überein.

Für  $SU_3$  soll die Wirkung aller Operatoren  $S_{ij}$  explizit angegeben werden, wie sie aus Gleichung (3.109) folgen. Für die Diagonaloperatoren ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} S_{11}|m\rangle &= \left(m_{11} - \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3}\right) |m\rangle \\ S_{22}|m\rangle &= \left(m_{12} + m_{22} - m_{11} - \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3}\right) |m\rangle \\ S_{33}|m\rangle &= \left(\frac{2\lambda_1 + 4\lambda_2}{3} - m_{12} - m_{22}\right) |m\rangle. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Die Wirkung der Absteigeoperatoren auf ein GZ-Schema lautet

$$\begin{aligned} S_{12}|m\rangle &= \sqrt{(m_{12} - m_{11})(1 + m_{11} - m_{22})} \left| \begin{array}{ccc} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22} & \\ m_{11} + 1 & & \end{array} \right| \\ S_{13}|m\rangle &= \sqrt{\frac{(m_{13} - m_{12})(1 + m_{12} - m_{23})(2 + m_{23} - m_{33})(1 + m_{11} - m_{22})}{(1 + m_{12} - m_{22})(2 + m_{12} - m_{22})}} \left| \begin{array}{ccc} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} + 1 & m_{22} & \\ m_{11} + 1 & & \end{array} \right| - \\ &\quad \sqrt{\frac{(m_{23} - m_{22})(m_{12} - m_{11})(1 + m_{13} - m_{22})(1 + m_{22} - m_{33})}{(m_{12} - m_{22})(1 + m_{12} - m_{22})}} \left| \begin{array}{ccc} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22} + 1 & \\ m_{11} + 1 & & \end{array} \right| \\ S_{23}|m\rangle &= \sqrt{\frac{(m_{13} - m_{12})(1 + m_{12} - m_{23})(2 + m_{12} - m_{33})(1 + m_{12} - m_{11})}{(1 + m_{12} - m_{22})(2 + m_{12} - m_{22})}} \left| \begin{array}{ccc} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} + 1 & m_{22} & \\ m_{11} & & \end{array} \right| + \\ &\quad \sqrt{\frac{(1 + m_{13} - m_{22})(m_{23} - m_{22})(1 + m_{22} - m_{33})(m_{11} - m_{22})}{(1 + m_{12} - m_{22})(m_{12} - m_{22})}} \left| \begin{array}{ccc} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22} + 1 & \\ m_{11} & & \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Die Matrixelemente der Aufsteigeoperatoren sind durch hermitesche Konjugation der Matrizen der Absteigeoperatoren zu erhalten. Die Wirkung der Aufsteigeopera-

toren auf ein GZ-Schema lautet somit

$$\begin{aligned}
S_{21}|m\rangle &= \sqrt{(1+m_{12}-m_{11})(m_{11}-m_{22})} \begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22} & \\ & & m_{11}-1 \end{vmatrix} \\
S_{31}|m\rangle &= \sqrt{\frac{(m_{13}-m_{12})(2+m_{12}-m_{23})(2+m_{23}-m_{33})(m_{11}-m_{22})}{(m_{12}-m_{22})(1+m_{12}-m_{22})}} \begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12}-1 & m_{22} & \\ & & m_{11}-1 \end{vmatrix} - \\
&\quad \sqrt{\frac{(1+m_{23}-m_{22})(1+m_{12}-m_{11})(2+m_{13}-m_{22})(m_{22}-m_{33})}{(1+m_{12}-m_{22})(2+m_{12}-m_{22})}} \begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22}-1 & \\ & & m_{11}-1 \end{vmatrix} \\
S_{32}|m\rangle &= \sqrt{\frac{(1+m_{13}-m_{12})(m_{12}-m_{23})(1+m_{12}-m_{33})(m_{12}-m_{11})}{(m_{12}-m_{22})(1+m_{12}-m_{22})}} \begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12}-1 & m_{22} & \\ & & m_{11} \end{vmatrix} + \\
&\quad \sqrt{\frac{(2+m_{13}-m_{22})(1+m_{23}-m_{22})(m_{22}-m_{33})(1+m_{11}-m_{22})}{(2+m_{12}-m_{22})(1+m_{12}-m_{22})}} \begin{vmatrix} m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ m_{12} & m_{22}-1 & \\ & & m_{11} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

Die GZ-Schemen für  $SU_3$  sind Eigenzustände zu den Operatoren

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{S_{11}+S_{22}-2S_{33}}{3} && \text{ („Hyperladung“ )} \\
T_3 &= \frac{S_{11}-S_{22}}{2} && \text{ („3-Komponente des Isospin“ )} \\
T^2 &= T_3(T_3+1) + S_{12}S_{21} && \text{ („Quadrat des Isospin“ )}.
\end{aligned} \tag{3.119}$$

mit Eigenwerten

$$\begin{aligned}
Y|y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= y |y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle \\
T_3|y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= t_3 |y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle \\
T^2|y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= t(t+1) |y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle,
\end{aligned} \tag{3.120}$$

wobei die Schreibweise

$$|y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle \equiv \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ t + \frac{y}{2} + \frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} & -t + \frac{y}{2} + \frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} & \\ & t_3 + \frac{y}{2} + \frac{\lambda_1+2\lambda_2}{3} & \end{vmatrix} \tag{3.121}$$

eingeführt wurde. Die beiden Casimir-Operatoren  $C_2$  und  $C_3$  haben die Werte

$$\begin{aligned} C_2|y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= \frac{2}{3} (\lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 + 3\lambda_1 + 3\lambda_2) |y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle \\ C_3|y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle &= \frac{1}{9} (2\lambda_1^3 - 2\lambda_2^3 + 3\lambda_1^2 \lambda_2 + 18\lambda_1^2 + 9\lambda_1 \lambda_2 + \\ &\quad 36\lambda_1 + 18\lambda_2) |y, t_3, t; \lambda_1, \lambda_2\rangle. \end{aligned} \tag{3.122}$$



## 4. Kohärente Zustände für die Lie-Gruppe $SU_n$

Kohärente Zustände für den harmonischen Oszillator wurden von *E. Schrödinger* entdeckt [14]. Die kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators sind durch Gauß-förmige Wellenfunktionen gegeben, deren Form sich in der Zeit nicht ändert und deren Erwartungswert den klassischen Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators gehorcht. Ihre Bedeutung als klassische Zustände wird durch ihre Eigenschaft unterstrichen, daß sie die Heisenbergsche Unschärfe  $\Delta p \Delta q$  minimieren. Die allgemeine Bedeutung und die Eigenschaften kohärenter Zustände wurden zuerst von *R. Glauber* [15,16], *J. R. Klauder* [17,18] und *E. G. G. Sudarshan* [19] erkannt. Die Eigenschaften der kohärenten Zustände des harmonischen Oszillators sind eng mit der Heisenberg-Weyl-Gruppe verknüpft, deren Generatoren  $a, a^\dagger$  und  $\mathbb{I}$  die Vertauschungsrelationen  $[a, a^\dagger] = \mathbb{I}$  und  $[a, \mathbb{I}] = [a^\dagger, \mathbb{I}] = 0$  erfüllen.

Für semiklassische und quantenmechanische Untersuchungen der Dynamik der Observablen  $a$  und  $a^\dagger$  wurden viele Methoden entwickelt, die auf kohärente Zustände zurückgreifen [20–22]. Dabei zeigt sich immer wieder, daß kohärente Zustände eine Verbindung zwischen der quantenmechanischen Dynamik und der zugehörigen klassischen Dynamik liefern – also das Komplementaritätsprinzip beleuchten. Mithilfe kohärenter Zustände können beliebigen quantenmechanische Zustand als Quasiwahrscheinlichkeitsverteilung im Phasenraum dargestellt werden.

Die klassischen kohärenten Zustände wurden mehrfach verallgemeinert – so auch auf Observable, die andere Vertauschungsrelationen erfüllen als  $a$  und  $a^\dagger$  [25,29–31]. Die Eigenschaften dieser verallgemeinerten kohärenten Zustände sind eng mit einer Lie-Gruppe  $G$  verknüpft, deren Erzeuger die Observablen des Systems bilden.

Im Falle von  $n$ -Niveau-Atomen sind die kohärenten Zustände mit der Lie-Gruppe  $SU_n$  verknüpft, und die reellen Observablen erfüllen die Vertauschungsrelation ihrer Lie-Algebra  $\mathfrak{su}_n$ . Sie sind klassische Zustände, in dem Sinn, daß auch sie die Heisenbergsche Unschärfe minimieren. Sie sind übervollständig und erlauben die Definition eines klassischen Grenzfalles für die Dynamik. Die allgemeinen Eigenschaften dieser (und vieler anderer) kohärenter Zustände sind im Buch von *A. Perelomov* [25] zusammengefaßt (siehe auch [28,29,35–37]). In diesem Kapitel werden explizite Darstellungen, Formeln und Eigenschaften der kohärenten Zustände von  $SU_n$  aufgeführt und teilweise hergeleitet werden (für kohärente  $SU_3$ -Zustände findet man die Ergebnisse recht ausführlich in [77,88]).

In Abschnitt 4.1 werden kohärente Zustände in irreduziblen  $SU_n$ -Darstellungen de-

finiert (siehe Abschnitt 4.1.1). Bei der Parametrisierung kohärenter Zustände durch untere Dreiecksmatrizen muß zwischen nichtentarteten (Abschnitt 4.1.2) und entarteten Darstellungen (Abschnitt 4.1.3) unterschieden werden.

In Abschnitt 4.2 werden die Eigenschaften kohärenter Zustände behandelt. Es werden explizite Formeln für das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände (Abschnitt 4.2.1), für die Wirkung der Leiteroperatoren auf kohärente Zustände (Abschnitt 4.2.2), die Matrixelemente der Leiteroperatoren zwischen kohärenten Zuständen (Abschnitt 4.2.3) und die Auflösung des Einheitsoperators als ein Integral über kohärente Zustände angegeben (Abschnitt 4.2.4). Für die Fälle  $SU_2$  und  $SU_3$  werden diese Eigenschaften in einer Formelsammlung in Abschnitt 4.2.5 zusammengefaßt. In Abschnitt 4.2.6 wird die Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände als eine spezielle  $SU_n$ -Bahn im projektiven Raum vorgestellt.

Die kohärenten Zustände bilden den Phasenraum einer klassischen Dynamik, d.h. sie besitzen eine symplektische Struktur, die eng mit der Lie-Gruppe  $SU_n$  bzw. mit den Observablen  $S_{ij}$  (also der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ) verknüpft ist [25,35–37]. Die quantenmechanische Dynamik läßt sich unter anderem durch die Wigner- oder durch die Husimi-Funktion vollständig durch die Dynamik von Quasiwahrscheinlichkeitsdichten auf diesem Phasenraum beschreiben, was zu vielen Einsichten über quantenmechanische Wellenfunktionen im semiklassischen Grenzfall geführt hat [89–92]. Pfadintegrale auf diesem Phasenraum ermöglichen die Berechnung von Propagatoren zwischen kohärenten Zuständen, wobei die Wirkung eines Pfades durch eine klassische Hamilton-Funktion und die symplektische Struktur der kohärenten Zustände festgelegt ist [38,93–103] (hierauf wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen).

In Abschnitt 4.3 wird die symplektische Struktur auf der Mannigfaltigkeit aller kohärenten Zustände vorgestellt. Zunächst wird jedoch in Abschnitt 4.3.1 in den Zusammenhang zwischen symplektischer Struktur und Poisson-Klammern auf einem klassischen Phasenraum und in Abschnitt 4.3.2 in die symplektische Struktur eines Hilbert-Raumes (und des projektiven Raumes) eingeführt. In Abschnitt 4.3.3 wird die symplektische Struktur auf den kohärenten Zuständen dargestellt und ihre Verträglichkeit mit einer naheliegenden algebraischen Definition von Poisson-Klammern für „klassische“  $SU_n$ -Observable bewiesen. In Abschnitt 4.3.4 werden die Formeln für die symplektische Struktur und die Poisson-Klammern bei  $SU_2$  und  $SU_3$  explizit angegeben. In Abschnitt 4.3.5 folgt die Darstellung eines Verfahrens, um reelle kanonische Koordinaten auf den Phasenräumen der kohärenten Zustände zu berechnen. Für  $SU_2$  und  $SU_3$  wird dieses Verfahren explizit durchgeführt.

## 4.1 Die Definition kohärenter Zustände

### 4.1.1 Allgemeine kohärente Zustände für die Lie-Gruppe $SU_n$

Kohärente Zustände für die Lie-Gruppe  $SU_n$  sind eine spezielle übervollständige Basis des Hilbert-Raums  $\mathcal{H}_\lambda$  einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung, die durch das  $n-1$ -Tupel  $\lambda$  charakterisiert wird. Normierte kohärente Zustände haben die Form

$$|g\rangle = \mathcal{D}(g)|\mu\rangle, \quad (4.1)$$

wobei  $|\mu\rangle \in \mathcal{H}_\lambda$  der (normierte) Zustand höchsten Gewichts ( $\langle\mu|\mu\rangle = 1$ ) und  $\mathcal{D}(g)$  der unitäre Operator ist, der eine  $SU_n$ -Matrix  $g$  im Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_\lambda$  darstellt.

Man kann zeigen, daß die kohärenten Zustände eine  $SU_n$ -invariante Unschärferelation minimieren, die durch den Wert

$$\Delta C_2 = \left\langle \sum_{k,l=1}^n S_{kl} S_{lk} \right\rangle - \sum_{k,l=1}^n \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lk} \rangle \quad (4.2)$$

charakterisiert ist. Im folgenden soll eine sinnvolle Parametrisierung kohärenter Zustände gegeben werden. Dabei muß man den nichtentarteten Fall, in dem alle Elemente  $\lambda_i$  von  $\lambda$  von null verschieden sind, vom entarteten Fall unterscheiden, bei dem einzelne oder mehrere  $\lambda_i$  verschwinden.

### 4.1.2 Der nichtentartete Fall

In einer nichtentarteten  $SU_n$ -Darstellung sind alle Elemente  $\lambda_i$  von  $\lambda$  von null verschieden. Die kohärenten Zustände sind dann durch untere Dreiecksmatrizen  $\gamma \in Z_n^-$  parametrisiert. Man definiert zunächst nichtnormierte kohärente Zustände

$$||\gamma\rangle := \mathcal{D}(\gamma)|\mu\rangle = \mathcal{N}^- \left[ \prod_{k>l} \exp(\gamma_{kl} S_{kl}) \right] |\mu\rangle \quad (4.3)$$

mit der durch (3.31) gegebenen Operatorordnung  $\mathcal{N}^-$ . Die Zustände  $||\gamma\rangle$  sind nicht normiert, weil  $\mathcal{D}(\gamma)$  kein unitärer Operator ist. Sie sind analytische Funktionen der Matrixelemente  $\gamma_{kl}$ , was oft technisch ausgenutzt werden kann (z.B. bei der Berechnung semiklassischer Propagatoren zwischen kohärenten Zuständen).

Normierte kohärente Zustände wurden in Gleichung (4.1) definiert. Benutzt man die Gauß-Zerlegung zur Parametrisierung der Gruppenelemente  $g \in SU_n$  (siehe Abschnitt 3.1.6), d.h.  $g(\gamma; \phi) = \gamma d_\phi(\gamma; \phi) \beta^{-1}(\gamma; \phi)$ , ist es leicht zu zeigen, daß die kohärenten Zustände  $|g\rangle$  und  $||\gamma\rangle$  bis auf einen Phasenfaktor und die Normierung

übereinstimmen

$$\begin{aligned}
|g(\gamma; \phi)\rangle &= \mathcal{D}(\gamma) \mathcal{D}(d_\phi(\gamma; \phi)) \mathcal{D}(\beta^{-1}(\gamma; \phi)) |\mu\rangle \\
&= \mathcal{D}(\gamma) \mathcal{D}(d_\phi(\gamma; \phi)) |\mu\rangle \\
&= \mathcal{D}(\gamma) \left\{ \prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma, \bar{\gamma})^{-\lambda_k/2} e^{-i\phi_k \lambda_k} \right\} |\mu\rangle \\
&= \left\{ \prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma, \bar{\gamma})^{-\lambda_k/2} e^{-i\phi_k \lambda_k} \right\} ||\gamma\rangle.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Der Übergang von der ersten zur zweiten Zeile benutzt die Eigenschaft  $S_{ki}|\mu\rangle = 0$  für  $k < l$  des Zustands höchsten Gewichts. Von der zweiten zur dritten Zeile wurde  $R_k|\mu\rangle = S_{kk} - S_{k+1, k+1}|\mu\rangle = \lambda_k|\mu\rangle$  benutzt.

Da  $|g\rangle$  auf eins normiert ist, ergibt sich als Normquadrat von  $||\gamma\rangle$

$$\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}) \equiv \langle \gamma || \gamma \rangle = \prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma, \bar{\gamma})^{\lambda_k}. \tag{4.5}$$

Die Funktion  $\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})$  ist eine erzeugende Funktion für die viele Eigenschaften von kohärenten Zuständen und spielt besonders für deren symplektische Struktur eine große Rolle. Mithilfe des zentralen Umordnungstheorems kann  $\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})$  auch direkt aus der Definition (4.3) gewonnen werden.

Da sich  $|g(\gamma; \phi = 0)\rangle$  und  $|g(\gamma; \phi \neq 0)\rangle$  nur um einen Phasenfaktor unterscheiden, ist es sinnvoll, in der Definition der kohärenten Zustände einen Phasenfaktor festzulegen, indem man

$$|\gamma\rangle = |g(\gamma; 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}} ||\gamma\rangle \tag{4.6}$$

setzt. Da sich nicht alle  $SU_n$ -Matrizen Gauß-zerlegen lassen, gibt es eine Reihe von kohärenten Zuständen  $|g\rangle$ , die nicht bis auf einen Phasenfaktor mit einem Zustand  $|\gamma\rangle$  übereinstimmen. Solche kohärenten Zustände haben das Maß null bezüglich des Haar-Maßes von  $SU_n$ . Man kann alle diese Zustände wieder einfangen, wenn man die Beträge der Matrixelemente  $\gamma_{ij}$  mit festen Verhältnissen  $\frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{i'j'}}$  nach unendlich gehen läßt.

Die Untergruppe von  $SU_n$ , die von Matrizen der Form  $g(\gamma = 0; \phi)$  aufgespannt wird, ändert nur die Phase des Zustands höchsten Gewichts. Sie heißt **Isotropiegruppe**  $I_{|\mu\rangle}$  von  $|\mu\rangle$  und ist äquivalent zum  $n - 1$ -fachen kartesischen Produkt von  $U_1$

$$I_{|\mu\rangle} \equiv (U_1)^{n-1} = U_1 \times U_1 \times \cdots \times U_1. \tag{4.7}$$

Die Isotropiegruppe ist für alle kohärenten Zustände äquivalent: für  $|g\rangle$  ändern alle Matrizen der Form  $ghg^{-1}$  und  $h \in I_{|\mu\rangle}$  nur die Phase von  $|g\rangle$  – d.h.  $I_{|g\rangle} = g I_{|\mu\rangle} g^{-1}$  ist die Isotropiegruppe von  $|g\rangle$ .

Als Mannigfaltigkeit ist die Menge aller (verschiedenen) kohärenten Zustände  $\Gamma$  äquivalent zur Restklasse

$$\Gamma \equiv SU_n/(U_1)^{n-1} = \overline{Z_n^-} = \overline{GL_n(\mathbb{C})/B_n^+}, \quad (4.8)$$

wobei mit  $\overline{Z_n^-}$  der Abschluß von  $Z_n^-$  durch Punkte im Unendlichen ( $|\gamma_{ij}| \rightarrow \infty$ ) bezeichnet wird. Die Dimension dieser Restklasse ist

$$\dim_{\mathbb{R}} \Gamma = \dim_{\mathbb{R}} SU_n/(U_1)^{n-1} = \dim_{\mathbb{R}} SU_n - (n-1) \dim_{\mathbb{R}} U_1 = n(n-1). \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Der entartete Fall

Für entartete irreduzible Darstellungen ist es notwendig, zunächst die Isotropiegruppe  $I_{|\mu\rangle}$  des Zustands höchsten Gewichts zu bestimmen, denn diese bestimmt die Dimension der Mannigfaltigkeit aller kohärenten Zustände.

Die Isotropiegruppe in einer entarteten Darstellung ist größer als im nichtentarteten Fall. Zunächst soll angenommen werden, daß genau ein Element  $\lambda_k = 0$  von  $\lambda$  verschwindet ( $\lambda_i > 0$  für  $i \neq k$ ). Die Operatoren  $R_k = S_{kk} - S_{k+1,k+1}$ ,  $S_{k,k+1}$  und  $S_{k+1,k}$  erzeugen eine  $SU_2$ -Untergruppe von  $SU_n$ . Der Zustand höchsten Gewichts  $|\mu\rangle$  ist dann auch ein Zustand höchsten Gewichts für diese  $SU_2$ -Untergruppe ( $S_{k,k+1}|\mu\rangle = 0$ ) und es gilt

$$\begin{aligned} R_k|\mu\rangle &= \lambda_k|\mu\rangle &= 0 \\ \iff [S_{k,k+1}, S_{k+1,k}]|\mu\rangle &= 0 \\ \iff S_{k,k+1}S_{k+1,k}|\mu\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aus der letzten Zeile folgt aber

$$S_{k+1,k}|\mu\rangle = 0. \quad (4.11)$$

Dies kann man auch direkt aus  $R_k|\mu\rangle = 0$  sehen, denn das bedeutet, daß  $|\mu\rangle$  das höchste Gewicht einer irreduziblen Darstellung der  $SU_2$ -Untergruppe mit  $j = 0$  ist (also die triviale eindimensionale Darstellung). Es gibt also eine  $SU_2$ -Untergruppe, die den Zustand höchsten Gewichts invariant läßt. Die Isotropiegruppe von  $|\mu\rangle$  lautet

$$I_{|\mu\rangle} \equiv SU_2 \times (U_1)^{n-2}. \quad (4.12)$$

Im allgemeinen entarteten Fall verschwinden einige  $\lambda_i$ . Die Anzahl und Position der verschwindenden  $\lambda_i$  im  $n-1$ -Tupel  $\lambda$  bestimmen eindeutig die Isotropiegruppe des Zustand höchsten Gewichts. Ist  $m$  ( $0 \leq m \leq n-1$ ) die Anzahl der verschwindenden  $\lambda_i$ , können die Indizes der verschwindenden  $\lambda_i$  zu einem  $m$ -Tupel

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_m) \quad \text{mit } 0 < j_1 < j_2 < \dots < j_m < n \quad (4.13)$$

zusammengefaßt werden. Es gilt also

$$\lambda_{j_k} = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.14)$$

Um die Isotropiegruppe  $I_{|\mu\rangle}^j$  des Zustands höchsten Gewichts zu bestimmen, betrachte man zunächst den Fall  $m = n - 1$  ( $j = (1, 2, \dots, n - 1)$ ), d.h. alle  $\lambda_i$  sind null. Die irreduzible  $SU_n$ -Darstellung ist dann die triviale eindimensionale Darstellung, in der alle Matrizen  $g \in SU_n$  durch den Einheitsoperator dargestellt werden. Die Isotropiegruppe ist in diesem einfachen Fall die gesamte Gruppe  $I_{|\mu\rangle}^j \equiv SU_n$ . Für  $m = 0$  ist man im oben beschriebenen nichtentarteten Fall  $I_{|\mu\rangle} \equiv (U_1)^{n-1}$ , und für  $m = 1$  ist  $I_{|\mu\rangle} \equiv SU_2 \times (U_1)^{n-2}$  (siehe Gleichung (4.12)). Für  $m > 1$  läßt sich die Isotropiegruppe leicht abzählen. Jedes  $\lambda_i \neq 0$  trägt eine Untergruppe  $U_1$  bei. Also hat die Isotropiegruppe einen Faktor  $(U_1)^{n-1-m}$ . Als nächstes muß man die Anzahl der isolierten  $\lambda_{j_k}$  suchen, d.h.  $\lambda_{j_k} = 0$  und  $\lambda_{j_k \pm 1} \neq 0$ . Nach dem oben für  $m = 1$  gegebenen Argument trägt jedes isolierte  $\lambda_{j_k}$  einen Faktor  $SU_2$  zur Isotropiegruppe bei. Die nichtisolierten  $\lambda_{j_k}$  lassen sich zu Gruppen der Länge  $s$  zusammenfassen, so daß  $\lambda_{j_k-1} \neq 0$ ,  $\lambda_{j_k} = \lambda_{j_k+1} = \dots = \lambda_{j_k+s-1} = 0$  und  $\lambda_{j_k+s} \neq 0$ . Jede Gruppe der Länge  $s$  trägt einen Faktor  $SU_{s+1}$  bei. Damit läßt sich  $I_{|\mu\rangle}^j$  vollständig aus den Indizes  $j = (j_1, \dots, j_m)$  bestimmen. Zum Beispiel gilt für  $n = 6$

$$\begin{aligned} I_{|\mu\rangle}^{(1,2,4,5)} &= U_1 \times SU_3 \times SU_3 \\ I_{|\mu\rangle}^{(2,3,4)} &= U_1 \times U_1 \times SU_4 \\ I_{|\mu\rangle}^{(1,3,5)} &= U_1 \times U_1 \times SU_2 \times SU_2 \times SU_2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände  $\Gamma^j$  ist topologisch äquivalent zur Restklassenmenge

$$\Gamma^j \equiv SU_n / I_{|\mu\rangle}^j \quad (4.16)$$

und hat die Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} \Gamma^j = \dim_{\mathbb{R}} SU_n - \dim_{\mathbb{R}} I_{|\mu\rangle}^j. \quad (4.17)$$

Sie wird von Untergruppen  $Z_{n,j}^- \subset Z_n^-$  der Gruppe der unteren Dreiecksmatrizen parametrisiert, die aus  $Z_n^-$  entstehen, indem einige Matrixelemente null gesetzt werden.<sup>1</sup>

Die verschwindenden Matrixelemente können leicht angegeben werden. Für jedes isolierte  $\lambda_{j_k} = 0$  setzt man  $\gamma_{j_k+1, j_k} = 0$ . Für jedes isolierte Paar  $\lambda_{j_k} = \lambda_{j_k+1} = 0$  setzt

<sup>1</sup> Man nennt diese Gruppen **parabolische Gruppen**.

man  $\gamma_{j_k+1,j_k} = \gamma_{j_k+2,j_k} = \gamma_{j_k+2,j_k+1} = 0$ . Entsprechend setzt man für eine beliebige isolierte Gruppe der Länge  $s$  alle Matrixelemente null, deren Indizes mit jenen der Absteigealgebra der Untergruppe  $SU_{s+1}$  zusammenfallen, die den entsprechenden Faktor zur Isotropiegruppe  $I_{|\mu}^j$  liefert.

Am leichtesten läßt sich dieses Prinzip an einigen Beispielen erkennen. Ein paar Beispiele für parabolische Gruppen  $Z_{n,j}^-$  sind

$$\begin{aligned}
Z_{6,(1,2,4,5)}^- &= \left\{ \gamma \in Z_n^- : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
Z_{6,(2,3,4)}^- &= \left\{ \gamma \in Z_n^- : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{51} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} & \gamma_{64} & \gamma_{65} & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
Z_{6,(1,3,5)}^- &= \left\{ \gamma \in Z_n^- : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{51} & \gamma_{52} & \gamma_{53} & \gamma_{54} & 1 & 0 \\ \gamma_{61} & \gamma_{62} & \gamma_{63} & \gamma_{64} & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Die Gruppeneigenschaften sind leicht nachzurechnen.

Ein kohärenter Zustand in einer entarteten Darstellung  $\lambda$  ist genauso definiert wie im nichtentarteten Fall, nur daß die Matrizen  $\gamma$  auf  $Z_{n,j}^-$  eingeschränkt werden. Die Gleichung (4.5) bleibt auch für den entarteten Fall richtig, wenn man die entsprechenden Matrixelemente  $\gamma_{ij}$  null setzt. Die erzeugende Funktion  $\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})$  hat dann entsprechend weniger Faktoren ( $f_k^{\lambda_k} = 1$  für  $\lambda_k = 0$ ) und hängt von weniger Matrixelementen ab. Viele der folgenden Eigenschaften von kohärenten Zuständen sind sowohl für den entarteten wie den nichtentarteten Fall gültig; eine besondere Behandlung verlangt vor allem die Übervollständigkeitsrelation (Auflösung des Einheitsoperators).

Entartete irreduzible  $SU_n$ -Darstellungen spielen in der Physik von  $n$ -Niveau-Atomen eine wichtige Rolle, da der Grundzustand einer Anzahl von  $\lambda_1$   $n$ -Niveau-Atomen bezüglich des wechselwirkungsfreien Hamilton-Operators  $H = \sum_{k=1}^n \epsilon_k S_{kk}$

mit  $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \dots > \epsilon_n$  den Zustand niedrigsten Gewichts zu einer  $\lambda = (\lambda_1; 0; \dots; 0)$ -Darstellung bildet. Alle Zustände dieser Darstellung sind vollständig symmetrisch unter Austausch der Atome.



## 4.2 Die Eigenschaften kohärenter Zustände

### 4.2.1 Das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände

Das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände  $|\gamma'\rangle$  und  $|\gamma\rangle$  läßt sich mit dem zentralen Umordnungstheorem (3.41) direkt berechnen.

$$\langle\gamma'|\gamma\rangle = \mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma'}), \quad (4.19)$$

wobei  $\mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma'})$  aus  $\mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma})$  durch die Ersetzung  $\overline{\gamma} \mapsto \overline{\gamma'}$  entsteht, was einer analytischen Fortsetzung entspricht. Für normierte Zustände ergibt sich entsprechend

$$\langle\gamma'|\gamma\rangle = \frac{\mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma'})}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma', \overline{\gamma'})\mathcal{K}(\gamma, \overline{\gamma})}}. \quad (4.20)$$

### 4.2.2 Die Wirkung von $SU_n$ und den Leiteroperatoren $S_{ij}$

Nach Definition ist für jede Matrix  $g \in SU_n$  der Zustand  $\mathcal{D}(g)|\gamma\rangle$  bis auf einen Phasenfaktor gleich einem kohärenten Zustand  $|\gamma''\rangle$ . Den Phasenfaktor und den neuen kohärenten Zustand erhält man aus den Gruppenmultiplikationsregeln (3.55). Ist  $g(\gamma''; \phi'') = g(\gamma'; \phi')g(\gamma; \phi = 0)$ , dann gilt in nichtentarteten Darstellungen

$$g(\gamma'; \phi')|\gamma\rangle = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \phi_{k''}\right) |\gamma''\rangle. \quad (4.21)$$

In entarteten Darstellungen wird  $\gamma$  aus der parabolischen Gruppe  $Z_{n,j}^-$  gewählt, dann ist  $\gamma''$  aber im allgemeinen keine Matrix aus  $Z_{n,j}^-$ . Die Matrix  $\gamma''$  läßt sich aber einfach zerlegen

$$\gamma'' = \gamma_j'' \gamma_{inv}''. \quad (4.22)$$

Hier ist  $\gamma_j'' \in Z_{n,j}^-$  eindeutig und  $\gamma_{inv}''$  ist eine untere Dreiecksmatrix, die den Zustand höchsten Gewichts invariant läßt  $\mathcal{D}(\gamma_{inv}'')|\mu\rangle = |\mu\rangle$  (also ohne Phasenfaktor). Die Gleichung (4.21) ist dann entsprechend abzuändern

$$g(\gamma'; \phi')|\gamma\rangle = \exp\left(i \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \phi_{k''}\right) |\gamma_j''\rangle. \quad (4.23)$$

Die Leiteroperatoren wirken wie Differentialoperatoren auf kohärente Zustände

$$\begin{aligned} S_{kl}|\gamma\rangle &= D_{kl}(\gamma, \overline{\gamma}, \frac{\partial}{\partial \gamma})|\gamma\rangle \\ S_{kl}|\gamma\rangle &= d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma})|\gamma\rangle. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Man beachte, daß sich die Reihenfolge der Differentialoperatoren gegenüber den Leiteroperatoren umdreht

$$\begin{aligned} S_{kl}S_{k'l'}|\gamma\rangle &= D_{k'l'}(\gamma, \bar{\gamma}, \frac{\partial}{\partial\gamma})D_{kl}(\gamma, \bar{\gamma}, \frac{\partial}{\partial\bar{\gamma}})|\gamma\rangle \\ S_{kl}S_{k'l'}||\gamma\rangle &= d_{k'l'}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma})d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\bar{\gamma}})||\gamma\rangle \end{aligned} \quad (4.25)$$

und daß  $d_{kl}$  nicht von  $\bar{\gamma}$  abhängt. Die Differentialoperatoren  $d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma})$  lassen sich explizit berechnen

$$d_{kl} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\gamma_{kl}} + \sum_{j=1}^{l-1} \gamma_{lj} \frac{\partial}{\partial\gamma_{kj}} & \text{für } k > l \\ \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{kj} \frac{\partial}{\partial\gamma_{kj}} - \sum_{j=k+1}^n \gamma_{jk} \frac{\partial}{\partial\gamma_{jk}} + \\ + \sum_{j=1}^{n-k} \frac{j}{n} \lambda_{n-j} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} \lambda_j & \text{für } k = l \\ \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_{k+1,j} \frac{\partial}{\partial\gamma_{kj}} - \\ - \sum_{j=k+2}^n \gamma_{jk} \frac{\partial}{\partial\gamma_{j,k+1}} - \\ - \gamma_{k+1,k}^2 \frac{\partial}{\partial\gamma_{k+1,k}} + \gamma_{k+1,k} \lambda_k - \\ - \sum_{j=k+2}^n \gamma_{k+1,k} \gamma_{j,k} \frac{\partial}{\partial\gamma_{jk}} + \\ + \sum_{j=k+2}^n \gamma_{k+1,k} \gamma_{j,k+1} \frac{\partial}{\partial\gamma_{j,k+1}} & \text{für } l = k + 1 \\ [d_{k+s,k}, d_{k+1+s,k+s}] & \text{für } l = k + s + 1, s \geq 1. \end{cases} \quad (4.26)$$

Der Zusammenhang zwischen den Differentialoperatoren für normierte und für unnormierte kohärente Zustände lautet

$$D_{kl}|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}} \left( d_{kl} \sqrt{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})} |\gamma\rangle \right). \quad (4.27)$$

Ganz entsprechend wirken die Leiteroperatoren auch nach links

$$\langle\gamma||S_{kl} = \overline{d_{lk}} \langle\gamma|| \equiv d_{lk}(\bar{\gamma}, \frac{\partial}{\partial\bar{\gamma}}) \langle\gamma||. \quad (4.28)$$

### 4.2.3 Matrixelemente der Operatoren $S_{ij}$ in kohärenten Zuständen

Die Matrixelemente der Leiteroperatoren  $S_{kl}$  lassen sich leicht mithilfe der erzeugenden Funktion  $\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})$  und der Differentialoperatoren  $d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma})$  angeben

$$\begin{aligned} \langle\gamma'||S_{kl}|\gamma\rangle &= d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma}) \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}') \\ \langle\gamma'|S_{kl}|\gamma\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma', \bar{\gamma}')\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}} d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial\gamma}) \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}'). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Daraus ergeben sich die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}\langle \gamma || S_{kl} || \gamma \rangle &= d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}) \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}) \\ \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle &= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})} d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}) \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}).\end{aligned}\tag{4.30}$$

Es ist zu beachten, daß in  $\langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle = \langle \gamma | D_{kl}(\gamma, \bar{\gamma}, \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}) | \gamma \rangle$  die Differentialoperatoren  $D_{kl}$  nicht einfach auf die linke Seite von  $\langle \gamma |$  geschoben werden dürfen, weil  $\langle \gamma |$  sowohl von  $\bar{\gamma}$  als auch von  $\gamma$  abhängt. Das Problem tritt in  $\langle \gamma || S_{kl} || \gamma \rangle = \langle \gamma || d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}) || \gamma \rangle$  nicht auf, weil  $\langle \gamma ||$  nur von  $\bar{\gamma}$  abhängt.

#### 4.2.4 Die Vollständigkeit der kohärenten Zustände

Die kohärenten Zustände sind nicht orthogonal. Weil sie ein Kontinuum in einem endlichdimensionalen Hilbert-Raum sind, können sie kein Orthogonalsystem bilden. Sie erlauben jedoch eine Zerlegung des Einheitsoperators, d.h. sie sind vollständig oder besser übervollständig. Jeder Zustand  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_\lambda$  ist eindeutig bestimmt durch seine Projektion  $\langle \gamma | \Psi \rangle$  auf kohärente Zustände.

Zunächst soll gezeigt werden, daß der Operator

$$\hat{A} = \int_{SU_n} \mu_{SU_n}(g) \mathcal{D}(g) |\mu\rangle \langle \mu| \mathcal{D}(g^\dagger) \tag{4.31}$$

proportional zum Identitätsoperator  $\mathbb{I}$  ist, wobei  $g \in SU_n$  die gesamte Gruppe  $SU_n$  durchläuft und  $\mu_{SU_n}$  das invariante Haar-Maß von  $SU_n$  ist.<sup>2</sup>

Nach Schurs Lemma [70–74] ist ein Operator  $\hat{A}$ , der in einem Darstellungsraum  $\mathcal{H}_\lambda$  einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung wirkt, genau dann proportional zur Identität, wenn er mit allen Elementen  $h \in SU_n$  vertauscht

$$\mathcal{D}(h) \hat{A} \mathcal{D}(h^\dagger) = \hat{A} \quad \text{für alle } h \in SU_n \quad \iff \quad \hat{A} = c \mathbb{I}. \tag{4.32}$$

Für  $\hat{A}$  gilt wegen der Invarianz des Haar-Maßes

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(h) \hat{A} \mathcal{D}(h^\dagger) &= \int_{SU_n} \mu_{SU_n}(g) \mathcal{D}(hg) |\mu\rangle \langle \mu| \mathcal{D}((hg)^\dagger) \\ &= \int_{SU_n} \mu_{SU_n}(hg) \mathcal{D}(hg) |\mu\rangle \langle \mu| \mathcal{D}((hg)^\dagger) \\ &= \hat{A}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

---

<sup>2</sup> Das Haar-Maß  $\mu_{SU_n}$  und der Zustand höchsten Gewichts  $|\mu\rangle$  werden hier beide durch das Symbol  $\mu$  beschrieben, haben aber weiter nichts miteinander zu tun !

Um die Proportionalitätskonstante in  $\mathbb{I} = c\hat{A}$  zu bestimmen, verwendet man

$$\text{Spur } \mathbb{I} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda, \quad (4.34)$$

und  $\text{Spur } \mathcal{D}(g)|\mu\rangle\langle\mu| \mathcal{D}(g^\dagger) = 1$  ( $|\mu\rangle$  ist ein normierter Zustand, daher auch  $\mathcal{D}(g)|\mu\rangle$ ).  
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} c \int \boldsymbol{\mu}_{SU_n} &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda \\ \iff c &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda, \end{aligned} \quad (4.35)$$

weil das Haar-Maß  $\boldsymbol{\mu}_{SU_n}$  auf  $\int \boldsymbol{\mu}_{SU_n} = 1$  normiert ist.

Der Operator  $\hat{A}$  ist bereits eine Auflösung der Identität in kohärente Zustände. Er kann weiter vereinfacht werden, indem man über die Isotropiegruppe  $I_{|\mu}^j$  von  $\mu$  integriert. Übrig bleibt dann ein Integral über ein (invariantes) Maß auf der Mannigfaltigkeit  $\Gamma^j$  der kohärenten Zustände  $|\gamma\rangle$

$$\boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j} = \int_{I_{|\mu}^j} \boldsymbol{\mu}_{SU_n}. \quad (4.36)$$

Die Auflösung der Identität bekommt dann die Form

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda \int_{\Gamma^j} \boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j} |\gamma\rangle\langle\gamma| \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda \int_{\Gamma^j} \boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j} \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})} \|\gamma\rangle\langle\gamma|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Für nichtentartete Darstellungen lautet diese Zerlegung explizit

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda}{\tilde{\mathcal{C}}} \int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{F}(\gamma, \bar{\gamma})} |\gamma\rangle\langle\gamma| \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma \\ &= \frac{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda}{\tilde{\mathcal{C}}} \int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{F}(\gamma, \bar{\gamma}) \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})} \|\gamma\rangle\langle\gamma| \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma \end{aligned} \quad (4.38)$$

mit der Normierungskonstante

$$\tilde{\mathcal{C}} = \int_{\Gamma} \frac{1}{\mathcal{F}(\gamma, \bar{\gamma})} \mathbf{d}^{n(n-1)}\gamma = \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}{1!2!\dots(n-1)!}. \quad (4.39)$$

In entarteten Darstellungen hängt  $\boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j}$  und  $|\gamma\rangle$  nicht von allen Matrixelementen  $\gamma_{ij}$  ab, sondern nur von jenen aus der parabolischen Gruppe  $Z_{n,j}^-$ . Man erhält  $\boldsymbol{\mu}_{\Gamma^j}$  aus  $\boldsymbol{\mu}_{\Gamma}$  (also aus dem Maß für den nichtentarteten Fall) durch Integration über alle Matrixelemente  $\gamma_{kl}$ , von denen  $|\gamma\rangle$  nicht abhängt.

### 4.2.5 Kleine Formelsammlung für $SU_2$ und $SU_3$

#### Formelsammlung für $SU_2$

Die irreduziblen Darstellungen von  $SU_2$  sind durch eine ganze Zahl  $\lambda_1 = 2j$  charakterisiert und haben die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda = \lambda_1 + 1 = 2j + 1. \quad (4.40)$$

Es gibt keine entarteten Darstellungen (außer der trivialen Darstellung  $\lambda_1 = 0$ ).

Die kohärenten Zustände sind durch untere Dreiecksmatrizen

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

und damit durch eine komplex Zahl  $\gamma_{21}$  parametrisiert

$$|\gamma\rangle = \exp(\gamma_{21} S_{21}) |\mu\rangle. \quad (4.42)$$

Die erzeugende Funktion lautet

$$\langle \gamma' || \gamma \rangle = \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}') = f_1(\gamma, \bar{\gamma}')^{\lambda_1} \quad (4.43)$$

mit

$$f_1(\gamma, \bar{\gamma}') = 1 + \bar{\gamma}'_{21} \gamma_{21}. \quad (4.44)$$

Die Vollständigkeitsrelation ist

$$\mathbb{I} = \frac{\lambda_1 + 1}{\pi} \int \frac{1}{f_1^2} |\gamma\rangle \langle \gamma| \mathbf{d}^2 \gamma_{21}. \quad (4.45)$$

Die Differentialoperatoren  $d_{kl}$  sind durch

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{\lambda_1}{2} - \gamma_{21} \frac{\partial}{\partial \gamma_{21}} \\ d_{12} &= \gamma_{21} \lambda_1 - \gamma_{21}^2 \frac{\partial}{\partial \gamma_{21}} \\ d_{21} &= \frac{\partial}{\partial \gamma_{21}} \\ d_{22} &= -\frac{\lambda_1}{2} + \gamma_{21} \frac{\partial}{\partial \gamma_{21}} \end{aligned} \quad (4.46)$$

gegeben. Daraus ergeben sich die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
\langle \gamma | S_{11} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{2f_1} (1 - |\gamma|^2) \\
\langle \gamma | S_{12} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \gamma_{21} \\
\langle \gamma | S_{21} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \bar{\gamma}_{21} \\
\langle \gamma | S_{22} | \gamma \rangle &= -\frac{\lambda_1}{2f_1} (1 - |\gamma|^2)
\end{aligned} \tag{4.47}$$

### Formelsammlung für $SU_3$

Die irreduziblen Darstellungen von  $SU_3$  sind durch zwei ganze Zahlen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  charakterisiert und haben die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda = \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)}{2}. \tag{4.48}$$

Entartete Darstellungen entstehen für  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$  oder  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ . Die kohärenten Zustände sind durch untere Dreiecksmatrizen

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & 1 & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

parametrisiert. In den entarteten Darstellungen muß  $\gamma_{21} = 0$  gesetzt werden falls  $\lambda_1 = 0$  und  $\gamma_{32} = 0$  falls  $\lambda_2 = 0$ . Die kohärenten Zustände sind dann

$$\begin{aligned}
|\gamma\rangle &= \exp(\gamma_{21} S_{21}) \exp(\gamma_{31} S_{31}) \exp(\gamma_{32} S_{32}) |\mu\rangle \quad \text{für } \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \\
|\gamma\rangle &= \exp(\gamma_{31} S_{31}) \exp(\gamma_{32} S_{32}) |\mu\rangle \quad \text{für } \lambda_1 = 0 \\
|\gamma\rangle &= \exp(\gamma_{21} S_{21}) \exp(\gamma_{31} S_{31}) |\mu\rangle \quad \text{für } \lambda_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Die erzeugende Funktion ist durch

$$\langle \gamma' | | \gamma \rangle = \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}') = f_1(\gamma, \bar{\gamma}')^{\lambda_1} f_2(\gamma, \bar{\gamma}')^{\lambda_2} \tag{4.51}$$

mit

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma, \bar{\gamma}') &= 1 + \bar{\gamma}'_{21} \gamma_{21} + \bar{\gamma}'_{31} \gamma_{31} \\
f_2(\gamma, \bar{\gamma}') &= 1 + \bar{\gamma}'_{32} \gamma_{32} + (\bar{\gamma}'_{31} - \bar{\gamma}'_{32} \bar{\gamma}'_{21}) (\gamma_{31} - \gamma_{32} \gamma_{21})
\end{aligned} \tag{4.52}$$

gegeben.

Die Vollständigkeitsrelation lautet im nichtentarteten Fall ( $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ )

$$\mathbb{I} = \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)}{\pi^3} \int \frac{1}{f_1^2 f_2^2} |\gamma\rangle\langle\gamma| \mathbf{d}^2\gamma_{21} \mathbf{d}^2\gamma_{32} \mathbf{d}^2\gamma_{31} \quad (4.53)$$

und in den entarteten Fällen

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \frac{(\lambda_2 + 1)(\lambda_2 + 2)}{\pi^2} \int \frac{1}{\tilde{f}_2^3} |\gamma\rangle\langle\gamma| \mathbf{d}^2\gamma_{32} \mathbf{d}^2\gamma_{31} \quad \text{für } \lambda_1 = 0 \\ \mathbb{I} &= \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2)}{\pi^2} \int \frac{1}{f_1^3} |\gamma\rangle\langle\gamma| \mathbf{d}^2\gamma_{21} \mathbf{d}^2\gamma_{31} \quad \text{für } \lambda_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

mit  $\tilde{f}_2 = f_2|_{\gamma_{31}=0} = 1 + |\gamma_{32}|^2 + |\gamma_{31}|^2$ .

Die Differentialoperatoren  $d_{kl}$  lauten

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{3} - \gamma_{21} \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - \gamma_{31} \frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{12} &= \gamma_{21}\lambda_1 - \gamma_{21}^2 \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - (\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21}) \frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} - \gamma_{21}\gamma_{31} \frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{13} &= \gamma_{31}\lambda_1 + (\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21})\lambda_2 - \gamma_{21}\gamma_{31} \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \\ &\quad - \gamma_{32}(\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21}) \frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} - \gamma_{31}^2 \frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{21} &= \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} \\ d_{22} &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{3} + \gamma_{21} \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - \gamma_{32} \frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} \\ d_{23} &= \gamma_{32}\lambda_2 + \gamma_{31} \frac{\partial}{\partial\gamma_{21}} - \gamma_{32}^2 \frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} \\ d_{31} &= \frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{32} &= \frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} + \gamma_{21} \frac{\partial}{\partial\gamma_{31}} \\ d_{33} &= -\frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3} + \gamma_{32} \frac{\partial}{\partial\gamma_{32}} + \gamma_{31} \frac{\partial}{\partial\gamma_{31}}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Daraus ergeben sich die Erwartungswerte

$$\begin{aligned}
\langle \gamma | S_{11} | \gamma \rangle &= \frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{3} - \frac{\lambda_1}{f_1} (|\gamma_{21}|^2 + |\gamma_{31}|^2) - \frac{\lambda_2}{f_2} |\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21}|^2 \\
\langle \gamma | S_{12} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \gamma_{21} - \frac{\lambda_2}{f_2} \bar{\gamma}_{32} (\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21}) \\
\langle \gamma | S_{13} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \gamma_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2} (\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21}) \\
\langle \gamma | S_{21} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \bar{\gamma}_{21} - \frac{\lambda_2}{f_2} \gamma_{32} (\bar{\gamma}_{31} - \bar{\gamma}_{32}\bar{\gamma}_{21}) \\
\langle \gamma | S_{22} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{3} + \frac{\lambda_1}{f_1} |\gamma_{21}|^2 - \frac{\lambda_2}{f_2} |\gamma_{32}|^2 \\
\langle \gamma | S_{23} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \bar{\gamma}_{21} \gamma_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2} \gamma_{32} \\
\langle \gamma | S_{31} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \bar{\gamma}_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2} (\bar{\gamma}_{31} - \bar{\gamma}_{32}\bar{\gamma}_{21}) \\
\langle \gamma | S_{32} | \gamma \rangle &= \frac{\lambda_1}{f_1} \gamma_{21} \bar{\gamma}_{31} + \frac{\lambda_2}{f_2} \bar{\gamma}_{32} \\
\langle \gamma | S_{33} | \gamma \rangle &= -\frac{\lambda_1 + 2\lambda_2}{3} + \frac{\lambda_1}{f_1} |\gamma_{31}|^2 + \frac{\lambda_2}{f_2} (|\gamma_{32}|^2 + |\gamma_{31} - \gamma_{32}\gamma_{21}|^2).
\end{aligned} \tag{4.56}$$

#### 4.2.6 Kohärente Zustände als $SU_n$ -Bahnen im projektiven Hilbert-Raum

Üblicherweise beschreibt man in der Quantenmechanik einen Zustand des Systems durch einen normierten Vektor  $|\Psi\rangle$  im Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ . Ändert man die Phase des Zustandsvektors  $|\Psi\rangle \mapsto e^{i\alpha}|\Psi\rangle$ , dann ist der Unterschied prinzipiell nicht beobachtbar, d.h.  $|\Psi\rangle$  und  $e^{i\alpha}|\Psi\rangle$  beschreiben den gleichen Zustand.

Man kann den quantenmechanischen Zustand jedoch auch so beschreiben, daß ihm eindeutig ein mathematisches Objekt entspricht. Dazu definiert man **Strahlen** im Hilbert-Raum. Ist  $|\Psi\rangle$  ein nichtverschwindender Vektor im Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ , dann ist der Strahl  $[[\Psi]]$  eine Äquivalenzklasse von Vektoren in  $\mathcal{H}$ , die durch

$$[[\Psi]] = \{ |\chi\rangle \in \mathcal{H} : |\chi\rangle = c|\Psi\rangle, c \in \mathbb{C} - \{0\} \} \tag{4.57}$$



definiert ist. Der Raum aller Strahlen im Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  heißt **projektiver Raum**  $\mathbb{P}\mathcal{H}$ . Er kann als Quotientenraum

$$\mathbb{P}\mathcal{H} = (\mathcal{H} - \{0\}) / \sim \quad (4.58)$$

bezüglich der Äquivalenzrelation

$$|\Psi\rangle \sim |\chi\rangle \iff |\Psi\rangle = c|\chi\rangle \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} - \{0\} \quad (4.59)$$

aufgefaßt werden. Dabei reduziert sich die Dimension

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}\mathcal{H} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} - 1. \quad (4.60)$$

Gibt es eine Darstellung  $g \mapsto \mathcal{D}(g)$  einer Gruppe  $G$  auf  $\mathcal{H}$  ( $g \in G$  ist ein Gruppenelement und  $\mathcal{D}(g)$  ist ein Operator auf dem Hilbert-Raum), induziert

$$\mathcal{D}_{\mathbb{P}}(g)[|\Psi\rangle] = [\mathcal{D}(g)|\Psi\rangle] \quad (4.61)$$

eine Darstellung  $g \mapsto \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(g)$  auf dem projektiven Raum.

Eine **Bahn** bzw. ein **Orbit**  $\mathcal{O}_G$  der Gruppe  $G$  (oder der Restklasse  $G/H$ , wobei  $H$  eine Untergruppe von  $G$  ist) durch einen Vektor  $|\Psi\rangle$  im Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  oder durch einen Strahl  $[|\Psi\rangle]$  ist die Gesamtheit aller Elemente, die durch Anwendung der Gruppe erreicht werden können

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_G(|\Psi\rangle) &= \{|\chi\rangle \in \mathcal{H} : |\chi\rangle = \mathcal{D}(g)|\Psi\rangle, g \in G\} \quad \equiv G|\Psi\rangle \subset \mathcal{H} \\ \mathcal{O}_G([|\Psi\rangle]) &= \{[|\chi\rangle] \in \mathbb{P}\mathcal{H} : [|\chi\rangle] = \mathcal{D}_{\mathbb{P}}(g)[|\Psi\rangle], g \in G\} \quad \equiv G[|\Psi\rangle] \subset \mathbb{P}\mathcal{H}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Ist  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\lambda}$  der Darstellungsraum einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung  $\lambda$ , dann sind die kohärenten Zustände  $|g\rangle$  Elemente aus einer  $SU_n$ -Bahn durch den Zustand höchsten Gewichts  $|g\rangle \in G|\mu\rangle$ . Die Mannigfaltigkeit  $\Gamma^j$  der kohärenten Zustände  $|\gamma\rangle$  ist gerade die Bahn der Restklasse  $SU_n/I_{|\mu}^j$

$$\Gamma^j = \mathcal{O}_{SU_n/I_{|\mu}^j}(|\mu\rangle) = SU_n/I_{|\mu}^j|\mu\rangle. \quad (4.63)$$

Da verschiedene Elemente  $g_1, g_2 \in SU_n/I_{|\mu}^j$ ,  $g_1 \neq g_2$  auf verschiedene kohärente Zustände  $\mathcal{D}(g_1)|\mu\rangle = |\gamma_1\rangle \neq |\gamma_2\rangle = \mathcal{D}(g_2)|\mu\rangle$  führen, herrscht sogar Äquivalenz

$$\Gamma^j \equiv SU_n/I_{|\mu}^j \equiv \overline{Z_{n,j}^-}, \quad (4.64)$$

die bereits genutzt wurde, um kohärente Zustände  $|\gamma\rangle$  durch untere Dreiecksmatrizen (bzw. deren parabolische Untergruppen) zu parametrisieren.<sup>3</sup> Die nichtnormierten

<sup>3</sup> Man beachte jedoch, daß die Äquivalenz  $SU_n/I_{|\mu}^j \equiv \overline{Z_{n,j}^-}$  rein topologisch ist – als Restklasse bzw. Gruppe verhalten sie sich nicht äquivalent.

kohärenten Zustände  $|\gamma\rangle$  bilden ebenfalls eine Bahn  $\mathcal{O}_{Z_{n,j}^-}(|\mu\rangle) = Z_{n,j}^-|\mu\rangle$ , dessen Abschluß  $\overline{Z_{n,j}^-|\mu\rangle}$  äquivalent zu  $\mathcal{O}_{SU_n/I_{|\mu}^j}(|\mu\rangle)$  ist. Da  $SU_n$  kompakt ist, sind auch die Bahnen  $\mathcal{O}_{SU_n/I_{|\mu}^j}(|\mu\rangle)$  kompakte Mannigfaltigkeiten im Hilbert-Raum.

Im projektiven Raum  $\mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$  verschwindet jeder Unterschied zwischen den Bahnen  $SU_n[|\mu\rangle]$ ,  $SU_n/I_{|\mu}^j[|\mu\rangle]$  und  $\overline{Z_{n,j}^-}[|\mu\rangle]$ . Um das zu sehen, betrachtet man

$$\mathcal{D}(g(\gamma; \phi))|\mu\rangle = e^{i\alpha}|\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}}e^{i\alpha}|\gamma\rangle. \quad (4.65)$$

Die Vektoren  $|g\rangle$ ,  $|\gamma\rangle$  und  $|\gamma\rangle$  gehören dann alle zum gleichen Strahl in  $\mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$ , womit die oben behauptete Gleichheit der Bahnen gezeigt ist. Im projektiven Raum bilden die kohärenten Zustände also eine  $SU_n$ -Bahn, die topologisch äquivalent zur Restklasse  $SU_n/I_{|\mu}^j$  ist

$$\mathcal{O}_{SU_n}([|\mu\rangle]) = SU_n[|\mu\rangle] \equiv SU_n/I_{|\mu}^j. \quad (4.66)$$

Im projektiven Raum gibt es weitere  $SU_n$ -Bahnen, die nicht durch den Zustand höchsten Gewichts gehen (durch jeden Strahl geht eine  $SU_n$ -Bahn). Diese anderen Bahnen liefern keine kohärenten Zustände.<sup>4</sup> Die  $SU_n$ -Bahn durch den Zustand höchsten Gewichts unterscheidet sich in seiner mathematischen Struktur eindeutig von allen anderen  $SU_n$ -Bahnen im projektiven Raum. Sie ist durch jeweils eine der folgenden Eigenschaften eindeutig charakterisiert:

- $SU_n[|\mu\rangle]$  ist die eindeutige  $SU_n$ -Bahn, die gleichzeitig auch eine  $SL_n(\mathbb{C})$ -Bahn ist

$$SU_n[|\mu\rangle] = SL_n(\mathbb{C})[|\mu\rangle], \quad (4.67)$$

- $SU_n[|\mu\rangle]$  ist die eindeutige abgeschlossene  $SL_n(\mathbb{C})$ -Bahn.
- $SU_n[|\mu\rangle]$  ist die eindeutige  $SU_n$ -Bahn mit sowohl komplexer als auch symplektischer Struktur.

Die komplexe Struktur ist durch die Parametrisierung durch untere Dreiecksmatrizen leicht erkennbar – die komplexe Konjugation besteht einfach im Übergang von einer Matrix  $\gamma \in Z_n^-$  zu ihrer komplex konjugierten Matrix  $\bar{\gamma}$ . Auf die symplektische Struktur wird im nächsten Abschnitt 4.3 näher eingegangen. Sie macht die kohärenten Zustände interessant für semiklassische Betrachtungen und den klassischen Grenzfall.

Es ist leicht zu sehen, daß die Bahnen  $\mathcal{O}_{SU_n/I_{|\mu}^j}(|\mu\rangle) \subset \mathcal{H}_\lambda$  im Hilbert-Raum und  $\mathcal{O}_{SU_n}([|\mu\rangle]) \subset \mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$  im projektiven Raum isomorph sind.

<sup>4</sup> Nicht in dem hier dargestellten Sinn – manchmal betrachtet man die Bahnen, die nicht durch den Zustand höchsten Gewichts gehen, als verallgemeinerte kohärente Zustände.

## 4.3 Die symplektische Struktur der kohärenten Zustände

### 4.3.1 Poisson-Klammern und die symplektische Form

Zunächst soll nur die einfachste Form eines klassischen Phasenraums behandelt werden, die aber in der Physik die wichtigste Rolle spielt [104–107]. Der Phasenraum  $\mathcal{M}$  ist dann der  $2f$ -dimensionale Raum  $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2f}$  mit den Koordinaten  $x = (x^1, \dots, x^{2n}) = (q, p) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f) \in \mathbb{R}^{2f}$ . Die Koordinaten  $q$  sind die kanonischen Orte und die Variablen  $p$  sind die kanonischen Impulse des Systems,  $f$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade. Auf diesem Phasenraum gibt es die Poisson-Klammer

$$\{F(q, p), G(q, p)\} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial F(q, p)}{\partial p_k} \frac{\partial G(q, p)}{\partial q_k} - \frac{\partial F(q, p)}{\partial q_k} \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_k} \quad (4.68)$$

für Funktionen  $F, G$  auf dem Phasenraum, die physikalischen Observablen entsprechen. Es gilt also

$$\{p_k, q_l\} = \delta_{kl} \quad \{p_k, p_l\} = \{q_k, q_l\} = 0. \quad (4.69)$$

Die Dynamik von Observablen  $F(q, p; t)$  wird über die Poisson-Klammer durch die Hamilton-Funktion  $H(q, p)$  des Systems bestimmt

$$\frac{d}{dt} F(q, p; t) = \{H(q, p), F(q, p; t)\}. \quad (4.70)$$

Die Trajektorien werden damit durch die bekannten Hamiltonschen Gleichungen beschrieben

$$\frac{d}{dt} q_k(t) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_k} \quad (4.71)$$

$$\frac{d}{dt} p_k(t) = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_k}.$$

Die Poisson-Klammern (4.68) sind eng verbunden mit der sogenannten **symplektischen 2-Form** [104–107]

$$\omega = \sum_{k=1}^f \mathbf{d}p_k \wedge \mathbf{d}q_k. \quad (4.72)$$

Die symplektische Form  $\omega$  enthält alle Information über die Poisson-Klammern. Um dies zu sehen, soll kurz auf das Vektorbündel  $T\mathcal{M}$  der Differentialoperatoren erster

Ordnung (sie werden im allgemeinen **Vektorfelder** genannt) und das dazu duale Vektorbündel  $T^*\mathcal{M}$  der 1-Formen eingegangen werden.

Der von den Vektorfeldern aufgespannte Raum  $T\mathcal{M}$  heißt **Tangentialbündel** von  $M$  [86,104–106]. Ein Vektorfeld  $\mathbf{X}$  ist eine Abbildung, die jedem Ort  $x \in \mathcal{M}$  einen Vektor  $\mathbf{X}(x) \in T_x\mathcal{M}$  im **Tangentialraum** am Ort  $x$  zuordnet. Der Tangentialraum  $T_x\mathcal{M}$  ist ein Vektorraum im üblichen Sinn, während das Tangentialbündel als „Summe“ dieser Vektorräume selbst kein Vektorraum ist.

Der von den 1-Formen aufgespannte Raum  $T^*\mathcal{M}$  heißt **Kotangentialbündel** von  $M$  [86,104–106]. Eine 1-Form  $\alpha$  ordnet jedem Ort  $x \in \mathcal{M}$  einen Vektor  $\alpha(x) \in T_x^*\mathcal{M}$  im **Kotangentialraum** am Ort  $x$  zu. Der Kotangentialraum  $T_x^*\mathcal{M}$  ist der zu  $T_x\mathcal{M}$  duale Vektorraum.

Ein allgemeines Vektorfeld  $\mathbf{X}(q, p) = \mathbf{X}(x)$  hat die Form

$$\mathbf{X}(q, p) = \sum_{k=1}^{2f} X^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (4.73)$$

mit Funktionen  $X^k(x)$ , und eine allgemeine 1-Form  $\alpha(q, p) = \alpha(x)$  hat die Form

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{2f} \alpha_k(x) \mathbf{d}x^k \quad (4.74)$$

mit Funktionen  $\alpha_k(x)$ . Vektorfelder und 1-Formen sind duale Objekte, d.h. man kann aus ihnen ein Produkt bilden, das eine Funktion ergibt. Für die Basis von 1-Formen  $\mathbf{d}x^k$  und die Basis von Vektorfeldern  $\frac{\partial}{\partial x^l}$  definiert man das Produkt

$$\left( \mathbf{d}x^k, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = \mathbf{d}x^k \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = \delta_l^k. \quad (4.75)$$

Damit ergibt sich

$$\alpha(\mathbf{X}) = \sum_k \alpha_k(x) X^k(x). \quad (4.76)$$

Ist  $F(x)$  eine Funktion und  $\mathbf{X}(x)$  ein Vektorfeld, dann ist  $\mathbf{X}(x)F(x)$  eine neue Funktion, die an jedem Ort  $x$  die Richtungsableitung von  $F$  in Richtung  $X$  angibt. Die Definition des Produktes zwischen 1-Formen und Vektorfeldern ermöglicht es, diese Richtungsableitung auch als

$$\mathbf{X}F = \mathbf{d}F(\mathbf{X}) \quad (4.77)$$

zu schreiben. Ähnlich lassen sich 2-Formen mit einem Paar von Vektorfeldern zu einer Funktion verkürzen. Für eine 2-Form  $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ , die ein äußeres Produkt von 1-Formen ist, und zwei Vektorfelder  $\mathbf{X}_1$  und  $\mathbf{X}_2$  ist diese Verkürzung durch

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \alpha_1(\mathbf{X}_1)\alpha_2(\mathbf{X}_2) - \alpha_1(\mathbf{X}_2)\alpha_2(\mathbf{X}_1) \quad (4.78)$$

gegeben.

Die Poisson-Klammer (4.68) ordnet jeder Funktion  $F(q, p)$  ein Vektorfeld  $\mathbf{X}_F$  zu

$$F \mapsto \mathbf{X}_F := \{F, \cdot\} = \sum_{k=1}^f \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k}, \quad (4.79)$$

also ist

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{p_k} &= \{p_k, \cdot\} = \frac{\partial}{\partial q_k} \\ \mathbf{X}_{q_k} &= \{q_k, \cdot\} = -\frac{\partial}{\partial p_k}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Der Zusammenhang zwischen den Poisson-Klammern und der symplektischen Form  $\omega$  wird durch die leicht nachprüfbare Gleichung

$$\{F, G\} = -\omega(\mathbf{X}_F, \mathbf{X}_G) = -\mathbf{d}F(\mathbf{X}_G) \quad (4.81)$$

hergestellt. Dieser Zusammenhang läßt sich ausnutzen, um umgekehrt die Poisson-Klammern (4.68) ausgehend von der symplektischen Form  $\omega$  zu definieren.

Im allgemeinen Fall ist der Phasenraum  $\mathcal{M}$  eine  $2f$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer symplektischen 2-Form  $\omega$ , d.h.  $\omega$  ist abgeschlossen

$$\mathbf{d}\omega = 0 \quad (4.82)$$

und nicht entartet [104–107]. Letzteres bedeutet, daß es zu jedem Vektorfeld  $\mathbf{X}_1$  ein weiteres Vektorfeld  $\mathbf{X}_2$  gibt, so daß die Verkürzung von  $\omega$  mit den beiden Vektorfeldern nicht verschwindet

$$\omega(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \neq 0. \quad (4.83)$$

In lokalen Koordinaten  $x = (x^1, \dots, x^{2f})$  hat  $\omega$  die Form

$$\omega = \sum_{k,l=1}^f \frac{1}{2} \omega_{kl}(x) \mathbf{d}x^k \wedge \mathbf{d}x^l \quad (4.84)$$

mit Koeffizienten  $\omega_{kl}(x)$ , die eine schiefsymmetrische Matrix

$$\omega_{kl}(x) = -\omega_{lk}(x) \quad (4.85)$$

von Funktionen auf dem Phasenraum bilden.

Nach dem Darboux'schen Theorem [104–107] ist es immer möglich, eine lokale Koordinatentransformation auf Koordinaten  $(q, p) = (q(x), p(x))$  durchzuführen, so daß in den neuen Koordinaten die symplektische Form auf die kanonische Form  $\omega = \sum_{k=1}^f \mathbf{d}p_f \wedge \mathbf{d}q_f$  gebracht wird. Solche Koordinaten werden kanonische Koordinaten genannt. Sie sind meistens (besonders in hochdimensionalen Mannigfaltigkeiten) nur mit hohem Aufwand zu berechnen. Es gibt im allgemeinen auch kein kanonisches Koordinatensystem, das die gesamte Mannigfaltigkeit beschreibt.

Für eine Funktion  $F$  auf dem Phasenraum wird das Vektorfeld

$$\mathbf{X}_F = \sum_{k=1}^{2f} X_F^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (4.86)$$

so definiert, daß für jedes beliebige andere Vektorfeld  $\mathbf{X}$  die Gleichung

$$\omega(\mathbf{X}_F, \mathbf{X}) = \mathbf{d}F(\mathbf{X}) = \mathbf{X}F \quad (4.87)$$

erfüllt ist. Mit  $\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial x^r}$  in (4.87) können die Koeffizienten  $X_F^s$  von  $\mathbf{X}_F$  bestimmt werden

$$\begin{aligned} \omega\left(\mathbf{X}_F, \frac{\partial}{\partial x^r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^r} F \\ \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{2f} \omega_{sr} X_F^s &= \frac{\partial}{\partial x^r} F \\ \Leftrightarrow X_F^r &= \sum_{s=1}^{2f} \omega^{sr} \frac{\partial F}{\partial x^s}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

In der letzten Zeile sind die Koeffizienten  $\omega^{sr}$  Funktionen auf dem Phasenraum, die als Matrix invers zu  $\omega_{sr}$  sind

$$\sum_{r=1}^{2f} \omega_{sr} \omega^{rt} = \delta_s^t. \quad (4.89)$$

Die Poisson-Klammer zweier Funktionen  $F, G$  kann jetzt durch (4.81) definiert werden und ergibt

$$\{F, G\} = \sum_{k,l=1}^{2f} \omega^{kl} \frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial G}{\partial x^l}. \quad (4.90)$$

Aus den Eigenschaften der symplektischen Form folgen die üblichen Eigenschaften der Poisson-Klammern. So läßt sich die Jacobi-Identität

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (4.91)$$

auf die Abgeschlossenheit der symplektischen Form  $\omega$  zurückführen. Die Nichtentartung der symplektischen Form bedeutet, daß auch die Poisson-Klammer nicht entartet ist. Dabei ist die Entartung von Poisson-Klammern gleichbedeutend mit der Existenz nichttrivialer Casimir-Funktionen  $C(x)$ . Für eine Casimir-Funktion verschwindet die Poisson-Klammer

$$\{C, F\} = 0 \quad (4.92)$$

für jede beliebige Funktion  $F$ . Ist die Poisson-Klammer über eine symplektische Form definiert, sind alle Casimir-Funktionen Konstanten im Phasenraum. Entartete Poisson-Klammern können also nicht über eine symplektische Form definiert werden – im allgemeinen kann man dann zu einer Untermannigfaltigkeit gehen, in der alle nichttrivialen Casimir-Funktionen konstant werden – diese Untermannigfaltigkeit besitzt im allgemeinen eine symplektische Struktur.

Hier gibt es eine gewisse Ähnlichkeit zwischen irreduziblen Darstellungen einer Lie-Algebra – im Darstellungsraum einer irreduziblen Darstellung sind alle Casimir-Operatoren proportional zur Identität. Ist die gleiche Lie-Algebra durch Poisson-Klammern auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  realisiert und sind alle Casimir-Funktionen auf  $\mathcal{M}$  konstant, gibt es im allgemeinen eine symplektische Form, die zu den Poisson-Klammern äquivalent ist.

### 4.3.2 Die kanonische symplektische Struktur eines Hilbert-Raums

In einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H} \equiv \mathbb{C}^m$  ist durch das Skalarprodukt kanonisch auch ein symplektisches Produkt  $\omega_{\mathcal{H}}$  gegeben, mit dessen Hilfe sich die Schrödinger-Gleichung formal in Hamiltonsche Gleichungen für ein klassisches System mit  $m$  Freiheitsgraden verwandeln läßt [106]. Das symplektische Produkt im Hilbert-Raum lautet

$$\tilde{\omega}_{\mathcal{H}}(|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle) = -2\hbar \operatorname{Im}\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \frac{\hbar}{i} (\langle\phi_2|\phi_1\rangle - \langle\phi_1|\phi_2\rangle). \quad (4.93)$$

Statt  $\hbar$  könnte man beliebige andere reelle Konstanten benutzen - die Wahl von  $\hbar$  wird bei Betrachtung des klassischen Grenzfalles seine Bedeutung erhalten.

Jeder Hilbert-Raum der Dimension  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = m$  ist also gleichzeitig ein linearer symplektischer Raum mit der reellen Dimension  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H} = 2m$ . Unitäre Transformationen, wie sie in der Quantenmechanik vom hermiteschen Hamilton-Operator  $H$  erzeugt werden, lassen das Skalarprodukt und damit auch die symplektische Form

invariant. Damit wird die Quantenmechanik rein formal zu einem Spezialfall der klassischen Mechanik.

Ist  $\{|k\rangle\}$  mit  $k = 1, 2, \dots, m$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ , läßt sich ein beliebiger Vektor  $|\phi\rangle$  in dieser Basis entwickeln

$$|\phi\rangle = \sum_{k=1}^m z_k |k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \sum_{k=1}^m (q_k + ip_k) |k\rangle \quad z_k \in \mathbb{C}; \quad q_k, p_k \in \mathbb{R}. \quad (4.94)$$

Damit sind auf  $\mathcal{H}$  Koordinaten  $z = (z_1, \dots, z_m)$  und  $(q, p) = (q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m)$  eingeführt. Das Vektorfeld  $\mathbf{X}_{|\phi_1\rangle}$ , das an jedem Ort  $z \equiv (q, p)$  in Richtung  $|\phi_1\rangle = \sum_{k=1}^m z_{1,k} |k\rangle$  zeigt, hat die Form

$$\mathbf{X}_{|\phi_1\rangle} = \sum_{k=1}^m z_{1,k} \frac{\partial}{\partial z_k} + \bar{z}_{1,k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \sum_{k=1}^m q_{1,k} \frac{\partial}{\partial q_k} + p_{1,k} \frac{\partial}{\partial p_k}. \quad (4.95)$$

Die symplektische 2-Form

$$\omega = \frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^m \mathbf{d}z_k \wedge \mathbf{d}\bar{z}_k = \sum_{k=1}^m \mathbf{d}p_k \wedge \mathbf{d}q_k \quad (4.96)$$

gibt  $\mathcal{H}$  dieselbe symplektische Struktur wie das oben definierte symplektische Produkt, d.h. es gilt

$$\omega(\mathbf{X}_{|\phi_1\rangle}, \mathbf{X}_{|\phi_2\rangle}) = \tilde{\omega}_{\mathcal{H}}(|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle). \quad (4.97)$$

Bei gegebenem Hamilton-Operator  $H$ , läßt sich nun eine Hamilton-Funktion auf dem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  definieren

$$\begin{aligned} h(|\phi\rangle) &= \sum_{k=1}^m z_k \langle k|H|\phi\rangle \\ &= \langle \phi|H|\phi\rangle \\ &= \sum_{k,l=1}^m \langle k|H|l\rangle \bar{z}_k z_l \\ &= \sum_{k,l=1}^m \frac{1}{2\hbar} \langle k|H|l\rangle (q_k - ip_k)(q_l + ip_l). \end{aligned} \quad (4.98)$$

Die Schrödinger-Gleichung mit dem Hamilton-Operator  $H$  ist formal äquivalent zu den Hamiltonschen Gleichungen mit der Hamilton-Funktion  $h$

$$i\hbar \dot{|\phi\rangle} = H|\phi\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{q}_k = \{h, q_k\} = \frac{\partial h}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = \{h, p_k\} = -\frac{\partial h}{\partial q_k}. \quad (4.99)$$

Die Hamilton-Funktion  $h$  beschreibt  $m$  gekoppelte harmonische Oszillatoren, was nicht überraschen sollte, weil die Lösung der Schrödinger-Gleichung im wesentlichen



auf der Diagonalisierung einer  $m$ -dimensionalen Matrix beruht. Die Äquivalenz ist nur formal und gibt in dieser Form keinen Aufschluß über den klassischen Grenzfall einer Quantendynamik – dazu muß diese symplektische Struktur auf der Untermannigfaltigkeit der kohärenten Zustände betrachtet werden.

Der projektive Raum  $\mathbb{P}\mathcal{H} \equiv \mathbb{P}\mathbb{C}^m = \mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$  erbt vom Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  eine symplektische Struktur, die es ebenfalls ermöglicht, die Quantendynamik in formale Übereinstimmung zu einer klassischen Dynamik zu bringen (jetzt mit  $m - 1$  Freiheitsgraden). Aus den Koordinaten  $z$  auf  $\mathcal{H}$  kann man die Verhältnisse

$$w_k = \frac{z_k}{z_n} \quad k = 1, \dots, n \quad (4.100)$$

bilden. Es ist leicht zu sehen, daß die Verhältnisse  $w = (w_1, \dots, w_{n-1}, w_{n=1})$  auf einem Strahl  $[|\phi\rangle] \equiv [w] = [w_1 : w_2 : \dots : w_{n-1} : 1]$  konstant sind. Die Zahlen  $w_k$  für  $k = 1, \dots, n - 1$  bilden affine Koordinaten auf  $\mathbb{P}\mathcal{H}$  (ist  $z_n = 0$  muß man ein anderes affines Koordinatensystem wählen). Andersherum erhält man mit

$$|w\rangle = \sum_{k=1}^m w_k |k\rangle \quad (4.101)$$

einen Vektor auf dem Strahl  $[w] \ni |w\rangle$  mit dem Normquadrat

$$\mathcal{N}(w, \bar{w}) = \langle w|w\rangle = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} |w_k|^2. \quad (4.102)$$

Das Normquadrat  $\mathcal{N}(w, \bar{w})$  ist eine erzeugende Funktion für die symplektische Form [105,106]

$$\omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}} = \frac{\hbar}{i} \sum_{k,l=1}^{m-1} \frac{\partial^2 \log \mathcal{N}(w, \bar{w})}{\partial w_k \partial \bar{w}_l} \mathbf{d}w_k \wedge \mathbf{d}\bar{w}_l. \quad (4.103)$$

Für ein  $m$ -Niveau-Atom ist jeder Zustand  $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^m$  ein kohärenter Zustand  $|\phi\rangle = |g\rangle$  mit  $g \in SU_m$ . Die symplektische Form  $\omega_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}}$  gibt dann die symplektische Struktur der kohärenten Zustände  $|\gamma\rangle$  an.

### 4.3.3 Die symplektische Struktur auf kohärenten Zuständen

Ähnlich wie der projektive Raum  $\mathbb{P}\mathcal{H}$  seine symplektische Struktur vom Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  erhält, erbt die Mannigfaltigkeit  $\Gamma^j$  der kohärenten  $SU_n$ -Zustände vom Darstellungsraum  $\mathcal{H}_\lambda$  (bzw. von  $\mathbb{P}\mathcal{H}_\lambda$ ) eine symplektische Struktur [25,35,37,106]. Es

wurde bereits betont, daß die kohärenten Zustände gut geeignet sind, um den klassischen Grenzfall zu diskutieren. Es können klassische Observable definiert werden, deren Poisson-Klammern die gleichen Vertauschungsregeln haben wie die entsprechenden quantenmechanischen Größen. Die klassischen Observablen für  $n$ -Niveau-Atome sind gerade die Erwartungswerte der Leiteroperatoren in kohärenten Zuständen

$$s_{kl}(\gamma, \bar{\gamma}) = \hbar \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle, \quad (4.104)$$

wobei die Skalierung mit  $\hbar$  nur im klassischen Grenzfall gebraucht wird.

Die Observablen  $s_{kl}$  sind Funktionen auf dem Raum  $\Gamma^j$  der kohärenten Zustände. Die Poisson-Klammern dieser Funktionen sind durch den Erwartungswert der entsprechenden quantenmechanischen Kommutatoren definiert

$$\{s_{ij}, s_{kl}\} = i\hbar \langle \gamma | [S_{ij}, S_{kl}] | \gamma \rangle = i\delta_{kj} s_{il} - i\delta_{il} s_{kj}. \quad (4.105)$$

Diese Definition gilt für alle klassischen Observablen, die linear in den Funktionen  $s_{kl}$  sind. Diese Definition reicht aus, um die Poisson-Klammer für zwei beliebige Funktionen  $F(\gamma, \bar{\gamma})$  und  $G(\gamma, \bar{\gamma})$  auf  $\Gamma^j$  zu bestimmen. Für Funktionen, die polynomial von den Observablen  $s_{ij}$  abhängen, kann man die Poisson-Klammer über die Leibniz-Regel

$$\{s_{kl} s_{k'l'}, s_{ij}\} = s_{kl} \{s_{k'l'}, s_{ij}\} + s_{k'l'} \{s_{kl}, s_{ij}\} \quad (4.106)$$

bestimmen. Es ist jedoch nichttrivial, ausgehend von (4.105) den Kommutator so einfacher Funktionen wie  $F(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma_{kl}$  und  $G(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma_{k'l'}$  zu bestimmen.

Die Poisson-Klammern (4.105) auf  $\Gamma^j$  sind äquivalent zur symplektischen Struktur, die durch die symplektische Form

$$\omega_{\Gamma^j} = \frac{\hbar}{i} \sum_{k>l, k'>l'} \omega_{kl, k'l'} \mathbf{d}\gamma_{kl} \wedge \mathbf{d}\bar{\gamma}_{k'l'} \quad (4.107)$$

mit den Koeffizienten

$$\omega_{kl, k'l'}(\gamma, \bar{\gamma}) = \frac{\partial^2 \log \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}{\partial \gamma_{kl} \partial \bar{\gamma}_{k'l'}} \quad (4.108)$$

gegeben ist. Die Summation über die Indizes  $(k, l)$  und  $(k', l')$  in (4.107) läuft über alle nichtverschwindenden Einträge der Matrix  $\gamma \in Z_{n,j}^- \subset Z_n^-$ . Die Funktion  $\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}) = \langle \gamma | | \gamma \rangle$  tauchte bereits als erzeugende Funktion der Erwartungswerte  $\langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle$  auf – hier ist sie die erzeugende Funktion der symplektischen Form. Aus der symplektischen Form  $\omega_{\Gamma^j}$  erhält man die Poisson-Klammern

$$\{F, G\} = \frac{i}{\hbar} \sum_{k>l, k'>l'} \omega^{kl, k'l'} \left( \frac{\partial F}{\partial \gamma_{k'l'}} \frac{\partial G}{\partial \bar{\gamma}_{kl}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{\gamma}_{kl}} \frac{\partial G}{\partial \gamma_{k'l'}} \right), \quad (4.109)$$

wobei die Koeffizienten  $\omega^{kl,k'l'}$  als Matrix invers zu den  $\omega_{kl,k'l'}$  sind

$$\sum_{k'>l'} \omega^{kl,k'l'} \omega_{k'l',k''l''} = \delta_{k''}^k \delta_{l''}^l. \quad (4.110)$$

Um die Äquivalenz von (4.105) mit den Poisson-Klammern (4.109) zu zeigen, soll zunächst der Erwartungswert des Kommutators  $[S_{kl}, S_{ij}]$  betrachtet werden

$$\begin{aligned} \langle \gamma | [S_{kl}, S_{ij}] | \gamma \rangle &= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})} \langle \gamma | S_{kl} S_{ij} - S_{ij} S_{kl} | \gamma \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})} \left( d_{lk}(\bar{\gamma}, \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}) - d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma}) \right) \langle \gamma | S_{ij} | \gamma \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})} \left( d_{lk}(\bar{\gamma}, \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}) - d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma}) \right) [\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}) \langle \gamma | S_{ij} | \gamma \rangle]. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Die Differentialoperatoren  $d_{lk}$  kann man zerlegen

$$d_{lk}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma}) = d_{lk}^{(0)}(\gamma) + \tilde{d}_{lk}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma}), \quad (4.112)$$

so daß  $d_{kl}^{(const)}$  ein reiner Multiplikationsoperator ist und

$$\tilde{d}_{kl} = \sum_{k'>l'} \tilde{d}_{kl,k'l'}(\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma_{k'l'}} \quad (4.113)$$

eine Summe von ersten Ableitungen nach den  $\gamma_{k'l'}$  ist. Damit läßt sich (4.111) weiter vereinfachen

$$\begin{aligned} \langle \gamma | [S_{kl}, S_{ij}] | \gamma \rangle &= \frac{\langle \gamma | S_{ij} | \gamma \rangle}{\mathcal{K}} [(\overline{d_{lk}} - d_{kl}) \mathcal{K}] + (\overline{\tilde{d}_{lk}} - \tilde{d}_{kl}) \langle \gamma | S_{ij} | \gamma \rangle \\ &= (\overline{\tilde{d}_{lk}} - \tilde{d}_{kl}) \langle \gamma | S_{ij} | \gamma \rangle. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Der Term  $\frac{\langle \gamma | S_{ij} | \gamma \rangle}{\mathcal{K}} [(\overline{d_{lk}} - d_{kl}) \mathcal{K}]$  verschwindet wegen  $\overline{d_{lk}} \mathcal{K} = \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle = d_{kl} \mathcal{K}$ . Aus der ersten Definition der Poisson-Klammern (4.105) kann nun das Vektorfeld, das von  $s_{kl}$  erzeugt wird, bestimmt werden

$$\mathbf{X}_{s_{kl}}^{(1)} = \{s_{kl}, \cdot\} = i \left( \overline{\tilde{d}_{lk}} - \tilde{d}_{kl} \right). \quad (4.115)$$

Aus der zweiten Definition der Poisson-Klammern kann das Vektorfeld direkt abgelesen werden

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{s_{kl}}^{(2)} &= \hbar \{ \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle, \cdot \} \\ &= \frac{1}{i} \sum_{i>j, i'>j'} \omega^{ij, i'j'} \left( \frac{\partial \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle}{\partial \bar{\gamma}_{ij}} \frac{\partial}{\partial \gamma_{i'j'}} - \frac{\partial \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle}{\partial \gamma_{i'j'}} \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}_{ij}} \right). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Die Äquivalenz der beiden Definitionen der Poisson-Klammer ist bewiesen, wenn für die Vektorfelder

$$\mathbf{X}_{s_{kl}}^{(1)} \stackrel{!}{=} \mathbf{X}_{s_{kl}}^{(2)} \quad (4.117)$$

$$\iff \mathbf{X}_{s_{kl}}^{(1)} F(\gamma, \bar{\gamma}) \stackrel{!}{=} \mathbf{X}_{s_{kl}}^{(2)} F(\gamma, \bar{\gamma}) \quad \text{für jede Funktion } F(\gamma, \bar{\gamma})$$

gilt. Es genügt (4.117) für Funktionen  $F(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma_{k'l'}$  zu beweisen.<sup>5</sup> Aus der ersten Definition der Poisson-Klammer folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{s_{kl}}^{(1)} \gamma_{k'l'} &= i \left( \tilde{d}_{lk}(\bar{\gamma}, \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}}) - \tilde{d}_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma}) \right) \gamma_{k'l'} \\ &= -i \tilde{d}_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma}) \gamma_{k'l'} \\ &= -i \sum_{k'' > l''} \tilde{d}_{kl, k''l''}(\gamma) \frac{\partial}{\partial \gamma_{k''l''}} \gamma_{k'l'} \\ &= -i \tilde{d}_{kl, k'l'}(\gamma). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Die Wirkung von  $\mathbf{X}_{s_{kl}}^{(2)}$  auf  $\gamma_{k'l'}$  liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{s_{kl}}^{(2)} \gamma_{k'l'} &= -i \sum_{i > j, i' > j'} \omega^{ij, i'j'} \left( \frac{\partial \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle}{\partial \bar{\gamma}_{ij}} \frac{\partial}{\partial \gamma_{i'j'}} - \frac{\partial \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle}{\partial \gamma_{i'j'}} \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}_{ij}} \right) \gamma_{k'l'} \\ &= -i \sum_{i > j} \omega^{ij, k'l'} \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}_{ij}} \left[ \frac{1}{\mathcal{K}} \left( d_{kl}^{(0)} + \tilde{d}_{kl} \right) \mathcal{K} \right] \\ &= -i \sum_{i > j} \omega^{ij, k'l'} \tilde{d}_{kl} \frac{\partial}{\partial \bar{\gamma}_{ij}} \log \mathcal{K} \\ &= -i \sum_{i > j} \omega^{ij, k'l'} \sum_{k'' > l''} \tilde{d}_{kl, k''l''}(\gamma) \frac{\partial^2}{\partial \gamma_{k''l''} \partial \bar{\gamma}_{ij}} \log \mathcal{K} \\ &= -i \sum_{i > j, k'' > l''} \omega^{ij, k'l'} \omega_{k''l'', ij} \tilde{d}_{kl, k''l''}(\gamma) \\ &= -i \tilde{d}_{kl, k'l'}(\gamma). \end{aligned} \quad (4.119)$$

Die Wirkung der Vektorfelder  $\mathbf{X}_{s_{kl}}^{(1)}$  und  $\mathbf{X}_{s_{kl}}^{(2)}$  auf die Funktion  $F(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma_{k'l'}$  stimmt also überein, womit die Äquivalenz der beiden Definitionen der Poisson-Klammer gezeigt ist.

<sup>5</sup> Der Beweis für  $F = \bar{\gamma}_{k'l'}$  ist äquivalent. Bei allgemeineren Funktionen  $F$ , die polinomial in  $\gamma_{ij}$  und  $\bar{\gamma}_{ij}$  sind, kann der Beweis von Gleichung (4.117) über die Leibniz-Regel auf die Fälle  $F = \gamma_{k'l'}$  und  $F = \bar{\gamma}_{k'l'}$  zurückgeführt werden.

#### 4.3.4 Poisson-Klammern in den Fällen $SU_2$ und $SU_3$

##### Poisson-Klammern für $SU_2$

Die symplektische Struktur auf kohärenten Zuständen der Gruppe  $SU_2$  läßt sich aus (4.107) und (4.108) mit  $\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}) = f_1(\gamma_{21}, \bar{\gamma}_{21})^{\lambda_1} = (1 + |\gamma_{21}|^2)^{\lambda_1}$  einfach ausrechnen

$$\omega = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial^2 \log \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}{\partial \gamma_{21} \partial \bar{\gamma}_{21}} \mathbf{d}\gamma_{21} \wedge \mathbf{d}\bar{\gamma}_{21} = \frac{\hbar}{i} \frac{\lambda_1}{(1 + |\gamma_{21}|^2)^2} \mathbf{d}\gamma_{21} \wedge \mathbf{d}\bar{\gamma}_{21}. \quad (4.120)$$

Die zugehörige Poisson-Klammer lautet

$$\{F, G\} = \frac{i}{\lambda_1 \hbar} (1 + |\gamma_{21}|^2)^2 \left( \frac{\partial F}{\partial \gamma_{21}} \frac{\partial G}{\partial \bar{\gamma}_{21}} - \frac{\partial F}{\partial \bar{\gamma}_{21}} \frac{\partial G}{\partial \gamma_{21}} \right). \quad (4.121)$$

##### Poisson-Klammern für $SU_3$

Für  $SU_3$  ist  $\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})$  durch (4.51) und (4.52) gegeben. Damit ergeben sich die Matrixelemente  $\omega_{kl, k'l'}$  der symplektischen Form (4.107)

$$\begin{aligned} \omega_{21,21} &= \frac{\lambda_1}{f_1^2} (1 + |\gamma_{31}|^2) + \frac{\lambda_2}{f_2^2} |\gamma_{32}|^2 (1 + |\gamma_{32}|^2) \\ \omega_{21,31} &= -\frac{\lambda_1}{f_1^2} \bar{\gamma}_{21} \gamma_{31} - \frac{\lambda_2}{f_2^2} \gamma_{32} (1 + |\gamma_{32}|^2) \\ \omega_{21,32} &= \frac{\lambda_2}{f_2^2} \gamma_{32} (\bar{\gamma}_{21} + \gamma_{32} \bar{\gamma}_{31}) \\ \omega_{31,21} &= \overline{\omega_{21,31}} \\ \omega_{31,31} &= \frac{\lambda_1}{f_1^2} (1 + |\gamma_{21}|^2) + \frac{\lambda_2}{f_2^2} (1 + |\gamma_{32}|^2) \\ \omega_{31,32} &= -\frac{\lambda_2}{f_2^2} (\bar{\gamma}_{21} + \gamma_{32} \bar{\gamma}_{31}) \\ \omega_{32,21} &= \overline{\omega_{21,32}} \\ \omega_{32,31} &= \overline{\omega_{31,32}} \\ \omega_{32,32} &= \frac{\lambda_2 f_1}{f_2^2} \end{aligned} \quad (4.122)$$

und die Matrixelemente  $\omega^{kl,k'l'}$  der Poisson-Klammer (4.109)

$$\begin{aligned}
\omega^{21,21} &= \frac{f_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( (1 + |\gamma_{21}|^2) + \frac{\lambda_2 f_1}{\lambda_1 f_2} \right) \\
\omega^{21,31} &= \frac{f_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( \bar{\gamma}_{21} \gamma_{31} + \frac{\lambda_2 f_1}{\lambda_1 f_2} \gamma_{32} \right) \\
\omega^{21,32} &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\bar{\gamma}_{21} + \gamma_{32} \bar{\gamma}_{31}) (\bar{\gamma}_{21} \gamma_{31} - \gamma_{32} (1 + |\gamma_{21}|^2)) \\
\omega^{31,21} &= \overline{\omega^{21,31}} \\
\omega^{31,31} &= \frac{f_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( (1 + |\gamma_{31}|^2) + \frac{\lambda_2 f_1}{\lambda_1 f_2} |\gamma_{32}|^2 \right) \\
\omega^{31,32} &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\bar{\gamma}_{21} + \gamma_{32} \bar{\gamma}_{31}) (1 + |\gamma_{31}|^2 - \gamma_{21} \gamma_{32} \bar{\gamma}_{31}) \\
\omega^{32,21} &= \overline{\omega^{21,32}} \\
\omega^{32,31} &= \overline{\omega^{31,32}} \\
\omega^{32,32} &= \frac{f_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left( (1 + |\gamma_{32}|^2) + \frac{\lambda_1 f_2}{\lambda_2 f_1} \right).
\end{aligned} \tag{4.123}$$

Für entartete Darstellungen braucht man lediglich Untermatrizen von  $\{\omega_{kl,k'l'}\}$  und  $\{\omega^{kl,k'l'}\}$  zu betrachten und muß die entsprechenden Variablen  $\gamma_{ij}$  null setzen.

#### 4.3.5 Kanonische Koordinaten

Kanonische Koordinaten, für die die symplektische Form auf der Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände auf kanonische Weise geschrieben werden kann, sind im allgemeinen nicht leicht zu finden. Zwar ist es nicht schwer, einen vollständigen Satz von klassischen Observablen zu finden, deren Poisson-Klammern untereinander alle verschwinden, aber das Auffinden der kanonisch konjugierten Variablen gestaltet sich schwierig. Für die Fälle  $SU_2$  und  $SU_3$  werden weiter unten explizit kanonische Koordinaten angegeben.

Zunächst soll aber gezeigt werden, daß es komplexe kanonische Koordinaten auf einer analytischen Erweiterung der kohärenten Zustände  $\Gamma^j$  gibt. Die analytische Erweiterung wird so vorgenommen, daß  $\gamma$  und  $\bar{\gamma}$  als unabhängige komplexe Variable

angesehen werden. Dann können komplexe Variable

$$\xi_{kl}(\gamma, \bar{\gamma}) = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \log \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}{\partial \gamma_{kl}} \quad \text{für } k > l \quad (4.124)$$

definiert werden. Nach der Variablentransformation

$$\gamma, \bar{\gamma} \mapsto \gamma, \xi(\gamma, \bar{\gamma}) \quad (4.125)$$

bekommt die symplektische Form das folgende kanonische Aussehen

$$\omega = \sum_{k < l \leq n} \mathbf{d}\gamma_{kl} \wedge \mathbf{d}\xi_{kl}. \quad (4.126)$$

Bei dieser symplektischen Form ist jedoch nicht jeder Summand einzeln reell, wenn man  $\bar{\gamma}$  wieder als das komplex konjugierte von  $\gamma$  ansieht. Klassische Dynamik läßt sich in diesen Variablen genauso durchführen wie in reellen Variablen auch, nur ist der Phasenraum doppelt so groß und die Anfangsbedingungen können nicht völlig frei gewählt werden, wenn man eine reelle Lösung im ursprünglichen Phasenraum erhalten will.

Die klassischen Observablen  $s_{kl} = \frac{1}{\mathcal{K}} d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma})(\mathcal{K}) = d_{kl}^{(0)}(\gamma) + \tilde{d}_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma})(\log \mathcal{K})$  lassen sich recht einfach als Funktion von  $\gamma$  und  $\xi$  ausdrücken, weil die Differentialoperatoren  $d_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma}) = d_{kl}^{(0)}(\gamma) + \tilde{d}_{kl}(\gamma, \frac{\partial}{\partial \gamma})$  nicht von  $\bar{\gamma}$  abhängen (analytisch in  $\gamma$  sind). Reelle kanonische Koordinaten kann man aus (4.126) durch eine kanonische Transformation erhalten. In Abschnitt 3.2.4 wurde ein vollständiger Satz vertauschbarer Operatoren angegeben, deren Eigenwerte einen Basiszustand in der Gelfand-Zetlin-Basis des Hilbert-Raums einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung eindeutig festlegen. Daraus läßt sich leicht ein vollständiger Satz von Funktionen auf  $\Gamma^j$  ableiten, deren Poisson-Klammern untereinander alle verschwinden. Dazu betrachtet man die Matrix  $s = \{s_{kl}\}$  und ihre Untermatrizen  $s_{(l)}$  ( $l = 1, \dots, n-1$ ), die aus den ersten  $l$  Zeilen und Spalten von  $s$  besteht. Dann bilden die  $\frac{n(n-1)}{2}$  Funktionen

$$I_{kl}(\gamma, \bar{\gamma}) \equiv \left( c_{l-1}^{(k)} \right)^{1/k} = \left( \text{Spur } s_{(l-1)}^k \right)^{1/k} \quad k = 1, \dots, l-1, \quad l = 2, \dots, n \quad (4.127)$$

den gewünschten vollständigen Satz von Funktionen, deren Poisson-Klammern untereinander alle verschwinden (in entarteten Darstellungen sind sie nicht alle unabhängig voneinander, hier soll sich aber der Einfachheit wegen auf den nicht entarteten Fall beschränkt werden). Betrachtet man  $I_{kl}$  als Funktionen von  $\gamma$  und  $\xi$ ,  $I_{kl} = I_{kl}(\gamma, \xi)$ , dann kann man (lokal) nach  $\gamma$  auflösen und eine erzeugende Funktion  $S(\xi, I)$  definieren, für die

$$\gamma_{kl} = \gamma_{kl}(\xi, I) = \frac{\partial S(\xi, I)}{\partial \xi_{kl}} \quad (4.128)$$

gilt. Für die symplektische Form gilt

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{k < l \leq n} \mathbf{d}\gamma_{kl} \wedge \mathbf{d}\xi_{kl} = \sum_{k < l \leq n} \mathbf{d} \left( \frac{\partial S}{\partial \xi_{kl}} \mathbf{d}\xi_{kl} \right) \\ &= \sum_{k < l \leq n} \mathbf{d}I_{kl} \wedge \mathbf{d} \frac{\partial S}{\partial I_{kl}} = \sum_{k < l \leq n} \mathbf{d}I_{kl} \wedge \mathbf{d} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial S}{\partial I_{kl}} \right).\end{aligned}\tag{4.129}$$

Die Gleichheit der letzten beiden Zeilen ergibt sich daraus, daß die symplektische Form  $\omega$  in den ursprünglichen Koordinaten  $\gamma, \bar{\gamma}$  eine reelle Form ist. Damit sind die reellen Funktionen

$$\phi_{kl} = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial S(\xi, I)}{\partial I_{kl}} \right)\tag{4.130}$$

die kanonisch konjugierten Koordinaten zu den Funktionen  $I_{kl}$

$$\omega = \sum_{k < l \leq n} \mathbf{d}I_{kl} \wedge \mathbf{d}\phi_{kl}.\tag{4.131}$$

Die explizite Durchführung dieses Verfahrens soll für die Fälle  $SU_2$  und  $SU_3$  in den folgenden Unterabschnitten behandelt werden.

### Reelle kanonische Koordinaten für $SU_2$

Der Fall  $SU_2$  ist relativ einfach, weil der Phasenraum nur zweidimensional ist. Die kanonische Koordinate  $I_{21}$  entspricht der dritten Komponente eines Drehimpulses

$$I_{21} = s_{11} = \frac{s_{11} - s_{22}}{2} \equiv j_z.\tag{4.132}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}I_{21} &= \hbar \frac{\lambda_1}{2} - i\gamma_{21}\xi_{21} \\ \iff \gamma_{21} &= i \frac{I_{21} - \frac{\hbar\lambda_1}{2}}{\xi_{21}} = \frac{\partial S}{\partial \xi_{21}}.\end{aligned}\tag{4.133}$$

Damit ergibt sich die erzeugende Funktion

$$S = i \left( I_{21} - \frac{\hbar\lambda_1}{2} \right) \log \xi_{21}\tag{4.134}$$



und die zu  $I_{21}$  konjugierte Koordinate

$$\phi_{21} = \operatorname{Re}(i \log \xi_{21}) = \frac{1}{2i} \log \frac{\gamma_{21}}{\bar{\gamma}_{21}}. \quad (4.135)$$

Die klassische Polarisierung  $s_{12}$  lautet als Funktion der kanonischen Koordinaten

$$s_{12} = \sqrt{\frac{\hbar^2 \lambda_1^2}{4} - I_{21}^2} \exp(i\phi_{21}) \quad s_{21} = \overline{s_{12}}. \quad (4.136)$$

### Reelle kanonische Koordinaten für $SU_3$

In Abschnitt 3.2.6 wurde der vollständige Satz von Operatoren  $Y, T_3$  und  $T^2$  für irreduzible  $SU_3$ -Darstellungen vorgestellt. Die entsprechenden klassischen Observablen lauten

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(s_{11} + s_{22} - 2s_{33}) = \frac{\hbar(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{3} - i\gamma_{31}\xi_{31} - i\gamma_{32}\xi_{32} \\ t_3 &= \frac{1}{2}(s_{11} - s_{22}) = \frac{\hbar\lambda_1}{2} - i\gamma_{21}\xi_{21} - i\frac{1}{2}\gamma_{31}\xi_{31} + i\frac{1}{2}\gamma_{32}\xi_{32} \\ t &= \sqrt{t_3^2 + s_{12}s_{21}} = \sqrt{\frac{1}{4}(\hbar\lambda_1 - i\gamma_{31}\xi_{31} + i\gamma_{32}\xi_{32}) + \gamma_{31}\xi_{21}\xi_{32}}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Löst man diese Gleichungen nach  $\gamma$  auf, erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_{21} &= \frac{1}{\xi_{21}} \left( -\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + it_3 + \sqrt{\left(\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i\left(\frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2}\right)\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \right) \\ \gamma_{31} &= -\frac{1}{\xi_{31}} \left( -\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + i\left(\frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i\left(\frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2}\right)\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \right) \\ \gamma_{32} &= \frac{1}{\xi_{32}} \left( -\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - i\left(\frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\left(\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}}\right)^2 - i\left(\frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2}\right)\frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \right). \end{aligned} \quad (4.138)$$

Mit der erzeugenden Funktion

$$\begin{aligned}
S = & \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + it_3 \log \xi_{21} - i \left( \frac{\hbar(\lambda_2 - \lambda_1)}{3} - \frac{y}{2} \right) \log \xi_{32} - \\
& - \sqrt{\left( \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} \right)^2 - i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \\
& + i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) \left( 1 - \log \xi_{31} - \right. \\
& \left. - \log \left[ i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) - \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{\left( \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} \right)^2 - i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \right] \right) \\
& - it \log \left[ -t^2 - i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - \right. \\
& \left. - it \sqrt{\left( \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} \right)^2 - i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \right] \times \\
& \times \left[ \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} \left( \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) - t \right) \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{4.139}$$

ergeben sich die kanonisch konjugierten Koordinaten

$$\begin{aligned}
\phi_y &= \frac{i}{4} \log \left[ \frac{\bar{\gamma}_{31}(\bar{\gamma}_{32}(1+|\gamma_{21}|^2) - \gamma_{21}\bar{\gamma}_{31})}{\gamma_{31}(\gamma_{32}(1+|\gamma_{21}|^2) - \bar{\gamma}_{21}\bar{\gamma}_{31})} \right] \\
\phi_{t_3} &= \frac{i}{2} \log \left[ \frac{\lambda_1 f_2 \bar{\gamma}_{21} - \lambda_2 f_1 \gamma_{32} (\bar{\gamma}_{31} - \bar{\gamma}_{32} \bar{\gamma}_{21})}{\lambda_1 f_2 \gamma_{21} - \lambda_2 f_1 \bar{\gamma}_{32} (\gamma_{31} - \gamma_{32} \gamma_{21})} \right] \\
\phi_t &= \operatorname{Re} \left( i \log \left[ -\frac{2\xi_{31}t^2}{\xi_{32}\xi_{21}} - i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2\xi_{31}t}{\xi_{32}\xi_{21}} \sqrt{\left( \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} \right)^2 - i \left( \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right) \frac{\xi_{21}\xi_{32}}{2\xi_{31}} - t^2} \right] \right).
\end{aligned} \tag{4.140}$$

Die verbliebenen klassischen  $SU_3$ -Observablen  $s_{ij}$  lassen sich über

$$\begin{aligned}
s_{12} &= \exp(i\phi_{t_3}) \sqrt{t^2 - t_3^2} \\
s_{13} &= \exp \left[ \frac{i}{2} (2\phi_y + \phi_{t_3} + \phi_t) \right] \sqrt{t + t_3} A + \\
& + \exp \left[ \frac{i}{2} (2\phi_y + \phi_{t_3} - \phi_t) \right] \sqrt{t - t_3} B \\
s_{23} &= \exp \left[ \frac{i}{2} (2\phi_y - \phi_t + \phi_{t_3}) \right] \sqrt{t - t_3} A - \\
& - \exp \left[ \frac{i}{2} (2\phi_y - \phi_t - \phi_{t_3}) \right] \sqrt{t + t_3} B
\end{aligned} \tag{4.141}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2t} \sqrt{\left(\frac{\hbar(\lambda_1 - \lambda_2)}{3} + t + \frac{y}{2}\right) \left(\frac{\hbar(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{3} + t + \frac{y}{2}\right) \left(\frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - t - \frac{y}{2}\right)} \\ B &= \frac{1}{2t} \sqrt{\left(-\frac{\hbar(\lambda_1 - \lambda_2)}{3} + t - \frac{y}{2}\right) \left(\frac{\hbar(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{3} - t + \frac{y}{2}\right) \left(\frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{3} + t - \frac{y}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.142)$$

durch die kanonischen Variablen ausdrücken.<sup>6</sup>

Der Wertebereich der Wirkungsvariablen lautet

$$\begin{aligned} y &\in \left[ -\frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3}, \frac{\hbar(\lambda_1 - \lambda_2)}{3} \right] \\ t &\in \left[ \max \left\{ \frac{y}{2} - \frac{\hbar(\lambda_2 - \lambda_1)}{3}, \frac{\hbar(\lambda_2 - \lambda_1)}{3} - \frac{y}{2} \right\}, \right. \\ &\quad \left. \min \left\{ \frac{y}{2} + \frac{\hbar(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{3}, \frac{\hbar(2\lambda_1 + \lambda_2)}{3} - \frac{y}{2} \right\} \right] \\ t_3 &\in [-t, t]. \end{aligned} \quad (4.143)$$

---

<sup>6</sup> Die kanonischen Koordinaten auf kohärenten Zuständen der Lie-Gruppe  $SU_3$  (bzw. auf koadjungierten Bahnen von  $SU_3$ , die mathematisch äquivalente Mannigfaltigkeiten zu den kohärenten Zuständen bilden – siehe Anhang B und [37, 106]) sind auch auf andere Weise ausgerechnet worden [34, 108].



## 5. Klassische $SU_n$ -Observablen und der klassische Grenzfall

In diesem Kapitel wird die klassische Dynamik von Observablen  $s_{ij}$  („klassische  $SU_n$ -Observablen“) dargestellt. Die Poisson-Klammern der klassischen  $SU_n$ -Observablen erfüllen die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}_n$  (bzw.  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ). Eine solche Dynamik entsteht im klassischen Grenzfall für global gekoppelte  $n$ -Niveau-Atome. In Abschnitt 5.1 wird sie zunächst ohne Bezugnahme auf den klassischen Grenzfall in ihrem eigenen Recht vorgeführt. Als klassische Phasenräume erweisen sich die Mengen aller spurlosen hermiteschen  $n \times n$ -Matrizen mit den gleichen Eigenwerten.<sup>1</sup> Als symplektische Mannigfaltigkeiten sind die Phasenräume für die Dynamik von klassischen  $SU_n$ -Observablen äquivalent zu den kohärenten Zuständen (siehe Abschnitt 4.3).<sup>2</sup>

In Abschnitt 5.2 wird gezeigt, wie sich eine solche klassische Dynamik bei global gekoppelten  $n$ -Niveau-Atomen ergibt, wenn die Dimension des Hilbert-Raums nach unendlich geht [33,109,106]. Der Hilbert-Raum ist durch eine irreduzible Darstellung  $\lambda = [\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_{n-1}]$  festgelegt, und die Dimension des Hilbert-Raums ist eine wachsende Funktion der  $\lambda_k$ . Eine Route zum klassischen Grenzfall ist durch eine Folge von irreduziblen Darstellungen gegeben, bei der die Dimension des Hilbert-Raums ins Unendliche wächst. Grundsätzlich gibt es viele Routen, auf denen die Dimension des Hilbert-Raums wachsen kann, und verschiedene Routen führen auf verschiedene Phasenräume. Für eine gegebene irreduzible Darstellung  $\lambda$  gibt es jedoch genau eine kanonische Route zum klassischen Grenzfall. Auf dieser Route sind die Verhältnisse  $\frac{\lambda_k}{\lambda_l}$  konstant, und die kohärenten Zustände haben auf der gesamten Route eine äquivalente symplektische Struktur. Für  $SU_3$ -Observable ist der klassische Grenzfall ausführlich in [77,110] beschrieben.

---

<sup>1</sup> Solche Räume lassen sich auch als Restklassen der Lie-Gruppe  $SU_n$  bezüglich abgeschlossener Untergruppen auffassen.

<sup>2</sup> In der mathematischen Literatur sind diese Phasenräume als Bahnen der koadjungierten Darstellung oder einfach als koadjungierte Bahnen von  $SU_n$  bekannt [106,107] – eine kleine mathematische Einführung in koadjungierte Bahnen ist im Anhang B zu finden.

## 5.1 Die klassische Lie-Algebra der $SU_n$ -Observablen

Die klassische  $SU_n$ -Observablen sind  $n^2$  komplexe Größen  $s_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) mit

$$s_{ij} = \bar{s}_{ji} \quad \sum_{k=1}^n s_{kk} = 0, \quad (5.1)$$

deren Poisson-Klammern durch

$$\{s_{ij}, s_{kl}\} = i\delta_{kj}s_{il} - i\delta_{il}s_{kj} \quad (5.2)$$

gegeben sind.<sup>3</sup> Die Observablen  $s_{ij}$  bilden eine hermitesche spurlose Matrix

$$s = \{s_{ij}\}. \quad (5.3)$$

Sie spannen einen Raum  $\mathcal{M}$  der reellen Dimension  $n^2 - 1$  auf. Die Dynamik dieser Observablen ist mit einer (reellen) Hamilton-Funktion  $H = H(s_{ij})$  durch die Hamiltonschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}s_{ij} = \{H, s_{ij}\} \quad (5.4)$$

gegeben.

Es ist leicht nachzuweisen, daß die Poisson-Klammern der **Casimir-Funktionen**

$$c_k(s_{ij}) = \text{Spur } s^k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.5)$$

mit jeder Hamilton-Funktion  $H(s_{ij})$  verschwinden

$$\{H, c_k\} = 0. \quad (5.6)$$

Die Casimir-Funktionen sind Konstanten der Bewegung für jede Hamilton-Funktion (wie in der Quantenmechanik von  $SU_n$ -Observablen, wo die Casimir-Operatoren Bewegungskonstanten sind und diese Eigenschaft unabhängig davon ist, wie der Hamilton-Operator aus den  $SU_n$ -Observablen aufgebaut ist). Der Wert der Casimir-Funktion  $c_1$  wurde bereits festgelegt  $c_1 = \sum_{k=1}^n s_{kk} = 0$ .<sup>4</sup> Es bleiben also  $n - 1$  nichttriviale Bewegungskonstanten, und jede Dynamik ist auf Hyperflächen  $c_k(s_{ij}) = c_k^{(0)}$  ( $k = 2, \dots, n$ ) mit reellen Konstanten  $c_k^{(0)}$  eingeschränkt.

Mit  $c \equiv (c_2^{(0)}, \dots, c_n^{(0)})$  bildet

$$\mathcal{M}_c = \{s \in \mathcal{M} : \text{Spur } s^2 = c_2^{(0)}, \dots, \text{Spur } s^n = c_n^{(0)}\} \subset \mathcal{M} \quad (5.7)$$

<sup>3</sup> Das sind die Vertauschungsregeln der Lie-Algebra  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ , die hier wegen der Einschränkungen (5.1) auch als  $\mathfrak{su}_n$ -Vertauschungsregeln gelten dürfen.

<sup>4</sup> Für Observable  $s_{ij}$ , die  $c_1 = 0$  nicht erfüllen, kann zu Observablen  $s'_{kl} = s_{kl} - \frac{c_1}{n}$  übergegangen werden, die diese Bedingung erfüllen.

einen Phasenraum für die klassische Dynamik der  $SU_n$ -Observablen.<sup>5</sup> Im Phasenraum  $\mathcal{M}_c$  schneiden sich die  $n - 1$  Hyperflächen, die durch  $c_k = c_k^{(0)}$  charakterisiert sind. Damit hat der Phasenraum generisch die Dimension  $n(n - 1)$ . Für einige Werte der Casimir-Funktionen können auch Phasenräume niedrigerer Dimension entstehen. Eine alternative Beschreibung des Phasenraums  $\mathcal{M}_c$  ist besser geeignet, um die Dimension zu untersuchen. Die Eigenwerte  $\sigma_k$  der Matrix  $s$  können zu einem Vektor  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  zusammengefaßt werden, der so geordnet sein soll, daß

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \quad (5.8)$$

gilt. Die Eigenwerte sind durch die Nullstellen des charakteristischen Polinoms

$$\det(x\mathbb{I} - s) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = (x - \sigma_1)(x - \sigma_2) \cdots (x - \sigma_n) \quad (5.9)$$

festgelegt. Dabei lassen sich alle Koeffizienten  $a_k$  durch die Spuren  $c_k = \text{Spur}s^k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) ausdrücken

$$a_k = a_k(c). \quad (5.10)$$

Alle Koeffizienten  $a_k$  und damit auch die Eigenwerte  $\sigma$  sind also auf den Phasenräumen  $\mathcal{M}_c$  konstant. Andersherum sind die Casimir-Funktionen eindeutig durch die Eigenwerte gegeben. Der Phasenraum  $\mathcal{M}_c$  wird durch alle hermiteschen spurlosen Matrizen mit den gleichen Eigenwerten  $\sigma$  aufgespannt

$$\mathcal{M}_c \equiv \mathcal{M}_\sigma = \{s \in \mathcal{M} : \det(\sigma_k - s) = 0, k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (5.11)$$

Mit dieser Beschreibung des Phasenraumes ist es einfach, die Dimension von  $\mathcal{M}_\sigma$  abzuzählen. Jede Matrix  $s \in \mathcal{M}_\sigma$  läßt sich durch eine Konjugation mit einer Matrix  $g \in SU_n$  diagonalisieren

$$s = g d_\sigma g^\dagger \quad (5.12)$$

mit

$$d_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \sigma_n \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

<sup>5</sup> Man könnte diese Phasenräume in Analogie zur Quantenmechanik irreduzibel nennen.

Der Zusammenhang zwischen  $s$  und  $g$  ist nicht eindeutig. Wenn  $g$  die Matrix  $s$  diagonalisiert, dann auch die Matrix  $gh$ , falls  $h \in SU_n$  die Diagonalmatrix  $d_\sigma$  invariant läßt. Die Matrizen  $h$ , die  $d_\sigma$  invariant lassen, bilden eine Untergruppe  $I_{d_\sigma}$  von  $SU_n$

$$I_{d_\sigma} = \{h \in SU_n : hd_\sigma h = d_\sigma\}, \quad (5.14)$$

die **Isotropiegruppe** von  $d_\sigma$ .

Seien zunächst die Eigenwerte  $\sigma$  nicht entartet  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_n$ . Dann sind die einzigen Matrizen, die  $d_\sigma$  invariant lassen selbst Diagonalmatrizen. Die Untergruppe aller Diagonalmatrizen in  $SU_n$  ist äquivalent zum  $n-1$ -fachen kartesischen Produkt von  $U_1$ . Also lautet die Isotropiegruppe

$$I_{d_\sigma} = (U_1)^{n-1}. \quad (5.15)$$

Sind zwei Eigenwerte entartet, zum Beispiel  $\sigma_1 = \sigma_2$ , dann läßt auch jede Matrix der Form

$$h = \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n-2} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

die Diagonalmatrix  $d_\sigma$  invariant, wobei  $\tilde{h}$  eine  $2 \times 2$ -Matrix aus  $SU_2$  und  $\mathbb{I}_{n-2}$  eine  $(n-2) \times (n-2)$ -Einheitsmatrix ist. Damit vergrößert sich die Isotropiegruppe auf

$$I_{d_\sigma} = SU_2 \times (U_1)^{n-2}. \quad (5.17)$$

Je mehr Entartung auftritt, desto größer wird die Isotropiegruppe. Die weitere Diskussion der Isotropiegruppen verläuft wie bei der Bestimmung der Isotropiegruppe des Zustands höchsten Gewichts (bzw. eines beliebigen kohärenten Zustands) in einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung  $\lambda$  in Abschnitt 4.1.2.<sup>6</sup>

Damit ist der Phasenraum  $\mathcal{M}_\sigma$  topologisch äquivalent zu den Restklassen

$$\mathcal{M}_\sigma \equiv SU_n / I_{d_\sigma} \quad (5.18)$$

mit der Dimension

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_\sigma = \dim_{\mathbb{R}} SU_n - \dim_{\mathbb{R}} I_{d_\sigma}. \quad (5.19)$$

Einen Punkt auf dem Phasenraum  $\mathcal{M}_\sigma$  kann man durch untere Dreiecksmatrizen  $\gamma \in Z_{n,j}^-$  parametrisieren (siehe Abschnitt 4.1.2 und 4.1.3), indem man

$$s(\gamma) = g(\gamma, \phi = 0) d_\sigma g(\gamma, \phi = 0)^\dagger \quad (5.20)$$

<sup>6</sup> Die ganzen Zahlen  $\lambda_k$  bei den irreduziblen Darstellungen entsprechen dabei hier den Differenzen von Eigenwerten  $\sigma_k - \sigma_{k+1}$ .



setzt, wobei  $g(\gamma, \phi) \in SU_n$  durch (3.48) gegeben ist. Die gesamte Struktur ähnelt sehr den kohärenten Zuständen. Die Mannigfaltigkeit der kohärenten Zustände für eine irreduzible  $SU_n$ -Darstellung und der Phasenraum  $\mathcal{M}_\sigma$  sind sowohl topologisch als auch symplektisch äquivalent, wenn man  $\hbar\lambda_k \equiv \sigma_k - \sigma_{k+1}$  setzt. Die klassischen Observablen  $s_{ij}(\gamma)$ , die in Gleichung 4.104 für kohärente Zustände definiert wurde, und die Matrixelemente von  $s(\gamma)$  sind die gleichen Funktionen von  $\gamma$  und haben die gleichen Poisson-Klammern. Die symplektische Form auf dem Phasenraum  $\mathcal{M}_\sigma$  lautet somit

$$\omega_{\Gamma^j} = \frac{1}{i} \sum_{k>l, k'>l'} \omega_{kl, k'l'} \mathbf{d}\gamma_{kl} \wedge \mathbf{d}\gamma_{k'l'} \quad (5.21)$$

mit den Koeffizienten

$$\omega_{kl, k'l'}(\gamma, \bar{\gamma}) = \frac{\partial^2 \log \mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma})}{\partial \gamma_{kl} \partial \gamma_{k'l'}} \quad (5.22)$$

und der erzeugenden Funktion

$$\mathcal{K}(\gamma, \bar{\gamma}) = \prod_{k=1}^{n-1} f_k(\gamma, \bar{\gamma})^{\sigma_k - \sigma_{k+1}}. \quad (5.23)$$

Da die Casimir-Funktionen  $c_k$  konstant auf  $\mathcal{M}_\sigma$  sind, erlaubt die Diagonalmatrix  $d_\sigma$  deren einfache Berechnung

$$c_k = \text{Spur } s^k = \sum_{j=1}^n \sigma_j^k. \quad (5.24)$$

## 5.2 Der klassische Grenzfall für quantenmechanische $SU_n$ -Observable

Die Dynamik der quantenmechanischen Leiteroperatoren  $S_{kl}$  ist im Heisenberg-Bild durch die Heisenberg-Gleichung

$$\dot{S}_{kl}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, S_{kl}(t)] \quad (5.25)$$

gegeben, wobei die zeitabhängigen Leiteroperatoren mit den Anfangsbedingungen

$$S_{kl}(t = 0) = S_{kl} \quad (5.26)$$

versehen werden. Die Vertauschungsregeln (2.13) bleiben dann für die zeitabhängigen Leiteroperatoren erhalten. Der hermitesche Hamilton-Operator sei in diesem Abschnitt ein Polynom in den Leiteroperatoren der Form  $S_{kl}$

$$H = \sum_{k_1, k_2=1}^n a_{k_1 k_2}^{(1)} \hbar S_{k_1 k_2} + \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^n a_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(2)} \hbar^2 S_{k_1 k_2} S_{k_3 k_4} + \dots \quad (5.27)$$

Die Skalierung der einzelnen Terme muß hier so vorgenommen werden, daß  $\hbar$  immer in der gleichen Potenz steht wie die Operatoren  $S_{kl}$ , damit ein klassischer Grenzfall existiert.<sup>7</sup> Die Koeffizienten  $a^{(i)}$  dürfen nicht von  $\hbar$  abhängen. Außerdem soll angenommen werden, daß die Operatoren  $S_{kl}$  die Generatoren einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung  $\lambda$  bilden.

Die kohärenten Zustände stehen im Mittelpunkt dieser Konstruktion des klassischen Grenzfall. Die Mannigfaltigkeit  $\Gamma^j$  der kohärenten Zustände bildet mit ihrer symplektischen Struktur den richtigen klassischen Phasenraum für den klassischen Grenzfall. Die Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  des klassischen Systems muß also die halbe Dimension von  $\Gamma^j$  sein

$$f = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \Gamma^j. \quad (5.28)$$

Der klassischen Grenzfall ist eine Dynamik, die sich formal für

$$\hbar \longrightarrow 0 \quad (5.29)$$

ergibt. Gleichzeitig muß die Niveaudichte ansteigen, d.h. die Dimension des Hilbert-Raums muß nach unendlich gehen. Die Dimension des Hilbert-Raums  $\mathcal{H}_\lambda$  einer irreduziblen  $SU_n$ -Darstellung  $\lambda$  ist ein Polynom in den ganzen Zahlen  $\lambda_k$  des Grades  $f$ ,

<sup>7</sup> Wenn  $\hbar$  in höherer Potenz steht als die  $S_{kl}$ , fällt der Term im klassischen Grenzfall weg. Steht  $\hbar$  in kleinerer Potenz, divergiert die klassische Hamilton-Funktion.

dessen Wert in allen  $\lambda_i$  wächst. Der natürlichste Weg, die Dimension nach unendlich gehen zu lassen, besteht darin, eine Folge  $\lambda^{(k)}$  (mit  $k = 1, 2, \dots$ ) von irreduziblen Darstellungen zu betrachten, so daß

$$\begin{aligned}\lambda_1^{(1)} &= \lambda_1 & \lambda_2^{(1)} &= \lambda_2 & \dots \\ \lambda_1^{(k)} &= k\lambda_1 & \lambda_2^{(k)} &= k\lambda_2 & \dots\end{aligned}\tag{5.30}$$

Auf diese Weise werden alle Quotienten  $\frac{\lambda_i}{\lambda_j}$  festgehalten. Außerdem ist die symplektische Struktur der kohärenten Zustände in diesen Darstellungen äquivalent, wenn man

$$\hbar = \frac{1}{\sum_{l=1}^{n-1} \lambda_l^{(k)}} = \frac{1}{k \sum_{l=1}^{n-1} \lambda_l} \sim \frac{1}{k}\tag{5.31}$$

setzt. Damit gilt für die Dimension des Hilbert-Raums

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_{\lambda^{(k)}} \sim k^f \sim \frac{1}{\hbar^f}.\tag{5.32}$$

Der Phasenraum, die Poisson-Klammern (die symplektische Struktur) und klassische Observable  $s_{kl} = \hbar \langle \gamma | S_{kl} | \gamma \rangle$  wurden bereits im Kapitel 4 über kohärente Zustände ausführlich behandelt.

Um die Dynamik im klassischen Grenzfall zu erhalten, nimmt man den Erwartungswert der Heisenberg-Gleichung in kohärenten Zuständen

$$\langle \gamma | \dot{S}_{ij}(t) | \gamma \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle \gamma | [H, S_{ij}(t)] | \gamma \rangle.\tag{5.33}$$

Dabei braucht man nicht annehmen, daß sich das System tatsächlich in einem kohärenten Zustand befindet. Alle Größen sind als Funktionen von  $\gamma$ , d.h. als Funktionen auf dem Phasenraum zu betrachten. Die Funktion  $s_{ij}(t) = \hbar \langle \gamma | S_{ij}(t) | \gamma \rangle$  auf dem Phasenraum enthält alle Information über den Operator  $S_{ij}(t)$ .

Nachdem man (5.33) auf beiden Seiten mit  $\hbar$  multipliziert hat, sind sie im Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  endlich. Es ergibt sich die klassische Dynamik

$$\dot{s}_{ij}(t) = \{H^{kl}, s_{ij}(t)\}\tag{5.34}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}H^{kl} &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \gamma | H | \gamma \rangle \\ &= \sum_{k_1, k_2=1}^n a_{k_1 k_2}^{(1)} s_{k_1 k_2} + \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4=1}^n a_{k_1 k_2 k_3 k_4}^{(2)} s_{k_1 k_2} s_{k_3 k_4} + \dots\end{aligned}\tag{5.35}$$

Zunächst soll gezeigt werden, daß die erste Zeile von (5.35) tatsächlich gegen die in der zweiten Zeile angegebene Funktion konvergiert. Dies folgt direkt aus

$$\begin{aligned} \hbar^2 \langle \gamma | S_{k_1 k_2} S_{k_3 k_4} | \gamma \rangle &= \hbar \frac{1}{\mathcal{K}} d_{k_1 k_2} (\mathcal{K} S_{k_3 k_4}) = \\ &= s_{k_1 k_2} s_{k_3 k_4} + \hbar \tilde{d}_{k_1 k_2} S_{k_3 k_4} \longrightarrow s_{k_1 k_2} s_{k_3 k_4} \quad \text{für } \hbar \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Hier ist  $\mathcal{K} = \langle \gamma | | \gamma \rangle$  die erzeugende Funktion (4.5) und  $d_{ij}$  und  $\tilde{d}_{ij}$  sind die durch (4.24) und (4.112) gegebenen Differentialoperatoren. Die Erwartungswerte von Leiteroperatoren in kohärenten Zuständen faktorisieren im klassischen Grenzfall. Diese Eigenschaft kann ausgenutzt werden, um zu zeigen, daß die rechte Seite von (5.33) gegen die Poisson-Klammer (5.34) konvergiert. Speziell gilt

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} \langle \gamma | [ \hbar S_{k_1 k_2}, \hbar S_{k_3 k_4}, \hbar S_{k_5 k_6} ] | \gamma \rangle &= \frac{i}{\hbar} ( \langle \gamma | \hbar S_{k_1 k_2} [ \hbar S_{k_3 k_4}, \hbar S_{k_5 k_6} ] | \gamma \rangle + \\ &+ \langle \gamma | [ \hbar S_{k_1 k_2}, \hbar S_{k_5 k_6} ] \hbar S_{k_3 k_4} | \gamma \rangle ) \\ &\xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} s_{k_1 k_2} \{ s_{k_3 k_4}, s_{k_5 k_6} \} + \{ s_{k_1 k_2}, s_{k_5 k_6} \} s_{k_3 k_4} \\ &= \{ s_{k_1 k_2} s_{k_3 k_4}, s_{k_5 k_6} \}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Es besteht keine Schwierigkeit, dies auf höhere Ordnungen zu verallgemeinern. Damit ist die Konvergenz auf die klassische Dynamik (5.34) gezeigt.

Bisher wurden keine expliziten Annahmen über den Zustand des Systems gemacht. Der beschriebene klassische Grenzfall behandelt nur die Operatoren  $S_{ij}(t)$  im Heisenberg-Bild. Diese Operatoren werden dazu als Funktionen auf dem Phasenraum dargestellt, die einen wohldefinierten klassischen Grenzfall haben. Um den klassischen Grenzfall abzurunden, müßte man zusätzlich den Zustandsoperator  $|\Psi\rangle$  behandeln, indem man ihm eine Verteilungsfunktion auf dem Phasenraum zuordnet – etwa die Husimi-Funktion

$$H(\gamma, \bar{\gamma}) = |\langle \gamma | \Psi \rangle|^2. \quad (5.38)$$

Diese Wahl ist jedoch nicht eindeutig. Außerdem gibt es keine natürliche Vorschrift, wie man bei der Folge von irreduziblen Darstellungen  $\{\lambda^{(k)}\}$  in jedem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_{\lambda^{(k)}}$  jeweils einen Zustand  $|\Psi^{(k)}\rangle$  festlegen könnte. Eine solche Vorschrift ist nur dann natürlich, wenn der Zustand  $|\Psi\rangle$  ein kohärenter Zustand  $|\gamma_\Psi\rangle$  ist. Dann ist ein Punkt im Phasenraum festgelegt, der in jeder irreduziblen Darstellung einen kohärenten Zustand definiert. Für eine solche Wahl des Zustands ist der betrachtete klassische Grenzfall der Größe  $s_{kl}$  äquivalent zu der Betrachtung der Größen

$$\sigma_{kl}(t) = \hbar \langle \Psi | S_{kl}(t) | \Psi \rangle. \quad (5.39)$$

Im allgemeinen werden die Größen  $\sigma_{kl}$  immer dann eine wohldefinierte klassische Grenzdyamik haben, wenn sich die Husimi-Funktion  $|\langle \gamma | \Psi \rangle|^2$  für  $\hbar \rightarrow 0$  auf einen Punkt im Phasenraum konzentriert (d.h. zu einer  $\delta$ -Funktion wird). Ist das nicht der Fall (wie zum Beispiel bei Katzen-Zuständen), dann können die Erwartungswerte  $\langle \Psi | \hbar S_{kl} \hbar S_{ij} | \Psi \rangle$  für  $\hbar \rightarrow 0$  nicht faktorisieren  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \Psi | \hbar S_{kl} \hbar S_{ij} | \Psi \rangle \neq \sigma_{kl} \sigma_{ij}$ . Die Dynamik der  $\sigma_{kl}(t)$  hat dann keinen wohldefinierten klassischen Grenzfall.



## 6. Quantenchaos von $SU_3$ -Observablen

In diesem Kapitel werden numerische Resultate vorgestellt, die die Abhängigkeit der Niveaustatistik und der Niveaudynamik eines Hamilton-Operators, der aus den  $SU_3$ -Observablen  $S_{kl}$  aufgebaut ist, von der irreduziblen Darstellung  $\lambda = [\lambda_1; \lambda_2]$  illustrieren. Die klassischen Phasenräume sind in diesem Fall sechsdimensional (drei Freiheitsgrade) für die nichtentarteten Darstellungen und vierdimensional (zwei Freiheitsgrade) für die entarteten Darstellungen ( $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$  oder  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ ).

Alle in diesem Kapitel untersuchten Hamilton-Operatoren haben neben der Energie eine weitere Erhaltungsgröße. Nimmt man den klassischen Grenzfall für ein Multiplett dieser Erhaltungsgröße, dann verringert sich die Anzahl der Freiheitsgrade im klassischen Grenzfall um eins.<sup>1</sup> Für die entarteten Darstellungen ergibt sich damit eine klassische Dynamik mit einem Freiheitsgrad, die immer integrabel ist. Für die nichtentarteten Darstellungen ist Chaos bei zwei Freiheitsgraden jedoch möglich. Die Hamilton-Operatoren in diesem Kapitel sind so gewählt, daß im nichtentarteten Fall ein gemischter Phasenraum entsteht, der bei Energien in der Mitte des klassischen Spektrums überwiegend chaotisch ist.

Die quantenmechanischen Signaturen von Chaos und Integrabilität zeigen sich deutlich in der Niveauabstandsverteilung  $P(s)$ . Gemäß einer Vermutung von *Bohigas, Giannoni* und *Schmit* [111] werden die Fluktuationen im Spektrum eines Hamilton-Operators, der im klassischen Grenzfall eine chaotische Dynamik erzeugt, durch die Zufallsmatrixtheorie beschrieben. Diese Vermutung ist durch zahlreiche experimentelle und numerische Daten gut bestätigt [39,112–114]. Die in diesem Kapitel betrachteten Dynamiken sind invariant unter einer Zeitumkehrtransformation, so daß mit dem Gaußschen orthogonalen Ensemble (GOE) verglichen werden muß, das lineare Niveauabstoßung in  $P(s)$  vorhersagt. Systeme, deren klassischer Grenzfall integrabel ist und mindestens zwei Freiheitsgrade hat, haben generisch eine Poisson-Verteilung für  $P(s)$  [115], d.h. es herrscht Niveauhäufung. Klassisch integrable Systeme mit nur einem Freiheitsgrad haben keine generische Niveauabstandsverteilung. Sie zeigen oft ein sehr rigides Spektrum.

---

<sup>1</sup> Bei einer klassischen Dynamik mit  $f$  Freiheitsgraden  $(q, p) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$  und  $k < f$  Konstanten der Bewegung  $C_i$  in Involution ( $\{H, C_i\} = 0$  und  $\{C_i, C_j\} = 0$ ), existiert eine kanonische Transformation auf neue Koordinaten  $(Q, P)$  mit  $P_i = C_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Die Hamilton-Funktion  $H(P, Q)$  hängt von neuen  $Q_i$  mit  $i = 1, \dots, k$  nicht ab, so daß eine klassische Dynamik mit  $f - k$  Freiheitsgraden entsteht, wenn alle Konstanten der Bewegung feste Werte  $C_i = c_i$  haben.

In Abschnitt 6.1 wird die Niveauabstandsverteilung  $P(s)$  und deren Integral  $N(s)$  von zwei beispielhaften Hamilton-Operatoren mit Phasenraumportraits in Poincaré-Schnitten durch die Energieschale verglichen. Für entartete Darstellungen zeigt sich erwartungsgemäß Niveauhäufung als Signatur von Integrabilität. Für nichtentartete Darstellungen gibt es einen Übergang von Niveauhäufung zu Niveauabstoßung, der von einem Anwachsen der chaotischen Anteile des Phasenraums der klassischen Dynamik begleitet wird [110].

In Abschnitt 6.2 werden einparametrische Familien von Hamilton-Operatoren der Form  $H(\lambda) = H_1 \sin \lambda + H_2 \cos \lambda$  in einem Hilbert-Raum der Dimension  $N$  betrachtet. Wenn man  $\lambda$  formal als eine Zeit betrachtet, führt das zu einer Dynamik der Eigenwerte  $E_k(\lambda)$  und Eigenvektoren  $|k\rangle(\lambda)$ , die man durch Differentialgleichungen erster Ordnung beschreiben kann, wie von *P. Pechukas* gezeigt wurde [116]. *T. Yukawa* zeigte, daß sich diese Differentialgleichungen als Hamiltonsche Gleichungen für ein fiktives eindimensionales Gas (das Pechukas-Yukawa-Gas) aus  $N$  Teilchen interpretieren lassen [117,118]. Der Eigenwert  $E_k(\lambda)$  beschreibt dann den Ort des  $k$ -ten Teilchens zur Zeit  $\lambda$ . Die Wechselwirkung der Teilchen wird durch Kopplungskonstanten beschrieben, die selbst dynamische Variable im Phasenraum darstellen.<sup>2</sup> Trotz dieser hochgradig nichtlinearen Wechselwirkung ist die Hamiltonsche Dynamik integrabel, was nicht verwundert, wenn man bedenkt, daß alle dynamischen Größen durch Diagonalisierung einer hermiteschen Matrix gewonnen werden können.

Laufen zwei eng beieinanderliegende benachbarte Eigenwerte aufeinander zu, dann kommt es für  $H(\lambda)$  mit chaotischem klassischem Äquivalent zu einer Abstoßung der Eigenwerte, die eine Kreuzung verhindert. Solche vermiedenen Kreuzungen treten auch bei klassisch integrablen Systemen auf, jedoch ist die Anzahl der deutlich vermiedenen Kreuzungen viel geringer als im chaotischen Fall. Der Status von vermiedenen Kreuzungen im klassisch integrablen Fall wird in Abschnitt 6.2.1 behandelt. Niveaudynamik in diesem Sinn bietet einen Zugang, die bereits oben erwähnte Vermutung von *Bohigas*, *Giannoni* und *Schmit* [111] plausibel zu machen, gemäß der Fluktuationen im Spektrum eines quantenmechanischen Systems mit chaotischem klassischem Äquivalent durch Zufallsmatrixtheorie beschrieben werden können. In der Tat konnte gezeigt werden, daß die statistische Mechanik des Pechukas-Yukawa-Gases über eine geeignet gewählte Zustandssumme in der Lage ist, alle spektralen Korrelationsfunktionen der Zufallsmatrixtheorie für orthogonale, unitäre oder symplektische Ensembles wiederzugeben [40,120–123]. Klassisch chaotische  $H(\lambda)$  zeigen generisch vermiedene Kreuzungen in den Eigenwerten  $E_k(\lambda)$  alias Stöße der Gasteilchen des Pechukas-Yukawa-Gases. Nach wenigen Stößen darf man erwarten, einen typischen Gleichgewichtszustand erreicht zu haben.<sup>3</sup> Auf diese Weise kann gezeigt

<sup>2</sup> *P. Pechukas* und *T. Yukawa* betrachten einparametrische Familien des Typs  $H(\lambda) = H_0 + \lambda V$ , die sich in den hier wesentlichen Eigenschaften nicht von den hier betrachteten Familien unterscheiden [40,119].

<sup>3</sup> Integrale einparametrische Familien  $H(\lambda)$  entsprechen besonderen Anfangsbedingungen für das



werden, daß ein Ensemble von quantenmechanischen Systemen mit chaotischen klassischen Gegenstücken im Ensemblemittel die von der Zufallsmatrixtheorie vorhergesagten spektralen Fluktuationen besitzt (bis auf Korrekturen der Größenordnung  $O(N)$  – mehr darf auch gar nicht erwartet werden). Wegen der bekannten Ergodizität des Pechukas-Yukawa-Gases gilt dies ebenso für eine einparametrische Familie (eine Realisierung des Pechukas-Yukawa-Gases)  $H(\lambda)$ , wenn man über die „Zeit“  $\lambda$  mittelt. Die mittlere Stoßzeit  $\Delta\lambda_S$ , also der mittlere Abstand zwischen zwei (im allgemeinen vermiedenen) Kreuzungen eines Eigenwertes  $E_{k(\lambda)}$ , gibt das Parameterintervall an, auf dem die Mittelung über den Parameter  $\lambda$  mit der Ensemblemittelung gut übereinstimmt.

In Abschnitt 6.2.2 werden Niveaudynamiken numerisch betrachtet, bei denen  $H(\lambda)$  aus den Generatoren von  $SU_3$  aufgebaut ist. Das Interesse gilt dem Verhalten der Stoßzeit  $\Delta\lambda_S$  im klassischen Grenzfall  $\hbar \rightarrow 0$  (also  $N \rightarrow \infty$  für  $N \times N$ -Matrizen). Verhält sich die Stoßzeit wie  $\Delta\lambda_S \sim N^{-\nu}$  mit positivem  $\nu$ , dann ergibt sich eine Möglichkeit, die Universalität der Spektralfluktuationen für ein einziges klassisches System zu zeigen, da in diesem Fall der Parameterbereich von  $\lambda$ , über den gemittelt werden muß, um die universellen Fluktuationen zu finden, im klassischen Limes auf einen Punkt zusammenzieht. Bei endlichem  $\hbar$  unterscheiden sich die Systeme, über die gemittelt wurde, dann nur um Beiträge der Größenordnung  $\hbar^{f\nu}$  ( $f$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade). Ein einfaches Argument liefert den Exponenten  $\nu = \frac{1}{2}$  – dieses Argument ist jedoch zu schwach, um die Annahme eines universellen Exponenten  $\nu$  zu rechtfertigen. Tatsächlich weichen die numerisch gewonnenen Exponenten  $\nu$  von dieser Vorhersage ab, wobei die numerisch gewonnenen Exponenten größer sind als  $\frac{1}{2}$  und einen schnelleren Abfall der Stoßzeit im klassischen Grenzfall liefern.

---

Pechukas-Yukawa-Gas, bei denen dieses Gleichgewicht nicht erreicht wird. Besondere Anfangsbedingungen, die nicht zu einer Äquilibration führen, gibt es auch für ein gewöhnliches Gas aus Kugeln mit festem Radius in einem Kastenbehälter.

## 6.1 Signaturen von Chaos und Integrität

### 6.1.1 Zwei Beispiele für Dynamiken von $SU_3$ -Observablen

Im folgenden werden beispielhaft zwei Hamilton-Operatoren

$$\begin{aligned} H_1 &= \hbar T_3 + 3\hbar^2 (S_{12}^2 + S_{21}^2) + 15\hbar^2 (S_{13}S_{32} + S_{23}S_{31}) \\ H_2 &= \sin(100 \hbar T_3) + \frac{\hbar}{2} (S_{12}^2 + S_{21}^2) + 100\hbar^2 (S_{13}S_{32} + S_{23}S_{31}) \end{aligned} \quad (6.1)$$

untersucht (mit  $\hbar = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ). Beide Hamilton-Operatoren vertauschen mit der Hyperladung

$$[H_i, Y] = 0 \quad i = 1, 2. \quad (6.2)$$

Alle quantenmechanischen Untersuchungen werden daher in einem Multiplett der Hyperladung  $Y$  ausgeführt.

Der Hamilton-Operator  $H_1$  ähnelt dem des Lipkin-Modells (2.17). Es ist einer der einfachsten Hamilton-Operatoren, deren Niveauabstandsverteilung eine starke Abhängigkeit von der irreduziblen Darstellung zeigt. Solche Hamilton-Operatoren, die quadratisch von den Leiteroperatoren  $S_{kl}$  abhängen, können im Prinzip mit Drei-Niveau-Atomen in einem Resonator verwirklicht werden, wenn die Atome mit einer gegenüber den Atomniveaueübergängen verstimmt Mode des elektromagnetischen Feldes gekoppelt sind.

Der andere Hamilton-Operator kann wegen kaum ein physikalisches System beschreiben. Er zeigt jedoch in den irreduziblen Darstellungen, die einen integralen klassischen Grenzfall haben ( $\lambda_1 = 0$  oder  $\lambda_2 = 0$ ) eine Poisson-Verteilung der Niveauabstände und verdeutlicht daher sehr schön das Eintreten von Niveauabstoßung, sobald der klassische Grenzfall nicht-integral wird. Eine Poisson-Verteilung kann im integralen Fall hier nicht erwartet werden, da sie nur für Systeme mit mindestens zwei Freiheitsgraden generisch ist, während hier (nach Restriktion auf  $Y$ -Multipletts) nur ein Freiheitsgrad vorliegt.<sup>4</sup>

Im klassischen Grenzfall geht  $\hbar = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$  nach null, während der Parameter

$$q = \hbar \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (6.3)$$

mit

$$0 \leq q \leq 1 \quad (6.4)$$

---

<sup>4</sup> Das Poisson-Verhalten wird für  $H_2$  durch den Sinus erzeugt: Die Funktion  $\sin kn$  erzeugt für  $n = 1, 2, \dots$  eine (sehr schlechte) Reihe von zufälligen Zahlen, wenn  $k$  kein rationales Vielfaches von  $\pi$  und  $k \gg \pi$  ist.

konstant gehalten wird. In den Fällen  $q = 0$  und  $q = 1$  sind die Darstellungen entartet und führen auf einen vierdimensionalen Phasenraum, während alle anderen Werte von  $q$  zu einem sechsdimensionalen Phasenraum führen. Die Dynamik des klassischen Grenzfalles wird durch die Hamilton-Funktionen

$$\begin{aligned} H_1^{kl} &= t_3 + 3(s_{12}^2 + s_{21}^2) + 15(s_{13}s_{32} + s_{23}s_{31}) \\ H_2^{kl} &= \sin(100 t_3) + \frac{1}{2}(s_{12}^2 + s_{21}^2) + 100(s_{13}s_{32} + s_{23}s_{31}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

beschrieben, die in dieser Form unabhängig davon erscheinen, in welchen irreduziblen Darstellungen der klassische Grenzfall vollzogen wurde. Die klassischen Observablen  $s_{kl}$  sind jedoch nicht unabhängig voneinander. Die Werte der zwei Casimir-Funktionen  $c_2 = \sum_{k,l=1}^3 s_{kl}s_{lk}$  und  $c_3 = \sum_{k,l,j=1}^3 s_{kl}s_{lj}s_{jk}$  sind durch den Parameter  $q$  festgelegt.

### 6.1.2 Quantenchaos in verschiedenen irreduziblen Darstellungen

Für die numerischen Untersuchungen der Niveauabstandsverteilung wurde das  $Y$ -Multipllett mit dem Eigenwert  $Y = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{3}$  im Hilbert-Raum der  $[\lambda_1; \lambda_2]$ -Darstellung verwendet. Die Dimension dieses Unterraums ist

$$d = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1). \quad (6.6)$$

Für  $H_1$  wurden nur die Eigenwerte im Bereich  $-2.0 \leq E \leq 0.5$  berücksichtigt, da sich in diesem Teil des Spektrums die quantenmechanischen Signaturen von Chaos am deutlichsten zeigen.<sup>5</sup> Für den zweiten Hamilton-Operator mußte der Energiebereich nicht eingeschränkt werden. Alle Energiespektren wurden zunächst entfaltet, so daß der mittlere Niveauabstand eins beträgt.

Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die Niveauabstandsverteilung  $P(s)$  und das Integral

$$N(s) = \int_0^s ds' P(s'). \quad (6.7)$$

Die dünn eingezeichneten Kurven zeigen die Niveauabstandsverteilungen der Zufallmatrixtheorie (GOE)

$$P^{(GOE)}(s) = \frac{s\pi}{2} \exp\left(-s^2 \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.8)$$

und für ein vollkommen unkorreliertes Spektrum (Poisson).

<sup>5</sup> Bei den Energieextrema befindet sich je ein elliptischer Fixpunkt, in dessen Umgebung es im allgemeinen noch KAM-Tori gibt. Das Chaos ist also bei den Energieextrema im allgemeinen nicht voll ausgebildet, und die Signaturen im Spektrum sind schwächer.